Ejercicio 1 (4 pto). Pruebe **por inducción** que

$$\left.\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq c2^n \right\} P(n)$$

para alguna constante $c > 0$.

CB: $P(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} 2^k \leq c2^n \rightarrow 2^0 + \cancel{2}^1 \leq c\,\cancel{2}$

$3 \leq 2c \Rightarrow c \geq \frac{3}{2}$

$n > 1$

H.i.: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq c2^n \longrightarrow ¿\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \leq c2^{n+1}$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \leq c2^n + 2^{n+1} \leq c2^{n+1}$

$2^{n+1}\left(\frac{c}{2} + 1\right) \Rightarrow 2^{n+1}\left(\frac{c}{2}+1\right) \leq c2^{n+1}$

$\frac{c}{2} + 1 \leq c$

$1 \leq \frac{c}{2}$

$2 \leq c$

$\Rightarrow$ Si $c \geq \frac{3}{2}$ $\wedge$ $c \geq 2$

$\hookrightarrow$ cumple que $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \leq c2^n$

Probando con $c = 2$

CB: $P(1) \rightarrow \sum_{k=0}^{n} 2^k \leq 2(2^n) \Rightarrow 2^0 + 2^1 \leq 2 \times 2^1$

$3 \leq 4$ ✓

Hi: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq 2 \times 2^n$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \leq 2 2^n + 2^{n+1}$

$\leq 2^{n+1} + 2^{n+1}$

$\leq 2 . 2^{n+1}$ ✓

Ejercicio 2 (7 ptos). Considere el siguiente algoritmo, que recibe una matriz $A[1..n, 1..n]$ de números enteros positivos.

ALGO(A)

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$
    for $j \leftarrow i+1$ **to** n
        for $k \leftarrow i$ **to** n
            $A[j,k] \leftarrow A[j,k] - A[i,k] \cdot A[j,i]/A[i,i]$

(a) Analize el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**. Debe encontrar una función $T(n)$ que depende únicamente de n y algunas constantes

(b) Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden Θ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

(a) $n^2 - 1000n^{99} = O(n^9)$

$\exists\ c, n_0 > 0$ tq $\forall n \geq n_0 \longrightarrow n^2 - 1000n^{99} \leq c\,n^9$

$n^2 \leq n^9 \quad \forall\ n \geq 1$

$-1000n^{99} \leq 1 \quad \forall\ n \geq 1$

$\forall\ n \geq 1$

tenemos que $n^2 \leq n^9$

$n^2 - 1000n^{99} \leq n^9 \quad \forall\ n \geq 1$ y $c = 1$

$\therefore$ Para $n_0 = 1$ y $c = 1$

$\forall\ n \geq 1$

$\Rightarrow \underline{n^2 - 1000n^{99} \leq n^9}$ $\square$ (V)

(c) $n^2 - 999n - 99999 = O(n^2)$ (V)

$n^2 \leq n^2 \quad \forall\ n \geq 1$

$n^2 - 999n - 99999 \leq n^2 \quad \forall\ n \geq 1$

$\exists\ c = 1$ y $n_0 = 1$ tq $\forall\ n \geq 1$

$\Rightarrow \underline{n^2 - 999n - 99999 \leq n^2}$ $\square$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^{99} = \Theta(n^{100})$ $\longrightarrow$ $\forall$ $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + \ldots n^{99} \leq C n^{100}$

n veces $\left\{ \begin{array}{l} 1^{99} \leq n^{99} \\ 2^{99} \leq n^{99} \\ \vdots \\ n^{99} \leq n^{99} \end{array} \right\} +$

$\sum_{k=1}^{n} k^{99} \leq n^{100} \quad \forall \quad n \geq$

Obs: con raices cuadradas el desfase

$n - 2_6 \leq n + 1$