Основная задача - оценить влияние погрешности отдельных измер

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

$$Y = f(X_1, X_2) \approx f\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_2}\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)$$

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

$$Y = f(X_1, X_2) \approx f\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_2}\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)$$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

$$U = k \cdot u_c(y) \qquad \nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(c_i u(x_i)\right)^4}{\nu_i}} \qquad c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h}$$

где m — масса цилиндра, d — диаметр цилиндра, h — высота цил

$$\rho = \frac{m}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h}$$

где m — масса цилиндра, d — диаметр цилиндра, h — высота цил

Параметр	μ	Неопределённость
m	5,0 г	0,001 г
h	2,0 см	0,005 см
d	0,5 см	0,005 см

$$u_c^2(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 u^2(d)$$

$$u_c^2(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 u^2(d)$$

$$\rho = \frac{m}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h}$$

$$c_m = \frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h}, c_h = \frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{4m}{\pi d^2 h^2}, c_d = \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi d^3 h}$$

$$u_c^2(\rho) = \frac{16}{\pi^2 d^4 h^2} u^2(m) + \frac{16m^2}{\pi^2 d^4 h^4} u^2(h) + \frac{64m^2}{\pi^2 d^6 h^2} u^2(d)$$

$$u_c(\rho) = 0.26$$

Если считать, что все измерения проводились только поверенным

$$\rho = 12.73\,\text{г}/\,\text{см}^3 \pm 0.52\,\text{г}/\,\text{см}^3 \;\; (95\%, k = 1.96)$$

Оценим индивидуальный вклад:

$$\frac{c_x^2 u^2(x)}{u_c^2(y)} \times 100\%$$

Параметр	%
m	0,01
h	1,54
d	98,45

Типовой сценарий возникновения корреляции: несколько измерен

$$Y = f(X_1, X_2) \approx f\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_2}\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)$$

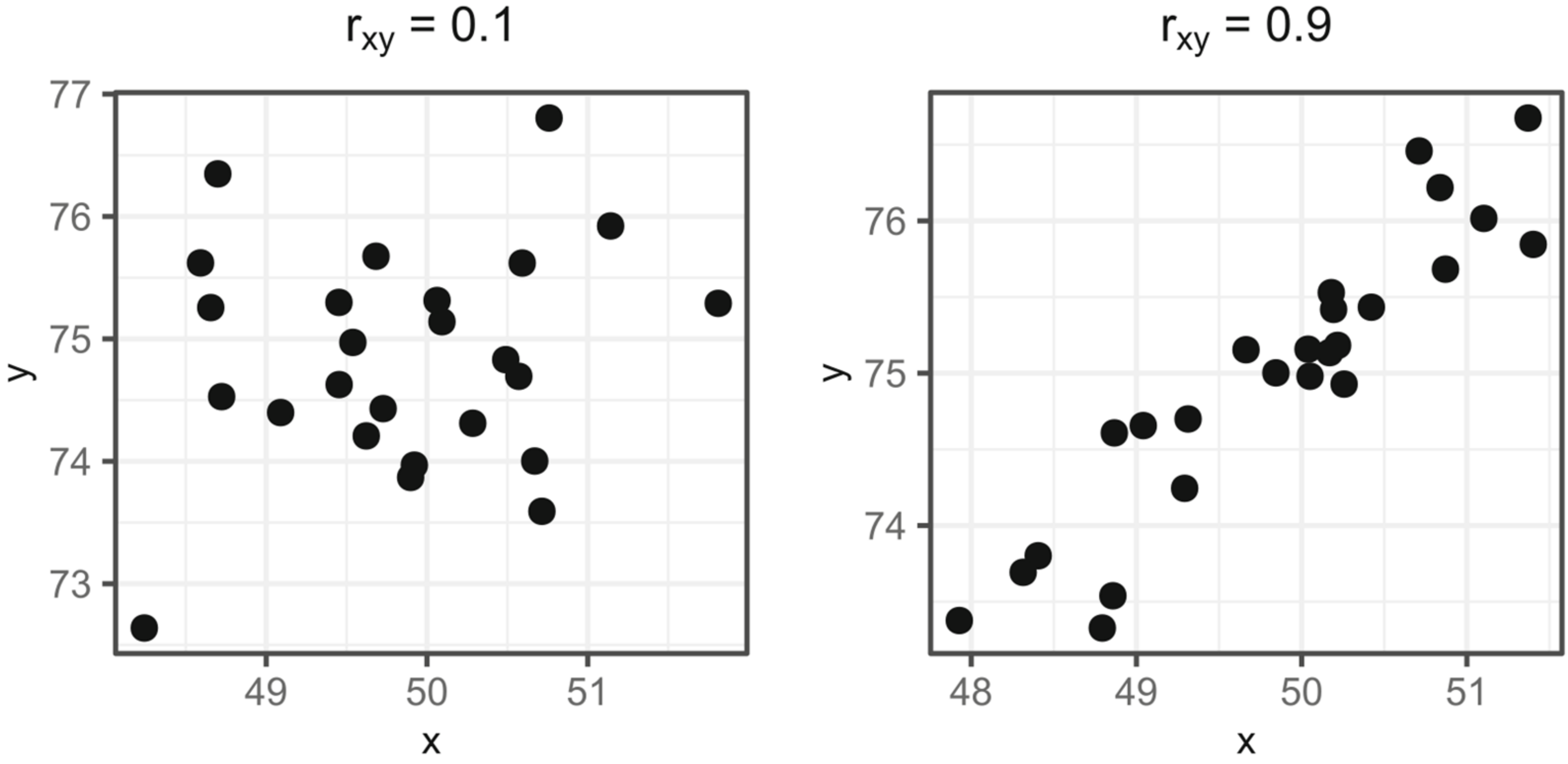
$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \boxed{2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_1, x_2)}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \boxed{2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u\left(x_i, x_j\right)}$$

