МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Минтранс России

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА
РУТ (МИИТ)

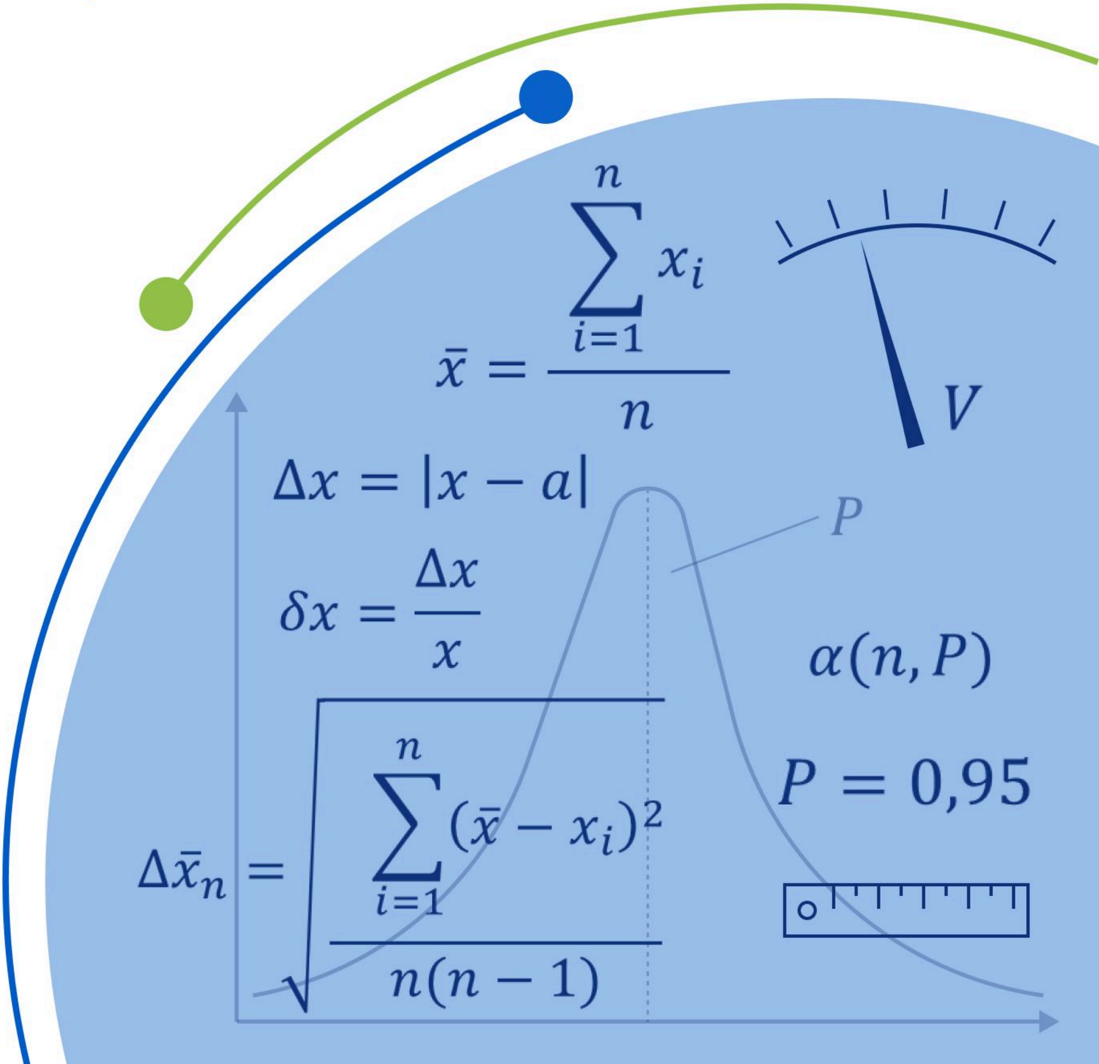
Кафедра «Физика» им. П.Н. Лебедева

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

учебно-методическое пособие

Н.В. Быков, Е.В. Иванова



Министерство транспорта Российской Федерации
Российский университет транспорта

Кафедра «Физика» им. П. Н. Лебедева
Академия базовой подготовки

Н. В. Быков, Е. В. Иванова

Обработка результатов измерений в физическом эксперименте

Под редакцией д-ра техн. наук, доцента Н. В. Быкова

Учебно-методическое пособие

Российский университет транспорта
Москва, 2025

УДК 53.08
ББК 30.10
Б95

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор *С. М. Кокин*
канд. техн. наук, доцент *А. С. Рубан*

Быков, Н. В.

Б95 Обработка результатов измерений в физическом эксперименте : учебно-методическое пособие / Н. В. Быков, Е. В. Иванова; под редакцией Н. В. Быкова. — М.: РУТ (МИИТ), 2025. — 60 с. : ил..

ISBN 978-5-6052148-4-7

В пособии рассмотрены основные понятия и определения теории измерений физических величин, методы определения приборных погрешностей для аналоговых и цифровых приборов, основные методики обработки результатов прямых однократных, прямых многократных и косвенных измерений, а также правила построения графиков по результатам измерений с использованием языка Python. Для лучшего понимания материала приведены многочисленные примеры.

Для студентов младших курсов, обучающихся по всем инженерным направлениям подготовки Российского университета транспорта (МИИТ). Пособие может быть полезно студентам других университетов, в учебном плане которых есть курс физики.

Издание подготовлено в рамках программы повышения качества преподавания фундаментальных дисциплин.

ISBN 978-5-6052148-4-7

9 785605 214847 >

УДК 53.08
ББК 30.10

Оглавление

Предисловие

Изучение физики в транспортном университете способствует:

— созданию теоретической базы и формированию научного мышления: пониманию границ применимости различных физических понятий и законов;

— развитию практических навыков: умению проводить эксперименты, анализировать и обрабатывать их результаты, формулировать выводы.

Учебно-методическое пособие подготовлено на основе рабочей программы дисциплины «Физика» и содержит основные теоретические сведения по теории погрешностей, методике обработки результатов измерений и построению графиков по результатам измерений.

Целью пособия является помощь студентам в успешном выполнении лабораторного практикума по физике. При изложении методик обработки измерений авторы опирались на ГОСТ Р 8.736 — 2011 «Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения» с некоторыми допустимыми упрощениями в контексте учебного эксперимента.

Особенностью изложения материала в пособии является его ориентированность на студентов первого курса с различным уровнем подготовки. В связи с этим ряд математических вопросов, связанных со случайными величинами и их распределением, в основном тексте не рассматривается, а вынесен в приложение.

В приложении также приведены коды двух простых (правильнее сказать, даже упрощённых) программ на языке Python, предназначенных для проверки вычислений, которые проводятся при обработке измерений, а также для построения графиков по результатам измерений.

Авторы выражают благодарность профессору С. М. Кокину за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания, которые способствовали улучшению пособия, а также доценту Н. С. Власовой за большую работу по редактированию рукописи.

Основные обозначения

$\langle x \rangle$	—	среднее значение измеряемой величины;
$t_{p,n}$	—	коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности p и числа измерений n;
Δx	—	абсолютная погрешность измеряемой величины x;
$\Delta x_{\text{пр}}$	—	приборная погрешность измеряемой величины x;
$\Delta x_{\text{сл}}$	—	случайная погрешность измеряемой величины x;
δ_x	—	относительная погрешность измерения величины x (в долях или %);
$\sigma_{\langle x \rangle}$	—	стандартное (среднеквадратическое) отклонение среднего значения величины x.

Введение

Учебный эксперимент в процессе выполнения позволяет решить следующие задачи:

— проверить теоретические положения физики экспериментально;

— познакомиться с приборами;

— приобрести опыт в проведении экспериментов и обработке результатов.

Эксперимент является основным источником информации об окружающем мире. Эксперимент может быть качественным или количественным. Качественный эксперимент показывает наличие или отсутствие определённого эффекта, например, увеличение объёма воздушного шара при увеличении давления внутри него. Количественный эксперимент позволяет определить числовые значения измеряемой физической величины (длины, температуры, силы тока и др.).

Суть проведения количественного эксперимента заключается в сравнении измеряемой величины с определенным эталонным значением, которое присуще измерительному прибору — инструменту, используемому для количественных измерений (линейка, штангенциркуль, термометр, весы и др.).

На первый взгляд, для того чтобы определить значение измеряемой величины, достаточно однократного измерения. Однако если провести несколько измерений подряд, значения измеряемой величины будут отличаться. Это обусловлено как ограниченной точностью измерительного прибора, так и влиянием различных внешних факторов, которые невозможно точно учесть (колебания температуры в помещении, неровности поверхностей и др.). Поэтому для увеличения точности определения физической величины измерения проводят несколько раз. В результате получается набор значений измеренной величины, требующий вычислительной обработки, в основе которой лежат методы математической статистики.

Целью любого эксперимента является определение истинного значения физической величины. Но *определить экспериментально истинное значение невозможно*, так как условия, в которых проводится эксперимент, не могут оставаться неизменными и оказывают влияние на численные значения результатов измерения. Поэтому в результате любого промежуточного измерения получают приближённое значение физической величины с некоторой погрешностью.

Поскольку ни истинное значение, ни погрешность определить точно невозможно, то правильно говорить только об оценке истинного значения и оценке погрешности измерения. Наилучшей оценкой истинного значения измеряемой величины при этом является среднее арифметическое значение результатов многократных измерений. Для определения оценок истинного значения и погрешности применяют теорию обработки результатов измерений, которую иногда называют теорией погрешностей.

1. Основные понятия и определения

1.1 Физические величины и их измерение

> ***Физическая величина*** — это количественная характеристика свойства физического объекта, явления или процесса, которая может быть измерена и выражена числом в сочетании с единицей измерения.

Пример 1.1. Длина, масса, время, температура — это физические величины, потому что их можно выразить с помощью чисел и единиц измерения (метров, килограммов, секунд, градусов).

У каждой физической величины есть:

- символьное (буквенное) обозначение;
- название;
- единица измерения — эта такая единица, которая обозначает меру различных физических величин. У одной и той же величины часто есть несколько единиц измерения, которые можно переводить из одной в другую, например, массу можно измерять в граммах, килограммах, тоннах и т. д.;
- физический смысл — её содержание, связь с реальными явлениями и процессами, которые она описывает;
- формула (или формулы), которая пригодится в расчётах этой величины с использованием других величин.

Примеры физических величин и их описание приведены в табл. 1.

> ***Основные физические величины*** — это такие величины, которые положены в основу международной системы единиц (СИ) и не выражаются через другие величины.

В табл. 2 приведены основные физические величины СИ.

> ***Производные физические величины*** — это такие величины, которые образованы от основных.

Пример 1.2. Квадратный метр (м^2) — площадь (S); метр на секунду в квадрате (м/с^2) — ускорение (a); джоуль (Дж = кг·м^2/с^2) — количество теплоты (Q),

Таблица 1. Примеры физических величин

Символ	Название	Ед. изм.	Физический смысл	Формула
a	ускорение	м/с^2	Быстрота изменения скорости тела	$a = \dfrac{F}{m}$
ρ	плотность	кг/м^3	Масса вещества в единице объёма	$\rho = \dfrac{m}{V}$
Φ_B	магнитный поток	Вб	Количество магнитного поля, которое «проходит» через заданную поверхность	$\Phi_B = BS\cos\alpha$

Таблица 2. Основные физические величины СИ

Физическая величина	Обозначение	Название единицы	Обозначение
Длина	L	метр	м
Масса	m	килограмм	кг
Время	t	секунда	с
Сила тока	I	ампер	А
Температура	T	кельвин	К
Количество вещества	ν	моль	моль
Сила света	J	кандела	кд

работа (A), энергия (E); вольт (В = кг·м^2/с^3·А) — напряжение (U); вебер (Вб = В·с = кг·м^2/с^2·А) — магнитный поток (Φ_B) и др.

