

УДАР ШАРОВ

Цель работы: проверить выполнение закона сохранения импульса при упругом и неупругом ударе шаров;

Приборы и принадлежности: лабораторная установка «Упругое и неупругое соударение шаров»; комплект шаров; вертикальная линейка; транспортир; электронный секундомер.

Объект измерений: углы отклонения до и после удара; длительность удара.

Средства измерений: секундомер; транспортир.

Теоретическая часть

Ударом называется изменение состояния тела вследствие кратковременного взаимодействия его с другим телом. Задача о движении системы тел в общем случае решается методами динамики. Для составления уравнения движения необходимо задать силы, действующие в системе. Однако в ряде случаев конечное состояние системы можно определить при помощи законов сохранения. В этих случаях нет необходимости знать все детали взаимодействия.

Закон сохранения импульса: в замкнутой системе тел полный импульс с течением времени не изменяется. Происходит лишь обмен импульсами между телами системы. Из определения центра масс следует, что импульс системы материальных точек определяется скоростью движения ее центра масс \vec{v}_c :

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = m\vec{v}_c, \quad (1)$$

поэтому постоянство импульса приводит к неизменности скорости центра масс.

На практике закон сохранения импульса применяется и в незамкнутых системах в следующих случаях.

1. Внешние силы малы и действуют короткое время, так что изменением импульса системы за время взаимодействия можно пренебречь;

2. Равна нулю проекция внешних сил на какое-либо направление. В этом случае сохраняется лишь проекция импульса на это направление.

Закон сохранения механической энергии. Мерой изменения и превращения энергии в механике является работа. Если в системе действуют неконсервативные силы (силы трения, неупругой деформации), то происходит превращение части механической энергии во внутреннюю. Работа внешних сил характеризует обмен энергией с другими системами.

Механическая энергия системы будет сохраняться, если отсутствуют диссипативные процессы (равна нулю работа неконсервативных сил), а также равна нулю работа внешних сил.

Кинетическая энергия системы. Пусть задана система материальных точек с массами m_i , движущимися со скоростями v_i в некоторой системе отсчета (ее называют лабораторной системой). Согласно теореме Кенига кинетическая энергия системы может быть разложена на две составляющие:

$$T = T_c + T_0. \quad (2)$$

Первое слагаемое – это кинетическая энергия центра масс:

$$T_c = \frac{mv_c^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad (3)$$

где m – полная масса системы, v_c – скорость ее центра масс

Второе слагаемое связано с движением частей системы относительно центра масс и называется энергией относительного движения:

$$T_0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{0i}^2}{2} \quad (4)$$

где $\vec{v}_{0i} = \vec{v}_i - \vec{v}_c$ – скорость движения точек относительно центра масс (ее называют скоростью в системе центра масс).

В замкнутых системах вследствие сохранения импульса системы величина T_c остается неизменной. Изменения при взаимодействии испытывает лишь кинетическая энергия относительного движения T_0 .

Взаимодействия при ударе. Рассмотрим подробнее процесс удара. В первой фазе удара силы деформации уравнивают

скорости тел. Кинетическая энергия относительного движения преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации и частично – в энергию молекулярного движения. Во второй фазе форма тел частично восстанавливается, и потенциальная энергия вновь превращается в кинетическую (тела разлетаются).

Если деформации тел – абсолютно упругие (форма тел восстанавливается полностью), потери механической энергии не происходит. При абсолютно неупругом ударе, напротив, отсутствует потенциальная энергия деформации, вся энергия относительного движения превращается во внутреннюю, фаза восстановления отсутствует.

Изменение импульса каждого тела за время dt в соответствии со вторым законом Ньютона равно:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (5)$$

Тогда полное изменение импульса тела за время удара t_0 равно:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \int_0^{t_0} F(t) dt. \quad (6)$$

В уравнении (6) сила должна быть задана как функция времени. Используя понятие средней (по времени удара) силы:

$$\langle F \rangle_t = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} F(t) dt,$$

можно записать:

$$\Delta p = \langle F \rangle_t \cdot t_0. \quad (7)$$

Таким образом, средняя сила удара связана со временем удара простым соотношением (7). В процессе удара сила является переменной величиной, сложным образом зависящей от деформаций тел. Если предельно упростить задачу и считать, что столкновение происходит через пружину с постоянной жесткостью (т.е. предположить линейную зависимость между силой и деформацией), то время столкновения будет равно половине периода колебаний тела на пружине, т.е. не будет зависеть от скоростей тел.

