



**Ciências  
ULisboa**

Faculdade  
de Ciências  
da Universidade  
de Lisboa

---

# O CONDENSADOR E OS CIRCUITOS RC E CR ASPETOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

FÍSICA EXPERIMENTAL PARA ENGENHARIA INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Rui Jorge Agostinho\*

8 de Novembro, 2020

## Conteúdo

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 O abaixamento da tensão de saída num gerador de sinais</b>             | <b>2</b>  |
| <b>2 A relação fundamental do Condensador</b>                               | <b>3</b>  |
| <b>3 A tensão de saída do circuito RC, sujeito a um sinal quadrado</b>      | <b>4</b>  |
| 3.1 O processo de "carga" do Condensador . . . . .                          | 5         |
| 3.2 O processo de "descarga" do Condensador . . . . .                       | 5         |
| <b>4 A impedância do Condensador com um sinal variável no tempo</b>         | <b>6</b>  |
| 4.1 Diferença de fase entre $V_C$ e $i_C$ com um sinal sinusoidal . . . . . | 6         |
| 4.2 Definição de impedância $Z$ . . . . .                                   | 6         |
| 4.3 A impedância $Z_C$ do Condensador . . . . .                             | 7         |
| <b>5 A resposta do circuito RC a um sinal sinusoidal</b>                    | <b>7</b>  |
| 5.1 O desfaseamento do sinal de saída . . . . .                             | 7         |
| 5.2 A resposta do filtro em amplitude . . . . .                             | 9         |
| 5.3 A amplitude do sinal à saída do gerador . . . . .                       | 10        |
| 5.4 O fator de atenuação do filtro RC . . . . .                             | 11        |
| 5.5 Justificação da designação de filtro "passa-baixo" . . . . .            | 12        |
| <b>6 A resposta em amplitude do filtro CR: passa-alto</b>                   | <b>12</b> |
| 6.1 A diferença de potencial aos terminais da resistência $R$ . . . . .     | 12        |
| 6.2 O fator de atenuação do filtro CR . . . . .                             | 13        |
| <b>7 Usos do filtro passivo "passa-banda", CR seguido de RC</b>             | <b>14</b> |

### Resumo

Apresentam-se as equações dos circuitos RC e CR que se comportam como filtros. A partir das soluções das equações diferenciais são discutidos dois casos distintos: *a)* com um sinal quadrado que leva à carga e descarga do condensador através da resistência; *b)* com um sinal sinusoidal para estudar a resposta do filtro em amplitude e fase, em função da frequência do sinal.

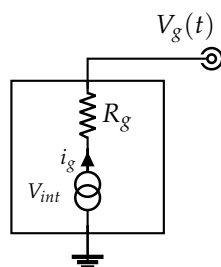
## 1 O abaixamento da tensão de saída num gerador de sinais

O modelo realista de um gerador considera-o constituído por um "gerador ideal interno" sem impedância e com tensão  $V_{int}$ , que está em série com a resistência interna  $R_g = 50 \, \Omega$  do aparelho (fig. 1 na pág. seguinte). Por isso, a verdadeira tensão de saída  $V_g(t)$  que se obtém na ficha BNC externa no gerador é dada por

$$V_g(t) = V_{int}(t) - R_g i_g(t) \quad (1)$$

Note que depois de escolhido um valor de  $V_g = V_{int}$  (em vazio  $\equiv i_g = 0$ ) e se não alterar mais esse valor no aparelho, consoante a corrente  $i_g$  aumenta por solicitação do circuito externo o valor da tensão de saída  $V_g$  do gerador irá diminuindo devido à queda de tensão  $R_g i_g$ .

