我在高中学的力学果然有问题

一个理论力学简介

Some naïve GUYS

前言：就这样，有问题的力学学习开始了

我在高中课内学的物理，记的定理，刷的题目，无论怎样，都是在以一种方式自我欺骗："你学到物理了""你物理不错"或者"你物理没希望了"。然而真正的物理是什么？我想我很可能思考有欠缺。有的人看到物理，会说"怎么这么多公式？"，学过高中课内的同学们（尤其是上海 xingaokao 删大纲以后）可能会说："怎么这么多要背的定理？怎么这么多结论？怎么要写这么多字？"我们口口声声学物理难道就是要学这些玩意？我在高中学的物理果然有问题。

理论力学是一个目标十分宏大的理论体系，它设立之初就是为了用最简单的话，解释最复杂的问题（值得赞美的一种野心）。真的有这么多要背的定理吗？力学无论是以牛顿为核心，还是我们要粗略涉及的拉格朗日和哈密顿，都只是那么几个很简单的原理逐步导出的。同时，我们不能因为理论力学在几个地方不完善（比如微观或者高速等等），就否认它的思路的伟大性。理论力学的方法在其他理论中有非常广泛的延伸，或者说，理论力学是 "一个好的物理理论"的榜样。

这本书开始动笔的原因部分是因为，我认为自己经历准备高考一年中见到的各类"有问题"的事件太多，以至于开始怀疑是自己是不是脑子也有问题。希望能够用自己的一点力量，给需要的人打开一个小缝隙，看看除了高中讲的那些还有什么。能够激发我们自己的一点热情更好。如果能自己产生新的问题，试图在读书过程中解决最好。这也就是"有问题的力学学习"。另外一点就是本人自己学习的部分内容本身也就不够扎实，在大一前那个推迟的暑假里，我找到了在极北苦寒之地修炼已久的 ly，靠 Susskind 大佬的演讲补了补课，下定决心不能做知识的容器，想要为自己的高中做点什么不是那么无意义的事。写这本小册子，也是自

己的学习过程，所以我也感谢这次机会。

本书是在一定的数理基础上进行的拓展（竞赛大佬请出门右转直接去看朗道←_←)，把书本上一些过于简明扼要的内容翻译成人话，再增添了一些小栗子便于理解。本书涉及的部分知识有预备数学知识要求：微积分及简单多元函数微积分；(在理解第三章相图的时候可能会需要矢量分析的基础知识)。但是其实数学表达式在这本小册子里面一般也不是很复杂。如果抱着“这些看不懂的式子只是某种与学过知识略有不同的符号”的心态去看，相信大家可以理解。

我参与编写了部分章节和习题，我进行了几次校对，但是毕竟这是“暂定”版本，如果有任何问题请求大佬指正。

就这样，有问题的力学学习开始了。

Zgd

QQ:2315846088

写于 2020:08:25:21:20

目录

习题 2

Chapter 3 哈密顿力学 Hamiltonian Mechanics

3.1 哈密顿正则方程

3.2 刘维尔定理

3.3 刘维尔定理的含义

3.4 泊松括号

3.5 哈密顿力学：从经典到量子的阶梯

3.6 哈密顿力学与拉格朗日力学的比较

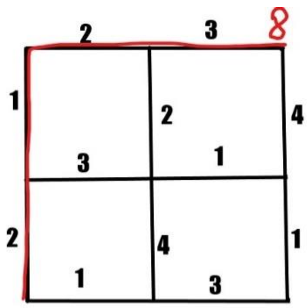
Chapter 0 变分法简介 Calculus of Variations

——欲入此门，先会变分

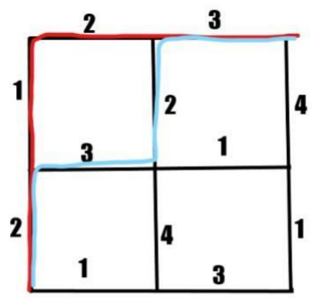
0.1 三个 exciting 的问题

1.小明走路

新冠肺炎期间小明要出行，从田字格左下角走到右上角，这是他猜测的每条街的人数。那么小明怎么走才能使他路上遇到的行人最少？



case1:田字格



case1:田字格

研究此问题，假设目标函数为 S，即总人数。

$$S = \sum_{1}^{4} \vec{X_i} \cdot \vec{r_i}$$

其中$\vec{r_i}$是每一小段的路（长度都是 1），$\vec{X_i}$是每一段分配的值。[是$\vec{r_i}$的函数] 所以我们要算这个求和的最小值。

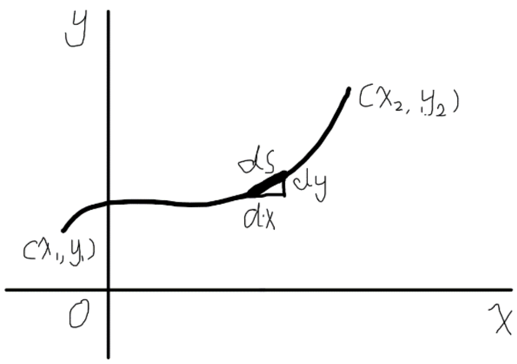
研究这个问题，你可以直接把每种路径都算出来，但是还有一种更加普遍的方法:

观察某一条路径，将其略微改变（如红线变蓝线），这个过程如果不管怎样做都会使S增大，那么它就是极值。

今天，你又悟到了什么？

2.求平面上两点间最短路径

已知平面上两点的坐标分别是(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，求两点间的最短路径（当然是直线啦，但是为什么？）



我们假设 S 是连接两点的一条曲线。为了算出曲线长度，我们用曲线积分。取曲线上的微元 ds：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

整条曲线的长度便是对微元积分：

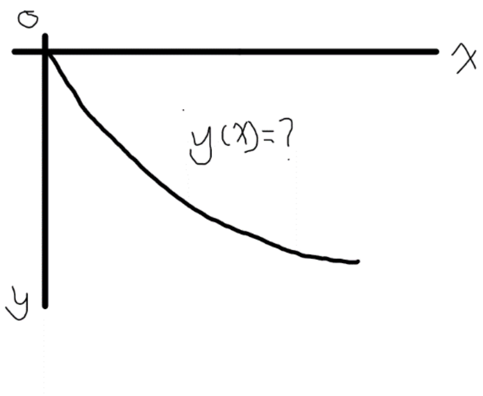
$$s = \int ds = \int \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

要想使曲线最短，我们便要去求这个积分的最小值。

——试试这个

3.最速降线

让一个物体从静止开始沿着一个光滑无摩擦的轨道下滑，如果要求下滑过程耗时最短，轨道应该是什么形状？



当物体下滑到(x,y)时，速度可以由能量守恒算出：

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

$$v=\sqrt{2gy}$$

而我们知道，速度大小等于单位时间内走过的轨道长度：

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+(y')^2}\frac{dx}{dt}$$

联立两个式子，我们可以得到：

$$dt=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx$$

总的时间是：

$$t=\int dt=\int\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx$$

要想使时间最短，我们要让上面这个积分取得最小值。

PS：想要试试手的可以看习题 0.1

0.2 变分法的引入

在上面两个问题中，我们最终都是要去求关于 y、y'和 x 的一个积分的最小值，其中 y 是关于 x 的函数，其表达式未知。为了解决这一类问题，我们需要使用变分法。

0.3 变分大法

在变分法中，称所要求极值的积分为泛函（即关于函数的函数），把它记作 I ：

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

F被称为拉格朗日函数。我们需要选择F来最大或最小化I的值。F其实可以是关于 x、y 和 y 的各阶导数的表达式，但是为了方便，我们假设它仅是关于 x、y 和 y'的函数。

