Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής

Ψ Η Φ Ι Α Κ Ε Σ Τ Η Λ Ε Π Ι Κ Ο Ι Ν Ω Ν Ι Ε Σ

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέρος Α

Κωδικοποίηση Πηγής με τη μέθοδο PCM

Η PCM είναι μια μέθοδος κωδικοποίησης κυματομορφής, η οποία μετατρέπει ένα αναλογικό σήμα σε ψηφιακά δεδομένα. Τυπικά, η μέθοδος PCM αποτελείται από τρία βασικά τμήματα: έναν δειγματολήπτη, έναν κβαντιστή, και έναν κωδικοποιητή. Η έξοδος του κωδικοποιητή είναι μια ακολουθία από κωδικές λέξεις (σύμβολα) σταθερού μήκους N bits. Σκοπός της άσκησης είναι η εξοικείωση με τη λειτουργία του κβαντιστή. Συγκεκριμένα, καλείστε να υλοποιήσετε έναν ομοιόμορφο και ένα μη ομοιόμορφο κβαντιστή N bits, δηλαδή 2^N επιπέδων. Οι κβαντιστές πρέπει να υλοποιηθούν ως συναρτήσεις MATLAB.

Ομοιόμορφος Κβαντιστής

[x_q, centers] = my_quantizer (x, N, min_value, max_value)

- x: το σήμα εισόδου υπό μορφή διανύσματος
- N: ο αριθμός των bits που θα χρησιμοποιηθούν
- max_value: η μέγιστη αποδεκτή τιμή του σήματος εισόδου
- min_value: η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του σήματος εισόδου
- x_q: το διάνυσμα του σήματος εξόδου κωδικοποιημένο με τα επίπεδα κβάντισης τα οποία αναπαρίστανται με τους ακεραίους {1, 2, ..., 2^N}, όπου το μεγαλύτερο θετικό επίπεδο κβάντισης αντιστοιχεί στον ακέραιο '1' (όπως φαίνεται στο Σχήμα 1) και το μικρότερο

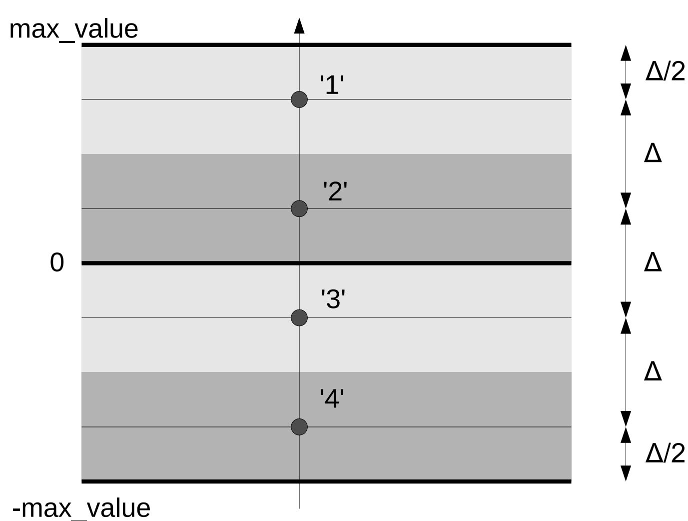
επίπεδο κβάντισης στο ‘2^N’. Οι ακέραιοι αυτοί μπορούν να αναπαρασταθούν δυαδικά με N bits.

- centers: τα κέντρα των περιοχών κβάντισης όπου το 1ο στοιχείο του διανύσματος centers οφείλει να αντιστοιχεί στο μικρότερο επίπεδο κβάντισης – ‘2^N’ και το τελευταίο στοιχείο στο μεγαλύτερο επίπεδο κβάντισης – ‘1’.

Ειδικότερα, ο κβαντιστής ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Περιορίζει τη δυναμική περιοχή του σήματος εισόδου στις τιμές [min_value max_value], θέτοντας τα δείγματα που βρίσκονται εκτός δυναμικής περιοχής στην αντίστοιχη ακραία αποδεκτή τιμή.
2. Στη συνέχεια υπολογίζει το βήμα κβαντισμού Δ και τα κέντρα της κάθε περιοχής στο διάνυσμα centers.
3. Βρίσκει την περιοχή στην οποία ανήκει κάθε δείγμα του σήματος εισόδου, και βγάζει ως έξοδο το διάνυσμα $x_q = [1, 2, ..., 2^N]$.
4. Το διάνυσμα x_q μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης στο διάνυσμα centers, και να πάρουμε το κβαντισμένο σήμα.

Ένα παράδειγμα των περιοχών κβάντισης για N = 2 bits φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



***Σχήμα 1**: Παράδειγμα επιπέδων ομοιόμορφου κβαντιστή για N = 2bits.*

Μη Ομοιόμορφος Κβαντιστής

Για τη μη ομοιόμορφη κβάντιση του διανύσματος εισόδου θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Lloyd-Max ο οποίος επιτρέπει την σχεδίαση βέλτιστου κβαντιστή για οποιοδήποτε αριθμό επιπέδων.

