**Ejercicio 1 (4 ptos).** Demostrar que la siguiente ecuación es cierta para todo entero positivo $n$, **utilizando el principio de inducción.**

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3} \qquad n \geq k \geq 0$$

Donde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, si $n \geq k \geq 0$; caso contrario, $\binom{n}{k}=0$

$$\binom{k}{2}=\frac{k!}{2(k-2)!}=\frac{k(k-1)\cancel{(k-2)!}}{2\cancel{(k-2)!}}$$

$$\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)!}{6(n+1-3)!}=\frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{6\cancel{(n-2)!}}$$

$$\binom{n+1}{3}=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

Parafraseo

Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}\right\} P(n)$$

Inducción en "$n$"

Caso Base

$n=2$ $\quad \sum_{k=1}^{2}\frac{k(k-1)}{2}=0+1=1=\frac{(2-1)\cancel{(2)}(2+1)}{\cancel{6}}=1$ ✓

Para $n>2$

hipotesis Inductiva $P(n)$ es true $\longrightarrow$ ¿$P(n+1)$ es true?

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$ $\quad\longrightarrow$ ¿ $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$?

Por h.i.

$$P(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k(k-1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}+\frac{(n+1)(n)}{2}=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}+\frac{(n+1)(n)}{2}$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$$(n+1)(n)\left(\frac{n-1+3}{6}\right)$$

$$\therefore \quad P(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \;\square$$

**Ejercicio 2 (5 ptos).** Angel estuvo buscando un algoritmo de ordenación absolutamente desconocido en un libro de Análisis, que recibe un array $v[1 \dots n]$:

```
NotBlossomSort(v, n)
for i ← 1 to n − 1
    for j ← n to i + 1
        if v[j] > v[j − 1]
            \\eres tú, simple rotation?
            k ← v[j]
            v[j] ← v[j − 1]
            v[j − 1] ← k
```

$(a)$ Analice el tiempo de ejecución del algoritmo **como fue visto en clase**: Debe encontrar una función $T(n)$ que utilice $n$, algunas constantes, y posiblemente algunas variables adicionales.

$(b)$ Realice el análisis del mejor y peor caso del **NotBlossomSort**: Describa los escenarios donde se alcanza el mejor y peor caso, respectivamente. Justifique, y acote $T(n)$ con el tiempo de ejecucion en ambos casos extremos. Observe que estas dos cotas solo dependerán de $n$ y de las constantes.

$(c)$ Suponga que las constantes de tiempo de ejecución de cada línea son todas iguales a 1. Encuentre el orden $\Theta$ de $T(n)$ justificando adecuadamente.

**Ejercicio 3 (8 ptos).** ¿Verdadero o falso? Justifique adecuadamente.

(a) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$, para todo par de enteros positivos $a, b$ y todo real positivo $x$.

1

$$\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = m \rightarrow m \leq \frac{x}{a} < m+1$$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{b} \right\rfloor = n \rightarrow n \leq \frac{m}{b} < n+1$$

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = p \longrightarrow p \leq \frac{x}{ab} < p+1$$

Demostrar que $p = n$

- $\left( m \leq \frac{x}{a} \right) \times \frac{1}{b}$

$$n \leq \frac{m}{b} \leq \frac{x}{ab} \Rightarrow n \leq \frac{x}{ab} \quad \text{---} \quad (I)$$

transitividad

Obs: $a, b \in \mathbb{Z}$
$a < b \iff a \leq b-1$

- $\frac{m}{b} < n+1 = m < b(n+1)$ ...

$$\frac{m+1}{b} \leq n+1$$

ahora de:

$$\left( \frac{x}{a} < m+1 \right) \times \frac{1}{b}$$

$$\frac{x}{ab} < \frac{m+1}{b} \leq n+1$$

por transitividad: $\frac{x}{ab} < n+1$ ... (II)

∴ Juntando I y II ∴

$$n \leq \frac{x}{ab} < n+1 \qquad (V)$$

∴ $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = n = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$ □

$(b)\ \sqrt{20 + 24n} = \Theta(\sqrt{2024n - 2023})$