Veja-se um exemplo disso na fig. 5a na pág. 6: a corrente  $i$ , indicada por  $V_R$ , no início do ciclo é mais elevada e faz  $V_g$  diminuir ligeiramente. Outro exemplo está na eq. (31) (pág. 10) associada ao



**Figura 1.** Diagrama dum gerador de sinais com saída  $V_g(t)$  (BNC) constituído por um gerador interno ideal  $V_{int}(t)$  (sem resistência óhmica) seguido da sua resistência interna  $R_g = 50 \, \Omega$ , a mesma impedância do cabo coaxial externo.

sinal sinusoidal: aumentando a frequência do sinal o condensador diminui a impedância e a corrente  $i$  aumenta forçando  $V_g$  a diminuir. Este pequeno efeito é visível na figura 6 (pág. 8).

## 2 A relação fundamental do Condensador

O comportamento do condensador ideal é obtido pela lei que relaciona a carga  $Q$  em cada armadura (positiva dum lado e negativa no outro) com a diferença de potencial (ddp)  $V_C$  aos seus terminais e a capacidade  $C$  constante que o caracteriza:

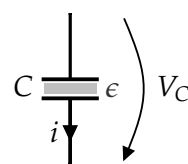
$$Q(t) = C V_C(t) \quad (2)$$

Pode inverter-se esta equação para interpretar o que é a capacidade de um condutor:  $C$  é a quantidade de carga armazenada por cada volt de ddp aos seus terminais. A sua unidade SI é *farad* (símbolo F) e farad = coulomb/volt.

Os valores típicos usados nos circuitos vão das centenas de  $\mu\text{F}$  aos nF, mas também se usam pF. Numa boa fonte de alimentação, para se obterem tensões constantes com correntes elevadas, são usadas capacidades na ordem de grandeza dos mF, pelo menos.

Um condensador é constituído por duas armaduras metálicas isoladas uma da outra, e separadas por uma distância  $d$  pequeníssima, a qual é preenchida com um material dielétrico de permitividade elétrica  $\epsilon$ . Se a área superficial das armaduras for  $A$ , então a capacidade calcula-se por:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (3)$$



**Figura 2.** Diagrama dum condensador. A distância entre as armaduras é  $d$ , muito pequena, a sua área superficial é  $A$ , o dielétrico entre elas tem permitividade  $\epsilon$  e a ddp aos terminais é  $V_C$ .

Derivando a eq. (2) em ordem ao tempo, obtém-se

$$i(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{onde} \quad i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (4)$$

A equação interpreta-se desta maneira: num condensador de capacidade constante  $C$ , a *corrente que nele passa*<sup>1</sup> é tanto maior quanto mais rápida for a variação temporal de  $V_C$ , mantendo sempre a mesma amplitude (valor máximo) de  $V_C$ .

<sup>1</sup>A corrente elétrica não passa fisicamente entre armaduras. Os eletrões que chegam a uma armadura empurram (por repulsão eletrostática) os eletrões livres na outra armadura, forçando o aparecimento de uma corrente ininterrupta no circuito. Na realidade, a força eletrostática sobre os eletrões provém em boa parte do campo elétrico criado pela ddp do gerador.

Ora, numa resistência óhmica sujeita à tensão  $V = \text{const.}$ , a lei de Ohm ( $i = V/R$ ) mostra que a corrente  $i$  que nela passa aumenta se  $R$  diminuir. *Por analogia*, a resistência oferecida pelo condensador à passagem de corrente diminui com o aumento da variação temporal de  $V_C$  (a derivada  $\frac{dV_C}{dt}$ ). Se a variação for nula o condensador oferece resistência infinita porque não passa corrente nele:  $i(t) = 0$ .

A análise dimensional da equação (4) (pág. anterior) indica que a "resistência" do condensador (impedância, corretamente falando) seja  $Z_C \propto 1/(\omega C)$ , pois  $\omega = 2\pi f$  dá a variação temporal de  $V_C(\omega, t)$ .