[x_q, centers, *D*] = Lloyd_Max(*x*, *N*, min_value, max_value)

Οι είσοδοι είναι ίδιες με την περίπτωση του ομοιόμορφου κβαντιστή. Οι έξοδοι έχουν μία παρόμοια αντιστοιχία με του ομοιόμορφου με μία επιπλέον παράμετρο *D*. Συγκεκριμένα οι έξοδοι είναι οι ακόλουθες:

- x_q: το κωδικοποιημένο διάνυσμα μετά από K_{max} επαναλήψεις του αλγορίθμου,
- centers: τα κέντρα των περιοχών κβάντισης μετά από K_{max} επαναλήψεις του αλγορίθμου
- *D*: διάνυσμα που περιέχει τις τιμές [D_1 D_2 ... D_{Kmax}] όπου D_i αντιστοιχεί στην μέση παραμόρφωση στην επανάληψη *i* του αλγορίθμου.

Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου

Αρχικά επιλέγετε ένα τυχαίο σύνολο επιπέδων κβαντισμού:

$$\left\{\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}, \ldots, \tilde{x}_M^{(0)}\right\}$$

Στο πλαίσιο της άσκησης επιλέξτε τα επίπεδα αυτά να αντιστοιχούν στα κέντρα του ομοιόμορφου κβαντιστή.

Σε κάθε επανάληψη *i* του Αλγόριθμου Lloyd-Max:

1. Υπολογίζετε τα όρια των ζωνών κβαντισμού, που πρέπει να είναι στο μέσον των επιπέδων κβαντισμού, δηλαδή:

$$\mathrm{T}_k = (\tilde{x}_k^{(i)} + \tilde{x}_{k+1}^{(i)})/2, \quad 1 \le k \le M-1$$

Σε κάθε επανάληψη εκτός της τελευταίας, στο διάνυσμα των κέντρων οφείλετε να συμπεριλαμβάνετε ως κέντρα τα min_value και max_value. Δηλαδή, σε κάθε επανάληψη το εύρος του σήματος να είναι το [min_value, max_value].

2. Υπολογίστε το κβαντισμένο σήμα με βάση τις περιοχές αυτές και μετρήστε την μέση παραμόρφωση D_i με βάση το δοθέν σήμα
3. Τα νέα επίπεδα κβαντισμού είναι τα κεντροειδή των ζωνών:

$$\tilde{x}_k^{(i+1)} = \mathrm{E}\left[x \middle| \mathrm{T}_{k-1} < x < \mathrm{T}_k\right]$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα 3 τελευταία βήματα μέχρις ότου:

$$\left|D_i - D_{i-1}\right| < \varepsilon$$

Η τιμή του ε καθορίζει και τον αριθμό των K_{max} επαναλήψεων.
Τα κέντρα μετά από κάθε επανάληψη θα είναι ίδια σε πλήθος. Αυτό που αλλάζει είναι η θέση τους, καθώς οι περιοχές κβάντισης θα ορίζονται ως

[min_value, {centers(1) +centers(2)}/2], [{centers(1)+centers(2)}/2, {centers(2)+ centers(3)}/2] , ..., [{centers(end-1)+centers(end)}/2, max_value]
Στην περίπτωση που εντοπίσετε κάποιο NaN κατά την εκτέλεση κάποιου κβαντιστή, το πρόβλημα ενδέχεται να βρίσκεται στην είσοδο και να χρειαστεί κάποια κανονικοποίηση στα δεδομένα εισόδου.

Πηγή ήχου

Η πηγή που θα χρησιμοποιήσετε είναι ένα σήμα φωνής το οποίο εκτείνεται συχνοτικά μέχρι τα 4 KHz περίπου. Δίνεται ένα ψηφιακό ηχητικό σήμα υπό μορφή αρχείου κυματομορφής (.wav) το οποίο θα θεωρήσουμε ικανοποιητική αναπαράσταση του αντίστοιχου αναλογικού. Το αρχείο 'speech.wav', περιέχει δείγματα σήματος φωνής με ρυθμό δειγματοληψίας f_s = 8 KHz κβαντισμένα με N = 16 bits (PCM κωδικοποίηση).

Για να ανακτήσετε πληροφορίες σχετικά με την παραπάνω πηγή ήχου, στο MATLAB, χρησιμοποιήστε την εντολή:

- audioinfo('speech.wav')

Για να φορτώσετε το σήμα στο MATLAB, χρησιμοποιήστε την εντολή:

- [y,fs] =audioread('speech.wav');

ενώ για να το ακούσετε, την εντολή

- sound(y,fs);

Σε περίπτωση που το εύρος τιμών της πηγής είναι μεγαλύτερο από το εύρος [min_value, max_value], τότε πρέπει να κανονικοποιήσετε τη πηγή στο διάστημα αυτό.