Удар шаров. Рассмотрим задачу об определении скоростей шаров после центрального удара, при котором взаимодействие направлено по линии их движения (рис.1).

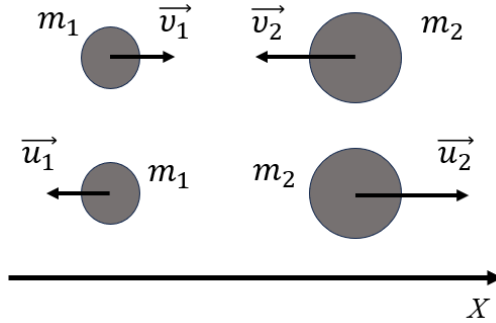


Рис. 1. Упругий удар шаров

При абсолютно упругом ударе система замкнута и отсутствуют неупругие деформации. Поэтому выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Сравнивая состояния до и после удара, можно записать законы сохранения импульса (в векторном виде и в проекциях на ось OX) и энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$OX: m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (8)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Решение этой системы уравнений позволяет вычислить скорости тел после удара.

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}.$$

При абсолютно неупругом ударе механическая энергия не сохраняется. Однако при этом тела не разлетаются и $u_1 = u_2 = u$, рис. 2.

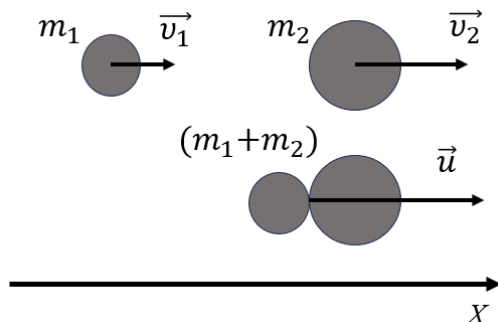


Рис. 2. Неупругий удар шаров

Закон сохранения импульса для неупругого удара в проекциях на ось OX :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \quad (10)$$

Скорость тел после удара равна:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Для решения задачи о *частично упругом ударе* необходимо знать потери энергии, которые следует учесть соответствующим уравнением. Уравнение должно учитывать долю теряемой энергии.

Удар обычных неупругих тел соответствует промежуточному случаю между идеально упругим и полностью неупругим ударами. Такому удару аналогичен удар двух шаров через неупругую пружину. Пружина, сжавшись за первую половину времени удара до некоторой величины, не примет своих первоначальных размеров после удара. Часть потенциальной энергии сжатия пружины перейдет в тепло и не будет обращена в кинетическую энергию. В этом случае применять закон сохранения механической энергии нельзя.

При неупругом ударе шаров величины относительных скоростей до и после удара находятся в постоянном отношении. Такой

удар характеризуют коэффициентом ε_v восстановления относительной скорости после удара.

Коэффициентом восстановления относительной скорости называют отношение относительной скорости двух шаров до удара к относительной скорости шаров после удара:

$$\varepsilon_v = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}. \quad (12)$$

С некоторой степенью точности можно считать, что величина ε_v постоянна и зависит только от материала соударяющихся шаров. Коэффициент восстановления всегда меньше единицы. При абсолютно упругом ударе $\varepsilon_v = 1$, при абсолютно неупругом ударе $\varepsilon_v = 0$.

Методика проведения измерений и описание установки

Внешний вид лабораторной установки «Упругое и неупругое соударение шаров» представлен на рис. 3.

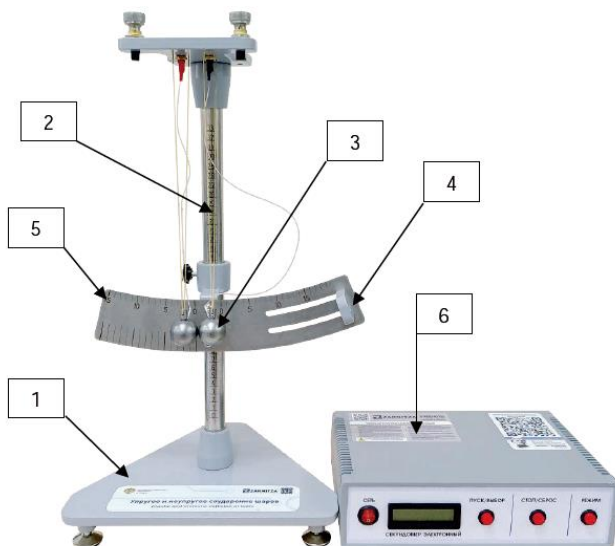


Рис. 3. Лабораторная установка: 1 – основание, 2 – стойка; 3 – шары; 4 – электромагнит; 5 – шкала; 6 – блок управления