Измерение — процедура сравнения данной физической величины с другой величиной, принятой за эталон (единицу физической величины).

Эталон — это специальный прибор или устройство, которое точно задаёт значение какой-либо физической величины (например, длины, массы, времени) и используется как основа для калибровки других измерительных приборов.

Все измерения делятся на прямые и косвенные.

Прямое измерение — это измерение, при котором искомое значение физической величины определяется непосредственно путём сравнения с мерой этой величины.

Пример 1.3. Прямыми измерениями являются измерение длины предмета рулеткой или линейкой, массы тела — рычажными весами, температуры — термометром, напряжения — вольтметром и т. д.

Косвенное измерение — это измерение, при котором значение величины вычисляется по заранее известной формуле при помощи значений, полученных посредством прямых измерений.

Пример 1.4. Косвенными измерениями являются определение объёма тела по прямым измерениям его геометрических размеров, скорости тела — по прямым измерениям пройденного расстояния и времени; удельного электрического сопротивления проводника — по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения и т. д.

Средства измерения — это технические средства, обладающие нормированными метрологическими свойствами, которые применяются при выполнении измерений.

К средствам измерения относят:

- меры (гири — мера массы; измерительный резистор — мера электрического сопротивления и др.);
- измерительные приборы (амперметры, вольтметры, термометры и др.);
- измерительные установки и системы (комплексы приборов, работающие вместе);
- рабочие средства измерения (например, электросчётчик, термопара и др.).

1.2 Погрешности измерения

Погрешность измерения — это отклонение измеренного значения величины от её истинного значения.

В качестве оценки истинного значения будем принимать среднее значение измеренной величины.

Среднее значение измеряемой величины — это среднее арифметическое значений, найденных в многократных повторных измерениях.

Пример 1.5. В результате трёх измерений комнатной температуры термометром получились значения: $T_1 = 24{,}1\ ^\circ C$, $T_2 = 23{,}9\ ^\circ C$ и $T_3 = 24{,}3\ ^\circ C$. Среднее значение температуры тогда будет равно:

$$\langle T\rangle = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} = \frac{24{,}1 + 23{,}9 + 24{,}3}{3} = \frac{72{,}3}{3} = 24{,}1\ ^\circ\text{C}.$$

Обработка результатов измерений — это процесс установления среднего значения измеряемой величины и оценки погрешности полученного результата измерения.

По способу выражения погрешности делятся на абсолютные и относительные.

Абсолютная погрешность Δx — это модуль разности между истинным (или его оценкой — средним значением $\langle x \rangle$) и измеренным в конкретном опыте значением x физической величины:

$$\boxed{\Delta x = |\langle x \rangle - x|}. \tag{1}$$

Абсолютная погрешность всегда положительна.

Пример 1.6. Для предыдущего примера вычислим абсолютные погрешности измерения температуры. Поскольку за оценку истинного значения принимается среднее, то для каждого из трёх измерений абсолютные погрешности равны соответственно:

$$\Delta T_1 = |\langle T \rangle - T_1| = |24{,}1 - 24{,}1| = 0{,}0\ ^\circ\mathrm{C},$$

$$\Delta T_2 = |\langle T \rangle - T_2| = |24{,}1 - 23{,}9| = 0{,}2\ ^\circ\mathrm{C},$$

$$\Delta T_3 = |\langle T \rangle - T_3| = |24{,}1 - 24{,}3| = |-0{,}2| = 0{,}2\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Относительная погрешность δ_x — это величина, которая показывает, какую долю от среднего значения $\langle x \rangle$ составляет абсолютная погрешность Δx. Относительная погрешность является мерой точности измерения: чем меньше относительная погрешность, тем точнее измерение.

Относительная погрешность выражается в долях или процентах:

$$\boxed{\delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}}; \tag{2}$$

$$\boxed{\delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%}. \tag{3}$$

Пример 1.7. При измерении длины стержня получилось, что среднее значение $\langle L \rangle = 0{,}40$ м, абсолютная погрешность $\Delta L = 0{,}01$ м. Тогда относительная погрешность в долях по формуле (2):

$$\delta_L = \frac{0{,}01}{0{,}40} = 0{,}025;$$

или в процентах по формуле (3):

$$\delta_L = \frac{0{,}01}{0{,}40} \cdot 100\% = 2{,}5\%.$$

Если при той же самой абсолютной погрешности среднее значение длины будет меньше, например, $\langle L \rangle = 0{,}10$ м, то относительная погрешность (в процентах) будет уже больше:

$$\delta_L = \frac{0{,}01}{0{,}10} \cdot 100\% = 10\%.$$

По характеру проявления погрешности подразделяются на случайные, систематические и грубые.

> ***Случайная погрешность*** — погрешность, возникающая случайным образом; её невозможно устранить, но можно оценить.

Случайную погрешность оценивают с помощью методов теории вероятностей и математической статистики.

> ***Систематическая погрешность*** — это составляющая погрешности измерения, которая остаётся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же величины одним и тем же измерительным прибором при одних и тех же условиях.

Систематическую погрешность учитывают введением поправок, после чего результат измерений называют исправленным.

Пример 1.8. При измерении периода колебаний маятника используются часы, которые отстают на 2 секунды за минуту; размеры металлической рулетки изменяются под действием внешней температуры; динамометр, пружина которого растянулась, показывает меньшую силу, чем на самом деле.

При проведении учебных экспериментов обычно выделяют одну систематическую погрешность — *погрешность измерения ручным секундомером* (в том числе с использованием смартфона), обусловленную средним временем реакции человека, которую принимают равной +0,3 с. Другими словами, при проведении измерений времени с помощью ручного секундомера следует из каждого результата измерений вычитать 0,3 с.

> ***Грубая погрешность (промах)*** — это такая погрешность результата отдельного измерения, которая резко отличается от остальных результатов измерений той же величины при тех же условиях.

Результат измерения с грубой погрешностью *исключают из рассмотрения и не используют при дальнейшей математической обработке.*

Пример 1.9. К грубым погрешностям можно отнести: неправильное считывание данных, например, перепутали цифры при записи и вместо 21,5 см записали 12,5 см; неисправность прибора, например, механическое повреждение; неправильное использование прибора, например, считывание не с той шкалы; случайные внешние воздействия, например, прибор сдвинули в момент измерения.

> ***Приборная погрешность*** — это погрешность измерительного прибора (средства измерения), определённая при его испытаниях и занесённая в его паспорт. Эту погрешность можно оценить по шкале прибора или вычислить по формуле.

Каждое средство измерения обладает своей приборной погрешностью, которая может носить как систематический, так и случайный характер.

> ***Итоговый результат измерения*** представляют в стандартном виде:
>
> $$\boxed{x = (\langle x\rangle \pm \Delta x)\ \text{ед. изм. при } \delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\cdot 100\%}, \tag{4}$$
>
> где x — измеряемая физическая величина; $\langle x\rangle$ — среднее значение измеряемой величины; Δx — абсолютная погрешность измерения; δ_x — относительная погрешность измерения.

Пример 1.10. В результате измерения напряжения в бытовой сети получено среднее значение $\langle U\rangle = 227$ В и абсолютная погрешность $\Delta U = 11$ В. Тогда результат измерения записывается в стандартном виде:

$$U = (227 \pm 11)\ \text{В при } \delta_U = 5\%.$$

Существенно, что число 11 не складывается и не вычитается из 227: корректная запись включает именно $\pm$.

1.3 Значащие цифры и разряды

> ***Значащие цифры*** — это все цифры в записи числа, начиная с первой, отличной от нуля, включая нули, расположенные между ними или в конце, если они выражают точность измерения.

Пример 1.11. Отметим значащие цифры в следующем случае:

$$0{,}0\underbrace{241000450}_{\text{значащие}},$$

Как видно, нули слева — незначащие. В случае записи того же числа в форме

$$\underbrace{241000450}_{\text{значащие}} \cdot 10^{-9}$$

все цифры значащие. Иными словами, все ненулевые цифры являются значащими, нули внутри числа — значащие, начальные нули (слева перед ненулевыми цифрами) — незначащие, а конечные нули после ненулевых цифр (справа) — значащие, они показывают точность измерения.

Пример 1.12. Определим число значащих цифр в следующих числах:

- 0,403 — три значащих цифры, величина определена с точностью до тысячных;
- 40,3 — три значащих цифры, величина определена с точностью до десятых;
- 40,300 — пять значащих цифр, величина определена с точностью до тысячных.

> ***Разряд числа*** — это структурный элемент записи числа, являющийся «рабочим местом» цифры в числе (сотни, десятки, единицы, десятые доли и пр.).

Пример 1.13. В записи числа 1,235 первый разряд, соответствующий цифре «1», — единицы, а последний разряд, соответствующий цифре «5», — тысячные доли.

Пример 1.14. Любое число в десятичной системе можно представить в такой записи:

$$3{,}147 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3},$$

где каждая цифра перед соответствующей степенью десяти задаёт разряд, а его «рабочее место» в записи числа определяется степенью десяти: единицы (0), десятые доли (–1), сотые доли (–2), тысячные доли (–3).

1.4 Правила округления погрешностей и средних значений

Погрешность измерения выражают не более чем двумя значащими цифрами.

Правило округления погрешностей:

- если первая значащая цифра в абсолютной погрешности меньше 3, то абсолютную погрешность округляют до двух значащих цифр;
- если первая значащая цифра в абсолютной погрешности больше или равна 3, то абсолютную погрешность округляют до одной значащей цифры;
- погрешность всегда округляется *в большую сторону.*

Правило применяют для округления абсолютной и относительной погрешностей окончательных результатов измерения.

Пример 1.15. Абсолютная погрешность $\Delta x = 0{,}2245$. Первая значащая цифра 2 и она меньше 3, поэтому абсолютную погрешность округляют до двух значащих цифр. По обычным правилам округления нужно было бы написать 0,22, но погрешность округляют в большую сторону, поэтому итоговый результат: $\Delta x = 0{,}23$.

Пример 1.16. Абсолютная погрешность $\Delta x = 0{,}433$. Первая значащая цифра 4 и она больше 3, поэтому абсолютную погрешность округляют до одной значащей цифры в большую сторону. Итоговый результат: $\Delta x = 0{,}5$.

Пример 1.17. Абсолютная погрешность $\Delta x = 103{,}23$. Первая значащая цифра 1 и она меньше 3, поэтому абсолютную погрешность округляют до двух значащих цифр в большую сторону. Итоговый результат: $\Delta x = 110$.

Правило округления среднего значения: среднее значение $\langle x\rangle$ округляют с той же точностью, что и абсолютную погрешность Δx.

Это означает, что *округление $\langle x\rangle$ следует проводить только после вычисления Δx и округления самой погрешности.*

При округлении среднего значения используются обычные правила округления (до ближайшего значения):

- если первая отбрасываемая цифра (следующая за последней оставляемой) больше или равна 5, то последняя из оставляемых цифр увеличивается на единицу (округление с избытком);
- если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя оставляемая цифра остаётся без изменения (округление с недостатком).

Пример 1.18. Среднее значение физической величины $\langle x\rangle = 73{,}548$. Абсолютная погрешность $\Delta x = 0{,}3$. По правилу округления среднее значение округляют до десятых (как и погрешность): $\langle x\rangle = 73{,}5$. Окончательный результат:

$$x = 73{,}5 \pm 0{,}3.$$

Пример 1.19. Среднее значение $\langle x \rangle = 73{,}24$, абсолютная погрешность $\Delta x = 3$. Среднее значение округляют до целых: $\langle x \rangle = 73$. Окончательный результат:

$$x = 73 \pm 3.$$

1.5 Определение погрешностей постоянных величин

В физике при вычислениях используют большое количество постоянных или табличных величин (констант), для которых также можно определить абсолютную погрешность и записать итоговый результат в стандартном виде.

> ***Абсолютная погрешность постоянной величины*** равна половине единицы наименьшего разряда числа.