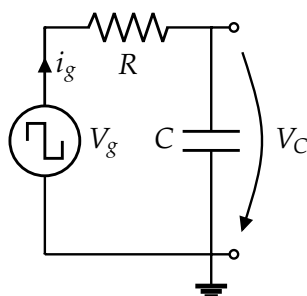
### 3 A tensão de saída do circuito RC, sujeito a um sinal quadrado

Considere-se o circuito da figura 3 em que o gerador fornece um sinal quadrado positivo, ou seja, assume dois valores distintos e constantes (0 e o máximo):  $V_{int}(t) = \{0, V_m\}$  volts. Usando a equação (1) (pág. 2) tem-se pela lei das malhas,

$$\boxed{V_{int}(t) = (R_g + R) i(t) + V_C(t)} \quad (5)$$

Derivando a equação em ordem ao tempo e recorrendo à equação (4) (pág. anterior) obtém-se

$$\frac{dV_C}{dt} = -(R + R_g) \frac{di}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = -C(R + R_g) \frac{di}{dt} \quad (6)$$



**Figura 3.** A tensão  $V_C(\omega)$  mostra o processo de "carga e descarga" da energia no condensador (obtida através de  $P=V \cdot i$ ) se o sinal proveniente do gerador  $V_g(t)$  for do tipo quadrado.

A solução da eq. (6) leva a: (onde  $i_m$  é a corrente em  $t = 0$ )

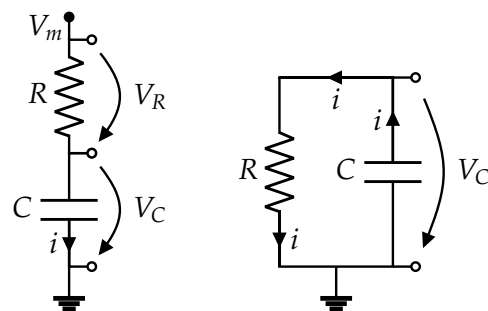
$$\int_0^t \frac{-1}{(R + R_g)C} dt' = \int_{i_m}^{i(t)} \frac{1}{i_c} di_c \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{t}{\tau} = \ln(i) - \ln(i_m) = \ln(i/i_m)$$

$$\boxed{\Rightarrow i(t) = i_m e^{-t/\tau} \quad \text{com} \quad \tau = (R + R_g)C} \quad (7)$$

A constante  $\tau$  designa se por "constante de tempo" do circuito RC e representa quanto tempo o condensador demora a diminuir a carga  $Q$  por um fator de  $1/e \approx 37\%$  (cf. eq. (10) – pág. seguinte).

Fica evidente que os processos de carga e descarga do condensador começam com uma corrente elevada inicial ( $i_m$ ) que depois decai exponencialmente no tempo. O sentido em que ela passa é que depende do valor de  $V_{int}$  do gerador:

- Se  $V_{int}(t) = V_m$  a corrente  $i$  passa no circuito no sentido em que  $V_R > 0$  e  $V_C > 0$ . Assim  $i_C > 0 \Rightarrow$  carrega o condensador (fig. 4 à Esq).
- Se  $V_{int}(t) = 0$  a corrente  $i$  passa em  $R$  no sentido em que  $V_R > 0$ , mas no condensador tem o sentido contrário a  $V_C > 0$ . Assim  $i_C < 0 \Rightarrow$  descarrega o condensador (fig. 4 à Dir).



**Figura 4.** à Esq: Se  $V_{int} = V_m$  a corrente passa no sentido positivo das tensões em  $R$  e  $C$ . À Dir: Se  $V_{int} = 0$  a corrente em  $C$  passa no sentido contrário a  $V_C > 0$ , tornando  $i_C < 0$ .

### 3.1 O processo de "carga" do Condensador

Supondo que inicialmente o condensador está descarregado ( $V_C(0) = 0$ ) e que  $V_{int}(t) = V_m = const$ , a corrente  $i_g$  passa no circuito no sentido em que  $V_R > 0$  e  $V_C > 0$ . Logo, mantêm-se os sinais na eq. (5) (pág. anterior). O comportamento da tensão  $V_C$  obtém-se pela integração da eq. (4) (pág. 3), recorrendo à eq. (6) (pág. anterior). Assim,

$$\int_0^t \frac{i_m}{C} e^{-t'/\tau} dt' = \int_0^{V_C(t)} dV_C \quad \Leftrightarrow \quad -i_m \frac{\tau}{C} (e^{-t/\tau} - 1) = V_C(t) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \quad V_C(t) = V_m(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{onde} \quad V_m = (R + R_g) i_m \quad (9)$$