К основанию 1 прикреплена стойка 2. Шары 3 прикреплены с помощью клемм верхнего кронштейна. Электромагнит 4 служит для удержания одного из шаров в отклоненном положении. Электромагнит 4 и клеммы верхнего кронштейна подключены к блоку управления 6. По таймеру блока управления определяется время соударения шаров. Время соударения отображается в микросекундах (мкс). Углы отклонения шаров определяют по шкале транспорта 5.

Отведем один из шаров (например, правый) на некоторый угол α_1 и отпустим его без начальной скорости. Отклоненный шар будет двигаться вниз, при этом его потенциальная энергия перейдет в кинетическую. Столкновение со вторым шаром произойдет в тот момент, когда нить первого шара установится в вертикальном положении. По закону сохранения механической энергии (рис. 4):

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad (13)$$

где m_1 – масса первого (правого) шара, g – ускорение свободного падения, h – высота шара в отведенном положении относительно нижней точки траектории, v_1 – скорость первого шара в нижней точке перед соударением со вторым.

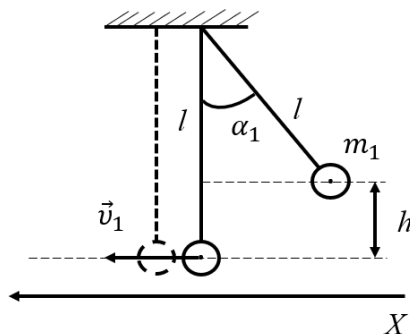


Рис. 4. Графическое представление закона сохранения энергии

Из рис.4 видно, что:

$$h = l(1 - \cos \alpha_1) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}, \quad (14)$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести шара, α_1 – угол начального отклонения нити.

Подставляя (14) в (13) и преобразуя уравнение, найдем выражение для скорости через угол начального отклонения:

$$v_1 = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}. \quad (15)$$

Если удар происходит достаточно быстро, так что нити во время удара не успевают отклониться на заметный угол, то в направлении горизонтальной оси X не возникает внешних сил и выполняется закон сохранения импульса. После удара шары получают скорости u_1 и u_2 и отклоняют нити на максимальные углы β_1 и β_2 . Для скоростей u_1 и u_2 получаем аналогичные соотношения:

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta_1}{2}; \quad (16)$$

$$u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta_2}{2}. \quad (17)$$

Для проверки выполнения закона сохранения импульса вводят коэффициент восстановления скорости ε_v при соударении тел. Учитывая, что второй шар до удара покоится и проецируем скорости на горизонтальную ось, получаем выражение для ε_v :

$$\varepsilon_v = \frac{u_2 - u_1}{v_1} = \frac{\sin \frac{\beta_1}{2} + \sin \frac{\beta_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}}. \quad (18)$$

Кроме коэффициента восстановления скорости соударение тел характеризуется коэффициентом ε_W восстановления энергии, равным отношению кинетической энергии тел после удара к их кинетической энергии до удара. Учитывая, что массы шаров одинаковы $m_1 = m_2$ и второй шар до удара покоится, получаем следующее выражение для ε_W :

$$\varepsilon_W = \frac{\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\beta_1}{2} + \sin^2 \frac{\beta_2}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}}. \quad (19)$$

Если известна длительность удара t , то из второго закона Ньютона по изменению импульса одного из шаров (например, левого) можно определить среднюю силу взаимодействия между шарами:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{m_2 \vec{u}_2 - m_2 \vec{v}_2}{t}. \quad (19)$$

При $v_2 = 0$ и с учетом (17) получаем уравнение для $\langle F \rangle$ в проекция на горизонтальную ось:

$$\langle F \rangle = \frac{m_2 u_2}{t} = \frac{2m_2 \sqrt{gl} \sin \frac{\beta_2}{2}}{t}, \quad (20)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Порядок выполнения работы

1. **Проверка центровки шаров.** Перед проведением измерений проверить визуально центровку шаров. Убедиться, что центры шаров находятся на одной горизонтальной линии, а нити, на которых подвешены шары расположены вертикально относительно начала шкалы транспорта, рис. 5.

