Работа М-4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИИ

Цель работы. Ознакомление с методом измерения моментов инерции тел, обладающих осевой симметрией.

Приборы и принадлежности: маховое колесо, добавочный груз в виде диска, штангенциркуль, секундомер.

Введение

Момент инерции тела I относительно некоторой оси является мерой инертности тела при вращении его вокруг этой оси. Для материальной точки момент инерции равен произведению ее массы на квадрат расстояния до оси вращения:

$$I = mr^2.$$

Для тела, которое можно представить в виде системы большого количества материальных точек (рис. 1.а), момент инерции относительно некоторой оси вращения равен сумме произведений масс всех материальных точек на квадраты их расстояний до этой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r^2 .$$

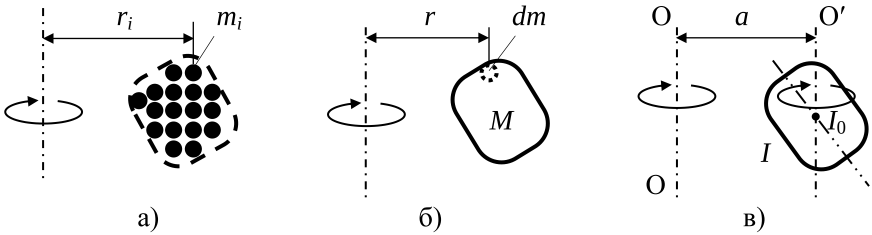

Рис. 1

При вычислении момента инерции сплошного тела его мысленно разбивают на бесконечно малые области с массами dm, каждая из которых находится на своём расстоянии r от оси вращения (рис. 1.б). Искомый момент инерции I находят интегрированием по всем этим областям:

$$I = \int_M r^2 dm .$$

Момент инерции зависит не только от общей массы тела, но и от формы тела, а также – от распределения массы по его объёму (так, например, какие-то части тела могут быть изготовлены из более тяжёлого материала, а какие-то – из более лёгкого).

Ось вращения может проходить через центр масс тела, а может и находиться вне его (рис. 1.в). Во втором случае для вычисления момента инерции пользуются вспомогательной формулой, которая выводится при доказательстве *теоремы Штейнера* (см. литературу [1 – 3]): *момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:*

$$I = I_0 + ma^2. \qquad (1)$$

При конструировании технических устройств, содержащих вращающиеся детали (на железнодорожном транспорте, в самолетостроении, электротехнике и т.д.), требуется знание величин моментов инерции этих деталей. Если форма тела достаточно сложна, то теоретический расчет его момента инерции может оказаться трудно выполнимым. В этих случаях предпочитают измерить момент инерции нестандартной детали опытным путем.

В предлагаемой лабораторной работе изучается один из самых простых, но достаточно надёжных, методов измерения моментов инерции тел, *обладающих осевой симметрией*.

Метод измерения и описание аппаратуры

В работе определяется момент инерции махового колеса *К*, ось симметрии которого параллельна поверхности земли. Колесо находится в состоянии безразличного равновесия, но после крепления к нему добавочного груза *Г* (рис. 2), колесо приобретает способность колебаться относительно горизонтальной оси.

Если пренебречь силами трения в подшипниках системы, то при малой амплитуде колебаний ($\varphi_0 < 5 \div 8°$) $sin\varphi_0 \approx tg\varphi_0 \approx \varphi_0$, а сами колебания оказываются гармоническими: угол φ отклонения си-

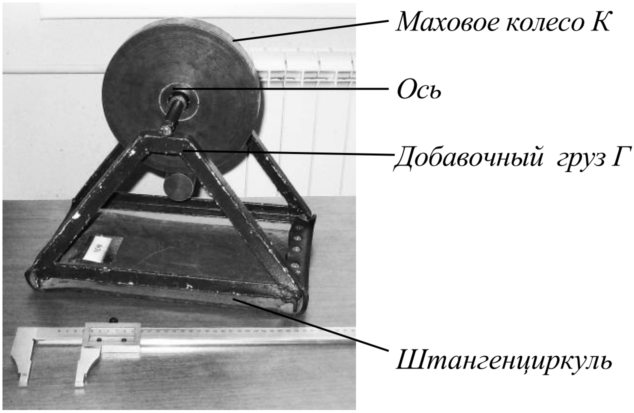

Рис. 2

стемы от положения равновесия со временем t меняется по закону:

$$\varphi = \varphi_0 cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (2)$$

Здесь T – период колебаний системы, величина которого, как будет показано ниже, зависит от её момента инерции.