I的值取决于积分路径的选择，即函数 y 的选择。现在假设我们已经找到了使 I 取到极值的函数 y(x)。把在 y 附近的任意路径记作$\tilde{y}(x)$。如果 y(x)使积分取到最小值，那么$\tilde{y}(x)$对应的积分值应该比 y(x)对应的积分值大。也就是说，如果我们找到某一条路径 y，将它略微改变成$\tilde{y}(x)$后无论如何也不能使积分值变得更小，那么 y 便对应了积分的一个极值。通过引入一个微小变量$\epsilon \ll 1$和一个可微函数$\mu(x)$，我们可以写出$\tilde{y}(x)$的表达式：

$$\tilde{y}(x)=y(x)+\epsilon\mu(x)$$

为了使所有的路径都通过轨道的两端，我们必须有：

$$\mu(x_1)=\mu(x_2)=0$$

这样一来，使积分取得极值的 y 对应的I的值便是泛函数$\tilde{I}=\int_{x_1}^{x_2} F\left(x,\tilde{y},\tilde{y}'\right)dx$的极值。把$\tilde{y}(x)=y(x)+\epsilon\mu(x)$代入$\tilde{I}$的表达式：

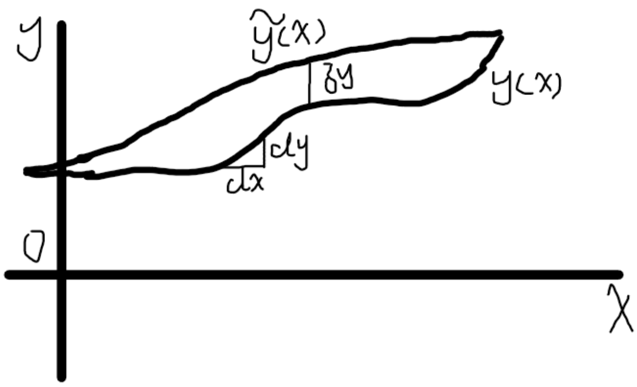
$$\tilde{I}=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\epsilon\mu,y'+\epsilon\mu')\,dx$$

现在虽然还不知道 y 的具体表达式，但是我们假设它已经确定。因此，可以将$\tilde{I}$看作是ϵ的函数。我们对$\tilde{I}$对ϵ在$\epsilon=0$处做泰勒展开：

$$\tilde{I}=\tilde{I}_{\epsilon=0}+\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}_{\epsilon=0}\epsilon+\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}_{\epsilon=0}\frac{\epsilon^2}{2!}+\cdots=I+\widetilde{I_1}\epsilon+\widetilde{I_2}\epsilon^2+\cdots$$

(其中使用了$\tilde{I}_{\epsilon=0}=I$)

我们将$\delta I=\widetilde{I_1}\epsilon$称为一阶变分。同理$\delta I^2=\widetilde{I_2}\epsilon^2$被称为二阶变分。直观地说，变分$\delta y$是$\tilde{y}(x)$和$y(x)$在竖直方向上的距离，而微分 dy 是由于 x 的微小变动引起的 y 的变化。



变分与微分的区别

现在让我们回想一下求函数极值的方法。求函数极值的时候，一阶导数等于 0。类似地，求泛函极值的时候，一阶变分等于 0：

$$\delta I=\widetilde{I_1}\epsilon=\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}_{\epsilon=0}\epsilon=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\epsilon}\tilde{F}_{\epsilon=0}\,dx\cdot\epsilon=0$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\tilde{F}_{\epsilon=0}\cdot\epsilon=\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon}+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\widetilde{y'}}\frac{d\widetilde{y'}}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0}\cdot\epsilon$$

因为$\tilde{y}(x)=y(x)+\epsilon\mu(x)$, $\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon}=\mu$, $\frac{d\widetilde{y'}}{d\epsilon}=\mu'$, $\delta y=\epsilon\mu,\delta y'=\epsilon\mu'$。当$\epsilon\to 0$的时候，$\tilde{F}\to F,\tilde{y}\to y,\widetilde{y'}\to y'$。把这些东西统统代入，我们可以得到：

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=0$$

分部积分一下：

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y|_{x_1}^{x_2} = 0$$

因为有$\mu(x_1) = \mu(x_2) = 0$ 的边界条件，$\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y|_{x_1}^{x_2}$恒等于零。为了使整个式子等于零，我们必须有：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

这便是大名鼎鼎的欧拉-拉格朗日方程。

——一回生二回熟，三回就是老朋友。

P.S：如果推导过程没有看懂的话，没有关系。最重要的是记住欧拉-拉格朗日方程。在解决具体问题的时候，直接把 F(x,y,y') 代入欧拉-拉格朗日方程便可以得到 y 关于 x 的微分方程，由此我们可以尝试解出 y 与 x 的函数关系。可以试试前面提到的后两个问题。求两点间最短路径比较好算，而算最速降线的计算比较难，如果求不出来也没有关系。

参考资料：
https://zhuanlan.zhihu.com/p/20718489
https://zhuanlan.zhihu.com/p/139018146

习题 0

0.1 证明摆线是最速降线

提示：$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$取极小值，那么令$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$然后自己操作。

会得到满足条件曲线的微分方程，而且很难解，如果解不了，就把

$x = Rarccos\left(\frac{-y+R}{R}\right) - \sqrt{2yR - y^2}$带入验证。[也许有锻炼计算耐心的效果]

Chapter 1 拉格朗日力学 运动方程 Lagrangian mechanics

——与牛顿力学完全不同的一个思路

1.0 广义坐标

假设一个力学系统由一些质点组成。为了确定系统此时的状态，我们需要知道所有质点的坐标。我们当然可以用直角坐标$(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i})$表示质点的位置，但是有时使用其他坐标系更加方便，比如使用柱坐标、球坐标等等。但是，不管使用什么种类的坐标系，唯一确定系统位置所需要的独立变量的数目都是相同的（这被称为自由度）。对于由 N 个质点组成的系统，我们需要 3N 个变量来确定系统的位置，即有 3N 个自由度。我们把表示每个自由度的独立变量称作广义坐标，用符号$\boldsymbol{q_i}$来表示。广义坐标对时间的导数被称为广义速度，用$\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{i}}$来表示。

1.1 最小作用量原理与动力学中的变分应用

[理论力学的第一性原理：无法被其他原理导出，是由实验定律总结出来的。]

每一个力学系统都可以用一个确定的函数

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q_1}, \dot{q_2}, \dots, \dot{q_n})$$

表征，并且此函数满足以下条件：

在任意时刻 1，和时刻 2 之间的积分

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t)dt \text{ 取\textit{极值}。}$$

这个问题的解决，需要我们之前学习的变分：

要$S = \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t)dt$ 取极值，那么复制一下之前的做法。

——略有不同，一回生二回熟，三回就是老朋友。

令$\varepsilon \ll 1, \mu = \mu(t), q' = q + \varepsilon\mu(t), \dot{q}' = \dot{q} + \varepsilon\dot{\mu}(t), L' = L(q', \dot{q}', t)$

[用以确立“改变了一点点的 L”]

其中，为了满足初始和最终条件，$\mu(t_1) = \mu(t_2) = 0$

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} (L' - L)\, dt$$

将$L' - L = \Delta L$，按全微分公式展开

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\varepsilon\mu \frac{\partial L}{\partial q} + \varepsilon \frac{d\mu}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + o(q, \dot{q}) \right) dt$$

略去余项，对后一项分部积分

$$\delta S = \varepsilon\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\varepsilon\mu \frac{\partial L}{\partial q} - \varepsilon\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right) dt$$

第一项， 利用$\mu(t_1) = \mu(t_2) = 0$,那么

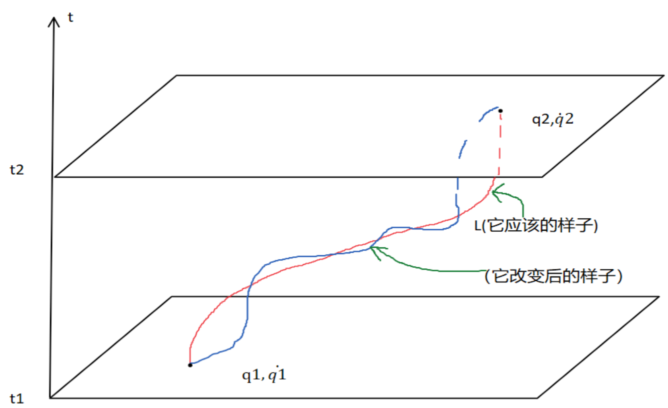
$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right) dt$$