2. **Определение длины нити.** С помощью линейки определить длину нити, на которой подвешены шары, рис. 6.

3. **Подготовка блока управления к работе.** Блок управления показан на рис. 7. После включения кнопки «сеть», нажать несколько раз кнопку «режим», выбрать режим № 7, нажать кнопку «пуск/выбор». Блок управления готов к работе.

4. **Определение начального угла отклонения правого шара.** Отведите правый шар (шар № 1) и зафиксируйте его с помощью электромагнита. Определите начальный угол α_1 отклонения этого шара по транспорту, рис. 8.

5. **Определение времени соударения шаров.** Нажмите кнопку «пуск/выбор», при этом отключится напряжение электромагнита и произойдет удар шаров. По таймеру блока управления определите время соударения шаров, рис. 7. По окончании измерения нажать кнопку «стоп/сброс», результаты обнуляются и прибор готов к проведению нового опыта.

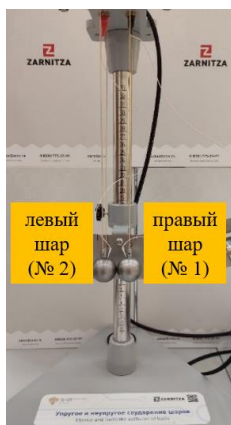


Рис. 5. Центровка шаров

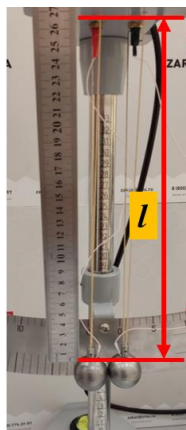


Рис. 6. Длина нити



Рис. 7. Блок управления

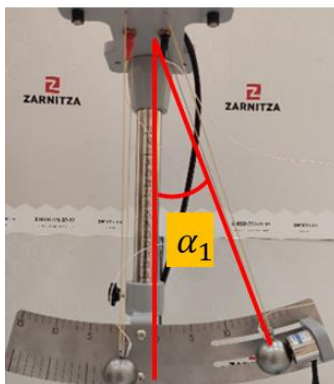


Рис. 8. Определение угла отклонения α_1 правого шара

6. **Определение углов отклонения левого и правого шаров после удара.** Эксперимент проходит быстро и перед измерением необходимо сосредоточиться и зафиксировать после удара визуально угол отклонения нити с шаром β_1 (рис. 9) и угол отклонения β_2 (рис. 10) и определить их значения по транспортиру.



Рис. 9. Угол β_1

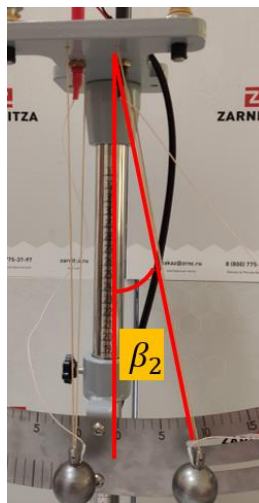


Рис. 10. Угол β_2

7. Проведите пять опытов по соударению шаров. В каждом опыте определите углы отклонения β_1 и β_2 , а также длительность соударения шаров. Зафиксируйте все экспериментальные данные в табл.1.

Таблица 1

Экспериментальные данные

№ опыта	1	2	3	4	5
$\beta_1, ^\circ$					
$\beta_2, ^\circ$					
$t, \text{мкс}$					

Обработка результатов измерений

1. Заполните табл. 2 с постоянными величинами в данном эксперименте.

Таблица 2

Постоянные величины

$l =$	м	$m =$	кг	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
-------	---	-------	----	--------------------------

2. Провести вычисления начальной скорости шара № 1 по формуле (15). Зафиксировать эти данные в табл. 3.

Таблица 3

Вычисление начальной скорости шара № 1

α_1	$\sin \frac{\alpha_1}{2}$	$\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$	$v_1, \text{ м/с}$

3. Провести вычисления скорости после удара шара № 1 по формуле (16). Среднее значение квадрата синуса определить как среднее арифметическое. Зафиксировать эти данные в табл. 4.

Таблица 4

Вычисление скорости шара № 2 после удара

№ опыта	$\sin \frac{\beta_1}{2}$	$\sin^2 \frac{\beta_1}{2}$	$\langle \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \rangle$	$u_1, \text{ м/с}$
1				
...				