Ερωτήματα Μέρους Α1

1. Υλοποιείστε το σχήμα PCM χρησιμοποιώντας
   a. τον ομοιόμορφο κβαντιστή και
   b. τον μη ομοιόμορφο με χρήση του αλγόριθμου Lloyd-Max.
2. Κωδικοποιείστε την πηγή ήχου για min_value = -1, max_value = 1 και N = 2, 4 και 8 bits. Αξιολογείστε το σχήμα PCM βασισμένοι στα ακόλουθα:
   i. Σχεδιάστε για το σχήμα κβάντισης (b) πώς μεταβάλλεται το SQNR σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου K_{max} (χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε τιμή ε = [10^{-16}, 10^{-6}]). Απεικονίστε στο ίδιο γράφημα τις καμπύλες μεταβολής του SQNR για κάθε διαφορετική τιμή N ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρώματα, τύπο γραμμής και σχετικές λεζάντες που προσφέρει η συνάρτηση plot() στο Matlab.
   ii. Για το σχήμα κβάντισης (b) συγκρίνετε τη τιμή του SQNR μετά από K_{max} επαναλήψεις με αυτή που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το σχήμα (a) (ομοιόμορφη κβάντιση). Υπολογίστε και σχολιάστε την απόδοση των δύο κβαντιστών.
   iii. Αξιολογείστε το αποτέλεσμα για κάθε κβαντιστή χρησιμοποιώντας την sound() (ακουστικό αποτέλεσμα) και τις κυματομορφές εξόδου. Η σύγκριση να γίνει σε σχέση με το αρχικό σήμα (χωρίς κωδικοποιήση) και για κάθε τιμή του N. Για κάθε N, οι κυματομορφές του αρχικού και του κωδικοποιημένου σήματος να απεικονιστούν στο ίδιο γράφημα με διαφορετικά χρώματα και τύπο γραμμής ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση.
   iv. Σχολιάστε σε κάθε τύπο κβαντιστή την αποδοτικότητα της κωδικοποίησης PCM βασισμένοι στο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error) σε σχέση με τις τιμές του N. Απεικονίστε στο ίδιο γράφημα τις καμπύλες MSE για τους δύο κβαντιστές με διαφορετικά χρώματα και τύπο γραμμής ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση.

Υποσημείωση: Το τελικό SQNR που υπολογίζετε να δίνεται σε dB, δηλαδή στη μορφή $10\log_{10}(.)$.

Κωδικοποίηση Πηγής με τη μέθοδο DPCM

Εισαγωγή

Η κωδικοποίηση DPCM (**D**ifferential **P**ulse **C**ode **M**odulation) μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της κωδικοποίησης Δέλτα όπου το σήμα που κβαντίζεται και αποστέλλεται στο δέκτη είναι η διαφορά ανάμεσα στο τρέχον δείγμα (της χρονικής στιγμής n) και σε μία γραμμική πρόβλεψή του. Δηλαδή, στην κωδικοποίηση DPCM, υπολογίζουμε, σε κάθε χρονική στιγμή, μια πρόβλεψη για την τιμή του τρέχοντος δείγματος με βάση τις τιμές προηγούμενων δειγμάτων τα οποία έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια υπολογίζουμε το λάθος της πρόβλεψης αυτής. Το σήμα σφάλματος πρόβλεψης στη συνέχεια κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα δυαδικά ψηφία ανά δείγμα.

Κωδικοποίηση DPCM

Ο κωδικοποιητής και ο αποκωδικοποιητής ενός συστήματος DPCM παρουσιάζονται στο Σχήμα 2. Προκειμένου να κωδικοποιήσουμε την τιμή του τρέχοντος δείγματος υπολογίζουμε αρχικά μια πρόβλεψη για την τιμή του βασιζόμενοι σε κωδικοποιημένες τιμές προηγούμενων δειγμάτων. Η πρόβλεψη του σήματος $x(n)$ συμβολίζεται ως $\hat{y}'(n)$. Στο Σχήμα παρατηρούμε μια διάταξη μνήμης (τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη) η οποία κρατάει αποθηκευμένες τις ανακατασκευασμένες τιμές των προηγούμενων δειγμάτων με βάση τις οποίες θα υπολογιστεί η πρόβλεψη της τιμής του τρέχοντος δείγματος. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά του σήματος σφάλματος $y(n) = x(n) - \hat{y}'(n)$ έτσι ώστε αυτό να παρουσιάζει μικρή δυναμική περιοχή και να μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από μικρό αριθμό δυαδικών ψηφίων.

Η διαδικασία της κβάντισης του σήματος σφάλματος $y(n)$ οδηγεί στο σήμα $\hat{y}(n)$ το οποίο και αποστέλλεται στο δέκτη. Ειδικότερα, ο κβαντιστής στο Σχήμα 2 θα πρέπει να περιορίζει τη δυναμική περιοχή του σφάλματος πρόβλεψης ανάμεσα σε μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή, θέτοντας τα δείγματα που βρίσκονται εκτός δυναμικής περιοχής στην αντίστοιχη ακραία αποδεκτή τιμή. Στη συνέχεια, ο κβαντιστής υπολογίζει το βήμα κβαντισμού Δ, τα κέντρα της κάθε περιοχής, υπολογίζει σε ποια περιοχή ανήκει το δείγμα εισόδου, και βγάζει ως έξοδο το κωδικοποιημένο δείγμα $\hat{y}(n)$[1]. Το δείγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί ως δείκτης στο διάνυσμα $centers$ για να πάρουμε το κβαντισμένο δείγμα ως $centers(\hat{y}(n))$. Χρησιμοποιήστε τον ομοιόμορφο κβαντιστή N δυαδικών ψηφίων που υλοποιήσατε προηγουμένως για να κβαντίσετε το σφάλμα πρόβλεψης το οποίο έχει μικρότερη δυναμική περιοχή σε σχέση με το σήμα εισόδου.

