

Ejercicio 1 (4 pts). Demostrar que la siguiente ecuación es cierta para todo entero positivo n , utilizando el principio de inducción.

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$n \geq k \geq 0$$

Donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, si $n \geq k \geq 0$; caso contrario, $\binom{n}{k} = 0$

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} = \frac{k(k-1)\cancel{(k-2)!}}{2\cancel{(k-2)!}}$$

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n+1-3)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{6\cancel{(n-2)!}}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

Parafraseo
Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} \quad P(n)$$

Inducción en n

Caso Base

$$n=2 \quad \sum_{k=1}^2 \frac{k(k-1)}{2} = 0+1 = 1 = \frac{(2-1)(2)(2+1)}{6} = 1 \quad \checkmark$$

Para $n \geq 2$

hipotesis Inductiva $P(n)$ es true \longrightarrow ¿ $P(n+1)$ es true?

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} \quad \text{Por hi.} \quad \longrightarrow \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n+1)(n)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n+1)(n)}{2}$$

$$(n+1)(n) \left(\frac{n-1}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(n+1)(n) \left(\frac{n-1+3}{6} \right)$$

$$\text{D.D.} \quad P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \text{D.}$$

Ejercicio 2 (5 pts). Angel estuvo buscando un algoritmo de ordenación absolutamente desconocido en un libro de Análisis, que recibe un array $v[1 \dots n]$:

```
NOTBLOSSOMSORT( $v, n$ )
1: for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
2:   for  $j \leftarrow n$  to  $i + 1$ 
3:     if  $v[j] > v[j - 1]$ 
4:       \\eres tú, simple rotation?
5:        $k \leftarrow v[j]$ 
6:        $v[j] \leftarrow v[j - 1]$ 
7:        $v[j - 1] \leftarrow k$ 
```

- (a) Analice el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**: Debe encontrar una función $T(n)$ que utilice n , algunas constantes, y posiblemente algunas variables adicionales.
- (b) Realice el análisis del mejor y peor caso del **NotBlossomSort**: Describa los escenarios donde se alcanza el mejor y peor caso, respectivamente. Justifique, y acote $T(n)$ con el tiempo de ejecución en ambos casos extremos. Observe que estas dos cotas solo dependerán de n y de las constantes.
- (c) Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden Θ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

Ejercicio 3 (8 pts). ¿Verdadero o falso? Justifique adecuadamente.

(a) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$, para todo par de enteros positivos a, b y todo real positivo x .

$$\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = n \rightarrow n \leq \frac{x}{a} < n+1$$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor = n \rightarrow n \leq \frac{n}{b} < n+1$$

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = p \rightarrow p \leq \frac{x}{ab} < p+1$$

Demstrar que $p = n$

$$\left(n \leq \frac{x}{a} \right) \times \frac{1}{b}$$

$$n \leq \frac{n}{b} \leq \frac{x}{ab} \Rightarrow n \leq \frac{x}{ab} \quad \dots (I)$$

transitividad

Obs: $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b-1$$

$$\frac{n}{b} < n+1 = m < b(n+1)$$

$$\frac{n+1}{b} \leq n+1$$

ahora de:

$$\left(\frac{x}{a} < n+1 \right) \times \frac{1}{b}$$

$$\frac{x}{ab} < \frac{n+1}{b} \leq n+1$$

por transitividad:

$$\frac{x}{ab} < n+1 \quad \dots (II)$$

o.o Juntando I y II:

$$n \leq \frac{x}{ab} < n+1$$

(V)

$$\text{o.o } \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = n = \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \right\rfloor \quad \square$$

$$(b) \sqrt{20 + 24n} = \Theta(\sqrt{2024n - 2023}) \xrightarrow{g(n)}$$

$$\exists c_1, c_2, n_0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 \Rightarrow c_1 g(n) \leq \sqrt{20 + 24n} \leq c_2 g(n)$$