Пример 1.20. Определим абсолютную и относительную погрешности числа π. Пусть требуется записать число π с точностью два знака после запятой. Тогда среднее значение:

$$\langle \pi \rangle = 3{,}14.$$

Половина единицы наименьшего разряда (в данном случае это сотые доли) определяет абсолютную погрешность определения числа π:

$$\Delta\pi = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_\pi = \frac{\Delta\pi}{\langle \pi \rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}005}{3{,}14} \cdot 100\% = 0{,}1592\% \approx 0{,}16\%.$$

Итоговый результат в стандартном виде:

$$\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005.$$

В данном примере число разрядов в записи среднего значения и погрешности не совпадает, но это не является ошибкой: точность в записи среднего значения и погрешностей должна совпадать для случайных и итоговых погрешностей, которые включают случайные как составляющую.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение физической величины. Приведите примеры физических величин.
2. Что такое основные физические величины? Перечислите их. Что такое производные физические величины?
3. В чем заключается процедура измерения физической величины?
4. В чем заключается отличие прямого измерения физической величины от косвенного?
5. Что такое средства измерения? Какие виды средств измерения Вы знаете?
6. Что называют погрешностью измерения? В чем заключается обработка результатов измерения?
7. Что при обработке результатов измерения принимают за оценку истинного значения измеряемой величины? Как определяют эту оценку?
8. Какие виды погрешностей измерения по способу их выражения существуют?
9. Приведите классификацию погрешностей измерения по характеру их проявления.
10. Как учитывают систематическую погрешность? Как поступают с результатами измерений, содержащими грубую погрешность?
11. Какой стандартный формат представления результата измерения используется при обработке результатов эксперимента?
12. Объясните понятие «значащие цифры». Чем оно отличается от понятия «разряд»? Приведите примеры.
13. Сформулируйте правило округления погрешностей измерения.
14. Сформулируйте правило округления среднего значения результатов измерения.
15. Как оценить погрешность постоянной (табличной) величины?

2. Погрешности измерительных приборов

2.1 Линейки

Приборная погрешность линейки обычно принимается равной половине цены деления шкалы, так как глаз человека может определить положение объекта с точностью не хуже, чем половина расстояния между делениями.

Пример 2.1. На рис. 1 приведена миллиметровая линейка. Цена деления линейки $C = 1$ мм, приборная погрешность $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}5$ мм.

Рис. 1. Измерительная шкала миллиметровой линейки

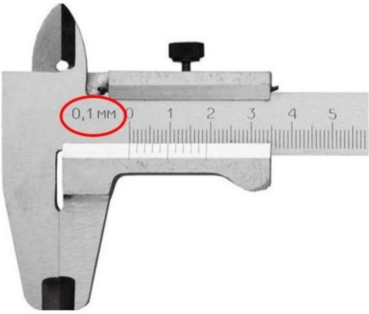
Для чисто приборных погрешностей допустима запись, когда в самой величине и погрешности не совпадают разряды, в которых стоят последние оставленные цифры. Это особенно касается однократных измерений.

Пример 2.2. Измерение линейкой осуществляется с приборной погрешностью, равной половине цены деления, поэтому *при однократном измерении* измеренное значение может получиться только в целых миллиметрах, например:

$$x = (152 \pm 0{,}5) \text{ мм.}$$

2.2 Приборы с нониусной шкалой (штангенциркуль, микрометр)

> ***Нониус*** — вспомогательная шкала, устанавливаемая на различных измерительных приборах и инструментах (штангенциркуль, микрометр и др.), служащая для более точного определения количества долей делений основной шкалы.



(а)

(б)

Рис. 2. Приборные погрешности нониусных приборов:
(а) — штангенциркуль; (б) — микрометр

Для приборов, имеющих нониусную шкалу, за приборную ошибку принимается точность, определяемая нониусом. Приборная погрешность таких приборов обычно указана на рабочей панели прибора.

Пример 2.3. На рис. 2 изображены два прибора с нониусной шкалой — штангенциркуль и микрометр. Их абсолютные приборные погрешности нанесены на самих приборах. У штангенциркуля в данном примере приборная погрешность составляет $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}1$ мм, а у микрометра — $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}01$ мм. В учебных физических лабораториях также применяются штангенциркули с приборной погрешностью 0,02 мм.

Приборная погрешность не округляется, если она указана непосредственно на приборе, как у штангенциркуля или микрометра.

Пример 2.4. При измерении диаметра с помощью микрометра приборная погрешность $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}01$ мм указана на самом приборе и не округляется.

2.3 Аналоговый прибор

> ***Аналоговый прибор*** — это прибор, показания которого являются непрерывной функцией измеряемой величины. Результаты измерения, как правило, отображаются на шкале с помощью стрелки или другого механического индикатора.

Пример 2.5. Примеры аналоговых приборов: механические часы, стрелочные весы, стрелочный манометр, стрелочный вольтметр.

Цена деления аналогового прибора — это изменение измеряемой величины, которому соответствует перемещение указателя на одно деление шкалы.

Класс точности прибора K — это характеристика измерительного прибора, показывающая максимально допустимую относительную погрешность его измерений в процентах.

Приборная погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$ аналогового прибора вычисляется по формуле:

$$\boxed{\Delta x_{\text{пр}} = \frac{K}{100} \cdot X_{\max}}, \tag{5}$$

где K — класс точности прибора; $X_{\max}$ — предел измерения прибора.

Если класс точности не указан, то приборная погрешность принимается равной половине цены наименьшего деления шкалы.

При вычислении приборной погрешности через класс точности *действуют обычные правила округления погрешностей*.

Пример 2.6. Для аналогового вольтметра заданы класс точности $K = 1{,}5$ и предел измерения $U_{\max} = 1{,}5$ В. По формуле (5) получаем величину приборной погрешности:

$$\Delta U = \frac{K \cdot U_{\max}}{100} = \frac{1{,}5}{100} \cdot 1{,}5 = 0{,}0225 \text{ В}.$$

Округляем по правилу округления погрешностей: $\Delta U \approx 0{,}023$ В.

Однопредельный аналоговый прибор имеет только один предел измерения $X_{\max}$.

Многопредельный аналоговый прибор позволяет путём переключения режимов изменять пределы измерения величины $X_{\max 1}$, $X_{\max 2}$, и т.д.

Многопредельные приборы используются, когда необходимо измерять электрические величины в широком диапазоне, при этом обеспечивая достаточную точность на каждом участке шкалы.

Стрелочные приборы устроены так, что их абсолютная погрешность остаётся примерно одинаковой по всей шкале. Это означает, что относительная погрешность будет:

- наибольшей в начале шкалы, где измеряемая величина мала;
- наименьшей в конце шкалы, где измеряемая величина близка к максимальному пределу.

Чтобы снизить погрешность, при измерениях следует выбирать такой предел измерений $X_{\max}$, при котором стрелка прибора отклоняется ближе к концу шкалы.

Многопредельный прибор может иметь:

- одну шкалу для всех пределов измерения. В этом случае необходимо пересчитывать показания прибора в соответствии с выбранным пределом;
- несколько шкал для разных пределов измерения. Тогда важно выбрать правильную шкалу и рассчитать погрешность для данного предела.

Таким образом, правильный выбор предела измерения и корректная интерпретация шкалы прибора позволяют уменьшить ошибки и получить наиболее точные результаты.

При считывании показаний со стрелочного прибора стрелка может остановиться между делениями шкалы, как это показано на рис. 3.

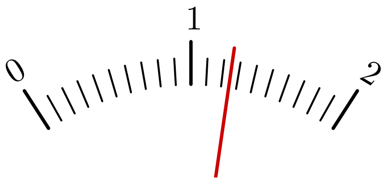


Рис. 3. Положение стрелки на шкале прибора

В таких случаях важно правильно интерпретировать показания, чтобы минимизировать погрешность измерения.

- Когда деления шкалы расположены часто, то нужно округлить до ближайшего деления. Здесь ещё нужно учесть, что абсолютная погрешность прибора должна быть сопоставима с этой ценой деления. В этом случае максимальная возможная ошибка из-за округления составляет половину цены деления шкалы.
- Когда деления шкалы расположены редко, то следует провести визуальную интерполяцию — оценить положение стрелки между метками. В зависимости от ситуации можно оценивать положение стрелки с точностью до половины или четверти деления. Однако следует помнить, что такая оценка может быть субъективной и увеличивать вероятность ошибки. Кроме того, такая интерполяция не должна быть точнее, чем точность цены деления прибора. Например, если соседние отметки на шкале прибора имеют значения 5 А и 10 А, то при интерполяции можно пользоваться только целыми значениями (7 или

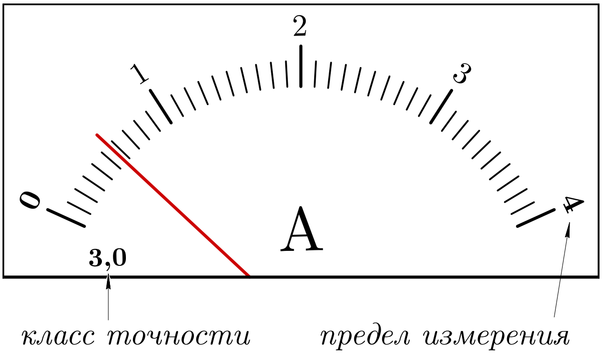


Рис. 4. Шкала амперметра

8 А, но не 7,5 А).

Иногда для повышения точности считывания показаний в стрелочных приборах используется зеркальная шкала. Использование зеркальной шкалы помогает повысить точность измерений, обеспечивая правильное положение наблюдателя при считывании показаний прибора.

> ***Зеркальная шкала*** — это специальная конструкция шкалы в стрелочных измерительных приборах, предназначенная для устранения ошибки параллакса при считывании показаний. Ошибка параллакса возникает, когда наблюдатель смотрит на стрелку под углом, а не строго перпендикулярно, что приводит к искажению показаний.

В приборах с зеркальной шкалой под основной шкалой с делениями размещена узкая зеркальная полоска. Если стрелка прибора и её отражение в зеркале совпадают, то это говорит о правильном положении глаз наблюдателя. В этом случае линия зрения перпендикулярна к плоскости шкалы, что гарантирует точное считывание показаний. Если отражение стрелки видно отдельно от самой стрелки, это сигнализирует о неправильном угле обзора и возможной ошибке измерения.

Пример 2.7. Вычислим приборную погрешность аналогового однопредельного прибора, измерительная панель которого показана на рис. 4. Буква «А» указывает на то, что это амперметр — прибор для измерения силы тока. Предел измерения определяют по наибольшему значению шкалы прибора $I_{\max} = 4$ А. Класс точности $K = 3$ указан слева ниже шкалы прибора.
Вычислим приборную погрешность по формуле (5):

$$\Delta I_{\text{пр}} = \frac{K}{100} \cdot I_{\max} = \frac{3}{100} \cdot 4 = 0{,}12 \text{ А}.$$

Рис. 5. Вольтметр многопредельный с зеркальной шкалой

Пример 2.8. Вычислим приборную погрешность многопредельного прибора. На рис. 5 показан вольтметр, у которого несколько пределов измерения: 75 В, 150 В, 300 В, 500 В. Класс точности прибора $K = 0{,}5$ указан справа ниже шкалы прибора. На каждом пределе измерения будет своё значение приборной погрешности.

Этот прибор соответствует случаю, когда для всех пределов измерения используется одна шкала, на которой нанесён предел измерения $U_{\max} = 150$ В. Эта шкала будет давать непосредственное значение измеряемого напряжения, только если предел измерения выбран тоже 150 В. Если же, например, с помощью переключателя установлен предел измерения $U_{\max} = 300$ В, то тогда считываемое со шкалы напряжение необходимо умножать на 2: если стрелка на шкале показывает 100 В, то реальное измеряемое значение с учётом установленного предела будет 200 В. Аналогично и для других пределов.