由于略微改变路径，变化的作用量应该为零。(变分的原理)

而且我们可以让$\mu(t)$为任意的函数。所以

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

于是，理所应当地得出了拉氏方程。



意会一下.jpg

我们求的是$L(q,\dot{q},t)$关于时间的积分，也就是关于 L 的泛函。

PS：为什么这里是$L(q,\dot{q},t)$，虽然好像q,t就可以确定$\dot{q}$了？因为遇到一般力学问题，$q(t)$是未知的，只有通过解拉氏方程才能确定，在未知的情况下，可以把三者看成“独立变量”。

1.2 拉格朗日量的性质

当两个封闭的力学系统相距足够遥远以至于它们之间的相互作用可以忽略时，总的拉格朗日量趋向于极限：

$$\lim L = L_A + L_B$$

这被称为拉格朗日量的可加性。它反映了这样一个事实：每一个独立部分的运动方程不会包含与另一部分相关的物理量。这意味着我们可以把一个大系统分成相互独立的小系统来进行研究。

将拉格朗日量乘以一个常数不会改变运动方程，因为总可以将拉格朗日方程两边的相同常数约掉。乘以一个常数相当于改变了物理量的单位。

当两个拉格朗日量相差某个关于坐标和时间的函数$f(q,t)$对时间的全导数$\frac{d}{dt}f(q,t)$时，它们对应的运动方程相同。这是因为：

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t)$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t)\right] dt$$

$$= S + f\left(q^{(2)},t_2\right) - f\left(q^{(1)},t_1\right)$$

附加项是一个常数，将在变分时消失，因此对应的运动方程也就相同了。有的

时候，当我们算出拉格朗日量之后，我们可以把对时间的全导数项丢掉来简化计算。

——你问我为啥你需要知道这个？下面你就知道了。

1.3 伽利略相对性原理

本节之前的所有内容在任何情形下都能成立，不管是经典力学、相对论还是量子力学。而从本节开始，我们讨论的内容仅在经典力学的范围（即速度远小于光速，尺度远大于原子）内成立。

在研究力学现象时，我们要选择参考系。为了使力学规律在形式上最简单，通常我们会选择一类特殊的参考系：惯性参考系。在惯性参考系中，空间相对于它是均匀且各向同性（即不存在某个特殊的方向），时间相对于它是均匀的（即不同时刻都是等价的）。在这样的参考系中，在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止。

P.S：可以考虑这样一个反例：相对于一个转动的圆盘静止的参考系。在这个参考系中，物体始终会受到沿径向向外的力（这其实不是一个力，但是通常可以等价为一个力），即空间不是各项同性的，存在某一个特殊的方向。距离转动轴心越远受到的力越小，这意味着空间不是均匀的。

下面我们来看一看朗道大佬的操作。对于在惯性参考系中自由运动的质点，由于空间的均匀性，这个质点的拉格朗日量不会含有质点的位置 $\mathbf{r}$。由于时间的均匀性，拉格朗日量不会含有时间 t。所以 L 只能是速度的函数。由于空间的各

向同性，L 不能依赖于$\boldsymbol{v}$的方向，因此只能是其大小的函数。通常，对于一个矢量，我们可以用点乘$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v^2$消去其方向。也就是说，L 是$v^2$的函数：

$$L=L(v^2)$$

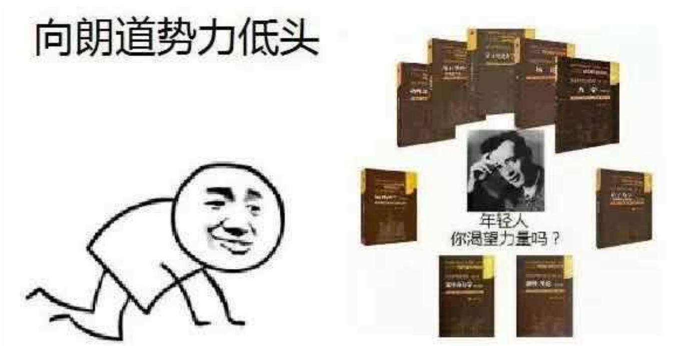
由于拉氏量不显含位置 **r**，$\frac{\partial L}{\partial r}=0$，拉格朗日方程化为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0$$

即$\frac{\partial L}{\partial v}$是常数，而$\frac{\partial L}{\partial v}$仅是速度的函数，所以：

$$\boldsymbol{v}=const$$

即在惯性系中自由质点的速度不变。这就是牛顿第一定律（惯性定律）！



惯性参照系并不是只有一个。事实上，有无穷多个惯性参照系，它们相互做匀速直线运动，不存在某一个“绝对”的惯性系。在所有这些参照系中时间和空间的性质都是相同的。实验表明，所有的力学规律在这些参照系中都是相同的。这被称为*伽利略相对性原理*。

P.S：顺便提一下，把伽利略相对性原理推广，在所有惯性参照系中不仅仅是力学定律，而且电磁学规律也是相同的（事实上，光速不变也是一条电磁学规律。真空光速可以直接从麦克斯韦方程组中推出），我们便得到了狭义相对性原理—狭义相对论的基本公设。继续推广，在所有参照系中所有物理定律都是相同的，我

们便得到了广义相对性原理。这是广义相对论的基本假设之一。

现在假设我们有两个惯性参照系 **K** 和 **K'**。**K'**相对于 **K** 以速度 **V** 运动。同一个质点在这两个参照系中的坐标满足关系式:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t$$

时间满足关系式:

$$t = t'$$

这两个式子被称为伽利略变换。伽利略相对性原理可以表述为:力学运动方程在伽利略变换下具有不变性。

P.S:你可能已经听说了，在狭义相对论中要使用洛伦兹变换。

1.4 构造自由质点的拉氏量

现在我们来用前面讲的伽利略相对性原理来构造自由质点的拉氏量。假设惯性系 **K** 相对于惯性系 **K'**以无穷小速度$\boldsymbol{\epsilon}$运动,则有$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$。由于伽利略相对性原理,经过伽利略变换后运动方程的形式仍与原来相同。因此，**L** 与 **L'**只能相差某个关于时间和坐标的函数对时间的全导数。我们对变换之后的拉氏量进行泰勒展开:

$$L(\boldsymbol{v}'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \epsilon^2) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$$

第二项$2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$必须是对时间的全导数。由于$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$已经是对时间的全导数了,$\frac{\partial L}{\partial v^2}$只能是一个常数。由于自由质点的拉氏量只与$v^2$有关，我们可以得到:

$$L = \frac{m}{2}v^2$$

其中 m 是一个常数，被称为物体的质量。(是不是感到非常熟悉?没错，这就是牛顿力学里面定义的动能（通常用 T 表示)!)

对于无相互作用的质点组成的质点系，由于拉格朗日函数的可加性，我们有：

$$L=\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

前面提到过，将拉氏量乘一个常数不会改变运动方程。在这里对于自由质点的拉氏量，乘以一个常数相当于改变了质量的单位。

众所周知，质量不可能是负的（科幻小说中曲率驱动需要的负能量密度物质，不在我们现在的讨论范围之内）。 这是由于最小作用量原理：

$$S=\int_1^2 \frac{mv^2}{2}dt$$

要使这个积分取最小值。如果质量是可以是负的，对于快速离开点 1 再快速接近点 2 的轨迹，作用量可以取绝对值任意大的负值，也就不存在最小值了。

平时在计算的时候，我们可以利用关系$v^2=\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$把拉氏量写成含有坐标导数的函数：

