

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы: определит момент инерции маятника Обербека.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка «Определение момента инерции маятника Обербека»; комплект грузов; нить; малый и большой шкивы; секундомер; линейка.

Объект измерений: диаметр шкива; время падения груза; фиксированное расстояние, пройденное грузами.

Средства измерений: секундомер; линейка; штангенциркуль.

Теоретическая часть

Вращение твердого тела постоянной массы вокруг неподвижной оси описывается основным уравнением динамики вращательного движения. При заданном значении момента инерции тела J относительно оси вращения это уравнение записывается в виде:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (1)$$

где \vec{M} – суммарный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси вращения, J – момент инерции твердого тела относительно некоторой заданной оси, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Момент силы M относительно точки определяется соотношением:

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}]. \quad (2)$$

где \vec{F} – сила, действующая на тело; \vec{r} – радиус-вектор.

Момент инерции J характеризует меру инертности данного тела при вращательном движении. Чем больше момент инерции тела, тем труднее телу сообщать заданное угловое ускорение.

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции материальных точек, из которых состоит данное тело:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (3)$$

В тех случаях, когда тело имеет сложную геометрическую форму или неоднородно по массе, вычисление момента инерции может быть весьма сложным. В такой ситуации определение момента инерции производится экспериментально.

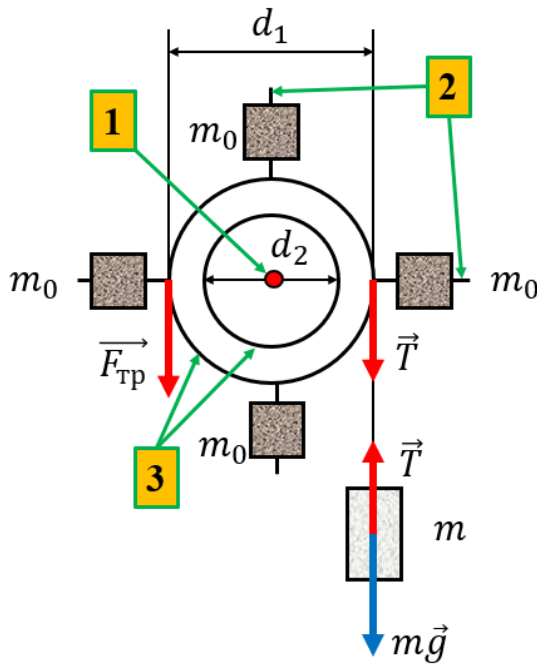


Рис. 1. Маятник Обербека

Рассмотрим схему маятника Обербека, показанную на рис. 1. Прибор Обербека представляет собой крестообразный маховик, закрепленный на горизонтальной оси 1. На стрелки крестовины 2 насажены одинаковые по размерам и массе грузы m_0 положение которых можно изменять. Когда грузы m_0 расположены на стержнях на одинаковых расстояниях до оси вращения, маховик

находится в безразличном равновесии. К маятнику прикреплен шкив **3** с намотанной на него нитью. Возможен выбор диаметра шкива (малый d_1 или большой d_2) при проведении эксперимента. К свободному концу нити прикреплен падающий груз m , массу которого можно менять.

При движении груза m сила натяжения нити создает вращающий момент M_n , который равен:

$$M_n = T \cdot R, \quad (4)$$

где T – сила натяжения нити, $R = \frac{d_i}{2}$ – радиус шкива. Величину T можно определить из второго закона Ньютона (уравнения движения груза):

$$ma = mg - T, \quad (5)$$

где a – ускорение груза, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Из уравнения (5) выражаем силу натяжения нити:

$$T = m(g - a). \quad (6)$$

Используя основной закон динамики вращательного движения, проанализируем вращение маятника Обербека. Кроме указанного момента силы натяжения M_n , на маятник действует также момент сил трения $M_{тр}$. Определение этого момента весьма затруднительно, так как он создается неизвестными по величине силами с неизвестными плечами. Такими силами являются силы трения в подшипниках оси и силы сопротивления воздуха. При невысоких скоростях вращения суммарный момент сил трения можно считать постоянным, а плечом приложения этих сил считать радиус оси вращения r :

$$M_{тр} = r \cdot F_{тр}. \quad (7)$$

Моменты силы трения и силы натяжения нити направлены вдоль оси вращения, но имеют противоположные направления (рис. 1). Таким образом, суммарный момент сил, приложенных к маятнику относительно оси вращения, согласно выражениям (4) и (7) равен:

$$M = M_n - M_{тр}. \quad (8)$$

Угловое ускорение шкива маятника ε и его тангенциальное ускорение a_τ связаны известным соотношением:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R. \quad (9)$$