Типовой вариант определения глубины корреляции выполняется с

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

Коэффициент всегда принимает значения от -1 до +1. Ноль означа


r_{xy} = 0.1
r_{xy} = 0.9
77
76
75
74
73
y
49
50
51
x
76
75
74
y
48
49
50
51
x

Корреляция может оказывать разнообразное влияние на измерени

т. е. корреляция тока и напряжения всегда уменьшает суммарную

С другой стороны измерение мощности: $P = VI$ с учётом корреляц

т. е. корреляция тока и напряжения всегда увеличивает суммарную

Нанотрубки выращиваются в печи методом сублимации из газово

$$R = \frac{4\rho L}{d^2}$$

Результаты измерений двадцати образцов:

Параметр	μ	Неопределённость
ρ	$9{,}6 \cdot 10^{-5}$ Ом*м	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$ Ом*м
d	180 нм	20 нм
l	5,2 мкм	0,20 мкм

Будем считать, что в результате анализа данных был получен корр

Расчёт коэффициентов чувствительности (не забываем про единиц

$$c_\rho = \frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{4L}{d^2} = 6.4 \times 10^8$$

$$c_L = \frac{\partial R}{\partial L} = \frac{4\rho}{d^2} = 1.2 \times 10^{10}$$

$$c_d = \frac{\partial R}{\partial d} = -\frac{8L\rho}{d^3} = -6.9 \times 10^{11}$$

Суммарная неопределённость измерений без учёта корреляции:

$$u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)^2 u^2(\rho) + \left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 u^2(L) + \left(\frac{\partial R}{\partial d}\right)^2 u^2(d)}$$

$$= \sqrt{\begin{aligned} &(6.4 \times 10^8)^2 (2.0 \times 10^{-6})^2 + (1.2 \times 10^{10})^2 (0.2 \times 10^{-6})^2 \\ &\qquad + (-6.9 \times 10^{11})^2 (20 \times 10^{-9})^2 \end{aligned}}$$

$$= 14066\ \Omega.$$

Суммарная неопределённость измерений с учётом корреляции:

$$u_{c,\mathrm{corr}}(R) = \sqrt{u_c^2(R) + 2\frac{\partial R}{\partial L}\frac{\partial R}{\partial d}u(L)u(d)r(L,d)}$$

$$= \sqrt{14066 + 2\left(1.2\times10^{10}\right)\left(-6.9\times10^{11}\right)\left(0.2\times10^{-6}\right)\left(20\times10^{-9}\right)(0.64)}$$

$$= 12468\ \Omega.$$

Считаем, что сопротивление измеряем высококлассным калибров

Считаем, что сопротивление измеряем высококлассным калибров

$$\upsilon_{\mathrm{eff}} = \frac{u_{c,\,\mathrm{corr}}^4(R)}{\frac{c_d^4 u^4(d)}{\nu_d} + \frac{c_L^4 u^4(L)}{\nu_L}} = \frac{12468^4}{\frac{\left(-6.9\times10^{11}\right)^4\left(20\times10^{-9}\right)^4}{19} + \frac{\left(1.2\times10^{10}\right)^4\left(0.2\times10^{-6}\right)^4}{19}}$$