Маховое колесо начинает совершать колебания за счет сообщенной ему извне энергии. Добавочный груз *Г*, поднятый на высоту h относительно положения равновесия, обладает потенциальной энергией mgh (см. рис. 3).

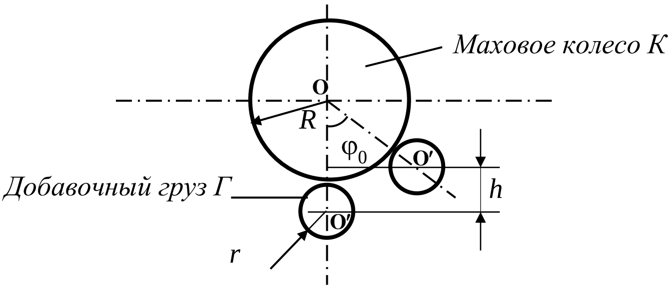

Рис. 3

При прохождении системой (*К* и *Г*) положения равновесия потенциальная энергия груза *Г* преобразуется в кинетическую энергию вращательного движения махового колеса *К* и добавочного груза *Г*. Таким образом,

$$mgh = \frac{I_{\text{общ}}\,\omega^2_{\text{макс}}}{2}\,, \qquad (3)$$

где $I_{\text{общ}}$ – сумма моментов инерции махового колеса I и добавочного груза $I_{\text{г}}$ относительно горизонтальной оси О, проходящий через центр махового колеса вдоль стержня:

$$I_{\text{общ}} = I + I_{\text{г}}; \qquad (4)$$

m – масса добавочного груза; g – ускорение свободного падения; h – высота, на которую поднимается груз; $\omega_{\text{макс}}$ – угловая скорость махового колеса с грузом при прохождении системой положения равновесия.

Как следует из формул (3) и (4), для нахождения момента инерции махового колеса I нужно знать $\omega_{\text{макс}}$, m, h и $I_{\text{г}}$. Угловая скорость $\omega_{\text{макс}}$ определяется из уравнения (2) после установления характера зависимости ω от времени t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\,\varphi_0\frac{2\pi}{T}\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \qquad (5)$$

Из уравнения следует, что максимальное значение угловой скорости (по модулю) в момент прохождения системой положения равновесия равно:

$$\omega_{\text{макс}} = \varphi_0\frac{2\pi}{T}\,. \qquad (6)$$

Высоту h поднятия центра инерции добавочного груза (см. рис. 6.3) можно выразить так:

$$\frac{(R+r)-h}{R+r} = cos\varphi_0,$$

где R и r – радиусы махового колеса и добавочного груза.

Следовательно,

$$h = (R + r)(1 - cos\varphi_0). \qquad (7)$$

Подставляя в уравнение (3) найденные выражения для h и $\omega_{\text{макс}}$, получаем:

$$mg(R + r)(1 - cos\varphi_0) = \frac{I_{\text{общ}}\,4\pi^2\varphi_0^2}{2T^2}\,. \qquad (8)$$