Считая нить невесомой и нерастяжимой, ускорение груза a можно выразить через расстояние h , которое проходит груз за время t , и $a_\tau = 2h/t^2$. В силу того, что $a_\tau = a$, для углового ускорения получим:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2h}{Rt^2}. \quad (10)$$

Выразим уравнение (8) через кинематические и динамические характеристики.

Вращательный момент M_H с учетом (6) и (10):

$$M_H = m \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) R. \quad (11)$$

Суммарный момент сил (8) с учетом (1), (10) и (11):

$$J \frac{2h}{Rt^2} = m \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) R - M_{\text{тр}}. \quad (12)$$

Последовательно используя в качестве падающих грузов гири с массами m_1 и m_2 и измеряют время t_i прохождения ими фиксированного расстояния h , получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными J и $M_{\text{тр}}$ – моментом инерции и моментом сил трения:

$$\begin{aligned} J \frac{2h}{Rt_1^2} &= m_1 \left(g - \frac{2h}{t_1^2} \right) R - M_{\text{тр}}, \\ J \frac{2h}{Rt_2^2} &= m_2 \left(g - \frac{2h}{t_2^2} \right) R - M_{\text{тр}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключая из этой системы $M_{\text{тр}}$, и проведя несложные математические преобразования, получим расчетную формулу для момента инерции:

$$J \frac{2h}{R} \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} \right) = gR(m_2 - m_1) + 2hR \left(\frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2} \right),$$

$$J(t_1^2 - t_2^2) = \frac{(m_2 - m_1)gR^2 t_1^2 t_2^2}{2h} + 2hR^2(m_1 t_2^2 - m_2 t_1^2). \quad (14)$$

В проводимом эксперименте грузы двигаются с ускорениями, которые много меньше (около двух порядков) ускорения свободного падения. Поэтому второе слагаемое справа в уравнении (14) оказывается много меньше первого и им можно пренебречь:

$$\frac{(m_2 - m_1)gR^2 t_1^2 t_2^2}{2h} \gg 2hR^2(m_1 t_2^2 - m_2 t_1^2). \quad (15)$$

С учетом (15) получаем расчетную формулу для определения момента инерции маятника Обербека:

$$J = \frac{(m_2 - m_1)gR^2 t_1^2 t_2^2}{2h(t_1^2 - t_2^2)}. \quad (16)$$

Методика проведения измерений и описание установки

Внешний вид лабораторной установки «Определение момента инерции маятника Обербека» представлен на рис. 2.

Момент инерции маятника зависит от расположения грузов на крестовинах. Необходимо, чтобы грузы находились на одинаковом расстоянии и маятник был в «безразличном» состоянии.

На установке возможен выбор диаметра шкива (

Установка снабжена набором грузов, номинал которых (в граммах) указан, рис. 4. При выполнении эксперимента на падающее основание размещают несколько грузов указанной массы.

Время падения груза определяют с помощью электронного секундомера, рис. 5.

Высоту падения определяют по линейке 5 (рис. 2). Задают начальное положение падающего груза. Конечное положение за-

дают оптическим датчиком 6 (рис. 2). Расстояние между начальным и конечным положениями равно высоте падения груза, рис. 6.

