Ejercicio 1 (4 ptos). Demostrar que la siguiente ecuación es cierta para todo entero positivo n, **utilizando el principio de inducción.**

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$n \geq k \geq 0$

Donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, si $n \geq k \geq 0$; caso contrario, $\binom{n}{k} = 0$

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} = \frac{k(k-1)\cancel{(k-2)!}}{2\cancel{(k-2)!}}$$

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n+1-3)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{6\cancel{(n-2)!}}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

Parafraseo
Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}\right\} P(n)$$

Inducción en "n"

Caso Base

$n=2$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{k(k-1)}{2} = 0+1 = 1 = \frac{(2-1)\cancel{(2)}(2+1)}{\cancel{6}} = 1 \checkmark$$

Para $n > 2$

hipotesis Inductiva $P(n)$ es true $\longrightarrow$ ¿$P(n+1)$ es true?

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$ $\longrightarrow$ ¿$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$?

Por hi.

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} + \frac{(n+1)(n)}{2} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n+1)(n)}{2}$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1+3}{6}\right)$$

$$\therefore P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \;\square$$

Ejercicio 2 (5 ptos). Angel estuvo buscando un algoritmo de ordenación absolutamente desconocido en un libro de Análisis, que recibe un array $v[1 \dots n]$:

```
NotBlossomSort(v, n)
for i ← 1 to n − 1
    for j ← n to i + 1
        if v[j] > v[j − 1]
            \\eres tú, simple rotation?
            k ← v[j]
            v[j] ← v[j − 1]
            v[j − 1] ← k
```

(*a*) Analice el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**: Debe encontrar una función $T(n)$ que utilice n, algunas constantes, y posiblemente algunas variables adicionales.

(*b*) Realice el análisis del mejor y peor caso del **NotBlossomSort**: Describa los escenarios donde se alcanza el mejor y peor caso, respectivamente. Justifique, y acote $T(n)$ con el tiempo de ejecucion en ambos casos extremos. Observe que estas dos cotas solo dependerán de n y de las constantes.

(*c*) Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden Θ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

Ejercicio 3 (8 ptos). ¿Verdadero o falso? Justifique adecuadamente.

(*a*) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \lfloor \frac{x}{ab} \rfloor$, para todo par de enteros positivos a, b y todo real positivo x.

1

$\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = m \rightarrow m \leq \frac{x}{a} < m+1$

$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \lfloor \frac{m}{b} \rfloor = n \rightarrow n \leq \frac{m}{b} < n+1$

$\lfloor \frac{x}{ab} \rfloor = p \longrightarrow p \leq \frac{x}{ab} < p+1$

Demostrar que $p = n$

- $\left(m \leq \frac{x}{a}\right) \times \frac{1}{b}$

$n \leq \frac{m}{b} \leq \frac{x}{ab} \Rightarrow n \leq \frac{x}{ab}$ .... (I)

transitividad

Obs: $a, b \in \mathbb{Z}$

$a < b \iff a \leq b-1$

- $\frac{m}{b} < n+1 = m < b(n+1)$ ∴

$\frac{m+1}{b} \leq n+1$

ahora de:

$\left(\frac{x}{a} < m+1\right) \times \frac{1}{b}$

$\frac{x}{ab} < \frac{m+1}{b} \leq n+1$ por transitividad: $\frac{x}{ab} < n+1$ .... (II)

∴ Juntando I y II :

$n \leq \frac{x}{ab} < n+1$ (V)

∴ $\lfloor \frac{x}{ab} \rfloor = n = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$ □

$$(b)\ \sqrt{20+24n} = \Theta(\underbrace{\sqrt{2024n-2023}}_{g(n)})$$

$\exists\, c_1, c_2, n_0$ tq $\forall\, n \geq n_0 \implies c_1\, g(n) \leq \sqrt{20+24n} \leq c_2\, g(n)$

Desarrollo:

$c_1 \sqrt{2024n-2023} \leq \sqrt{20+24n}$

$c_1^2 (2024n - 2023) \leq 20+24n$