直角坐标系中：$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$

$$L=\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)$$

球坐标中：$dl^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$

$$L=\frac{m}{2}(r'^2+r^2\theta'^2+r^2\sin^2\theta\,\varphi'^2)$$

柱坐标中：$dl^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$

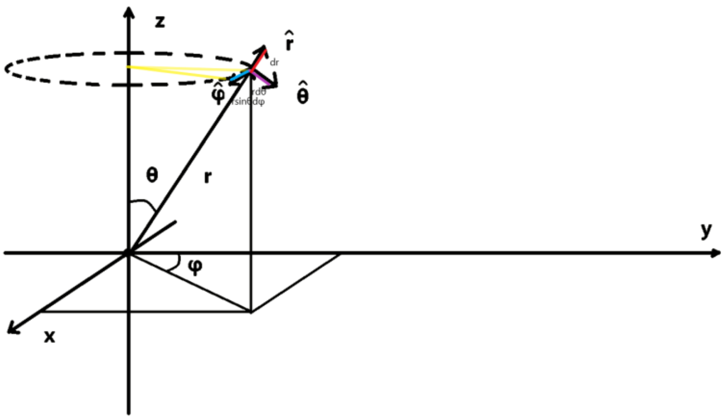
$$L=\frac{m}{2}(r'^2+r^2\varphi'^2+z'^2)$$

PS：任意正交曲线坐标系，坐标微元科可示为du_1,du_2,du_3，对应的长度微元可以认为正比于坐标微元，引入拉梅系数H_1,H_2,H_3为三个比利系数即

$$dl^2 = (H_1 du_1)^2 + (H_2 du_2)^2 + (H_3 du_3)^2$$

这样看，所有不同的表述方法，都只是改变了拉梅系数：

	H_1	H_2	H_3
直角坐标系	1	1	1
柱坐标系	1	r	1
球坐标系	1	r	rsinφ



1.5 质点之间有相互作用的质点系

对于质点之间有相互作用，但不受外界作用的质点系，我们需要在拉氏量中增加一项有关于坐标的函数$-U$（具体形式与相互作用的性质有关）：

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots)$$

U被称作为质点系的势能。

知道了拉氏量后我们就可以来确定运动方程。把拉氏量代入拉格朗日方程经过计算可以得到：

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

定义$\boldsymbol{F}_i=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$为作用在第 i 个质点上的力。可以看到，这就是牛顿第二定律!

或者写为更具有启发性的形式：$\vec{\mathrm{F}}=-\nabla\mathrm{U}$。

势能可以任意增减某个常数而不改变运动方程。这相当于我们可以任意选择势能零点。但是为了计算方便，我们通常选择无穷远处作为势能零点。但是有的时候也会选择其他地方，比如地表作为势能零点。

对于非封闭的质点系 A，它与运动完全已知的质点系 B 相互作用，而 A+B 整体是不受外界作用的。由于 B 的运动完全已知，我们可以把描述 B 的广义坐标看作是已知的、关于时间的函数$q_B(t)$。A+B 总体的拉氏量是：

$$L=T_A(q_A,q_A')+T_B(q_B,q_B')-U(q_A,q_B)$$

由于$q_B=q_B(t)$，$T_B(q_B,q_B')$就变成了只依赖于时间的函数，因此也是某个函数对时间的全导数，可以略去。于是：

$$L_A=T_A(q_A,q_A')-U(q_A,q_B(t))$$

所以对于非封闭的质点系，势能可能显含时间。

1.6 经典力学拉氏量的含义

经典力学中，势能仅依赖于所有质点同一时刻的位置。这意味着任何位置改变会瞬间影响到其它质点。这是一种瞬时作用，*是经典力学的必然结果*。如果作用不是瞬时传递的，而是以一个有限速度传播，在有相对运动的不同参照系中的传播速度不同，那么同一时刻在不同的参照系中就会发现物体受到了不同的作用，因此它们的运动规律也就不同。这违背了伽利略相对性原理。瞬时作用是绝对时间假设的必然结果。狭义相对论通过抛弃绝对时间假设，解释了电磁相互作用的非瞬时性，而广义相对论则解释了引力的非瞬时性。

经典力学拉氏量的形式表明，如果把时间反向，即用-t 代替 t，不会改变拉氏量的形式，进而也不会改变运动方程。这意味着所有遵循经典力学定律的运动都是可逆的。顺便提一下，热力学中会出现不可逆的过程（被称为耗散）。

P.S:你可能已经听说过热力学第二定律了。

1.7 科普：非经典力学的拉氏量

拉格朗日力学更像是一个框架，可以描述各种物理系统。它不仅仅可以描述经典力学，也可以描述相对论、电动力学乃至量子场论。这些物理系统的拉氏量统统都适用于欧拉-拉格朗日方程。让我们来看一些例子：

移动中的粒子的相对论性拉格朗日量：

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V$$

移动于电磁场的带电粒子的相对论性拉格朗日量：

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\boldsymbol{r}) + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

——诶为啥不是除$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$？是打错了吗？自己进行调查。

量子电动力学：$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \sum_n \left(i\hbar c\bar{\psi}_n \not{D}\psi_n - m_n c^2\bar{\psi}_n\psi_n\right) - \frac{1}{4}G^{\alpha}{}_{\mu\nu}G_{\alpha}{}^{\mu\nu}$

量子色动力学：$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = i\hbar c\bar{\psi}\not{D}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

还有，最重要的：（敲黑板）

标准模型：（我有一个绝妙的想法，但是限于这里纸不够了。。。）

1

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu + \\
&\tfrac{1}{2}ig_s^2(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu + \bar{G}^a\partial^2 G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu \bar{G}^a G^b g^c_\mu
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
&- \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
&M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2}M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \\
&\tfrac{1}{2}m_h^2 H^2 - \partial_\mu\phi^+\partial_\mu\phi^- - M^2\phi^+\phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \tfrac{1}{2c_w^2}M\phi^0\phi^0 - \beta_h[\tfrac{2M^2}{g^2} + \\
&\tfrac{2M}{g}H + \tfrac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)] + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - \\
&W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - \\
&W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \\
&\tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2c_w^2(Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + \\
&g^2s_w^2(A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w[A_\mu Z^0_\nu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - g\alpha[H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \\
&\tfrac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2] - \\
&gMW^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu H - \tfrac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - \\
&W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \tfrac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \\
&\phi^+\partial_\mu H)] + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \\
&igs_w MA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + \\
&igs_w A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{4}g^2 W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-] - \\
&\tfrac{1}{4}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + \\
&W^-_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + \\
&W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - \\
&g^1 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^-
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
&- \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m_e^\lambda)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda\gamma\partial\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m_u^\lambda)u^\lambda_j - \\
&\bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m_d^\lambda)d^\lambda_j + igs_w A_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \\
&\tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - \\
&1 - \gamma^5)u^\lambda_j) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5)d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)e^\lambda) + \\
&(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\lambda\kappa}\gamma^\mu(1 + \\
&\gamma^5)u^\lambda_j)] +
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{ig}{2\sqrt{2}}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[-\phi^+(\bar{\nu}^\lambda(1-\gamma^5)e^\lambda) + \phi^-(\bar{e}^\lambda(1+\gamma^5)\nu^\lambda)] - \\
&\tfrac{g}{2}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda)] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m_d^\kappa(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)d^\kappa_j) + \\
&m_u^\lambda(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m_d^\lambda(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m_u^\kappa(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1 - \\
&\gamma^5)u^\kappa_j] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \\
&\tfrac{ig}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j) +
\end{aligned}
$$