1º Problemas Big-O:

$$\sqrt{20 + 24n} \leq c_2 (\sqrt{2024n - 2023})$$

$$24n + 20 \leq 2024n - 2023$$

$$2043 \leq 2000n$$

$$\frac{2043}{2000} \leq n \Rightarrow 2 \leq n$$

$$\Rightarrow \sqrt{24n + 20} \leq \sqrt{2024n - 2023} \quad \forall n \geq 2$$

$$\sqrt{24n + 20} \leq 1 (\sqrt{2024n - 2023}) \quad \forall n \geq 2$$

2º Problemas Big-Ω

$$\hookrightarrow c_2 = 1 \quad \forall n \geq 2$$

$$c_1 (\sqrt{2024n - 2023}) \leq \sqrt{24n + 20}$$

$$c_x (2024n - 2023) \leq 24n + 20$$

$$\text{Para un } c_x = \frac{24}{2024}$$

$$\hookrightarrow \frac{24}{2024} (2024n - 2023) = 24n - \frac{24 \times 2023}{2024}$$

$$24n - a \leq 24n + 20 \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{24}{2024} (2024n - 2023) \leq 24n + 20$$

$$\sqrt{\frac{24}{2024}} \sqrt{2024n - 2023} \leq \sqrt{24n + 20} \quad \forall n \geq 0$$

$\rightarrow c_1$

o Para $c_1 = \sqrt{\frac{24}{2024}}$ y $c_2 = 1$

o $n_0 = 2$

$\forall n \geq 2$

$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

o $f(n) = \Theta(g(n))$

(c) Si $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = \Theta(h(n))$, entonces $f(n) = \Theta(h(n))$ Para toda terna de funciones no negativas f, g, h .

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq f(n) \leq c g(n) \\ c_1 h(n) \leq g(n) \leq c_2 h(n) \end{array} \right\} c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$$

$$f(n) \leq c_2 h(n)$$

$$(d) \sum_{k=1000}^{2024} n^k = \Theta(n^{2024})$$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$c_2 n^{2024} \leq \sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq c_1 n^{2024}$$

Para inferior $c_2 = 1$

$$c_2 n^{2024} \leq n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024}$$

$$n^{2024} \leq \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \checkmark \text{ cumple}$$

Para superior

$$n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024} \leq c_1 n^{2024}$$

separamos

$$\underbrace{2024 - 1000 + 1}_{1025 \text{ veces}} \left\{ \begin{array}{l} n^{2024} \leq n^{2024} \quad \forall n \geq 1 \\ n^{2023} \leq n^{2024} \quad \forall n \geq 1 \\ \vdots \\ n^{1000} \leq n^{2024} \quad \forall n \geq 1 \end{array} \right.$$

$$n^{1000} + n^{1001} + \dots + n^{2024} \leq 1025 n^{2024}$$

$$\sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq 1025 n^{2024} \quad c_1 = 1025 \quad \forall n \geq 1$$

o Para $c_1 = 1025$ y $c_2 = 1$ y $n_0 = 1$

$$\Rightarrow 1 n^{2024} \leq \sum_{k=1000}^{2024} n^k \leq 1025 n^{2024} \quad \square$$

$$\sum_{k=1000}^{2024} n^k = \Theta(n^{2024})$$

Ejercicio 4 (3 pts). Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

$$2n \lg n = O\left(n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4\right)$$

$$\exists C, n_0 > 0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 \rightarrow 2n \lg n \leq C \left(n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4 \right)$$

Sea mi torta
los demás pedazos lo $\rightarrow \frac{1}{2} n \lg n$
acoto a la mitad de mi torta

$$n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{C} 2n \lg n$$

$$1) \quad 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \leq 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil = 100n \leq \frac{1}{4} n \lg n$$

$$1) \quad 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \leq \frac{1}{4} n \lg n$$

$$2) \quad \lg n \leq \frac{1}{4} n \lg n$$

$$2) \quad \lg n \leq \frac{1}{2} n \lg n$$

$$\forall \lg \leq n$$

$$\hookrightarrow \lg n \leq \frac{1}{2} n \lg n$$

$$100n \leq \frac{1}{4} n \lg n$$

$$400 \leq \lg n$$

$$2^{400} \leq 2^{\lg n}$$

$$2^{400} \leq n$$

$$\forall n \geq 2^{400}$$

$$\hookrightarrow 100n \leq \frac{1}{2} n \lg n$$

Por transitividad

$$100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \leq \frac{1}{2} n \lg n$$

Juntando las partes tengo que

$$n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4 \geq n \lg n - \frac{1}{4} n \lg n - \frac{1}{4} n \lg n$$

$$n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{2} n \lg n = \frac{1}{4} \cdot 2n \lg n$$

$$n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4 \geq \frac{1}{4} 2n \lg n$$

$$4 (n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4) \geq 2n \lg n$$

o Para un $C=4$ y $n_0 = 2^{400}$

$$\forall n \geq n_0$$

Se tendrá que

$$2n \lg n \leq 4 (n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4)$$

$$\text{o} \quad 2n \lg n = O(n \lg n - 100 \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - \lg n + 4) \quad \underline{\underline{Q.E.D.}}$$