<u>Ο κβαντιστής συγκεκριμένα θα κβαντίζει κάθε δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ξεχωριστά:</u>

$\boldsymbol{\hat{y}(n) = my\_quantizer(y(n), N, min\_value, max\_value})$

$y(n)$: το τρέχον δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ως είσοδος του κβαντιστή

max_value: η μέγιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης

min_value: η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης

$\hat{y}(n)$: το κβαντισμένο δείγμα του τρέχοντος δείγματος του σφάλματος πρόβλεψης

Στο **δέκτη**, το σήμα $\hat{y}(n)$ συνδυάζεται με το σήμα $\hat{y}'(n)$ (την πρόβλεψη του $x(n)$). Δεδομένου ότι οι προηγούμενα ανακατασκευασμένες τιμές καθώς και η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιεί ο πομπός είναι γνωστές στο δέκτη, συνεπάγεται ότι ο πομπός και ο δέκτης είναι σε θέση να υπολογίσουν ακριβώς τις ίδιες τιμές για την πρόβλεψη $\hat{y}'(n)$. Όπως και στην περίπτωση της κωδικοποίησης Δέλτα, και εδώ ο πομπός συμπεριλαμβάνει ως τμήμα του τη διάταξη του δέκτη η οποία υπολογίζει την ανακατασκευή $\hat{x}(n)$. Τις τιμές αυτές χρησιμοποιεί ο πομπός για να υπολογίσει την πρόβλεψη, και όχι τις πραγματικές τιμές $x(n)$, με σκοπό να μιμηθεί πλήρως τη διάταξη του δέκτη η οποία φυσικά δεν γνωρίζει τις πραγματικές τιμές. Χρησιμοποιώντας τις ανακατασκευασμένες τιμές για τον υπολογισμό της πρόβλεψης και στη συνέχεια του σφάλματος πρόβλεψης, εξασφαλίζουμε (όπως στην περίπτωση της κωδικοποίησης δέλτα) πως δεν έχουμε συσσώρευση του σφάλματος κβάντισης.

Στην απλή περίπτωση όπου βασιζόμαστε μόνο στην πρόβλεψη του προηγούμενου δείγματος οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος DPCM του Σχήματος 2 είναι οι ακόλουθες:

$$y(n) = x(n) - \hat{y}'(n-1)$$

$$\hat{y}(n) = Q\big(y(n)\big)$$

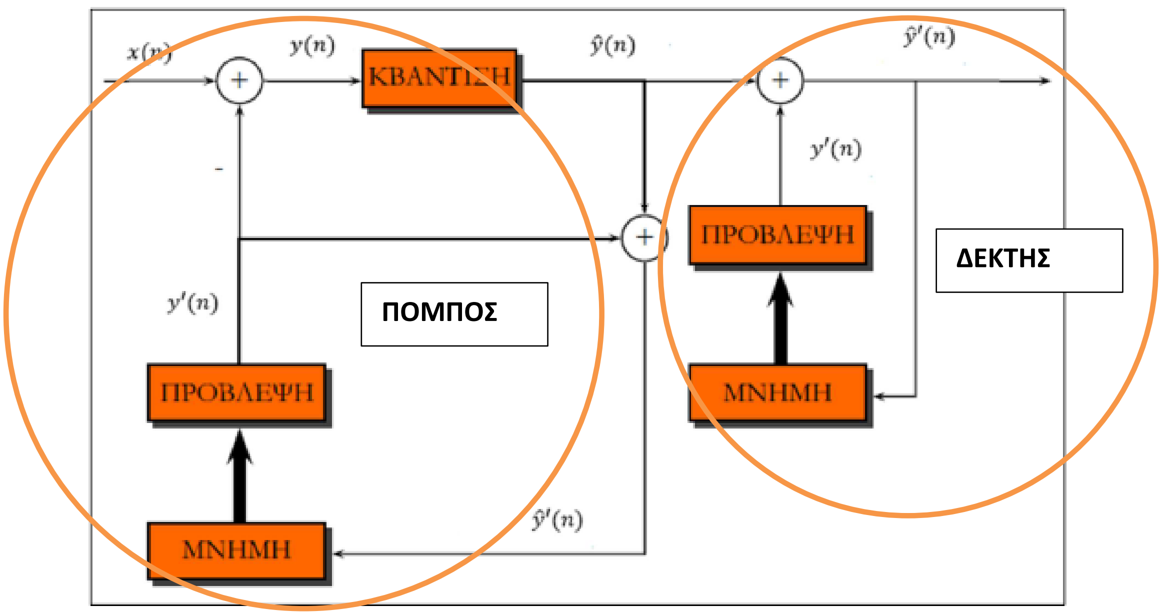
[1] Το κωδικοποιημένο δείγμα στην έξοδο του κβαντιστή θα παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 2^N , όσες είναι και οι περιοχές κβάντισης. Η κβαντισμένη έκδοση του δείγματος εξόδου θα λαμβάνει την τιμή του κέντρου κβάντισης της περιοχής στην οποία ανήκει το τρέχον δείγμα εισόδου.

$$\hat{y}'(n) = \hat{y}(n) + \hat{y}'(n-1)$$

όπου $Q(\cdot)$ είναι η συνάρτηση εισόδου-εξόδου του βαθμωτού κβαντιστή (ομοιόμορφου) που χρησιμοποιείται. Από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε για το σφάλμα κβάντισης την έκφραση:

$$y_Q(n) = \hat{x}(n) - x(n) = \hat{y}(n) - y(n)$$

Παρατηρούμε πως αν στις παραπάνω εξισώσεις θέσουμε $\hat{y}'(n) = 0$ δηλαδή ένα σύστημα DPCM το οποίο δεν χρησιμοποιεί πρόβλεψη, τότε το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα απλό σύστημα κωδικοποίησης PCM.



