**Ejercicio 1 (4 ptos).** Demostrar que la siguiente ecuación es cierta para todo entero positivo $n$, **utilizando el principio de inducción.**

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$n \geq k \geq 0$

Donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, si $n \geq k \geq 0$; caso contrario, $\binom{n}{k} = 0$

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} = \frac{k(k-1)\cancel{(k-2)!}}{2\cancel{(k-2)!}}$$

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n+1-3)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{6\cancel{(n-2)!}}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

Parafraseo
Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}\right\} P(n)$$

Inducción en "n"

Caso Base

$n=2$ $\quad \sum_{k=1}^{2} \frac{k(k-1)}{2} = 0+1 = 1 = \frac{(2-1)\cancel{(2)}(2+1)}{\cancel{6}} = 1$ ✓

Para $n > 2$

hipotesis Inductiva $\quad P(n)$ es true $\longrightarrow$ ¿$P(n+1)$ es true?

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$ $\longrightarrow$ ¿$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$?

Por hi.

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} + \frac{(n+1)(n)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n+1)(n)}{2}$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1+3}{6}\right)$$

$$\therefore P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \square$$

**Ejercicio 2 (5 ptos).** Angel estuvo buscando un algoritmo de ordenación absolutamente desconocido en un libro de Análisis, que recibe un array $v[1 \dots n]$:

NotBlossomSort$(v, n)$

**for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$
    **for** $j \leftarrow n$ **to** $i+1$
        **if** $v[j] > v[j-1]$
            \\eres tú, simple rotation?
            $k \leftarrow v[j]$
            $v[j] \leftarrow v[j-1]$
            $v[j-1] \leftarrow k$

$(a)$ Analice el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**: Debe encontrar una función $T(n)$ que utilice $n$, algunas constantes, y posiblemente algunas variables adicionales.

$(b)$ Realice el análisis del mejor y peor caso del **NotBlossomSort**: Describa los escenarios donde se alcanza el mejor y peor caso, respectivamente. Justifique, y acote $T(n)$ con el tiempo de ejecucion en ambos casos extremos. Observe que estas dos cotas solo dependerán de $n$ y de las constantes.

$(c)$ Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden $\Theta$ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

**Ejercicio 3 (8 ptos).** ¿Verdadero o falso? Justifique adecuadamente.

(a) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \lfloor \frac{x}{ab} \rfloor$, para todo par de enteros positivos $a, b$ y todo real positivo $x$.

1

$$\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = m \rightarrow \quad m \leq \frac{x}{a} < m+1$$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{b} \right\rfloor = n \rightarrow \quad n \leq \frac{m}{b} < n+1$$

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = p \longrightarrow \quad p \leq \frac{x}{ab} < p+1$$

Demostrar que $p = n$

- $\left( m \leq \frac{x}{a} \right) \times \frac{1}{b}$

$$\underbrace{n \leq \frac{m}{b} \leq \frac{x}{ab}}_{\text{transitividad}} \Rightarrow n \leq \frac{x}{ab} \quad \text{---} \; (I)$$

Obs: $a, b \in \mathbb{Z}$

$a < b \iff a \leq b-1$

- $\frac{m}{b} < n+1 = m < b(n+1)$ ...

$$\frac{m+1}{b} \leq n+1$$

ahora de:

$$\left( \frac{x}{a} < m+1 \right) \times \frac{1}{b}$$

$$\underbrace{\frac{x}{ab} < \frac{m+1}{b} \leq n+1}$$

por transitividad: $\frac{x}{ab} < n+1$ ... (II)

∴ Juntando I y II ∴

$$n \leq \frac{x}{ab} < n+1$$

(V)

∴ $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = n = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$ $\square$

$$(b)\ \sqrt{20+24n} = \Theta(\sqrt{2024n-2023}) \quad \nearrow g(n)$$

$\exists\ c_1, c_2, n_0$ tq $\forall\ n \geq n_0 \implies c_1\, g(n) \leq \sqrt{20+24n} \leq c_2\, g(n)$

1° Probaremos Big-O:

$$\sqrt{20+24n} \leq c_2\left(\sqrt{2024n-2023}\right)$$

$$24n+20 \leq 2024n-2023$$

$$2043 \leq 2000n$$

$$\frac{2043}{2000} \leq n \implies 2 \leq n$$

$$\implies 24n+20 \leq 2024n-2023 \quad \forall\ n \geq 2$$

$\sqrt{\ }$

$$\sqrt{24n+20} \leq 1\left(\sqrt{2024n-2023}\right) \forall\ n \geq 2$$

$\hookrightarrow c_2 = 1 \quad \forall\ n \geq 2$

2° Probaremos Big-$\Omega$

$$c_1\left(\sqrt{2024n-2023}\right) \leq \sqrt{24n+20}$$

$$c_x(2024n-2023) \leq 24n+20$$

Para un $c_x = \frac{24}{2024}$

$$\hookrightarrow \frac{24}{2024}(2024n-2023) = 24n - \overbrace{\frac{24 \times 2023}{2024}}^{a}$$

$$24n - a \leq 24n+20 \quad \forall\ n \geq \emptyset$$

$$\implies \frac{24}{2024}(2024n-2023) \leq 24n+20$$

$\sqrt{\ }$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{24}{2024}}}_{c_1}\sqrt{2024n-2023} \leq \sqrt{24n+20} \quad \forall\ n \geq 0$$