Необходимо также обратить особое внимание на начало шкалы прибора. Видно, что если стрелка находится на отметке, меньшей 30 делений шкалы, то деление шкалы очень велико. Это означает, что в этом диапазоне работы прибора измерения проводить не следует, т. к. они будут иметь низкую точность, и нужно установить меньший предел измерения.

Вычислим приборную погрешность по формуле (5) для разных пределов измерения:

- для предела измерений $U_{\max 1} = 75$ В:

$$\Delta U_{\text{пр}1} = \frac{K}{100} \cdot U_{\max 1} = \frac{0{,}5}{100} \cdot 75 = 0{,}375 \approx 0{,}4 \text{ В};$$

Рис. 6. Амперметр без указания класса точности

- для предела измерений $U_{\max 2} = 150$ В:

$$\Delta U_{\text{пр}2} = \frac{K}{100} \cdot U_{\max 2} = \frac{0{,}5}{100} \cdot 150 = 0{,}75 \approx 0{,}8 \text{ В};$$

- для предела измерений $U_{\max 3} = 300$ В:

$$\Delta U_{\text{пр}3} = \frac{K}{100} \cdot U_{\max 3} = \frac{0{,}5}{100} \cdot 300 = 1{,}5 \text{ В}.$$

Как видно, при вычислении погрешностей с использованием класса точности, используются обычные правила округления погрешностей.

Пример 2.9. Рассмотрим определение приборной погрешности, когда не указан класс точности прибора. На рис. 6 показана рабочая панель амперметра без класса точности.

Чтобы вычислить приборную погрешность, сначала определяют цену деления прибора C_A. Для этого предел измерения $X_{\max}$ делят на количество делений шкалы прибора N. Приборную погрешность принимают равной половине цены наименьшего деления шкалы.

Максимальное значение на шкале $I_{\max} = 15$ А, число делений шкалы $N = 30$. Вычислим цену деления и приборную погрешность:

$$C_A = \frac{15}{30} = 0{,}5 \text{ А}, \qquad \Delta I_{\text{пр}} = \frac{C_A}{2} = 0{,}25 \text{ А}.$$

Пример 2.10. Определим приборную погрешность многофункционального прибора (мультиметра), рабочая панель которого показана на рис. 7. Рабочая панель многофункционального прибора состоит из двух половин. В верхней половине приведены шкалы и стрелка для определения показаний прибора. В нижней половине указаны измеряемые величины и пределы измерений. Из рис. 7 видно, что прибор позволяет измерить напряжение (V), силу тока (mA) и сопротивление (kΩ). При этом напряжение он может измерять как при постоянном ($\bar{\text{V}}$), так и при переменном токе ($\tilde{\text{V}}$). Класс точности $K = 4{,}0$ указан слева на верхней информационной панели прибора.

Вычислим приборную погрешность по формуле (5) для разных пределов силы

Рис. 7. Многофункциональный прибор (мультиметр)

тока:

$$I_{\max 1} = 1 \text{ мА} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ А}, \quad \Delta I_{\text{пр}1} = \frac{K}{100} \cdot I_{\max 1} = \frac{4,0}{100} \cdot 1 \text{ мА} = 0,04 \text{ мА},$$

$$I_{\max 2} = 10 \text{ мА} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ А}, \quad \Delta I_{\text{пр}2} = \frac{K}{100} \cdot I_{\max 2} = \frac{4,0}{100} \cdot 10 \text{ мА} = 0,4 \text{ мА}.$$

Вычислим приборную погрешность по формуле (5) для разных пределов напряжения:

$$U_{\max 1} = 2{,}5 \text{ В}, \quad \Delta U_{\text{пр}1} = \frac{K}{100} \cdot U_{\max 1} = \frac{4,0}{100} \cdot 2{,}5 \text{ В} = 0,10 \text{ В},$$

$$U_{\max 2} = 5 \text{ В}, \quad \Delta U_{\text{пр}2} = \frac{K}{100} \cdot U_{\max 2} = \frac{4,0}{100} \cdot 5 \text{ В} = 0,20 \text{ В}.$$

2.4 Цифровой прибор

> ***Цифровой прибор*** — это измерительный прибор, в котором результаты измерения непрерывной величины (напряжения, силы тока, электрического сопротивления и др.) автоматически преобразуются в дискретные сигналы, отображаемые в виде чисел на цифровом индикаторе.

Пример 2.11. Примеры цифровых приборов: электронный штангенциркуль, цифровой термометр, цифровой вольтметр, электронные весы и др.

> ***Цена деления цифрового прибора*** — это единица наименьшего разряда числа в показании цифрового индикатора прибора.

В физических учебных лабораториях обычно используются цифровые приборы, для которых не указан класс точности. Погрешность цифрового измерительного прибора при неизвестном классе точности принимают за единицу наименьшего разряда цифрового индикатора, то есть его *погрешность совпадает с ценой деления.*

Пример 2.12. Рассмотрим определение приборной погрешности цифровых приборов (рис. 8). Рис. 8а показывает индикатор цифрового милливольтметра, который измеряет напряжение с точностью до сотых долей милливольта, поэтому его приборная погрешность определяется этими сотыми долями: $\Delta U_{\text{пр}} = 0{,}01$ мВ. На рис. 8б показан индикатор цифрового термометра, который измеряет температуру с точностью до целых градусов Цельсия (это можно понять по отсутствию на индикаторе точки или запятой, разделяющей целую и дробную часть числа), поэтому его приборная погрешность $\Delta T_{\text{пр}} = 1$ °C.

(а)

(б)

Рис. 8. Шкалы цифровых милливольтметра (а) и термометра (б)

Контрольные вопросы

1. Как определяется приборная погрешность линейки?
2. Что называется нониусом?

3. Как определяют погрешность приборов с нониусной шкалой, например, штангенциркуля и микрометра?
4. Что называется классом точности прибора?
5. Как определяется приборная погрешность аналогового прибора с указанным классом точности?
6. В чем отличие однопредельного аналогового прибора от многопредельного?
7. Как правильно считывать показания многопредельного аналогового прибора, имеющего одну шкалу для всех пределов измерения?
8. Для чего используется зеркальная шкала?
9. Как определить погрешность аналогового прибора, если его класс точности не указан?
10. В чем заключается отличие аналогового измерительного прибора от цифрового?
11. Как определить погрешность цифрового прибора, если его класс точности не указан?

3. Методика обработки результатов измерений

3.1 Обработка прямых однократных измерений

Пусть измерение физической величины проводят один раз с помощью прибора. Тогда точность измерения задаётся только приборной погрешностью, то есть абсолютная погрешность измеряемой физической величины равна приборной погрешности.

Пример 3.1. Пусть требуется произвести однократное измерение массы с помощью цифровых весов. На рис. 9 показаны два варианта показаний цифровой шкалы прибора: перед измерением и в процессе измерения массы груза.

Из рис. 9а видно, что приборная погрешность равна $\Delta m_{\text{пр}} = 0{,}01$ г, потому что она совпадает с ценой деления для цифрового прибора без указанного класса точности.

По показаниям прибора (рис. 9б) определим значение массы:

$$\langle m \rangle = 49{,}34 \text{ г} = 49{,}34 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Абсолютная погрешность измерения массы в этом случае совпадает с приборной:

$$\Delta m = \Delta m_{\text{пр}} = 0{,}01 \text{ г} = 0{,}01 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

(а)

(б)

Рис. 9. Показания цифровых весов: (а) — без груза; (б) — с грузом

Относительная погрешность вычисляется по формуле (3):

$$\delta_m = \frac{\Delta m}{\langle m \rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}01}{49{,}34} \cdot 100\% \approx 0{,}021\%.$$

Итоговый результат измерения в стандартном виде в соответствии с формулой (4):

$$m = (49{,}34 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3} \text{ кг при } \delta_m = 0{,}021 \text{ \%}.$$

Пример 3.2. Пусть требуется произвести однократное измерение высоты цилиндра с помощью штангенциркуля (рис. 10). Приборная погрешность: $\Delta h_{\text{пр}} = 0{,}1$ мм. Абсолютная погрешность совпадает с приборной: $\Delta h = \Delta h_{\text{пр}} = 0{,}1$ мм.

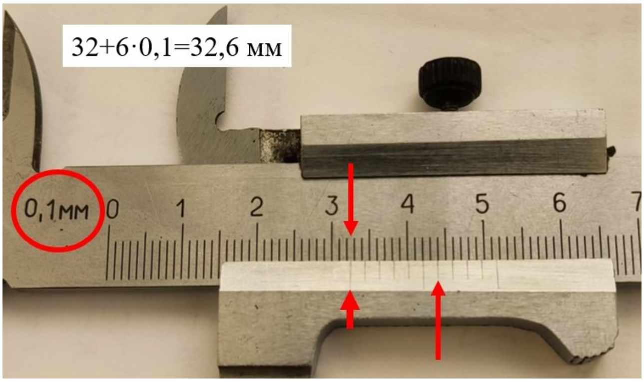


Рис. 10. Определение высоты цилиндра с помощью штангенциркуля

Измеренное значение высоты:

$$\langle h \rangle = 32{,}6 \text{ мм}.$$

Относительная погрешность определяется по формуле (3):

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}1}{32{,}6} \cdot 100\% = 0{,}3067\% \approx 0{,}4\%.$$

Итоговый результат в стандартном виде в соответствии с формулой (4):

$$h = (32{,}6 \pm 0{,}1) \text{ мм при } \delta_m = 0{,}4 \text{ \%}.$$

3.2 Обработка прямых многократных измерений

Пусть измерение физической величины проводят несколько раз с помощью одного и того же прибора в одних и тех же условиях. Обработка результатов измерений проходит на основе статистического анализа.

Пусть проведено n опытов, в результате которых получено n значений физической величины:

- в 1-м опыте — значение x_1,
- во 2-м опыте — значение x_2,
- ....
- в i-м опыте — значение x_i,
- ....
- в n-м опыте — значение x_n.

Среднее значение физической величины — 'это среднее арифметическое значение всех измерений величины x:

$$\boxed{\langle x\rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{6}$$

Отклонение от среднего значения — это разность между значением физической величины, измеренным в i-ом опыте, и средним арифметическим, взятая по модулю:

$$\Delta x_i = |\langle x\rangle - x_i|. \tag{7}$$

Стандартное (среднеквадратическое) отклонение от среднего арифметического вычисляют по формуле:

$$\boxed{\sigma_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}}. \tag{8}$$

Случайную погрешность определяют по формуле:

$$\boxed{\Delta x_{\text{сл}} = t_{p,n}\sigma_{\langle x\rangle}}, \tag{9}$$

где $t_{p,n}$ — ***коэффициент Стьюдента***, p — ***доверительная вероятность***.

Коэффициент $t_{p,n}$ определяют по табл. 3 на пересечении столбца с доверительной вероятностью p и строки с числом проведенных измерений n.

Пример 3.3. Определим значения коэффициентов Стьюдента для различных

Таблица 3. Значения коэффициента Стьюдента $t_{p,n}$

n	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	62,7	53,7
3	1,06	1,3	1,9	2,9	4,4	7,0	9,9	31,6
4	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,91	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,89	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
∞	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

значений доверительной вероятности p и числа проведённых измерений n. По табл. 3 находим:

- при $p = 0{,}95$ и $n = 5$ получаем $t_{0,95;5} = 2{,}8$;
- при $p = 0{,}9$ и $n = 7$ получаем $t_{0,9;7} = 1{,}9$;
- при $p = 0{,}98$ и $n = 8$ получаем $t_{0,98;8} = 3{,}0$.

Если значение доверительной вероятности не указано, то её принимают равной 0,95.

Абсолютную погрешность измерения определяют извлечением квадратного корня из суммы квадратов случайной и приборной погрешностей:

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}}. \tag{10}$$

При этом если случайная погрешность $\Delta x_{\text{сл}}$ заметно превосходит приборную $\Delta x_{\text{пр}}$ (приблизительно *в три и более раза*, т. е. $\Delta x_{\text{сл}} \geq 3\Delta x_{\text{пр}}$), то приборной погрешностью можно пренебречь и её не учитывать. Если же приборная погрешность заметно превосходит случайную, то можно отбросить случайную погрешность и оставить только приборную. В случае, если обе погрешности одного порядка, нужно использовать формулу (10).