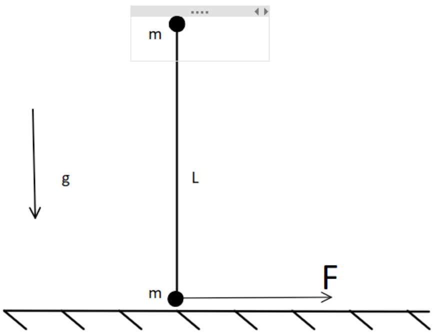
5

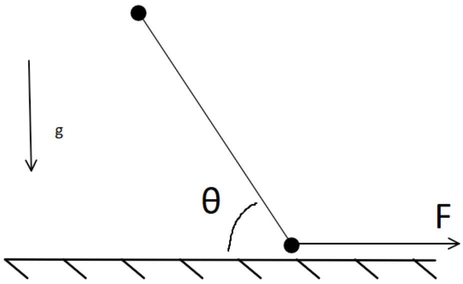
$$
\begin{aligned}
&\bar{X}^+(\partial^2 - M^2)X^+ + \bar{X}^-(\partial^2 - M^2)X^- + \bar{X}^0(\partial^2 - \\
&\tfrac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar{Y}\partial^2 Y + igc_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{X}^0 X^- - \partial_\mu\bar{X}^+ X^0) + igs_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{Y}X^- - \\
&\partial_\mu\bar{X}^+ Y) + igc_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- X^0 - \partial_\mu\bar{X}^0 X^+) + igs_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- Y - \\
&\partial_\mu\bar{Y}X^+) + igc_w Z^0_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu\bar{X}^- X^-) + igs_w A_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \\
&\partial_\mu\bar{X}^- X^-) - \tfrac{1}{2}gM[\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \tfrac{1}{c_w^2}\bar{X}^0 X^0 H] + \\
&\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}igM[\bar{X}^+ X^0\phi^+ - \bar{X}^- X^0\phi^-] + \tfrac{1}{2c_w}igM[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + \\
&igMs_w[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + \tfrac{1}{2}igM[\bar{X}^+ X^+\phi^0 - \bar{X}^- X^-\phi^0]
\end{aligned}
$$

这都是什么鬼 w(ﾟДﾟ)w

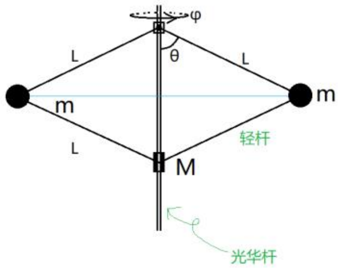
习题 1

1.1 写出此系统的拉格朗日量，得出欧拉-拉格朗日方程





1.2 写出系统的拉格朗日量，并完成以下几问



蒸汽机的非酋飞球调速器

(1.1).假设系统完全自由运动，以初角速度ω转动，且恰好平衡，求θ。

(1.2).写出一般情况下的的欧拉-拉格朗日方程，并且分析$\frac{\partial L}{\partial q}$与牛顿力学里的力有什么区别，相差了那些项，它们在牛顿力学中的对应物是什么？

(2).假设限制调速器以ω转动，那么拉氏量会有什么变化？

解决不了？见《我在高中学到力学果然有问题_续》

Chapter 2 对称性与守恒量 Symmetry and Conservation

一个强大的工具，一个重要的思想：在以前你学习牛顿力学的时候 ，你会发现需要借助很多辅助量的守恒来解答问题，它们究竟是什么，它们从哪里来？

Emmy Noether：二十世纪初的女中豪杰
图源：https://resources.perimeterinstitute.ca/products/emmy-noether?variant=68092329990

阿马莉·埃米·诺特（德语：Amalie Emmy Noether，德语：[ˈnøːtɐ]，1882 年 3 月 23 日－1935 年 4 月 14 日），德国数学家，是抽象代数和理论物理学上声名显赫的人物。帕维尔·亚历山德罗夫、阿尔伯特·爱因斯坦、让·迪厄多内、赫尔曼·外尔和诺伯特·维纳等学者都把诺特誉为历史上最杰出的女性数学家。她所开发的数学领域包括环、域和域上的代数；在物理方面，她所证明的诺特定理揭示了对称性和守恒定律之间的紧密关系。

---- 维基百科

<u>诺特定理：对于每个局部作用下的可微对称性，存在一个对应的守恒流。</u>

通俗解释：诺特定理是理论物理的中心结果之一，它表达了连续对称性和守恒定律的一一对应。例如，物理定律不随着时间而改变，这表示它们有关于时间

的某种对称性。举例来说，若现实中重力的强度每天都有所改变，就会违反能量守恒定律，因为观察者可以在重力弱的那天把重物举起，然后在重力强的时候放下来，这样就得到了比一开始输入的能量更多的能量。

---- 维基百科

2.1 两个 interesting 的守恒量

1．拉氏量不含有时间。

我们先来研究封闭系统 L 对时间的导数，发现不显含 t

可以将$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt}$带入拉氏方程消去$\frac{\partial L}{\partial q}$。

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq}{dt}=\frac{dL}{dt}$$

凑个显而易见的全微分

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\dot{q})+\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L\right)=0$$

嗯这是什么呢？$L=T-V$，那么这不就是能量吗？

于是，由拉氏量不显含时间，得出能量$E\stackrel{\text{def}}{=}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L$不随时间变化，于是能量守恒（机械能守恒）。嗯我们第一章学过，封闭的质点系拉氏量不显含时间，那么这就是能量守恒定律。

2. 拉氏量不显含某一维空间（某个广义坐标）

这个我会，直接带入拉氏方程。$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0$第一项就消失了

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0$$

那好给$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$起个名字，$P\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$，这就是动量守恒。

这里的动量是广义动量，不信你把角度和角速度作为广义坐标带进去，就能获得角动量。

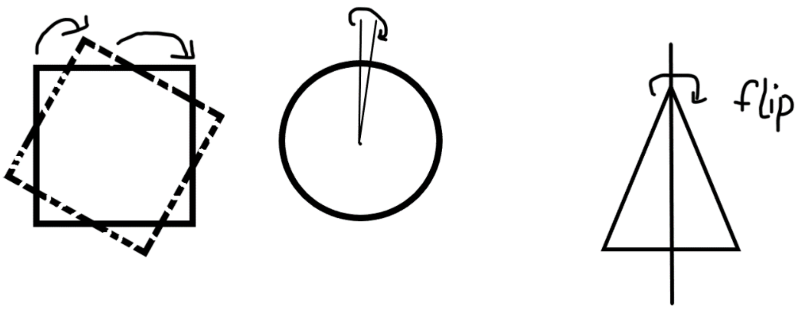
再次获得牛顿方程$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial V}{\partial q}$

2.2 对称性

从上面两个 case，我们已经看到，一种“无关”代表一个量在动力过程中守恒，我们说拉格朗日量具有某种对称性。

PS:这里的守恒量都是时间守恒量，从这里也可以看到经典力学中，时间的地位和空间是不同的。

于是问题铼了，什么是对称性？



旋转对称性：
转九十度原图形不变

旋转对称性：
转任意小角度原图形不变

从小学二年级学的图形对称性中我们可以看到，对称性就是某个对象在某个“操作”下保持不变。对于图形是完全重合，对于拉氏量就是相等。然而你如果细品，就可以发现上面罗列的对称性其实可以分类。

第一类可以称为连续对称性(continual symmetry)。如图二的圆转任意小的角度都不变。那么相应地，第二类称为分立对称性(discrete symmetry)。如正方形

只有转 90 度才能重合，转任意小角时不重合；镜像这个“操作”也不存在翻折一点点的概念。

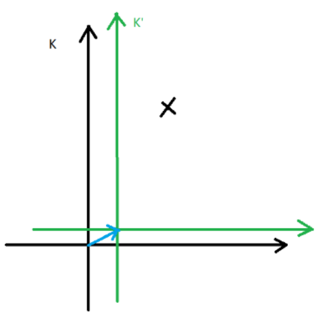
我们深入研究一下连续对称性，然后试试看它对拉格朗日量有什么神奇的要求。

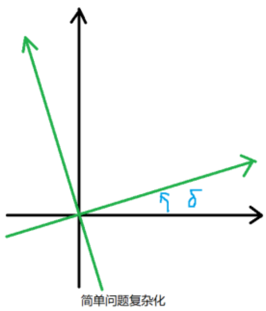
既然有“连续”两个字，肯定有无穷小量。假设有一个参数，名字叫δ，它是个一阶无穷小量。（只是一个参数）一个质点的拉氏量是各个坐标各个速度的函数$L = L(q, \dot{q}, t)$。在研究对象发生了某个小的坐标变换时，各个坐标相应移动了$\delta q_i \propto \delta$

PS：注意这里的δq_i中的δ只是一个代表变化量的记号，不是相乘，右面那个δ是指小量

那么比利系数是什么呢？通过几个简单例子铼看一下。

Case_1 平移一个质点





平移操作ε：$q_i' = q_i + a_i\delta$ ；a_i是常数，也就是比例系数.