$\therefore$ Para $c_1 = \sqrt{\frac{24}{2024}} \wedge c_2 = 1$

y $n_0 = 2$

$\forall\ n \geq 2$

$c_1\, g(n) \leq F(n) \leq c_2\,(g(n))$

$\therefore\ F(n) = \Theta(g(n))$ //

(c) Si $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = \Theta(h(n))$, entonces $f(n) = \Theta(h(n))$ Para toda terna de funciones no negativas $f, g, h$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f(n) \leq c\, g(n) \\ c_1 (h(n)) \leq g(n) \leq c_2 (h(n)) \end{array}\right\} \quad c_1\, h(n) \leq f(n) \leq c_2\, h(n)$$

$$f(n) \leq c_2\, h(n)$$

(d) $\sum_{k=1000}^{2024} n^k = \Theta(n^{2024})$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$C_2 n^{2024} \leq \sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq C_1 n^{2024}$$

$$\frac{n^{2025}-1}{n-1} - n$$

Para inferior $C_2 = 1$

$$\sum_{k=0}^{999} \quad \frac{n^{1000}-1}{n-1}$$

$$C_2 n^{2024} \leq n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024}$$

$$n^{2024} \leq \underbrace{\hphantom{xxxxx}}_{\times}$$ ✓ cumple

$5-2+1$

Para superior

$$\underbrace{n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024}}_{\text{separamos}} \leq C_1 n^{2024}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} n^{2024} \leq n^{2024} & \forall n \geq 1 \\ n^{2023} \leq n^{2024} & \forall n \geq 1 \\ \vdots & \\ n^{1000} \leq n^{2024} & \forall n \geq 1 \end{array}\right. +$$

$\underbrace{2024-1000+1}$ 1025 veces

$$n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024} \leq 1025\, n^{2024}$$

$$\therefore \sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq 1025\, n^{2024} \quad C_1 = 1025 \quad \forall n \geq 1$$

$\therefore$ Para $C_1 = 1025$ y $C_2 = 1$ y $n_0 = 1$

$$\Rightarrow 1 n^{2024} \leq \sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq \underline{1025\, n^{2024}}$$

$$\therefore \sum_{k=1000}^{2024} n^k = \Theta(n^{2024})$$

**Ejercicio 4 (3 ptos).** Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

$$2n\lg n = O\left(n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4\right)$$

$\Rightarrow \exists\, c, n_0 > 0$ tq $\forall n \geq n_0 \rightarrow 2n\lg n \leq c\left(n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4\right)$

$\Leftrightarrow$ Sera mi torta

$n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{c}\, 2n\lg n$

las demas pedazos lo acoto a la mitad de mi torta $\rightarrow \frac{1}{2} n\lg n$

1) $100\lceil\frac{2n}{3}\rceil \leq \frac{1}{4} n\lg n$

2) $\lg n \leq \frac{1}{4} n\lg n$

1) $100\lceil\frac{2n}{3}\rceil \leq 100\lceil\frac{3n}{3}\rceil = \underbrace{100n \leq \frac{1}{4} n\lg n}$

$\Leftrightarrow$

$100n \leq \frac{1}{4} n\lg n$

$400 \leq \lg n$

$2^{400} \leq 2^{\lg n}$

$2^{400} \leq n$

$\therefore\ \forall n \geq 2^{200}$

$\hookrightarrow 100n \leq \frac{1}{2} n\lg n$

Por transitividad

$100\lceil\frac{2n}{3}\rceil \leq \frac{1}{2} n\lg n$

2) $\lg n \leq \frac{1}{2} n\lg n$

$\forall\, 4 \leq n$

$\hookrightarrow \lg n \leq \frac{1}{2} n\lg n$

Juntando las partes tengo que

$n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4 \geq n\lg n - \frac{1}{4} n\lg n - \frac{1}{4} n\lg n$

$n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{2} n\lg n = \frac{1}{4}\cdot 2n\lg n$

$n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{4}\, 2n\lg n$

$4\left(n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4\right) \geq 2n\lg n$

$\therefore$ Para un $c = 4$ y $n_0 = 2^{400}$

$\forall n \geq n_0$

Se tendra que

$2n\lg n \leq 4\left(n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4\right)$

$\therefore\ 2n\lg n = O\left(n\lg n - 100\lceil\frac{2n}{3}\rceil - \lg n + 4\right)$ $\square$