Относительную погрешность измерения вычисляют по формуле (2) или (3) и выражают в абсолютных долях или процентах соответственно:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}, \quad \text{или} \quad \delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%.$$

Пример 3.4. Пусть всего проведено пять опытов и получено пять значений высоты цилиндра:

$$12{,}4\ \text{мм};\quad 12{,}7\ \text{мм};\quad 12{,}6\ \text{мм};\quad 12{,}6\ \text{мм};\quad 12{,}3\ \text{мм}.$$

Измерительный прибор — штангенциркуль с приборной погрешностью $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}1$ мм.
Для простоты все текущие вычисления будут проведены в миллиметрах и только окончательный результат выражен в метрах.
Среднее значение высоты цилиндра определим по формуле (6):

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{12{,}4 + 12{,}7 + 12{,}6 + 12{,}6 + 12{,}3}{5} = \frac{62{,}6}{5} = 12{,}52\ \text{мм}.$$

Для промежуточных вычислений сохраняем на один разряд больше, чем было получено при измерениях.
Отклонение от среднего Δx_i для каждого опыта рассчитаем по формуле (7):

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= |12{,}52 - 12{,}4| = 0{,}12\ \text{мм},\\
\Delta x_2 &= |12{,}52 - 12{,}7| = 0{,}18\ \text{мм},\\
\Delta x_3 &= |12{,}52 - 12{,}6| = 0{,}08\ \text{мм},\\
\Delta x_4 &= |12{,}52 - 12{,}6| = 0{,}08\ \text{мм},\\
\Delta x_5 &= |12{,}52 - 12{,}3| = 0{,}22\ \text{мм}.
\end{aligned}$$

Стандартное отклонение вычислим по формуле (8):

$$\sigma_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{0{,}12^2 + 0{,}18^2 + 0{,}08^2 + 0{,}08^2 + 0{,}22^2}{5\cdot 4}} = \sqrt{0{,}0054} \approx 0{,}0735\ \text{мм}.$$

Поскольку значение доверительной вероятности не задано, то примем её равной $p = 0{,}95$, число измерений $n = 5$, поэтому коэффициент Стьюдента по табл. 3 равен 2,8.
Случайная погрешность тогда определяется по формуле (9):

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{0{,}95;5}\cdot\sigma_{\langle x\rangle} = 2{,}8\cdot 0{,}0735 \approx 0{,}21\ \text{мм}.$$

Здесь по правилу округления погрешностей первая значащая цифра 2 и она меньше 3, поэтому случайную погрешность округляют до двух значащих цифр в большую сторону.
Результаты измерений и промежуточных вычислений сведены в табл. 4.
Случайная погрешность $\Delta x_{\text{сл}}$ не превышает приборную $\Delta x_{\text{пр}}$ в три и более раз, поэтому абсолютную погрешность вычисляют по формуле (10):

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2} = \sqrt{(0{,}21)^2 + (0{,}1)^2} = \sqrt{0{,}0541} \approx 0{,}2325 \approx 0{,}24\ \text{мм}.$$

Таблица 4. Пример обработки многократных измерений

n	x_i, мм	$\langle x \rangle$, мм	Δx_i, мм	Δx_i^2, мм^2	$\sigma_{\langle x \rangle}$, мм	$\Delta x_{\text{сл}}$,мм	$\Delta x_{\text{пр}}$, мм
1	12,4		0,12	0,0144			
2	12,7		0,18	0,0324			
3	12,6	12,52	0,08	0,0064	0,0735	0,21	0,1
4	12,6		0,08	0,0064			
5	12,3		0,22	0,0484			

Первая значащая цифра в абсолютной погрешности 2, по правилу округления погрешность округляют до двух значащих цифр в большую сторону
Относительную погрешность в процентах вычислим по формуле (3) :

$$\delta_x = \frac{0{,}24}{12{,}52} \cdot 100\% \approx 1{,}916\% \approx 2{,}0\%.$$

По правилу округления погрешностей первая значащая цифра 1 и она меньше 3, поэтому округляют погрешность до двух значащих цифр в большую сторону. Обратим внимание на то, что в этом случае последний 0 является значащей цифрой.
По правилу округления среднего значения среднее значение физической величины и абсолютная погрешность Δx должны быть записаны в одних и тех же единицах измерения и с одинаковой точностью, поэтому окончательный результат, записанный в СИ, имеет вид:

$$x = (12{,}52 \pm 0{,}24) \cdot 10^{-3} \text{ м при } \delta_x = 2{,}0\%.$$

Из приведённого примера ясно, что чем больше проведено измерений, тем точнее оценка погрешности. Возникает вопрос: сколько измерений нужно провести? Ответ: нужно закончить измерения тогда, когда случайная погрешность станет сравнима с систематической. В этом случае дальнейшие измерения не повысят точность.

3.3 Обработка косвенных измерений

Пусть искомая величина не измеряется непосредственно, а вычисляется по результатам прямых измерений других величин. В этом случае должна быть задана некоторая функция, которая зависит от результатов прямых измерений и констант по некоторому математическому закону:

$$F = F(x, y, z), \tag{11}$$

где F — это функция; x, y, z — физические величины, определённые при прямых измерениях, и константы.

Предполагается, что для всех прямых результатов измерений и констант проведена обработка результатов и известны их средние значения и абсолютные погрешности:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \quad y = \langle y \rangle \pm \Delta y, \quad z = \langle z \rangle \pm \Delta z.$$

При этом для всех измеренных величин задаётся одно и то же значение доверительной вероятности p.

> ***Среднее значение величины*** F определяется подстановкой в формулу (11) для $F = F(x, y, z)$ средних значений прямых измерений и констант:
> $$\langle F \rangle = F\left(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle\right).$$

> ***Абсолютная погрешность косвенного измерения*** величины F определяется по формуле:
> $$\boxed{\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right)^2}}, \tag{12}$$
> где $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ и $\partial F/\partial z$ — частные производные функции $F(x, y, z)$ по переменным x, y и z соответственно; Δx, Δy, Δz — абсолютные погрешности прямых измерений и констант.

Абсолютную погрешность косвенного измерения округляют по правилу округления погрешностей.

Пример 3.5. Поясним понятие частной производной на примере. Для этого найдём частные производные функции

$$F(x, y, z) = x^2 y + zy + 1.$$

При вычислении частной производной по одной из переменных все остальные переменные считаются константами:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + zy + 1\right) = 2xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + zy + 1\right) = x^2 + z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y + zy + 1\right) = y.$$

Формулу (12) в этом случае можно записать в виде:

$$\Delta F = \sqrt{\left(2xy\right)^2 \Delta x^2 + \left(x^2 + z\right)^2 \Delta y^2 + y^2 \Delta z^2}.$$

Вместо значений x, y, z при вычислениях в эту формулу нужно подставить их средние значения:

$$\Delta F = \sqrt{\left(2\langle x\rangle\langle y\rangle\right)^2 \Delta x^2 + \left(\langle x\rangle^2 + \langle z\rangle\right)^2 \Delta y^2 + \langle y\rangle^2 \Delta z^2}.$$

Рассмотрим частный случай. Пусть функция имеет специальный вид:

$$F(x, y, z) = Ax^a y^b z^c + B,$$

где A, B, a, b, c — некоторые постоянные величины. Найдём вид относительной погрешности в этом частном случае. Сначала определим частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(Ax^a y^b z^c + B\Big) = Aax^{a-1}y^b z^c = Aa\frac{x^a}{x}y^b z^c = \frac{a}{x}F(x, y, z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(Ax^a y^b z^c + B\Big) = Abx^a y^{b-1} z^c = Abx^a\frac{y^b}{y}z^c = \frac{b}{y}F(x, y, z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(Ax^a y^b z^c + B\Big) = Acx^a y^b z^{c-1} = Acx^a y^b\frac{z^c}{z} = \frac{c}{z}F(x, y, z).$$

Подставляя полученные результаты в формулу (12), получим:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{a}{x}F(x, y, z)\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{b}{y}F(x, y, z)\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{c}{z}F(x, y, z)\right)^2 \Delta z^2}.$$

Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta F = F(x, y, z)\sqrt{a^2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + c^2\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}.$$

При вычислениях используются средние значения величин, поэтому можно заменить x на $\langle x\rangle$, y на $\langle y\rangle$, z на $\langle z\rangle$, а $F(x,y,z)$ на $\langle F\rangle$:

$$\frac{\Delta F}{\langle F\rangle} = \sqrt{a^2\left(\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right)^2 + b^2\left(\frac{\Delta y}{\langle y\rangle}\right)^2 + c^2\left(\frac{\Delta z}{\langle z\rangle}\right)^2}.$$

Все отношения в этой формуле представляют собой относительные погрешности определения соответствующих величин.

Таким образом, в частном случае, когда функция представляется в виде произведения или частного измеренных прямым образом величин в некоторых степенях, её относительная погрешность может быть вычислена через относительные погрешности величин x, y и z по формуле:

$$\boxed{\delta_F = \frac{\Delta F}{\langle F\rangle} = \sqrt{a^2\delta_x^2 + b^2\delta_y^2 + c^2\delta_z^2}}. \tag{13}$$

Итоговый результат обработки косвенных измерений записывают в стандартном виде:

$$F = (\langle F\rangle \pm \Delta F)\ \text{ед. изм. при } \delta_F = \frac{\Delta F}{\langle F\rangle}\cdot 100\%. \tag{14}$$

Пример 3.6. Проведём обработку результатов косвенного измерения для функции одной переменной. Пусть необходимо вычислить высоту падения тела по формуле

$$h(t) = 5t^2.$$

Результаты прямого измерения времени падения тела:

$$t = (3{,}4 \pm 0{,}3)\ \text{с}.$$

Абсолютная погрешность косвенного измерения в данном случае может быть определена по формуле (12), при этом, поскольку $h = h(t)$ является функцией одной переменной, частную производную можно заменить на обычную:

$$\Delta h = \sqrt{\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \Delta t^2} = \frac{dh}{dt}\cdot\Delta t = \frac{d}{dt}\left(5t^2\right)\cdot\Delta t = 10\langle t\rangle\cdot\Delta t.$$

Существенно, что погрешность определения высоты зависит от среднего значения времени: чем больше время падения, тем больше погрешность определения высоты.

В нашем случае:

$$\Delta h = 10\langle t\rangle\cdot\Delta t = 10\cdot 3{,}4\cdot 0{,}3 = 10{,}2 \approx 11\ \text{м}.$$

Погрешность содержит две значащие цифры.
Определим среднее значение высоты с той же точностью, что и абсолютную погрешность:

$$\langle h\rangle = 5\langle t\rangle^2 = 5\cdot 3{,}4^2 = 57{,}8 \approx 58 \text{ м}.$$

Относительную погрешность результата измерения определим по формуле (3):

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{\langle h\rangle}\cdot 100\% = \frac{11}{58}\cdot 100\% \approx 19\%.$$

Итоговый результат измерения запишем в стандартном виде (14):

$$h = (58 \pm 11) \text{ м при } \delta_h = 19\%.$$

Пример 3.7. Рассмотрим обработку косвенного измерения для случая нескольких переменных. Пусть необходимо вычислить мощность в цепи электрического тока и записать итоговый результат в стандартном виде по формуле (14).
Формула для вычисления мощности:

$$P = IU.$$

Результаты прямых измерений:

- сила тока: $I = \langle I\rangle \pm \Delta I = (4{,}5 \pm 0{,}4)$ А;
- напряжение: $U = \langle U\rangle \pm \Delta U = (3{,}24 \pm 0{,}02)$ В.