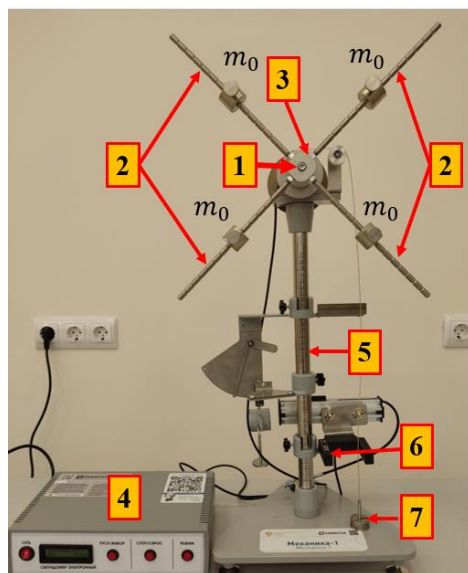


Рис. 2. Лабораторная установка: 1 – горизонтальная ось; 2 – стержни крестовины; 3 – шкив диаметра d ; 4 – секундомер; 5 – линейка; 6 – оптический датчик; 7 – падающее основание



Рис. 3. Шкив маятника с намотанной нитью



Рис. 4. Набор грузов



Рис. 5. Секундомер: 1 – клавишный выключатель питания «Сеть»; 2 – цифровой индикатор показаний времени и выбранного режима; 3 – кнопка выбора режима и начала отсчета «ПУСК/ВЫБОР» 4 – кнопка остановки измерения и сброса показания «СТОП/СБРОС»; 5 – кнопка выбора режима работы секундомера «РЕЖИМ»

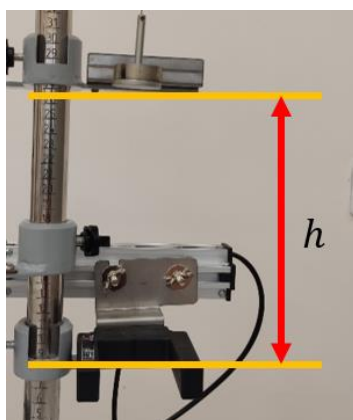


Рис. 6. Высота падения груза

Порядок выполнения работы

1. По указанию преподавателя установить грузы на спицах маятника на одинаковом расстоянии от оси вращения и сбалансировать маятник.

2. Определить с помощью штангенциркуля диаметр шкива d .

3. По указанию преподавателя определить начальное положение груза и выбрать высоту, на которой будет размещён оптический датчик (см. рис. 6). При выполнении всех опытов высота падения h не изменяется.

Рекомендованная высота падения $h \approx 25 \div 28$ см.

4. Для определения момента инерции по формуле (16) необходимо провести два независимых опыта с разными массами падающих грузов и определить время падения.

Массы падающих грузов указаны в таблице «Экспериментальные результаты». Для проведения опыта разместить на основании набор грузов указанной массы.

Таблица

Экспериментальные данные

№ опыта	m_1 , кг	t_{1i} , с	$\langle t_1 \rangle$, с	m_2 , кг	t_{2i} , с	$\langle t_2 \rangle$, с	J_i , кг·м ²
1	0,075			0,100			
2	0,125			0,150			
3	0,175			0,200			

5. Включить секундомер. Нажатием кнопки «РЕЖИМ» перевести секундомер в «Режим 1» и нажать «ПУСК/ВЫБОР», электромагнит зафиксирует начальное положение маятника.

6. Разместить на основании два груза общей массой 0,075 кг.

7. Удерживая рукой крестовину маятника нажать повторно кнопку «ПУСК/ВЫБОР», маятник начнет вращаться. Поворачивая крестовину расположить падающий груз на начальном расстоянии относительно вертикальной линейки. Нажать дважды кнопку «СТОП/СБРОС»: первое нажатие останавливает маятник; второе нажатие обнуляет результат на индикационной шкале секундомера. Маятник готов к проведению эксперимента.

8. Нажать повторно кнопку «ПУСК/ВЫБОР», маятник начнет вращаться. По достижении оптического датчика секундомер останавливает отсчет времени. На цифровом индикаторе будет показано время падения груза при прохождении расстояния h .

9. Выполнить пункты 6-8 для каждой массы падающего груза три раза. Зафиксировать все результаты в таблице.

Обработка результатов измерений

1. Для каждой массы падающего груза определить среднее время падения, как среднее арифметическое.

2. Для опыта с массой $m_1 = 0,125$ кг вычислить абсолютную погрешность времени Δt по трем показаниям времени падения.