4. Провести вычисления скорости после удара шара № 2 по формуле (17). Среднее значение квадрата синуса определить как среднее арифметическое. Зафиксировать эти данные в табл. 5.

Таблица 5

Вычисление скорости шара № 2 после удара

№ опыта	$\sin \frac{\beta_2}{2}$	$\sin^2 \frac{\beta_2}{2}$	$\langle \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \rangle$	$u_2, \text{ м/с}$
1				
...				

5. Проверка выполнения закона сохранения импульса. Вычислить по формуле (18) коэффициент восстановления скорости шаров. Представить полученный результат в процентах.

6. Проверка закона сохранения энергии. Вычислить по формуле (19) коэффициент восстановления энергии. Представить полученный результат в процентах.

7. Определение средней силы взаимодействия между шарами.

7.1. По данным табл. 1 вычислить среднее время соударения шаров как среднее арифметическое:

$$\langle t \rangle = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}. \quad (21)$$

7.2. На основании формулы (20) и данных табл. 5 вычислить среднюю силу взаимодействия при ударе шаров:

$$\langle F \rangle = \frac{m_2 u_2}{\langle t \rangle}. \quad (22)$$

7.3. Вычислить относительную погрешность определения средней силы удара. Частной производной от синуса пренебрегаем в силу его малого значения:

$$\delta_F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{2g} + \frac{\Delta l}{2l} + \frac{\Delta t}{\langle t \rangle}. \quad (23)$$

Абсолютные погрешности $\Delta m, \Delta g, \Delta l$ определить используя правило определения погрешностей постоянных величин.

Абсолютную погрешность Δt определить как погрешность цифрового прибора по шкале электронного секундомера.

7.4. Вычислить абсолютную погрешность средней силы взаимодействия шаров при ударе:

$$\Delta F = \delta_F \cdot \langle F \rangle. \quad (24)$$

7.5. Записать окончательный результат в следующем виде:

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F, \text{ ед. изм.} \quad (24)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары шаров? В чем заключаются особенности упругого

- удара? Что такое центральный удар шаров? Приведите примеры.
2. Дать определение закона сохранения импульса. В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
 3. Дать определение закона сохранения механической энергии. Как энергия связана с работой?
 4. Сформулируйте условия выполнения законов сохранения в незамкнутых системах. Приведите примеры.
 5. Опишите экспериментальную установку и как с ее помощью измеряют скорости шаров до и после удара?
 6. Показать вывод формулы скорости для шара № 1 и шара № 2 после удара.
 7. Запишите закон сохранения импульса для упругого и неупругого ударов шаров. Какие физические законы выполняются при этих ударах?
 8. Получите уравнение для коэффициента восстановления скорости шаров после удара.
 9. Запишите закон сохранения кинетической энергии для упругого и неупругого ударов шаров. Получите уравнение для коэффициента восстановления энергии.
 10. Как в данной лабораторной работе определяют среднюю силу взаимодействия шаров при ударе?

Рекомендуемая литература

1. Физика: конспект лекций по общей физике для студ. спец. ИУИТ, ИСУТЭ, ИЭФ, ИТТОП, ИКБ и вечернего факультета. Ч.1 / С.М. Кокин; МИИТ. Каф. Физика-2.М.: МИИТ, 2010. - 244 с.
<http://library.mii.ru/bookscatalog/upos/03-19701.pdf>
Лекция № 4: вопрос 4.2.2 (стр.61-63);
Лекция № 5: вопрос 5.2.1 (стр.70-71); вопрос 5.2.3 (стр. 75-77).
2. Савельев И. В. Курс общей физики: учебное пособие для вуза: в 5 томах / И. В. Савельев. — 6-е изд. стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — Т. 1: Механика. - 340 с.
https://vk.com/doc16214643_672374826?hash=zki0JriRZ6cMFQ1QwGSR3NxxFg1nyuL03JtxO4vbpSL&dl=L5wABmE

[zxTASKehhgHcM8OdB0ThL5OjCkvuAbEXWa4w&api=1&no_preview=1](#)

§ 3.1 (стр.83-84); § 3.2 (стр.84-86); § 3.4 (стр.92-96); § 3.7 (стр.110-112); § 3.8 (стр.112-114); § 3.10 (стр.116-119).