Σχήμα 2. Κωδικοποίηση DPCM

Υπολογισμός του Φίλτρου Πρόβλεψης

Σε ένα γενικό σύστημα DPCM, η πρόβλεψη του δείγματος $x(n)$ δίνεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός p προηγουμένων τιμών $\hat{y}'(n-i)$ οι οποίες έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια έχουν ανακατασκευαστεί, δηλαδή:

$$\hat{y}'(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{y}'(n-i) = a_i\big(\hat{y}(n-j) + \hat{y}'(n-j-1)\big)$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_i με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανάμεσα στο εκάστοτε τρέχον δείγμα εισόδου και την πρόβλεψή του:

$$MSE = E[e^2(n)] = E\left[x(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{y}'(n-i)\right]$$

Το παραπάνω κριτήριο ωστόσο, είναι δύσκολο να ελαχιστοποιηθεί αφού το MSE εξαρτάται από τους συντελεστές αλλά και από τον κβαντιστή που χρησιμοποιούμε. Επομένως, αποτελεί ένα μη-γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Για να ξεφύγουμε από αυτή τη δυσκολία, αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση την ποσότητα $\hat{y}'(n-i)$ με το $x(n-i)$ θεωρώντας πως αφού το δεύτερο αποτελεί την κβαντισμένη εκδοχή του πρώτου δεν κάνουμε μεγάλο σφάλμα.

Έτσι, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την έκφραση:

$$\widehat{MSE} = E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$\widehat{MSE} = E\left[\big(x(n)\big)^2 - 2x(n)\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\big(x(n)\big)^2\right] - 2E\left[x(n)\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right] + E\left[\left(\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\big(x(n)\big)^2\right] - 2\textstyle\sum_{k=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\sum_{j=1}^{p} a_j x(n-j)\right]$$

$$= E\left[\big(x(n)\big)^2\right] - 2\sum_{k=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j x(n-i)\, x(n-j)\right]$$

$$= E\left[\big(x(n)\big)^2\right] - 2\sum_{k=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j E[x(n-i)x(n-j)]$$

$$= R_x(0) - 2\sum_{k=1}^{p} a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j R_x(i-j)$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση του σφάλματος ως προς καθένα από τους συντελεστές a_i του *φίλτρου πρόβλεψης* και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές του φίλτρου, δηλαδή,

$$\frac{\partial\,\widehat{MSE}}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_i R_x(i-j) = R_x(i), 1 \leq i,j \leq p$$

$$\boldsymbol{R} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \;\text{ ή }\; \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^{-1} * \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{R}$: ο πίνακας αυτοσυσχέτισης διάστασης $p \times p$ του οποίου το (i,j) στοιχείο είναι το $R_x(i-j)$

$\boldsymbol{r}$: διάνυσμα αυτοσυσχέτισης διάστασης $p \times 1$ με στοιχείο i το $R_x(i)$

$\boldsymbol{a}$: διάνυσμα διάστασης $p \times 1$ με τους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης

R_x: η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$. Λύνοντας το παραπάνω σύνολο εξισώσεων ***Yule-Walker***, βρίσκουμε τους βέλτιστους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης. Επιπρόσθετα, για να αντιστοιχεί αυτό το στάσιμο σημείο στο ελάχιστο της συνάρτησης αρκεί ο πίνακας $\boldsymbol{R}$ να είναι θετικά ορισμένος.

Οι στοχαστικές ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση μπορούν να εκτιμηθούν στατιστικά για μια ακολουθία εισόδου $x(n)$ διαστάσεων $1 \times N$ με βάση τις σχέσεις:

$$\hat{R}_x(i) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^{N} x(n)x(n-i)\,, 1 \leq i \leq p$$

$$\hat{R}_x(i-j) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^{N} x(n-j)x(n-i)\,, 1 \leq i,j \leq p$$

Ο υπολογισμός του φίλτρου πρόβλεψης γίνεται στο πομπό, και στη συνέχεια οι συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης κβαντίζονται και αποστέλλονται στον δέκτη. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε πως και ο πομπός θα πρέπει να χρησιμοποιεί τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών του φίλτρου πρόβλεψης έτσι ώστε πομπός και δέκτης να λειτουργούν σε συμφωνία. **Για να υπολογίσετε τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών, χρησιμοποιείστε τον ομοιόμορφο κβαντιστή που θα κατασκευάσετε, θέτοντας $N = 8$ bits και δυναμική περιοχή [-2 2].**

Πηγή Εισόδου

Η πηγή που καλείστε να κωδικοποιείσετε/αποκωδικοποιείσετε είναι ένα σήμα 20.000 δειγμάτων Τα δείγματα της πηγής με την οποία θα πειραματιστείτε παρουσιάζουν ικανοποιητική προβλεψιμότητα, δηλαδή ένα τρέχον δείγμα του μπορεί να προβλεφθεί (με τη στατιστική έννοια) με μικρό σφάλμα πρόβλεψης συνδυάζοντας προηγούμενες τιμές του ιδίου σήματος. Τα δείγματα της πηγής με την οποία θα πειραματιστείτε βρίσκονται αποθηκευμένα στο αρχείο με όνομα source.mat. Για να ανακτήσετε τα δεδομένα εισόδου αρκεί να πληκτρολογήσετε:

load source.mat

Ερωτήματα – Μέρος A2

Στα πειράματα που θα εκτελέσετε η δυναμική περιοχή του κβαντιστή να είναι μεταξύ των τιμών $max\ \_value = 3.5$, $min\ \_value = -3.5$.