Case_2 旋转一个二维坐标系中的粒子

$$\begin{pmatrix} \cos\delta & -sin\delta \\ sin\delta & cos\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

考虑到δ是一阶无穷小量，可以只关注线性项，展开到一阶：

$$\begin{cases} \delta x = -y\delta \\ \delta y = +x\delta \end{cases}$$

通过这两个例子，我们可以看到，不同的“操作”，对应的各个系数是不一样的，而且可能不是常数。

因此我们可以设$\delta q_i = f_i(q)\delta$,注意这里的 q 包含所有坐标，可以理解为一个列向量。

那么对应的广义速度变化量是多少?可以直接对$\delta q_i = f_i(q)\delta$两边求导,那么得出$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(f_i(q))\delta$

2.3 对称性与守恒量之间的关系

2.2 中，有心的同学可以看到，只是给对称性下定义，现在我们研究一个动力学系统,先不管时间的对称性，我们这里延续 2.2 讨论连续的空间对称性。好的老规矩，写出来凑全微分。

$$\delta L = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

$$\delta L = \sum_i^n \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

$$\delta L = \sum_i^n \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right) = 0$$

等等，这守恒量就蹦出来了?

$$\sum_n^i \frac{d}{dt}\big(P_i f_i(q)\big) = 0$$

取个名字就叫它 Q(conserved quantity)

$$Q = \sum_i^n P_i f_i(q) = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial \delta q_i}{\partial \delta}$$

好的，于是你的得到了这个强大的武器，可以将任何连续的空间变换变成守恒量。

PS：能量不是这么出铼的。

2.4 力学相似性

现在我们要做一个太阳系的萎缩微缩模型，假定天体质量不变（纯属扯淡），已知尺寸压缩的比利是10^{18}那么这个太阳系里的地球地球周期变成了多少？

PS：这里说的不是你那个塑料的模型，而是所有天体可以在引力作用下维持运动

由于平方反比，力变十的 36 次方，位置变十的 18 次。

$$10^{36} = F' = m'a' = [M][t]^{-2}[L]$$

好的我们现在

$$F \propto r^{-2}, r \to \alpha r, F \to \alpha^{-2} F, L \to \alpha L$$

简单粗暴直接得出

$$t \to \beta t, \beta = \alpha^{\frac{3}{2}}$$

等等，这熟悉的$\frac{3}{2}$，意味着我们不经意证明了开普勒第三定律

定性半定量地，我们直接得出了结果。很好，这个地球转的飞快，周期是一年的10^{-27}倍。

但是我们学了拉氏力学，就是要分(zhuāng)析(bī)地面对这个问题。

要满足符合动力学方程，拉氏量不能大变，在变换$r \to \alpha r, t \to \beta t$下，拉氏方程能满足，所以拉氏量只能相当于乘了个常数。那么观察拉氏量

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - V(\vec{r})$$

现在我们来假设 V 是关于 r 的 k 次齐次函数，即按照定义

$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^k V(\vec{r})$$

$$L' = \alpha^2\beta^{-2}\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \alpha^k V(\vec{r})$$

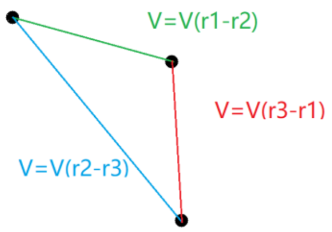
$$\alpha^2\beta^{-2} = \alpha^k$$

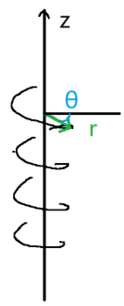
$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

此之谓，力学相似性。

习题 2

1. 试着证明对封闭质点系，动量守恒。提示图：





2. 粒子处在这样形式的势场中，~~这是它内部发生的变化~~

$$V = V(k\theta - z, r)$$

在柱坐标系中简图如上，请给出这个粒子运动过程中的两个守恒量。

3. 开普勒问题中，隆格楞次矢量是守恒的，那么它的对称性是什么？

[康康就好]

4. 用力学相似性证明简谐运动的周期与振幅无关。

5. 借助矢量混合积公式$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$证明角动量（旋转对称性）是$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$

Chapter 3 哈密顿力学 Hamiltonian Mechanics

在这一章之前我们研究了拉格朗日力学。在本章之中，我们将要研究与拉格朗日力学等价的另一套体系—哈密顿力学。在拉格朗日力学中，系统的状态以及之后的演化由某一时刻所有质点的位置和速度确定。实验表明，在某一时刻确定了系统中所有质点的位置和动量同样可以确定系统的状态和之后的演化。（在经典力学中这似乎是废话，毕竟动量 p=mv 和速度只相差了一个常数。然而，在其它力学系统中，动量不一定正比于速度。）以位置和动量来研究系统状态的力学体系就是哈密顿力学。

3.1 哈密顿正则方程

首先我们要做的是推导出哈密顿力学中最重要的方程：哈密顿方程。

PS：这里研究的所有拉氏量均不显含时间。因此，哈密顿量是守恒量。

第一步，我们对拉氏量取全微分（记住，拉格朗日量是坐标和速度的方程）：

$$dL = \Sigma\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i$$

根据广义动量的定义以及拉格朗日方程，我们有：$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$。把这些东西代入：

$$dL = \Sigma\, \dot{p}_i dq_i + \Sigma p_i d\dot{q}_i \ = \Sigma\, \dot{p}_i dq_i + d(\Sigma \mathrm{p_i}\dot{q}_i) - \Sigma\dot{q}_i dp_i$$

移一下项：

$$d(\Sigma \mathrm{p_i}\dot{q}_i - L) = -\Sigma\, \dot{p}_i dq_i + \Sigma\dot{q}_i dp_i$$

前面一章中我们讲过，$\Sigma \mathrm{p_i}\dot{q}_i - L$就是以广义坐标和广义动量表示的能量。我们称它为系统的哈密顿函数：

$$H(p,q,t) = \Sigma \mathrm{p_i}\dot{q}_i - L$$

由于有$dH = -\Sigma\, \dot{p}_i dq_i + \Sigma\dot{q}_i dp_i$， 我们对$p_i, q_i$分别求偏导可以得到：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

这两个式子便是哈密顿方程。因为其形式非常简单而且对称，它也被称为正则方程。

3.2 刘维尔定理

前面说过，系统的状态可以由某一时刻所有的坐标和动量来确定。我们可以把所有的动量和坐标作为坐标轴，张成一个空间（被称为相空间），空间中的某一点便表示系统在某一时刻的状态（注意了这与普通的空间不同。普通的空间坐标轴是表示坐标的，空间中一点表示一个质点的位置）。如果系统有 s 个自由度，相空间就是 2s 维的，因为有 s 个坐标和 s 个动量。当系统发生变化时，表示状态的点便在相空间中运动。它的轨迹被称为相轨道。由此，我们便能把力学问题转化成几何问题。研究相空间几何性质的几何学分支被称为辛几何。

觉着抽象？让我们先从我们熟知的简谐振子说起。

简谐振子的哈密顿量：

$$H = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$$

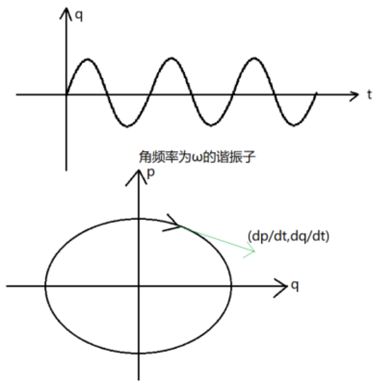
根据广义动量定义，反表示$\dot{q}$：

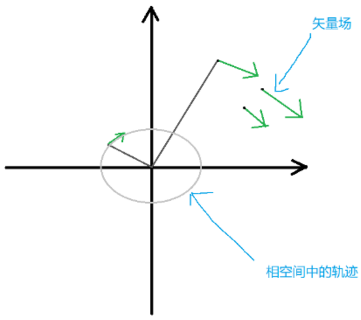
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}; \dot{q} = \frac{p}{m}$$
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

PS：不要说这里显然，还是上面那句话，在一些力学系统中，p 不正比于 q 。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