### 3.2 O processo de "descarga" do Condensador

Quando o condensador está inicialmente carregado ( $V_C(0) = V_m$ ) e o gerador passa para  $V_{int}(t) = 0V = const$ , a corrente  $i_g$  passa no circuito no sentido contrário a  $V_C > 0$  (cf. figura 4). Logo, troca-se o sinal de  $i(t)$  na eq. (8). A solução desta equação (descarga de  $C$ ) é obtida por:

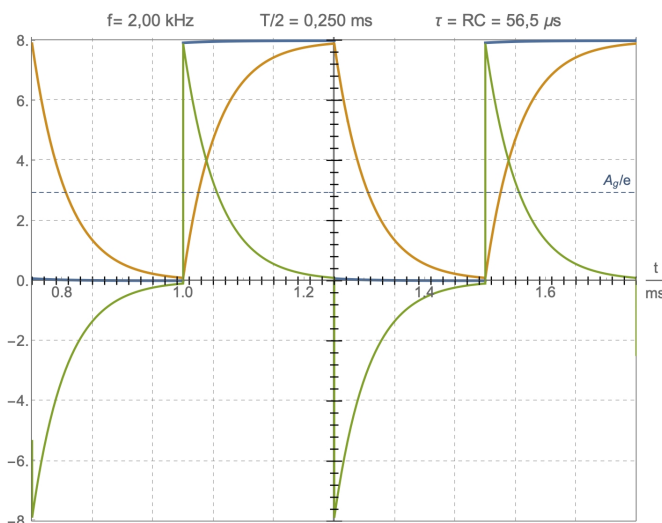
$$\int_0^t -\frac{i_m}{C} e^{-t'/\tau} dt' = \int_{V_m}^{V_C(t)} dV_C \quad \Leftrightarrow \quad i_m \frac{\tau}{C} (e^{-t/\tau} - 1) = V_C(t) - V_m$$

$$\Leftrightarrow \quad V_C(t) = V_m e^{-t/\tau} \quad \text{onde} \quad V_m = (R + R_g) i_m \quad (10)$$

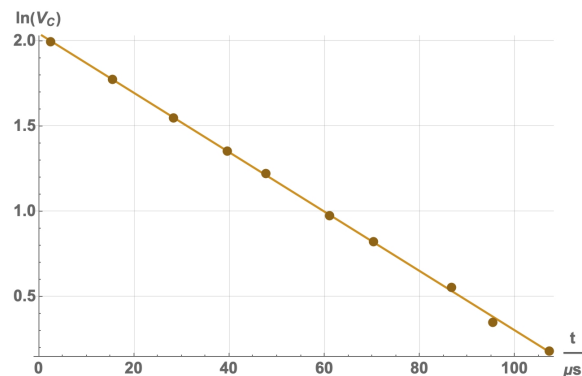
O tempo característico de decaimento  $\tau$  é o tempo decorrido até que  $V_C(\tau) = V_m/e = 0,368 V_m$ . Veja-se um exemplo das equações (9) e (10) na figura 5a (pág. seguinte). Lineariza-se a equação (10) tomando o logaritmo (natural) em ambos os lados, o que dá:

$$\ln(V_C(t)) = -\frac{1}{\tau} t + \ln(V_m) \quad (11)$$

No ajuste apresentado na fig. 5b (pág. seguinte), o declive da reta iguala o coeficiente  $-\frac{1}{\tau}$  o que permite deduzir o valor experimental de  $\tau$  e daí o valor experimental de  $C$ , conhecendo-se  $R + R_g$ .