1. Να υλοποιήσετε το παραπάνω σύστημα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης $DPCM$.

2. Επιλέξτε δύο τιμές του $p \geq 5$ και για $N = 1,2,3$ bits σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα το αρχικό σήμα και το σφάλμα πρόβλεψης y. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Τί παρατηρείτε;

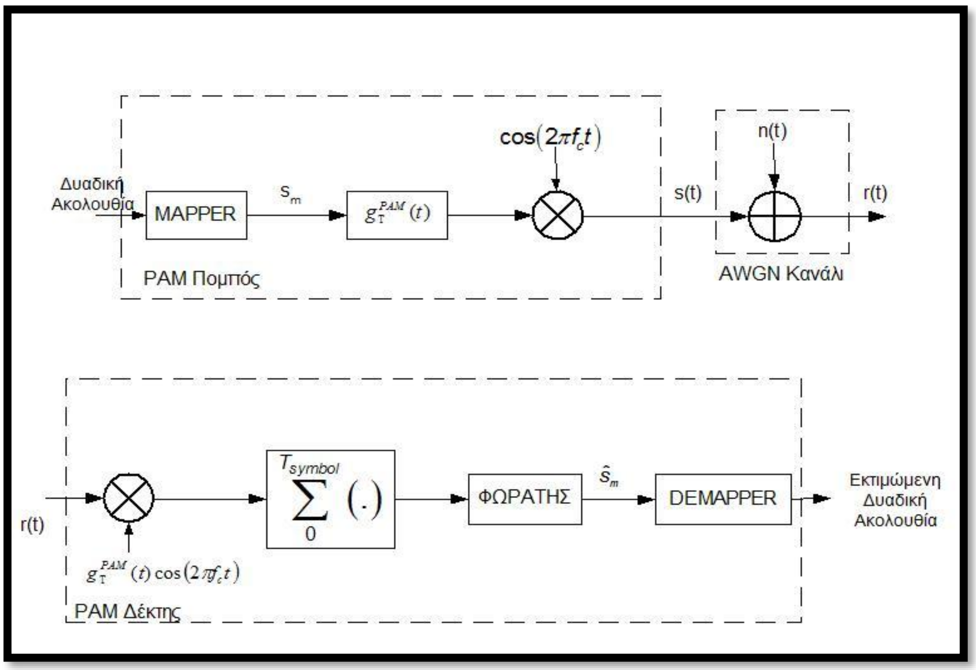
3. Αξιολογείστε την απόδοσή του με γράφημα που να δείχνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης ως προς το N και για διάφορες τιμές του p. Συγκεκριμένα, για πλήθος δυαδικών ψηφίων $N = 1,2,3$bits τα οποία χρησιμοποιεί ο ομοιόμορφος κβαντιστής για την κωδικοποίηση του σήματος πρόβλεψης και για τάξη προβλέπτη $p = 5{:}\,10$. Επιπλέον, για κάθε p καταγράψτε στην αναφορά σας και σχολιάστε τις τιμές των συντελεστών του προβλέπτη.

4. Για $N = 1,2,3$bits να απεικονίσετε το αρχικό και το ανακατασκευασμένο σήμα στο δέκτη για $p = 5,10$ και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα της ανακατασκευής σε σχέση με τα bits κβάντισης.

Μέρος Β

Μελέτη Απόδοσης Ομόδυνου Ζωνοπερατού Συστήματος M-PAM

Στην άσκηση αυτή καλείστε να συγκρίνετε την απόδοση της διαμόρφωσης M-PAM για M=2 και M=8 αντίστοιχα. Η σύγκριση αυτή θα βασιστεί σε μετρήσεις πιθανότητας σφάλματος bit (Bit Error Rate, BER) και συμβόλου (Symbol Error Rate, SER), που θα πραγματοποιηθούν σε ομόδυνο ζωνοπερατό σύστημα με ορθογώνιο παλμό.



Σχήμα 3. Ομόδυνο Ζωνοπερατό Σύστημα M-PAM

Ομόδυνμο M-PAM

Όπως φαίνεται στο Σχήμα, 3 ο πομπός του συστήματος M-PAM δέχεται ως είσοδο μια δυαδική ακολουθία, τη μετατρέπει σε σύμβολα, την πολλαπλασιάζει με τον ορθογώνιο παλμό, και κατόπιν το σήμα μεταφέρεται στη ζώνη μετάδοσης μέσω του διαμορφωτή. Στο σήμα που στάλθηκε προστίθεται AWGN θόρυβος, και φθάνει στο δέκτη του συστήματος. Εκεί αποδιαμορφώνεται και προκύπτει ένα μονοδιάστατο διάνυσμα, το οποίο εισάγεται στο φωρατή όπου και αποφασίζεται ποιο σύμβολο στάλθηκε. Τέλος, ο demapper κάνει την αντίστροφη αντιστοίχιση από σύμβολα σε bits. Το σύστημα περιγράφεται στη συνέχεια.