Среднее значение мощности:

$$\langle P\rangle = \langle I\rangle\cdot\langle U\rangle = 4{,}5\cdot 3{,}24 = 14{,}6 \text{ Вт}.$$

В данном случае функция является произведением величин и подходит под вид $F(x,y,z) = Ax^a y^b z^c + B$. Это значит, что относительную погрешность измерения мощности можно определить по формуле (13), которая для рассматриваемой функции примет вид:

$$\delta_P = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_U^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{\langle I\rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{\langle U\rangle}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}4}{4{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{3{,}24}\right)^2} \approx 0{,}089 \approx 0{,}09.$$

Теперь по относительной погрешности вычислим абсолютную погрешность:

$$\Delta P = \delta_P\cdot\langle P\rangle = 0{,}09\cdot 14{,}6 \approx 1{,}4 \text{ Вт}.$$

Окончательный результат измерения имеет вид:

$$P = (14{,}6 \pm 1{,}4) \text{ Вт при } \delta_P = 9\%.$$

Для упрощенного анализа в случае, когда функция $F(x,y,z)$ представляет собой произведение $Axyz$, иногда используют другую формулу определения абсолютной погрешности косвенного измерения, которая основана на выражении для полного дифференциала функции нескольких переменных:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta z. \qquad (15)$$

Поскольку в данном случае $F(x, y, z) = Axyz$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Ayz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Axz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Axy,$$

и, деля обе части формулы (15) на $F(x, y, z) = Axyz$, получим:

$$\boxed{\delta_F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} + \frac{\Delta y}{\langle y \rangle} + \frac{\Delta z}{\langle z \rangle}}. \qquad (16)$$

Пример 3.8. Определим погрешность измерения длины окружности $L = \pi D$ по прямому измерению её диаметра с учётом погрешности табличного значения числа π:

$$\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005.$$

Это как раз тот случай, когда число разрядов в указании средних значений и погрешности не совпадает.
Пусть по результатам прямых многократных измерений диаметра окружности получены значения:

$$D = (10{,}25 \pm 0{,}04) \text{ см}.$$

Рассчитаем среднее значение длины окружности:

$$\langle L \rangle = \langle \pi \rangle \cdot \langle D \rangle = 3{,}14 \cdot 10{,}25 = 32{,}19 \text{ см}.$$

По формуле (16) найдём относительную погрешность определения длины:

$$\delta_L = \frac{\Delta \pi}{\langle \pi \rangle} + \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}04}{10{,}25} = 0{,}0016 + 0{,}0039 = 0{,}0055 \approx 0{,}006.$$

Тогда абсолютная погрешность определения длины окружности будет равна:

$$\Delta L = \delta_L \cdot \langle L \rangle = 0{,}006 \cdot 32{,}19 = 0{,}193 \approx 0{,}20 \text{ см}.$$

При этом окончательный результат измерений имеет вид:

$$L = (32{,}19 \pm 0{,}20) \text{ см при } \delta_L = 6\%.$$

Иногда при измерениях невозможно повторить эксперимент в одних и тех же условиях. Например, при определении вязкости жидкости по методу Стокса используют разные по форме и размерам шарики, которые бросают в жидкость, и измеряют время прохождения ими определённого расстояния. При этом полученный при косвенных измерениях коэффициент вязкости является характеристикой одной и той же жидкости. Полученные количественные значения коэффициента вязкости будут близки по величине между собой. Такие косвенные измерения называют ***невоспроизводимыми***.

При невоспроизводимых измерениях эксперимент повторяют многократно. В каждом эксперименте получают различные результаты однократных прямых измерений. Далее по формуле (11) вычисляют значение измеряемой величины. Полученный результат рассматривают так, как будто это результат многократно воспроизводимых измерений. Поэтому среднее значение и погрешность вычисляют по правилам обработки прямых многократных измерений.

Пример 3.9. Пусть необходимо определить показатель адиабаты при адиабатическом расширении воздуха. В лабораторный сосуд накачивают компрессором воздух, создавая избыточное давление, которое измеряют водяным манометром по разности уровней воды в двух коленах. Затем на короткое время клапан открываают, воздух адиабатически расширяется в окружающую среду. При этом температура и давление воздуха в сосуде понижаются. Когда температура в сосуде сравняется с температурой окружающей среды, измеряют избыточное давление повторно.

Вычисление показателя адиабаты проводят по формуле:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

В табл. 5 приведены результаты эксперимента и вычисленные значения показателя адиабаты.

Таблица 5. Экспериментальные результаты

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
h_1, см	31	30	29	29	30	31	32	29
h_2, см	7	8	7	8	7	8	8	7
γ	1,29	1,36	1,32	1,38	1,30	1,35	1,33	1,32

Среднее значение показателя адиабаты определяем по формуле (6):

$$\langle\gamma\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\gamma_i = \frac{1{,}29 + 1{,}36 + 1{,}32 + 1{,}38 + 1{,}30 + 1{,}35 + 1{,}33 + 1{,}32}{8} \approx 1{,}331.$$

В значении $\langle\gamma\rangle$ оставляем на один разряд больше, чем в результатах измерений. Стандартное отклонение вычислим с помощью (8):

$$\sigma_{\langle\gamma\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\langle\gamma\rangle - \gamma_i\right)^2}{n(n-1)}} \approx 0{,}0108.$$

Случайная погрешность определяется по формуле (9):

$$\Delta\gamma_{\text{сл}} = t_{p,n}\sigma_{\langle\gamma\rangle} = 2{,}4 \cdot 0{,}0108 \approx 0,026.$$

Здесь по табл. 3 определено $t_{p,n} = t_{0{,}95;\,8} = 2{,}4$, поскольку доверительная вероятность явна не задана и поэтому принимается по умолчанию $p = 0,95$.
Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta\gamma_{\text{сл}}}{\langle\gamma\rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}026}{1,331} \cdot 100\% \approx 2{,}0\%$$

Окончательный результат в стандартной форме:

$$\gamma = 1{,}331 \pm 0{,}026 \text{ при } \delta_\gamma = 2{,}0\%.$$

3.4 Алгоритм обработки результатов измерений

Весь порядок обработки результатов многократных прямых и косвенных измерений можно представить в виде следующего алгоритма:

- результаты прямых измерений следует записывать с той точностью, которую обеспечивает измерительный прибор — не больше и не меньше;
- при промежуточных вычислениях нужно сохранять на один разряд больше, чем было получено при измерениях;
- сначала определяют приборную погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$;
- далее по формуле (9) вычисляют случайную погрешность:

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{p,n}\sigma_{\langle x\rangle};$$

- если случайная погрешность $\Delta x_{\text{сл}}$ заметно превосходит приборную $\Delta x_{\text{пр}}$ (приблизительно в 3 и более раз, т. е. $\Delta x_{\text{сл}} \geq 3\Delta x_{\text{пр}}$), то приборной погрешностью можно пренебречь и её не учитывать;
- если же приборная погрешность заметно превосходит случайную (в 3 и более раз, т. е. $\Delta x_{\text{пр}} \geq 3\Delta x_{\text{сл}}$), то можно отбросить случайную погрешность и оставить только приборную;

- если обе погрешности имеют одинаковый порядок, то суммарная погрешность измерения вычисляется по формуле (10):

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2};$$

- округление начинается с округления погрешности измерения и только потом округляют среднее значение самой физической величины;
- округление рекомендуется производить только один раз — при записи окончательных результатов измерения по формуле (4);
- среднее значение физической величины $\langle x \rangle$ и абсолютная погрешность Δx должны быть записаны в одних и тех же единицах измерения и с одинаковой точностью.

Контрольные вопросы

1. Как определяется погрешность прямых однократных измерений?
2. Как вычислить среднее значение результатов прямых многократных измерений?
3. Как вычислить стандартное (среднеквадратическое) отклонение среднего арифметического?
4. Как вычисляется случайная абсолютная погрешность прямых многократных измерений?
5. Как определяются коэффициент Стьюдента и доверительная вероятность?
6. Как вычислить суммарную абсолютную погрешность прямых многократных измерений, зная случайную и приборную погрешности?
7. Как определяется среднее значение косвенно измеряемой величины?
8. Как вычисляется абсолютная погрешность косвенно измеряемой величины?
9. Как вычисляется относительная погрешность косвенного измерения, если искомая величина представлена произведением или частным измеренных прямым способом величин в некоторых степенях?
10. Как представляют итоговый результат косвенных измерений?
11. Как можно упрощенно вычислить абсолютную погрешность косвенных измерений в случае, когда функциональная зависимость имеет вид произведения измеряемых величин?
12. Как вычисляется погрешность невоспроизводимых косвенных измерений?
13. Каков общий алгоритм обработки результатов измерений?

4. Построение графиков по результатам измерений

4.1 Оси координат и масштабы графиков

При обработке результатов измерений часто строят графики, чтобы наглядно представить зависимость между величинами.

По горизонтальной оси (x) откладывают независимую переменную (то, что изменяли в эксперименте, например, время, силу тока, напряжение), по вертикальной оси (y) откладывают зависимую переменную (то, что измеряли в ответ на изменение x, например, температуру, сопротивление).

На каждой из осей указывают название величины и единицу её измерения.

Пример 4.1. Если измеряли зависимость температуры от времени, то по оси x откладывают время t (секунды, минуты), а по оси y — температуру T (кельвины или градусы Цельсия).

Масштаб графика должен быть удобным, чтобы данные равномерно распределялись по графику и их легко было интерпретировать. Границы осей выбирают чуть больше, чем максимальные значения данных.

> ***Линейный масштаб*** — равномерное расположение отметок на графике (например, 1 клетка = 1 секунда или 1 клетка = 5 градусов). Это значит, что равные интервалы на графике соответствуют увеличению данных *на одинаковую величину*.

Пример 4.2. Пусть имеется зависимость $y = \sqrt{x}$. Для простоты обе величины будем считать безразмерными. График функции $y = \sqrt{x}$ в линейном масштабе изображен на рис. 11.

Линейный масштаб при построении графиков наиболее распространён, но иногда оказывается удобным другой масштаб — логарифмический, в частности, когда искомая зависимость — степенная.

> ***Логарифмический масштаб*** — способ отображения данных на графике, при котором одна или обе оси строятся не в линейном масштабе, а в логарифмическом. Это означает, что равные интервалы на графике соответствуют увеличению данных *в одно и то же число раз*.