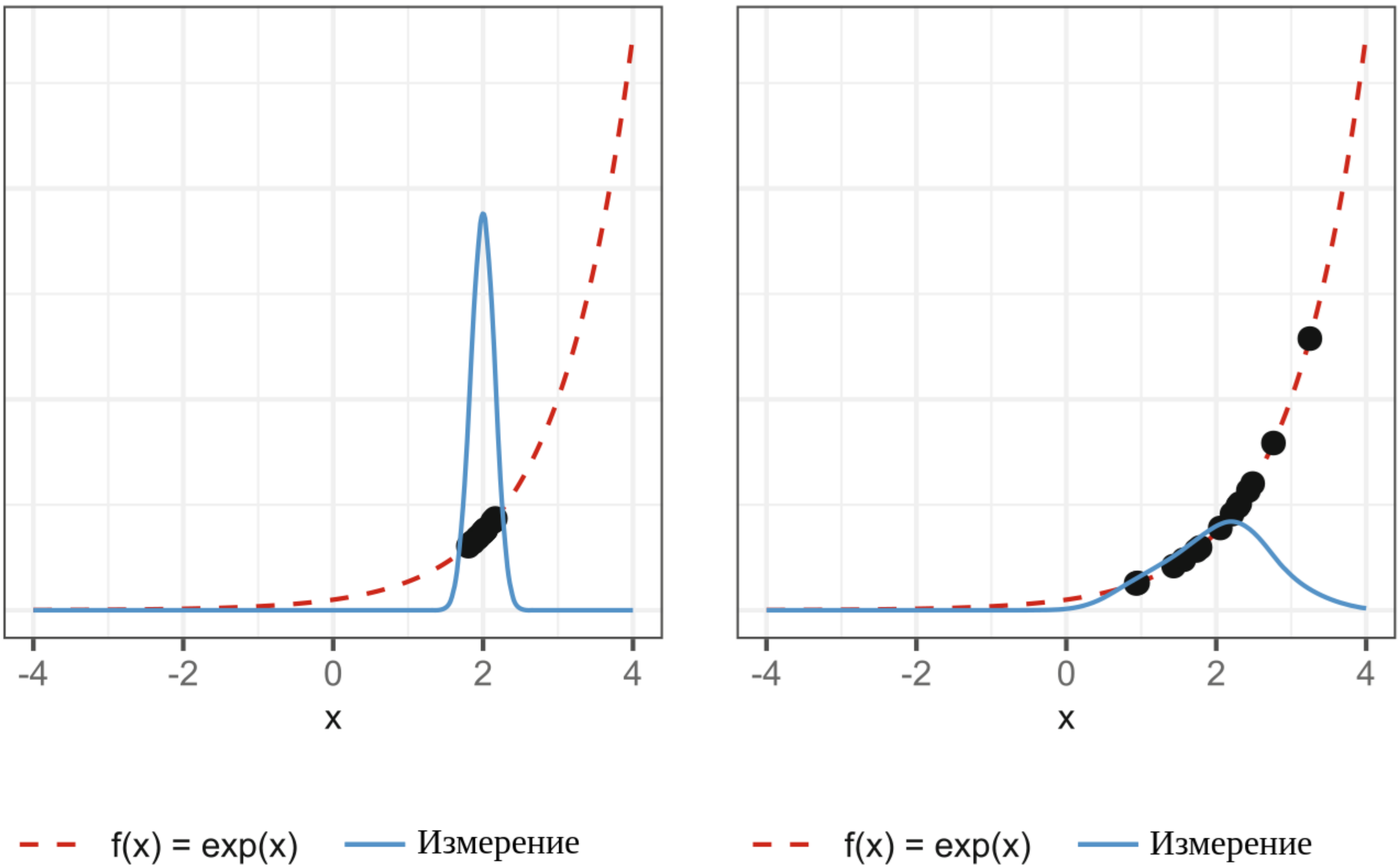
$$= 12.67$$

Итого:

$$R = 62\ \mathrm{k\Omega} \pm 27\ \mathrm{k\Omega}\ (95\%, k = 2.16)$$

Члены высшего порядка при разложении в ряд Тейлора использует

$$f(x) = e^x$$



-4
-2
0
2
4
x
f(x) = exp(x)
Измерение
-4
-2
0
2
4
x
f(x) = exp(x)
Измерение

$$Y = f(X_1, X_2) \approx f\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial X_2}\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial f}{\partial X_2}\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}\left(X_2 - \mu_{X_2}\right)^2$$

Оставляем только самые «важные» слагаемые:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j).$$

Более точный вариант (по Вангу и Айеру):

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 u^2(x_i)u^2(x_j)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}u^4(x_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u^2(x_i)\, u^2(x_j) + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}u^2(x_i)\right)^2$$

$$\rho = \frac{m}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h}$$

Метод	ρ, г/см^3	Итоговая неопределённость, г/см^3
Разложение в ряд первого порядка	12,7	±2,57
Разложение в ряд второго порядка по GUM	12,7	±2,65
Разложение в ряд второго порядка по Вангу и Айеру	12,7	±2,72

1) Не всегда понятно, когда использовать разложение Тейлора бол

1) Не всегда понятно, когда использовать разложение Тейлора бол
2) Для решения уравнения нужно брать частные производные, что

1) Не всегда понятно, когда использовать разложение Тейлора бол

2) Для решения уравнения нужно брать частные производные, что

3) Вне зависимости от выбранного распределения случайных откл

1) Не всегда понятно, когда использовать разложение Тейлора бол
2) Для решения уравнения нужно брать частные производные, что
3) Вне зависимости от выбранного распределения случайных откл
4) Вообще говоря, формула Уэлча - Саттерсвэйта верна только дл