Величина φ_0 неудобна для непосредственного измерения, поэтому исключим ее из уравнения (8). Для малых углов, выраженных в радианной мере, можно записать известное соотношение:

$$cos\varphi_0 \approx 1 - \frac{\varphi_0^2}{2}\,. \tag{9}$$

Подставив это значение косинуса в левую часть уравнения (8), получим формулу для расчета $I_{\text{общ}}$ относительно оси О:

$$I_{\text{общ}} = \frac{mg(R+r)T^2}{4\pi^2}\,. \tag{10}$$

Момент инерции добавочного груза $I_{\text{г}}$ находим по теореме Штейнера. В лабораторной установке добавочный груз выполнен в виде диска из однородного материала и укреплен так, что его ось параллельна оси симметрии махового колеса. Согласно теореме Штейнера момент инерции добавочного груза *Г* относительно оси О (см. рис. 3) равен

$$I_{\text{г}} = \frac{1}{2}mr^2 + m(R+r)^2. \tag{11}$$

Первый член правой части равенства – момент инерции груза *Г* (однородного диска) относительно оси О', проходящей через его центр масс параллельно оси О. Второе слагаемое – это произведение массы груза *Г* на квадрат расстояния между осями О и О'.

Согласно формулам (4), (10), (11) момент инерции махового колеса

$$I = I_{\text{общ}} - I_{\text{г}} = \frac{mg(R+r)T^2}{4\pi^2} - \left[\frac{1}{2}mr^2 + m(R+r)^2\right]. \tag{12}$$

Таким образом, определение момента инерции махового колеса удалось свести к измерению массы добавочного груза *m,* радиусов махового колеса *R* и добавочного груза *r*, а также – периода колебаний махового колеса *T*.

Для того, чтобы подтвердить утверждение о высокой точности данного метода измерения момента инерции, предлагается сравнить полученное значение *I* с теоретическим ($I_{\text{т}}$), которое для махового колеса – однородного диска можно вычислить по формуле:

$$I_т = \frac{1}{2}\ m_0\, R^2, \tag{13}$$

где m_0 – масса махового колеса.

Маховое колесо и добавочный груз – диски одинаковой толщины, изготовленные из одного и того же материала (заметим, что для самого метода измерения момента инерции эти факторы несущественны), поэтому отношение масс колеса и груза равно отношению их объемов или (при одинаковой толщине) – квадратов их радиусов: $m_0/m = R^2/r^2$. Выразив отсюда массу m_0 и подставив её значение в формулу (13), получим

$$I_т = \frac{1}{2} m \frac{R^4}{r^2}\ . \tag{14}$$

В настоящей работе непосредственно измеряются диаметры махового колеса D и добавочного груза d, а также – время t десяти полных колебаний. Масса груза m и ускорение свободного падения считаются заданными с известной степенью точности. Используя эти обозначения, окончательно запишем:

$$I = \frac{mg\left(D+d\right)t^2}{8\pi^2 N^2} - \frac{m}{4}\left[\frac{1}{2}d^2 + (D+d)^2\right], \tag{15}$$

или, с учётом того, что период $T = t/N$,

$$I = \frac{mg\left(D+d\right)T^2}{8\pi^2} - \frac{m}{4}\left[\frac{1}{2}d^2 + (D+d)^2\right]. \tag{16}$$

При этом, согласно формуле (14),

$$I_т = \frac{1}{8} m \frac{D^4}{d^2}\ . \tag{17}$$

Порядок выполнения работы

Часть 1. Проведение измерений

1. Ознакомьтесь с установкой, на которой выполняется работа, с измерительными приборами, используемыми в данной работе: штангенциркулем и секундомером.

Значение массы добавочного груза m (указано на грузе) запишите в таблицу.

2. Измерьте штангенциркулем диаметры махового колеса D и добавочного груза d с точностью, которую обеспечивает штангенциркуль. Результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

Номер измерения	1	2	3	4	5	Средние значения
Диаметр махового колеса D, м						$D =$
Диаметр добавочного груза d, м						$d =$
Масса добавочного груза m, кг						$m =$
Время десяти полных колебаний t, с						
Период колебаний T, с						$T_{СР} =$
Момент инерции махового колеса I, кг·м^2						$I_{СР} =$ $I_{Т} =$

3. Отклонив колесо с добавочным грузом на малый угол, удовлетворяющий соотношению (9), отсчитайте время t десяти полных колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу.

4. Повторите измерения по пункту 3 пять раз. Результаты измерений занесите в таблицу.