Δυαδική Ακολουθία Εισόδου

Η είσοδος του συστήματος είναι μια ακολουθία bits, όπου οι τιμές 0 και 1 εμφανίζονται ισοπίθανα. Μια τέτοια ακολουθία μπορεί να παραχθεί αν χρησιμοποιήσετε κατάλληλα κάποια από τις συναρτήσεις randsrc, rand, randn. Το πλήθος των bits που πρέπει να στείλετε θα πρέπει να είναι της τάξης των $L_b = 10000 - 100000$ bits.

Αντιστοιχία Bits - Συμβόλων

Ο mapper είναι στην ουσία ένας μετατροπέας από bits σε σύμβολα. Κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ακολουθία M δυαδικών ψηφίων. Επομένως, ο mapper θα πρέπει για κάθε M δυαδικά ψηφία να εξάγει και ένα από τα σύμβολα της διαμόρφωσης. Αντίστοιχα, ο demapper δέχεται ως είσοδο το σύμβολο που έχει ανιχνεύσει ο φωρατής (συσκευή απόφασης) του δέκτη, και βγάζει την αντίστοιχη ακολουθία των M δυαδικών ψηφίων.

Στην περίπτωση των διαμορφώσεων PSK, PAM, QAM, ένα σημαντικό στοιχείο κατά την αντιστοίχιση αυτή είναι η κωδικοποίηση Gray. Σύμφωνα με αυτήν, αν δύο σύμβολα είναι γειτονικά στο δυσδιάστατο ή μονοδιάστατο χώρο σημάτων, τότε σε αυτά ανατίθενται διατάξεις δυαδικών ψηφίων που διαφέρουν μόνο κατά ένα δυαδικό ψηφίο μεταξύ τους.

Ορθογώνιος Παλμός

Το σύστημα M-PAM που καλείστε να προσομοιώσετε χρησιμοποιεί ορθογώνιο παλμό για τη μετάδοση των συμβόλων ο οποίος ορίζεται ως:

$$g_T^{PAM}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T_{symbol}}} = \sqrt{\frac{2}{T_{symbol}}}, 0 \leq t \leq T_{symbol} \\ 0, αλλού \end{cases} \quad (1)$$

όπου E_s είναι η ενέργεια ανά σύμβολο, την οποία κανονικοποιούμε ως $E_s = 1$, και T_{symbol} είναι η περίοδος συμβόλου.

Διαμόρφωση M-PAM

Οι κυματομορφές του Μ-αδικού PAM είναι μονοδιάστατα σήματα, τα οποία μπορούν να εκφρασθούν ως

$$s_m(t) = A_m g_T^{PAM}(t) cos(2\pi f_c t), 0 \leq t \leq T_{symbol} \qquad (2)$$

όπου $A_m = \big(2m - (M+1)\big)A, m = 1,..,M$. Το A καθορίζει την ενέργεια των συμβόλων. Στην περίπτωση που τα σήματα PAM έχουν διαφορετικές ενέργειες (π.χ. όταν *M*>2), θέλουμε η μέση ενέργεια των μεταδιδόμενων συμβόλων να είναι ίση με 1.

Χρονικές Μονάδες Προσομοίωσης

Το σύστημα που θέλουμε να προσομοιώσουμε μεταδίδει σύμβολα με ρυθμό $R_{symbol} = 250$ Ksymbols/sec οπότε η περίοδος συμβόλου είναι T_{symbol} = 4 μsec. Στη ζώνη μετάδοσης, χρησιμοποιείται η φέρουσα συχνότητα f_c = 2.5 MHz, οπότε η περίοδος της φέρουσας είναι T_c = 0.4 μsec. Στα πλαίσια της προσομοίωσης, για να έχουμε μια ικανοποιητική αναπαράσταση των ζωνοπερατών σημάτων, πραγματοποιείται δειγματοληψία 2 φορές μεγαλύτερη του ορίου του Nyquist, δηλαδή παίρνουμε 4 δείγματα ανά περίοδο φέρουσας, και άρα η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_{sample} = \frac{T_c}{4}$ = 0.1μsec.

Κανάλι AWGN

Τα ζωνοπερατό σήμα που εκπέμπει ο πομπός του συστημάτος διέρχεται μέσα από ένα ιδανικό κανάλι προσθετικού θορύβου. Ο θόρυβος είναι λευκός και ακολουθεί $Gaussian$ κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Ο θόρυβος μπορεί να παραχθεί με χρήση της συνάρτησης $randn$.

Η διασπορά του θορύβου καθορίζεται κάθε φορά από το $\frac{SNR}{bit}$ που θέλουμε να έχουμε στο δέκτη του συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι λόγω των κανονικοποιήσεων που έχουμε κάνει, η ενέργεια ανά σύμβολο είναι $E_s = 1$, οπότε η ενέργεια ανά bit $E_b = \frac{E_s}{M}$ είναι $E_b = \frac{1}{M}$. Ο υπολογισμός του SNR βασίζεται στη σχέση $SNR = 10log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = 10log_{10}\left(\frac{2E_b}{\sigma^2}\right) = 10log_{10}\left(\frac{2}{M\,\sigma^2}\right)$.