然后我们可以建立 p-q 空间（相空间），并且在其中以矢量场的形式标出$\dot{q}$和$\dot{p}$。





矢量场： $\vec{A}=(\dot{q},\dot{p});\begin{cases}\dot{q}=\frac{p}{m}\\ \dot{p}=-kq\end{cases}$

那么这些箭头代表的是什么？在经过了极短的时间步长 dt 以后，相空间中位于点(q,p)的点沿$\vec{A}$位移到了$(q+\frac{p}{m}dt,p-kqdt)$的位置，即$\vec{A}$场表示的是力学过程中某个研究对象在相空间中轨迹的切线方向。在简谐振子的情况下，你可以轻松发现这代表任何一点都在椭圆上运动。

那么我们可以发现一个问题，对于任何时刻，所有在某个椭圆上运动的点，下一时刻它还在椭圆上，那么我们可以选定一个椭圆，把它的外侧包起来，然后可以想见的是，不会有任何一个点穿过这个界面。所以整个椭圆的面积不随时间变化。这可以看做二维空间中的流形（即高维空间的几何体）体积不变。

接下来我们要来进行推广：相空间中的流形的体积在系统变化过程中是不是不变的？这便是刘维尔定理的内容。

首先我们来做一些类比。我们来考虑一种不可压缩的流体。不可压缩究竟是什么

意思？不可压缩意味着流体的粒子之间的距离永远不会改变。考虑一定量的流体，那么这一块东西的形状可能在流动过程中发生变化，但是体积不变（比如说我们可以把一定量的水倒进不同形状的杯子里面，尽管形状变了，体积却不变）。这不就是我们要去证明的刘维尔定理吗？所以说，相空间中的流形的性质是否类似于一种不可压缩的流体呢？

不可压缩流体有一个重要的性质。我们在空间中围一个封闭的曲面。我断言，单位时间内流入和流出这个曲面的流体的量是相等的。这是因为，假如有更多的流体流入了这个曲面，这个曲面内流体的量会增多。换句话说，更多的流体聚集在了更小的空间之内，显然，一定量流体的体积改变了。当有更多的流体流出了这个曲面，情况也是一样。因此，单位时间内流入和流出这个曲面的流体的量必然是相等的。

数学上，我们使用通量来描述流体流入这个曲面的量。它的定义为：

$$\Phi = \oiint \boldsymbol{v} \cdot dS$$

其中，v 是流体的速度，dS 是面积元，双重环路积分符号表示对整个曲面积分。

根据高斯定理，我们可以把面积分化成体积分：

$$\Phi = \oiint \boldsymbol{v} \cdot dS = \iiint \nabla \cdot \boldsymbol{v}\ dV$$

其中$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$是散度。

（可能你看到这两个式子会一脸懵逼。很抱歉，限于篇幅，我无法在这里补充更多。我<u>强烈推荐</u>你去阅读《费曼物理学讲义（第二卷）》的第二章和第三章！！！相信你看完以后一定会感到豁然开朗。）

如果通量为零，那么散度必然为零。在相空间中，与速度相对应的便是动量和坐标对时间的变化率$\dot{p_\iota}, \dot{q_\iota}$。也就是上面所谈及的$\vec{A}$场，它的散度是:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \Sigma \frac{\partial \dot{p_\iota}}{\partial p_i} + \Sigma \frac{\partial \dot{q_\iota}}{\partial q_i}$$

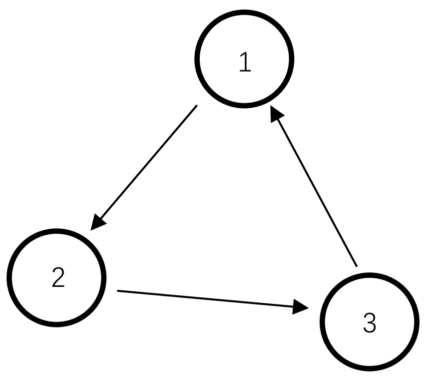
把哈密顿方程$\dot{q_\iota} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$和$\dot{p_\iota} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$代入:

$$-\Sigma \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i \partial q_i} + \Sigma \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i \partial p_i} = 0$$

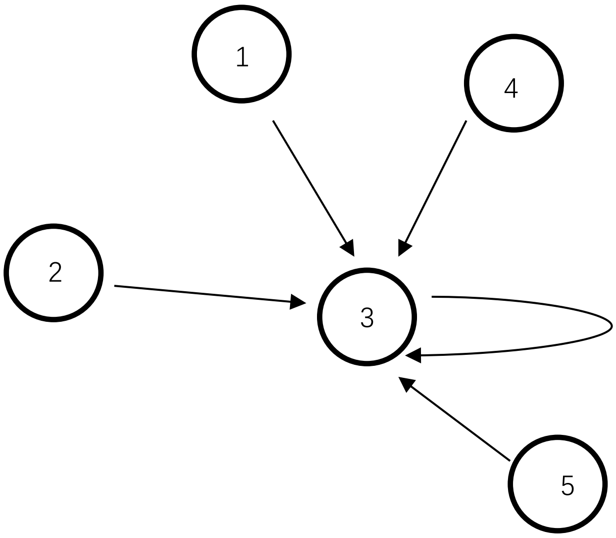
根据前面所说的，这个散度等于零表明相空间中的流形的性质类似于一种不可压缩流体。它的体积在系统变化的过程中是不变的。这便是刘维尔定理!

3.3 刘维尔定理的含义

我们来考虑一个过分简化的系统以及它的演化规律。这个系统只有三个状态，箭头表示演化规律:



这个系统有一个重要的性质：如果它在某一时刻的状态确定了，那么它在过去任何一个时刻和未来任意一个时刻的状态就都确定了。现在来看另一个系统:



与前面一个系统相比，任何一个时刻的状态仅能确定系统在未来的状态，不能确定过去的状态（如果状态是 3，我们就不能确定之前的状态是哪一个）。这个系统是不可逆的！

可以看到，相对于可逆的系统，不可逆的系统有一种聚集的趋势（有分散趋势的时候也是不可逆的。你可以试着画张图）。如果我们围绕状态 3 作一个闭合的曲面，很显然箭头的通量是不为零的。

刘维尔定理说，通过闭合曲面的状态流的通量始终是为零的。也就是说，刘维尔定理表明经典力学是可逆的（之前我们已经由拉氏量不含时证明过这一点）！我们知道了系统在某一时刻的状态，便能知道系统在过去和未来任意时刻的状态。

3.4 泊松括号

在实际运用中，我们经常要对某个关于动量、坐标和时间的函数对时间求全导数：

$$\frac{d}{dt}F(p,q,t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\Sigma(\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p_\iota}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q_\iota})$$

把哈密顿方程$\dot{q_\iota}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$和$\dot{p_\iota}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$代入:

$$\frac{d}{dt}F(p,q,t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\Sigma(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i})$$

如果 F 不含时，那么就有:

$$\frac{d}{dt}F=\Sigma(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i})$$

由于$\Sigma(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i})$这个东西经常要用，但是表达式非常长不怎么好写，我们就发明了一个符号:

$$\{H,F\}$$

来代表这个式子。这被称为 H 与 F 的泊松括号。

于是，我们有:

$$\frac{d}{dt}F(p,q)=\{H,F\}$$

当然了，如果 F 含时还要添上对时间的偏导数项。

事实上，泊松括号不仅可以对 H 和另一个函数求。对于任意两个关于坐标和动量的函数，我们定义它们的泊松括号为:

$$\{f,g\}=\Sigma(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i})$$

泊松括号有以下这些运算法则（证明留作习题，读者自证不难╮(╯-╰)╭):

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$
$$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}$$
$$\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\}$$

若 f,g 之一是动量或者坐标，泊松括号就成了偏导数:

$$\{f,q_i\}=\frac{\partial f}{\partial p_i}$$
$$\{f,p_i\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

由此我们可以得到:

$$\{q_i, q_k\} = 0 \quad \{p_i, p_k\} = 0 \quad \{p_i, q_k\} = \begin{cases} 1\ (i = k) \\ 0\ (i \neq k) \end{cases}$$