Часть 2. Обработка результатов измерений

Внимание! При проведении вычислений по пунктам 5 – 7 сохраняйте на одну значащую цифру больше, чем при непосредственных измерениях физической величины. *Округление итогового выражения для момента инерции махового колеса проводится только после вычисления ошибки измерений (см. пункт 8).*

5. Вычислите значения периода колебаний махового колеса для всех пяти случаев.

6. Вычислите среднее значение периода колебаний $T_{СР}$ и затем, подставив его в формулу (16), рассчитайте, чему равно получившееся в эксперименте среднее значение момента инерции махового колеса $I_{СР}$. В вычислениях принять $g = 9{,}81$ м/с^2.

7. Используя измеренные значения D и d, а также значение массы добавочного груза m, по формуле (17) рассчитайте теоретическое значение момента инерции махового колеса $I_т$.

Результаты расчетов по пп. 5 – 7 занесите в таблицу.

9. Поскольку в эксперименте непосредственно измеряются лишь D, d и t, а величина момента инерции определяется косвенным образом из расчетов по формуле (16), для вычисления ошибки измерения I необходимо пользоваться формулами для расчета ошибок косвенных измерений.

В данной работе *основную роль в возникновении ошибки определения момента инерции играет случайная ошибка измерения периода колебаний*; случайными же погрешностями измерения диаметров махового колеса и добавочного груза, а также приборными ошибками штангенциркуля и секундомера можно пренебречь. В этом случае ошибка измерения момента инерции махового колеса вычисляется, как среднеквадратичная ошибка:

$$(\Delta I)^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial D}\Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T}\Delta T\right)^2 \approx \left(\frac{\partial I}{\partial T}\Delta T\right)^2. \quad (18)$$

(Подробнее о методах расчета ошибок измерения физических величин можно прочитать в методических указаниях [4] из списка рекомендуемой литературы).

Используя формулы (16) и (18), получаем, что

$$\Delta I \approx \frac{\partial I}{\partial T}\Delta T = \frac{mg(D+d)\,T_{\text{СР}}}{4\pi^2}\Delta T. \quad (19)$$

Таким образом, вычисление ΔI в данной работе сводится к определению случайной ошибки измерения периода колебаний ΔT:

$$\Delta T = \alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\frac{\left(T_{\text{СР}} - T_i\right)^2}{5(5-1)}}\,, \quad (20)$$

где α – коэффициент Стьюдента, значения которого можно найти в таблице, имеющейся в лаборатории (таблица приведена также в методических указаниях [4]). Величину доверительной вероятности при выборе коэффициента Стьюдента по этой таблице примите равной 0,95.

10. Результат вычислений ΔI округлите до первой значащей цифры, после чего округлите полученные ранее (см. таблицу) значения $I_{СР}$ и $I_Т$ до того же разряда, что и ΔI.

11. Запишите окончательный численный результат в виде

$$I = I_{СР} \pm \Delta I, \tag{21}$$

$$I_Т = \ldots\ldots$$

Обратите внимание на правильность записи единиц измерения, в которых выражены полученные значения момента инерции махового колеса.

Контрольные вопросы

1. Какое свойство тела выражает момент инерции и как он вычисляется для материальной точки и системы материальных точек? В каких единицах он измеряется в СИ?

2. Сформулируйте теорему Штейнера. Как она используется в данной работе?

3. Объясните, как в данной работе выбирается число значащих цифр после запятой при округлении результатов вычислений.

5. В чём заключается физический принцип определения момента инерции методом колебаний?

4. Выведите формулы (12) и (14); укажите возможные причины несовпадения величин моментов инерции, определенных по этим формулам.

Список литературы

1. Кокин С.М. Физика. Часть I. Конспект лекций. – М.: МИИТ, 2010. – 144 с.

2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Академия, 2015. – 720 с.

3. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Академия, 2016. – 560 с.

4. Андреев А.И., Селезнёв В.А., Тимофеев Ю.П. Вводное занятие в лабораториях кафедры физики: методические указания для студентов всех специальностей. – М.: РУТ (МИИТ), 2017. – 40 с.