Αποδιαμορφωτής M-PAM

Ο αποδιαμορφωτής του συστήματος M-PAM συσχετίζει (δηλαδή πολλαπλασιάζει και ολοκληρώνει ή αθροίζει) το ληφθέν σήμα με τη φέρουσα και τον ορθογώνιο παλμό. Η συσχέτιση γίνεται στα χρονικά πλαίσια μιας περιόδου συμβόλου. Κατά την προσομοίωση υποθέτουμε ότι το σύστημα M-PAM είναι ομόδυνο (coherent). Αυτό σημαίνει ότι ο δέκτης γνωρίζει τη φάση της φέρουσας και τα χρονικά πλαίσια κάθε συμβόλου, δηλαδή είναι πλήρως συγχρονισμένος με τον πομπό.

Ο αποδιαμορφωτής συσχετίζει το ληφθέν σήμα με τη συνιστώσα της φέρουσας, οπότε προκύπτει μια τιμή r, η οποία είναι η εκτιμηθείσα τιμή του τρέχοντος συμβόλου πάνω στον αστερισμό του M-PAM.

Φωρατής M-PAM

Ο φωρατής δέχεται ως είσοδο την τιμή r, και αποφασίζει σε ποιο σύμβολο (όπως αυτά ορίστηκαν διανυσματικά παραπάνω) βρίσκεται εγγύτερα. Το σύμβολο A_m που θα έχει τη μικρότερη απόσταση από το r, αντιστοιχεί και στο σύμβολο που στάλθηκε.

Μετρήσεις BER-SER

Για να μετρήσετε το BER (Bit Error Rate), δηλαδή την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος bit, θα πρέπει να συγκρίνετε την τιμή bit που λάβατε με αυτήν που στείλατε. Για να πραγματοποιήσετε αξιόπιστες μετρήσεις BER, θα πρέπει αυτές να προέρχονται από έναν αρκετά μεγάλο αριθμό δεδομένων. Ένας «χοντρικός κανόνας» είναι ότι για να μετρήσετε μια τιμή BER της τάξης του 10^{-2} χρειάζεστε 10^4 bits δεδομένων, για BER της τάξης του 10^{-3} χρειάζεστε 10^5 bits δεδομένων, κ.ο.κ.

Οι καμπύλες BER συνήθως σχεδιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα ως προς τον άξονα y, δηλαδή ως προς την πιθανότητα σφάλματος (βλέπε π.χ. Σχ.7.57, όπου εκεί φαίνονται κάποιες καμπύλες SER (πιθανότητα σφάλματος συμβόλου)).

Για να μετρήσετε το SER (Symbol Error Rate), δηλαδή την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος symbol, θα πρέπει να συγκρίνετε την τιμή συμβόλου που λάβατε με αυτό που στείλατε. Χρησιμοποιείστε τον ίδιο αριθμό δεδομένων που χρησιμοποιήσατε για τον υπολογισμό του BER.

Ερωτήματα – Μέρος Β

1. Με βάση τις παραπάνω υποδείξεις, υλοποιήστε το σύστημα M-PAM και αναφερθείτε στα βασικά του σημεία.
2. Μετρήστε την πιθανότητα σφάλματος bit και σχεδιάστε την καμπύλη BER για M = 2 & 8 για απλή κωδικοποίηση για τιμές του $\mathrm{SNR} = 0{:}\,2{:}\,20\ \mathrm{dB}$. Επαναλάβετε το ερώτημα για M = 8 αν τα σύμβολα στην αντιστοίχιση κωδικοποιούνταν κατά Gray. Οι καμπύλες να σχεδιαστούν όλες στο ίδιο γράφημα.
3. Μετρήστε την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου και σχεδιάστε την καμπύλη SER για M = 2,8 για απλή κωδικοποίηση για τιμές του $\mathrm{SNR} = 0{:}\,2{:}\,20\ \mathrm{dB}$. Οι καμπύλες θα πρέπει και πάλι να σχεδιαστούν όλες στο ίδιο γράφημα.

Παρατηρήσεις

- Η αναφορά παραδίδεται ηλεκτρονικά **μόνο μέσω e-class**. Στο τέλος της αναφοράς, παραθέστε τον κώδικα που υλοποιήσατε. Το αρχείο της αναφοράς θα πρέπει να είναι σε μορφή pdf και να έχει ως όνομα τον αριθμό μητρώου σας. Για παράδειγμα αν η άσκηση έχει γίνει από τον φοιτητή με ΑΜ 1234 θα πρέπει το αρχείο να έχει όνομα 1234.pdf. Το αρχείο θα το ανεβάσετε στην ενότητα "εργασίες" του μαθήματος στο e-class.
- Φροντίστε να διαπιστώσετε ότι η άσκηση σας έχει υποβληθεί σωστά στο e-class. Δεν θα γίνουν δεκτές ασκήσεις αργότερα με την δικαιολογία ότι την υποβάλλατε αλλά για κάποιο λόγο η άσκηση δεν υπάρχει στο e-class.
- Η άσκηση είναι ατομική και υποχρεωτική.
- Η παράδοση της άσκησης μπορεί να γίνει μέχρι τη **12/01/2025**, ώρα **23.59**.
- Τυχόν απορίες σχετικά με την άσκηση θα λύνονται μέσω της ενότητας «Συζητήσεις» στο e-class.