雅可比恒等式:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

（这个还真不好证←_←）

泊松定理：如果 f,g 是两个守恒量，则它们的泊松括号也是守恒量:

$$\{f, g\} = const$$

下面我们来看一些有趣的事情。首先我们对动量和位置的同一分量求泊松括号:

$$\{p_i, q_i\} = 1$$

对角动量的 z 分量和 x 坐标求泊松括号:

$$\{M_z, x\} = \{xp_y - yp_x, x\} = -y$$

对角动量的 z 分量和 y 坐标求泊松括号:

$$\{M_z, y\} = \{xp_y - yp_x, y\} = x$$

对角动量 z 分量和 z 坐标求泊松括号:

$$\{M_z, z\} = \{xp_y - yp_x, z\} = 0$$

对角动量 z 分量和动量的各个分量取泊松括号:

$$\{M_z, p_x\} = \{xp_y - yp_x, p_x\} = -p_y$$

$$\{M_z, p_y\} = \{xp_y - yp_x, p_y\} = p_x$$

$$\{M_z, p_z\} = \{xp_y - yp_x, p_z\} = 0$$

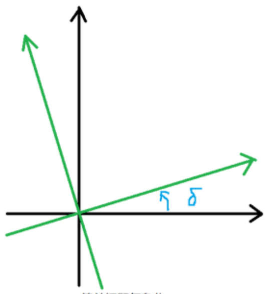
再加上前面的:

$$\frac{d}{dt}F(p, q) = \{H, F\}$$

仔细思考一下这里面有什么规律?

我们发现：动量对应的是空间平移的对称性，角动量对应的是空间的各向同性（旋转对称性），能量（哈密顿量）对应的是时间平移的对称性。而泊松括号的结果正是括号中的另一个物理量在这些操作（空间平移、旋转、时间平移）下变化一个无穷小量时各个坐标改变量前面的系数。

觉着抽象？我们复制一下前面第二章的内容：



$$\begin{cases} \delta x = -y\delta \\ \delta y = +x\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{M_z, x\} = \{xp_y - yp_x, x\} = -y \\ \{M_z, y\} = \{xp_y - yp_x, y\} = +x \\ \{M_z, z\} = \{xp_y - yp_x, z\} = 0 \end{cases}$$

求个导然后，

$$\begin{cases} \delta p_x = -p_y\delta \\ \delta p_y = +p_x\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{M_z, p_x\} = -p_y \\ \{M_z, p_y\} = +p \\ \{M_z, p_z\} = 0 \end{cases}$$

是不是 完 全 一 致 ？

总结一下：把一个守恒量与另一个物理量泊松括号，得到的结果是守恒量相应的对称性发生无穷小改变时这个物理量相应的改变量前面的系数也就是$f_i(q)$。

3.5 哈密顿力学：从经典到量子的阶梯

众所周知，经典力学的众多概念，比如位置、动量、力等等在微观尺度便不再具有原来的含义，必须重新定义。我们不能再使用牛顿力学，利用矢量合成、合外力、加速度等等来研究物体的运动。然而，对于微观粒子，我们还是可以使用哈密顿力学的框架和结论来研究它们的运动。事实上，薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=H\varphi$$

右边的 H 正是哈密顿量的量子对应物—哈密顿算符。我们可以来看一下它的表达式：

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V$$

这正是把经典力学的哈密顿量：

$$H=\frac{p^2}{2m}+V$$

中的动量换成了其量子对应物—动量算符$p=\frac{\hbar}{i}\nabla$。

3.6 哈密顿力学与拉格朗日力学的比较

以下内容来自知乎答主@浅斟低唱（有些内容我们没有涉及到，大家不要慌，以后慢慢学）

作者：浅斟低唱
链接：https://www.zhihu.com/question/377053972/answer/1059732773
来源：知乎

为什么要发明那么多不那么显然的方法？物理是一门实验科学，我们物理实验中关心的绝大多数问题往往不需要我们解出运动方程。

我们有时候关心某些坐标的运动方程，以及其解；这个时候欧拉-拉格朗日方程派上了用场；

有时候实验上能直接测量的实际上是动量，这时候我们关心坐标和动量的演化；这个时候哈密顿正则方程派上了用场。

然而，实验往往受到了时间分辨、空间分辨和智商分辨的限制，我们很多时候并不能直接的得到这个体系的观测量。

对于时间分辨很差的实验，往往我们能看到的都是“轨道”，这个时候我们只能靠 Maupertuis’s principle 给出系统的轨道而非时间依赖；对于空间分辨很差的实验，往往我们只能抛针在一个范围里这时候就需要郎之万理论和刘维尔理论；有些量只能在实验上有限的控制，于是需要反复正则变换“微扰”掉一些 robust 的量得到有效的作用量；有些量我们希望强行控制它不变，于是我们设立了“机器人和控制系”这样类似的专业- -

实验上最好测量的是守恒量，我们想从复杂的力学体系中找到这个守恒量，这时候雅可比方程+分离变量派上了用场。

另外一些好测量的是绝热不变量，也就是在我们用一个“探针”逐步的给系统施加扰动，系统什么量是不会变的，这个量对应着受扰体系的辛形式的部分积分。

另外一些更好测量的量是响应——耗散，于是你会用到推广的切触流形上的哈密顿流的诸多性质。

结束语：所以，物理的庆典不会结束

今天是 2020 年的七夕节。看着小情侣们在朋友圈里秀恩爱，作为一个单身老狗，我窝在我的小黑屋里瑟瑟发抖。关掉朋友圈，打开知乎和微信群，看到的是一群大佬一边秀操作一边卖蒻互膜。于是，我默默地关掉了手机，感叹了一声“我好菜啊”。这时，我想起还没来得及给这个东西写个结束语。于是，便有了这篇文章。

言归正传。这本小册子是我和 zgd 合作完成的。具体来说，我负责了第零章和第三章，zgd 负责了第二章。第一章由我和 zgd 合作完成。写作时，主要参（抄）考（书）了朗道《力学》和 Susskind 的 Classical Mechanics 网课。除此之外，还有一些内容参考了一些知乎答主的文章和回答，部分习题来源于 zgd 的笔记。我已在书中注明了来源以及作者并附上了原帖链接。如果哪一位作者看到后仍然觉得不妥，请私信联系我。

这本小册子的目标读者是懂微积分但是不搞竞赛的高考党和出国党（竞赛大佬请出门右转直接去看朗道←_←）。本书旨在给这些小朋友们提供一个分析力学的大致介绍。高中物理（无论国内国外）把力学简化成一些斜面与小木块的无聊问题，致使很多人丧失了对力学乃至对物理的兴趣。在高考的压力之下，很多人只学考纲内的，对考纲外的知识没有一丁点了解。记得高考考完上羟基课时，qq 空间里居然有人发帖说不知道什么是动量（上海等级考考纲已经删去了动量）。希望这本书能够帮助有兴趣但没有精力搞竞赛的小朋友多了解一些课本之外的内容。力学不仅仅是小木块与斜面。力学也不仅仅可以从牛顿三定律出发。利用其它假设建立的力学体系可以描述同样的现象并有着更广泛的适用性。力学更与

物理学各个领域有着紧密的联系。如果读者能够在读完本书之后意识到这一点，我们的目标便达成了。

本书的定位是给普通中学生的课外读物，因此在理论完整性以及严密性方面有所不足。具体来说，书中没有涉及任何力学的应用（例如刚体、振动、天体运动等）。哈密顿力学中一些重要内容（哈密顿-雅可比方程、正则变换、绝热不变量等）也没有涉及到。书中的一些推导使用了物理图像更好但数学严谨性不足的方式。此外，与一般理论力学教材不同的是，本书中有一部分科普内容来介绍理论力学与其它物理学领域的联系。

希望小朋友们看完本书后能够对力学产生兴趣，继续学习（可以参考我们的推荐书目），物理的庆典不会结束！

最后，这本书也算是我和 zgd 给 jdfz 的一份毕业礼物。

l.y

qq:1723334724

知乎@我好菜啊

于 2020 年七夕节