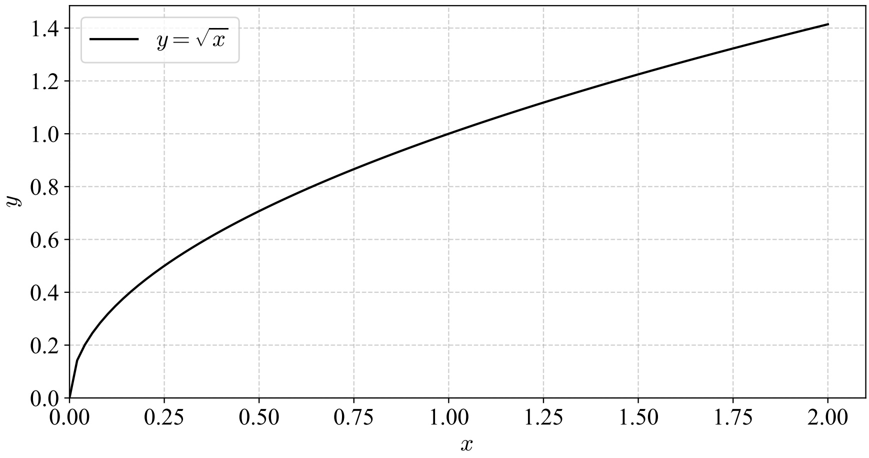


Рис. 11. График функции $y = \sqrt{x}$ в линейном масштабе

Пример 4.3. Если построить тот же график, что в предыдущем примере, но в логарифмическом масштабе по обеим осям (и по x, и по y), то он будет выглядеть как прямая линия (рис. 12).
Если взять логарифм от обеих частей уравнения $y = \sqrt{x}$, получится

$$\lg y = \lg x^{1/2} = \frac{1}{2} \lg x.$$

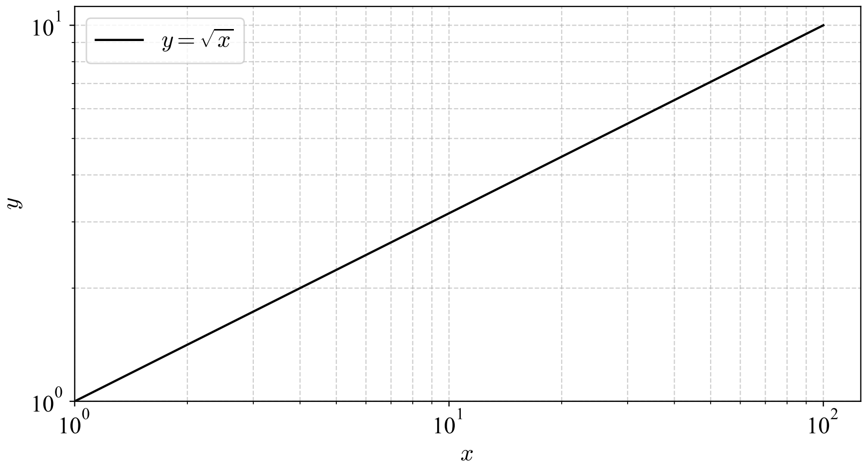


Рис. 12. График функции $y = \sqrt{x}$ в логарифмическом масштабе по обеим осям

И если строить зависимости в логарифмическом масштабе, это все равно, что строить зависимость $\lg y$ от $\lg x$, которая, как видно, является линейной. Линейными в логарифмическом масштабе будут любые степенные зависимости типа $y = ax^b$.
В случае логарифмического масштаба расстояния между отметками увеличиваются в геометрической прогрессии, в нашем случае: 1, 10, 100, 1000, ...

4.2 Нанесение экспериментальных данных и линии зависимости

Каждую точку на график наносят по измеренным данным. Если известны погрешности, их отмечают вертикальными отрезками (отрезки погрешностей).

Пример 4.4. Результаты десяти измерений зависимости температуры от времени приведены в табл. 6. Приборная погрешность измерения температуры при этом составляет $\Delta\ T\ =\ 1\ °\mathrm{C}$ для всех результатов измерений.
График с нанесёнными экспериментальными точками и отмеченными для каждой точки приборными погрешностями (от каждой точки вверх и вниз отложено $\Delta T = 1$ °C) в линейном масштабе показан на рис. 13.

Таблица 6. Результаты измерений зависимости температуры от времени

t, c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T, °C	2,1	4,3	6,2	8,0	10,4	12,1	13,8	16,2	18,0	20,1

Заключительной частью построения графика является построение линии зависимости по экспериментальным точкам. Самое главное правило — *нельзя просто соединять точки ломаной линией*! Необходимо провести гладкую кривую так, чтобы её точки попадали между границами погрешностей.

Обычно при построении графиков заранее известен вид функциональной зависимости между величинами, отложенными по осям. Чаще всего эта зависимость линейная. В этом случае допускается провести прямую, которая наилучшим образом проходит через все точки, что называется, «на глаз». При этом руководствуются тем, что при проведении такой прямой одинаковое количество экспериментальных точек должно оказаться выше и ниже этой прямой.

Пример 4.5. Результат построения линии зависимости через экспериментальные точки для табл. 6 показан на рис. 13 пунктирной линией. В данном случае

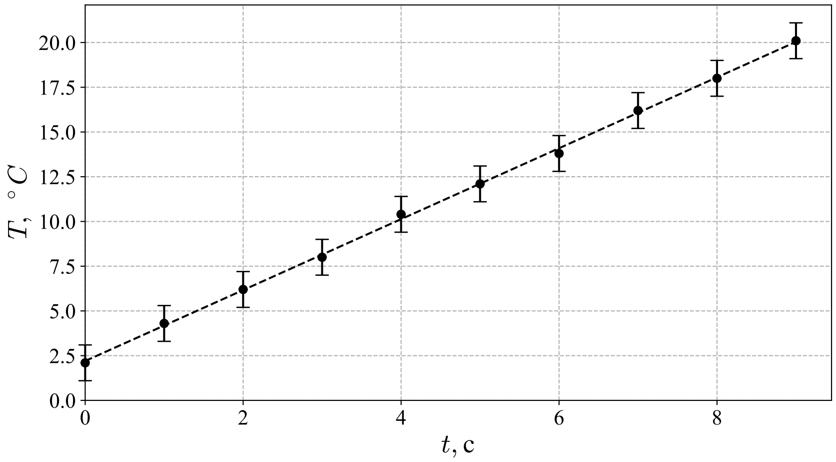


Рис. 13. Пример графика с нанесёнными экспериментальными точками и отложенными приборными погрешностями

зависимость линейная и имеет вид:

$$T = 1{,}98t + 2{,}20.$$

Есть и строгие способы подбора вида прямой (или кривой, если зависимость нелинейная), в которых используется ***метод наименьших квадратов***. Это довольно громоздкий математический метод, однако он реализован в большинстве стандартных программных продуктов, которыми можно воспользоваться для построения графиков.

Пример использования языка Python для этих целей приведён в приложении B.

Контрольные вопросы

1. Как правильно выбрать оси для графика экспериментальных данных?
2. Что означает линейный масштаб графика?
3. Какой масштаб называется логарифмическим? Для каких зависимостей он удобен и почему?
4. Как на графике правильно отображать погрешности измерений?
5. Почему нельзя соединять экспериментальные точки ломаной линией? Как правильно построить линию зависимости?

5. Рекомендации по подготовке выводов к работе

После завершения лабораторной работы и обработки полученных данных необходимо сформулировать выводы, которые отражают достигнутые результаты и степень выполнения поставленных задач.

> ***Выводы*** — это краткое обобщение проделанной работы, демонстрирующее понимание темы и умение анализировать результаты. Они должны чётко отвечать на вопрос: достигнута ли цель исследования?

Рекомендации по написанию выводов:

- **Краткость и ясность.** Используйте короткие предложения для чёткого выражения мыслей.
- **Научный стиль.** Придерживайтесь делового и научного стиля, избегая художественных оборотов и метафор.
- **Развитие цели.** Не повторяйте дословно цель работы; раскройте, как она была достигнута и какие результаты получены.
- **Точность терминологии.** Используйте правильные и понятные определения, чтобы избежать двусмысленности.
- **Полнота содержания.** Приведите в выводах основные этапы и результаты исследования.

Следуя этим рекомендациям, можно сформулировать содержательные и информативные выводы, демонстрирующие понимание проведённого исследования.

Пример 5.1. В ходе выполнения работы было экспериментально определено сопротивление медного проводника методом прямых измерений силы тока и напряжения. На основе полученных данных и с учётом погрешностей измерения была вычислена мощность, потребляемая участком цепи, а также удельное электрическое сопротивление материала.
Была построена графическая зависимость напряжения от силы тока, подтверждающая линейный характер закона Ома. Линия наилучшего приближения хорошо согласуется с экспериментальными точками и укладывается в границы погрешностей измерений.

Результаты измерений представлены в стандартной форме с указанием абсолютных и относительных погрешностей. Полученное значение удельного сопротивления меди оказалось близким к табличному значению, что подтверждает корректность проведённого эксперимента.

Рекомендуемая литература

1. Андреев А. И., Селезнёв В. А., Тимофеев Ю. П. *Вводное занятие в лабораториях кафедры физики* / Под ред. проф. В. А. Никитенко. — М.: МИИТ, 2017. — 40 с.
2. Куприянов В. Е., Касаткина Э. Ф. *Общая теория измерений: в 2 ч. Ч. 2. Методы измерений. Математические модели. Погрешности и обработка результатов измерений.* — Владимир: Ред. издат. комплекс ВлГУ, 2005. — 148 с.
3. Морозов В. В., Шейнман И. Л., Шейнман Ю. С. *Методы обработки результатов физического эксперимента.* — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2020. — 74 с.
4. Анализ и представление результатов эксперимента / Н. С. Воронова, С. Г. Бежанов, С. А. Воронов, Е. В. Хангулян, О. Ю. Цупко, А. И. Романов; под общ. ред. Н. С. Вороновой. — М.: НИЯУ МИФИ, 2015. — 120 с.

А. Математическое приложение

В этом приложении кратко обсуждается, почему формулы, которые используются при обработке измерений, имеют именно такой вид. Следует отметить, что многие положения изложены упрощённо и пригодны только для первого пояснения. Для более строгого и глубокого понимания рекомендуется обратиться к руководствам по математической статистике[1].

Результатом обработки измерений является утверждение о том, что истинное значение измеряемой величины лежит в некотором интервале, который называют ***доверительным***.

> ***Доверительный интервал*** — это интервал, в котором с определённой вероятностью находится искомое (истинное) значение результата измерений (рис. А.1).

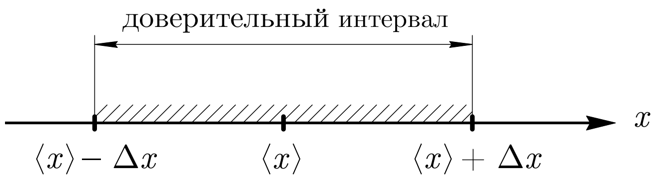


Рис. А.1. Доверительный интервал:
$\langle x \rangle$ — среднее значение физической величины;
Δx — абсолютная погрешность

Чем больше число измерений, тем уже доверительный интервал, а значит, измерение точнее. Если доверительный интервал широкий, значит, абсолютная погрешность большая. Если доверительный интервал узкий, значит, измерения более точные.

При этом говорят, что истинное значение измеряемой величины

[1] В качестве такого источника можно рекомендовать книгу Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. — М.: Юстиция, 2018. — 480 с.

не просто лежит в доверительном интервале, а находится там с некоторой ***доверительной вероятностью*** p.

Интуитивное объяснение доверительной вероятности можно дать следующим образом. Пусть доверительная вероятность равна 0,7. Это означает, что из следующих 100 опытов приблизительно в 70 случаях измеряемая величина будет лежать в доверительном интервале, а приблизительно в 30 случаях она не будет в него попадать. Это не является строгим определением доверительной вероятности, однако позволяет понять её суть.

Измерения никогда не бывают абсолютно точными. Из-за несовершенства приборов, внешних факторов и человеческого фактора измеренное значение колеблется около истинного значения, которое в ходе измерений узнать невозможно. Эти колебания можно описать с помощью случайных величин.

> ***Случайная величина*** — это величина, принимающая в результате эксперимента разные, заранее неизвестные, значения.

Каждое измерение — это реализация случайной величины, которая принимает значения в некотором диапазоне около истинного значения.

Пример A.1. Допустим, мы измеряем длину стержня линейкой с ценой деления 1 мм. Разные измерения могут дать 10,2 см, 10,1 см, 10,3 см и так далее. Истинное значение, например, 10,15 см, недоступно, но можно описать его как случайную величину с определённым средним значением и разбросом. Иными словами, при правильных измерениях и их последующей обработке истинное значение должно лежать внутри доверительного интервала.

Есть два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

> ***Дискретные случайные величины*** принимают отдельные (дискретные) значения (например, количество попыток перед успешным измерением или количество очков, которое выпало на игральной кости).

> ***Непрерывные случайные величины*** могут принимать любые значения в заданном диапазоне (например, измеренная длина, масса, температура).

В большинстве ситуаций случайные величины распределены по т. н. *нормальному закону*, который еще называют законом Гаусса. Этот факт связан с известной в теории вероятностей *центральной предельной теоремой*, которая утверждает, что если на результат влияет много независимых случайных факторов, то их суммарное влияние приводит к нормальному распределению.

