

Ejercicio 1 (4 pto). Pruebe por inducción que

$$\sum_{k=0}^n 2^k \leq c 2^n \} P(n)$$

para alguna constante $c > 0$.

$P(1) \rightarrow \sum_{k=0}^1 2^k \leq c 2^1 \rightarrow 2^0 + 2^1 \leq c 2^1$
 $3 \leq 2c \rightarrow c \geq \frac{3}{2}$

$n > 1$

H.i. $\sum_{k=0}^n 2^k \leq c 2^n \rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \leq c 2^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) + 2^{n+1} \leq c 2^n + 2^{n+1} \leq c 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} \left(\frac{c}{2} + 1 \right) \Rightarrow 2^{n+1} \left(\frac{c+1}{2} \right) \leq c 2^{n+1}$$

\Rightarrow si $c \geq \frac{1}{2}$ y $c \geq 2$

\hookrightarrow cumple que $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \leq c 2^{n+1}$

$\frac{c+1}{2} \leq c$
 $1 \leq \frac{c}{2}$
 $2 \leq c$

Probando con $c=2$

B.O.: $P(1) \rightarrow \sum_{k=0}^1 2^k \leq 2(2^1) \Rightarrow 2^0 + 2^1 \leq 2 \cdot 2^1$

$3 \leq 4 \checkmark$

H.i.: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k + 2^{n+1} \leq 2 \cdot 2^n + 2^{n+1}$

$$\leq 2^{n+1} + 2^{n+1}$$

$$\leq 2 \cdot 2^{n+1}$$

$\sum_{k=0}^n 2^k \leq 2 \cdot 2^n$

Ejercicio 2 (7 ptos). Considere el siguiente algoritmo, que recibe una matriz $A[1..n, 1..n]$ de números enteros positivos.

```
ALGO( $A$ )
1: for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
2:   for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$ 
3:     for  $k \leftarrow i$  to  $n$ 
4:        $A[j, k] \leftarrow A[j, k] - A[i, k] \cdot A[j, i] / A[i, i]$ 
```

- (a) Analize el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**. Debe encontrar una función $T(n)$ que depende únicamente de n y algunas constantes
- (b) Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden Θ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

$$(a) \ n^2 - 1000n^{99} = O(n^9)$$

$$\exists n_0 > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall n \geq n_0 \rightarrow n^2 - 1000n^{99} \leq C n^9$$

$$n^2 \leq n^9 \quad \forall n \geq 1$$

$$-1000n^{99} \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$\forall n \geq 1$$

$$\text{tememos que } n^2 \leq n^9$$

$$n^2 - 1000n^{99} \leq n^9 \quad \forall n \geq 1 \text{ y } C=1$$

$$\text{o sea Para } n_0 = 1 \text{ y } C=1$$

$$\forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \underline{n^2 - 1000n^{99} \leq n^9} \quad \square \quad (V)$$

$$(c) \ n^2 - 999n - 99999 = O(n^2) \quad (V)$$

$$n^2 \leq n^2 \quad \forall n \geq 1$$

$$n^2 - 999n - 99999 \leq n^2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\exists C=1 \text{ y } n_0=1 \text{ t.q.} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \underline{n^2 - 999n - 99999 \leq n^2} \quad \square$$

$$(c) \ \sum_{k=1}^n k^{99} = \Theta(n^{100})$$

$$1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + \dots + n^{99} \leq C n^{100}$$

$$\text{Neces} \left\{ \begin{array}{l} 1^{99} \leq n^{99} \\ 2^{99} \leq n^{99} \\ \vdots \\ n^{99} \leq n^{99} \end{array} \right\} +$$

$$\sum_{k=1}^n k^{99} \leq n^{100} \quad \forall n \geq 1$$