2.1. Определить отклонение от среднего:

$$\Delta t_i = |t_i - \langle t \rangle|. \quad (17)$$

2.2. Вычислить среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \Delta t_3^2}{n(n-1)}}, \quad (18)$$

где $n = 3$ – число опытов.

2.3. Вычислить случайную погрешность:

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{p,n} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}, \quad (19)$$

где $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента, который определяется по таблице при следующих условиях: $p = 0,9$; $n = 3$.

2.4. Определить абсолютную погрешность времени:

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{\text{сл}} + \Delta t_{\text{пр}}}, \quad (20)$$

где $\Delta t_{\text{пр}}$ – приборная погрешность электронного секундомера, которая определяется по наименьшему разряду цифровой шкалы.

3. Вычислить радиус шкива R . Абсолютную погрешность ΔR принять равной приборной погрешности штангенциркуля: $\Delta R = \Delta R_{\text{пр}}$.

4. Для каждой пары указанных в таблице масс падающих грузов определить по формуле (16) момент инерции в следующем формате: $xx, xxx \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Ускорение свободного падения: $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Абсолютная погрешность ускорения свободного падения определяется как для постоянных величин, принять ее равной: $\Delta g = 0,005 \text{ м/с}^2$.

5. Найти среднее значение момента инерции маятника как среднее арифметическое:

$$\langle J \rangle = \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3}. \quad (21)$$

6. Определить относительную погрешность момента инерции для опыта № 1:

$$\delta_J = \frac{\Delta J}{\langle J \rangle} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta t}{\langle t_1 \rangle} + 2 \frac{\Delta t}{\langle t_2 \rangle}, \quad (22)$$

где Δh – приборная погрешность линейки.

7. Определить абсолютную погрешность момента инерции:

$$\Delta J = \langle J \rangle \cdot \delta_J. \quad (23)$$

8. Записать окончательный результат в стандартном виде:

$$J = \langle J \rangle \pm \Delta J \text{ ед. изм}$$

9. Сформулировать общие выводы по выполненной работе.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
2. Дайте определение момента сил. Объясните, как найти направление момента сил.

3. Дайте определение углового ускорения. Укажите направление вектора углового ускорения на схеме.
4. Напишите формулу связи углового ускорения маховика с линейным ускорением опускающегося груза.
5. Дайте определение момента инерции твердого тела. Укажите единицу измерения момента инерции в СИ.
6. При каком положении грузов маховик Обербека раскручивается с наибольшим угловым ускорением?
7. Можно ли в данной лабораторной работе изменить момент силы, не меняя массу груза на нити?
8. Почему в том случае, когда грузы ближе к оси вращения, время движения меньше?
9. Выведите расчетную формулу для определения момента инерции.
10. Объясните, как в лабораторной работе определяют абсолютную погрешность времени падения груза. Приведите пошаговый алгоритм вычисления.

Рекомендуемая литература

1. Физика: конспект лекций по общей физике для студ. спец. ИУИТ, ИСУТЭ, ИЭФ, ИТТОП, ИКБ и вечернего факультета. Ч.1 / С.М. Кокин; МИИТ. Каф. Физика-2.М.: МИИТ, 2010. - 244 с.
<http://library.mii.ru/bookscatalog/upos/03-19701.pdf>
 Лекция № 4: вопрос 4.2.2 (стр.61-63);
 Лекция № 5: вопрос 5.2.1 (стр.70-71); вопрос 5.2.3 (стр. 75-77).
2. Савельев И. В. Курс общей физики: учебное пособие для вуза: в 5 томах / И. В. Савельев. — 6-е изд. стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — Т. 1: Механика. - 340 с.
https://vk.com/doc16214643_672374826?hash=zki0JriRZ6cMFQ1QwGSR3NxXFg1nyuL03JtxO4vbpSL&dl=L5wABmEzxTASKehhgHcM8OdB0ThL5OjCkvuAbEXWa4w&api=1&no_preview=1
 § 1.5 (стр.48-53); § 2.4 (стр.57-59); § 5.3 (стр.157-164-37); § 5.4 (стр.164-169); § 5.5 (стр.169-177).