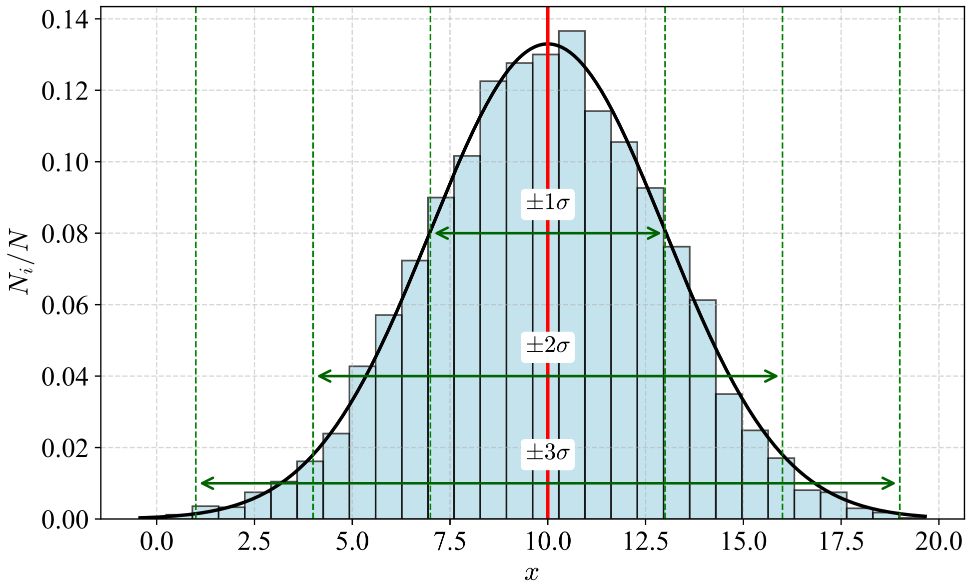


Рис. А.2. Гистограмма нормального распределения

Для понимания сущности нормального распределения рассмотрим следующий пример.

Пример А.2. Пусть проведено $N = 5000$ измерений случайной величины x. В результате получились значения x в интервале от 0 до 20. Разделим этот интервал на 30 равных частей и посчитаем, какая доля измеренных значений попадает в каждый из интервалов, откладывая на графике прямоугольники высотой

$$\frac{N_i}{N},$$

где N_i — число случаев, в которых случайная величина x попала в i-й отрезок. В результате получим *гистограмму нормального распределения*, которая изображена на рис. А.2. На ней видно, что большая часть полученных значений группируется вокруг среднего значения, которое нанесено красной вертикальной линией и равно $\langle x \rangle = 10$ для данного примера. Чем дальше измеренное значение x от среднего $\langle x \rangle$, тем реже оно встречается, т. е. тем ниже соответствующий столбик на гистограмме. На рисунке зелёными пунктирными линиями нанесены среднеквадратические отклонения σ (см. далее), и видно, что практически все значения измеренной величины лежат в пределах $\pm3\sigma$ от среднего.

Более полное утверждение для нормального распределения звучит так:

- 68,3 % всех результатов находятся в интервале $\pm1\sigma$ от среднего значения;
- 95,4 % всех результатов находятся в интервале $\pm2\sigma$ от среднего значения;

- 99,7 % всех результатов находятся в интервале $\pm 3\sigma$ от среднего значения.

Представим, что на измерение влияет 100 микрофакторов, каждый из которых даёт маленькое отклонение. Эти отклонения могут быть как положительными, так и отрицательными и в среднем взаимно компенсируются. Однако большинство значений будет сосредоточено вокруг среднего значения, а крайние отклонения будут встречаться реже. Это и даёт «колоколообразную» форму нормального распределения.

Наиболее вероятное значение случайной величины, распределенной по нормальному закону, — это её среднее значение $\langle x \rangle$, которое ещё называют *математическим ожиданием*. Чем дальше значение величины x от среднего $\langle x \rangle$, тем меньше вероятность того, что величина x примет это значение.

Пусть в результате многократных измерений получен набор значений:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n.$$

Их среднее значение (математическое ожидание) есть:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Возникает важный вопрос: насколько сильно среднее значение отличается от истинного? Для ответа необходимо ввести следующее понятие.

> ***Дисперсией случайной величины*** x называется среднее значение квадрата отклонения от среднего арифметического:
>
> $$D(x) = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle.$$

Дисперсия не всегда удобна, потому что она не совпадает по размерности с самой величиной x. В связи с этим используется другая величина.

> ***Стандартное (среднеквадратическое) отклонение*** σ_x — статистическая характеристика распределения случайной величины x, которая показывает среднюю степень разброса значений величины относительно среднего значения и вычисляется как корень из дисперсии:
>
> $$\sigma_x = \sqrt{D(x)}.$$

Для определения степени отклонения среднего значения от истинного найдём дисперсию среднего значения:

$$D(\langle x\rangle) = D\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Здесь использовано свойство дисперсии $D(cx) = c^2 D(x)$, которое следует из её определения, а также тот факт, что все измерения независимы и имеют одинаковую дисперсию, т. е. $D(x) = \sigma_x^2$.

Поскольку стандартное отклонение является корнем из дисперсии, то стандартное отклонение среднего есть:

$$\sigma_{\langle x\rangle} = \sqrt{D(\langle x\rangle)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Но это ещё не всё. В формуле для среднеквадратического отклонения среднего (8) ещё происходит деление на $(n-1)$. Возникает вопрос, почему нельзя делить на n?

Это связано с тем, что мы имеем дело с ограниченным набором результатов измерений (его называют ***выборкой***). И для такого ограниченного набора само среднее значение $\langle x\rangle$ также зависит от этой выборки: для разных наборов данных оно будет различным. Можно показать, что в этом случае при строгих вычислениях математическое ожидание дисперсии выборки определяется формулой

$$\frac{n-1}{n}\sigma_x^2,$$

и не совпадает с ожидаемым стандартным отклонением (это называется ***смещённой оценкой дисперсии***). А вот если бы мы с самого начала делили на $(n-1)$, то числитель и знаменатель сократились бы и получилось то, что нужно.

Поэтому нужно использовать исправленную выборочную дисперсию с $(n-1)$, которая называется ***поправкой Бесселя***. В результате получается формула (8), которая используется при обработке измерений.

B. Программное приложение

В этом приложении приведены коды программ на языке Python, которые можно использовать для обработки результатов измерений и построения графиков в лабораторном практикуме по физике.

B.1 Программа для обработки результатов измерений

Программа для обработки результатов измерений приведена в листинге B.1 и позволяет осуществить проверку правильности вычислений при обработке данных.

Необходимо обратить особое внимание на то, что *приведённая программа предназначена только для проверки вычислений и не выполняет полную обработку результатов!* Она не содержит результатов промежуточных вычислений и не округляет результаты по необходимым правилам. Это обязательно нужно учитывать при её использовании.

На вход подаются:

- данные n измерений в виде списка `data`;
- значение приборной погрешности `instrument_error`;
- значение коэффициента Стьюдента `student_coeff`.

Программа вычисляет среднее значение по формуле (6) с помощью функции `np.mean()` библиотеки `numpy`:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Затем — среднеквадратическое отклонение среднего по формуле (8) с помощью функции `np.std(data, ddof=1)`:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}.$$

Также вычисляются абсолютная Δx и относительная погрешности δ_x

по формулам (10) и (3) соответственно:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}, \qquad \delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%.$$

Листинг В.1: Функция обработки результатов измерений на Python

```python
import numpy as np

def process_measurements(data, instrument_error, student_coeff):
    """
    Обрабатывает результаты многократных измерений.
    :data: список измеренных значений
    :instrument_error: приборная погрешность (абсолютная)
    :student_coeff: коэффициент Стьюдента
    :return: среднее значение, абс. погрешность, отн. погрешность (%)
    """
    # 1. Среднее арифметическое
    mean_value = np.mean(data)

    # 2. Абсолютная погрешность
    statistical_error = student_coeff * np.std(data, ddof=1) / np.sqrt
    (len(data))
    absolute_error = np.sqrt(statistical_error**2 + instrument_error
    **2)

    # 3. Относительная погрешность (в %)
    relative_error = (absolute_error / mean_value) * 100

    return mean_value, absolute_error, relative_error

# === Пример работы ===
measurements = [12.4, 12.7, 12.6, 12.6, 12.3]  # Данные измерений
instrument_error = 0.1   # Приборная погрешность
student_coeff = 2.8      # Коэффициент Стьюдента (взять из таблицы)

mean_val, abs_err, rel_err = process_measurements(measurements,
    instrument_error, student_coeff)

# Вывод результатов
print(f"Среднее значение: {mean_val:.3f}")
print(f"Абсолютная погрешность: {abs_err:.3f}")
print(f"Относительная погрешность: {rel_err:.2f}%")
```

Следует ещё раз обратить внимание на то, что округление результатов вычислений программой не производится! Это нужно делать самостоятельно с использованием правил, приведенных в настоящем пособии.

B.2 Программа для построения графиков

Предложенная в листинге B.2 простая программа позволяет построить график экспериментальной зависимости.

Программа оперирует следующими данными:

- результаты измерений хранятся в массивах `x_data` и `y_data`;
- погрешности (одинаковые для всех данных) устанавливаются в `x_errors` и `y_errors` (отметим, что обычно по результатам измерений есть погрешность только для `x_data`).

Функция `plt.errorbar()` позволяет откладывать погрешности измерений на графике:

- `yerr` — добавляет столбики погрешностей (если нужно добавить погрешность по x, то перед `yerr` надо вписать `xerr`);
- `fmt='o'` — отображает точки измерений;
- `capsize=5` — делает «шапочки» на концах погрешностей установленного размера;
- `color="blue"` — устанавливает цвет отрезков погрешностей.

Линейная аппроксимация (построение кривой зависимости) осуществляется с помощью функции `np.polyfit()`:

- на вход подаются данные `x_data` и `y_data`, задается степень полинома (в данном случай 1 — линейная функция);
- вычисляется линейная зависимость в формате $y = kx + b$;
- красная пунктирная линия отображает найденную зависимость.

Листинг B.2: Функция обработки результатов измерений на Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl

mpl.rcParams['font.family'] = 'serif'
mpl.rcParams['font.weight'] = 'ultralight'
mpl.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
mpl.rcParams['font.size'] = 16
mpl.rcParams['font.style'] = 'normal'
mpl.rcParams['mathtext.default'] = 'regular'

# Данные измерений (10 измерений)
# Независимая переменная (например, время, с)
x_data = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
# Зависимая переменная (например, температура, градусы Цельсия)
```

```
y_data = np.array([2.1, 4.3, 6.2, 8.0, 10.4, 12.1, 13.8, 16.2, 18.0,
    20.1])

# Погрешности измерений
x_errors = np.full_like(x_data, 0.5)
y_errors = np.full_like(y_data, 1.0)

# Построение графика
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.errorbar(x_data, y_data, yerr=y_errors, fmt='o', label="Эксперимен
    тальные данные", capsize=5, color="blue")

# Линейная аппроксимация
coefficients = np.polyfit(x_data, y_data, 1)
linear_fit = np.poly1d(coefficients)
plt.plot(x_data, linear_fit(x_data), '--r',
         label=f"Линейная аппроксимация: T = {coefficients[0]:.2f}t +
    coefficients[1]:.2f}")

# Подписи и оформление
plt.xlabel("Время (t), с")
plt.ylabel("Температура (T), градусы Цельсия")
plt.title("График зависимости температуры от времени")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=1)
plt.show()
```

Учебное издание

Быков Никита Валерьевич
Иванова Елена Владимировна

Обработка результатов измерений в физическом эксперименте

Под редакцией Н. В. Быкова

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н. С. Власова*
Компьютерная графика *Н. В. Быков*
Оформление обложки *И. Ю. Голубева*

Оригинал-макет подготовлен *Н. В. Быковым*
в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано в печать 19.06.2025 г. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 100 экз.

Российский университет транспорта (МИИТ)
127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9