Resposta de  $V_C$  e  $V_R, i$  ao sinal  $V_g = \text{sinusoidal}$ . Circuito RC

(a) Variação das tensões nos ciclos de carga e descarga de C.  $V_R$  tem valores positivos e negativos devido ao sentido alternado da corrente  $i$ .



(b) Exemplo de ajuste à curva de descarga no circuito RC, pela equação (11):  $\ln(V_C) = -0,0174(\pm 0,0001) t + 2,042 \pm 0,009$

**Figura 5.** Resposta do circuito RC a um sinal quadrado  $V_g = \{0, 8\}$  V, com  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 50 \Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  e  $f = 2 \text{ kHz}$ . A tensão no condensador  $V_C$  (eqs. (9) e (10)) está a castanho, a azul está  $V_g$  e a verde está  $V_R = V_g - V_C \propto i(t)$ .

## 4 A impedância do Condensador com um sinal variável no tempo

### 4.1 Diferença de fase entre $V_C$ e $i_C$ com um sinal sinusoidal

Considere-se um condensador sujeito a um sinal de tensão do tipo

$$V_C(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (12)$$

Da equação (4) (pág. 3) deduz-se

$$i_C(t) = V_m C \omega \cos(\omega t + \phi) = i_m \sin(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad \text{onde} \quad i_m = \omega C V_m \quad (13)$$

mostrando que a corrente  $i_C(t)$  do condensador está desfasada de  $90^\circ$  (avançada) em relação à tensão  $V_C$ . Quando  $i_C(t) = i_m \Rightarrow V_C(t) = 0$ , indica que  $V_C$  está atrasado em  $90^\circ$  em relação à corrente  $i$ . Isso impede que haja uma relação linear simples entre elas, do tipo  $V_C = R i_C$ , ou seja, através duma constante de proporcionalidade  $R \in \mathbb{R}$ , uma resistência óhmica pura que é apenas um número real.

### 4.2 Definição de impedância $Z$

A lei de Ohm pode ser generalizada se se incluir uma constante de proporcionalidade que também inclua o ângulo de desfasamento entre  $V$  e  $i$ . Isso é conseguido com uma constante (de "resistência") que seja um número complexo [1]: designa-se por **impedância  $Z$** . Assim, a lei de Ohm assume a forma

$$V = Z \cdot i \quad \text{onde} \quad Z = R + Xj \quad \text{e} \quad j = \sqrt{-1} \quad (14)$$

A impedância  $Z$  tem duas partes:

$R$  – (parte real) é a Resistência óhmica pura do componente, ou circuito em que está integrado.

$X$  – (parte imaginária) designa-se por *reactância*, contribui para a resistência total  $|Z|$  oferecida pelo componente no circuito, mas também traduz a diferença de fase  $\varphi$  entre  $V$  e  $i$ .

A resistência total deste componente no circuito será dada pelo módulo do número complexo  $Z$

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot Z^*} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{onde} \quad Z^* = R - Xj \quad (15)$$

e a diferença de fase  $\varphi$  entre  $V$  e  $i$  obtém-se de

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} \quad (16)$$

A fórmula de Euler permite escrever  $Z$  de outro modo:

$$\text{como } e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad Z = |Z| e^{j\varphi} = R + Xj \quad (17)$$

visto que: (veja a representação de  $Z$  no plano complexo [2]: eixo  $xx \equiv \mathbb{R}$  e eixo  $yy \equiv \mathbb{I}$ )

$$R = |Z| \cos \varphi \quad \text{e} \quad X = |Z| \sin \varphi \quad (18)$$

### 4.3 A impedância $Z_C$ do Condensador

Comparando a tensão  $V_C$  aos terminais do condensador (eq. (12) na pág. anterior) com a expressão da corrente  $i_C$  que o percorre (eq. (13) na pág. anterior), e como a diferença de fase de  $i_C \rightarrow V_C$  é  $\varphi = -90^\circ = -\pi/2$ , usando a equação (17) conclui-se que

$$V_C = Z_C i_C = |Z_C| e^{j\varphi} i_C = |Z_C| e^{-\frac{\pi}{2}j} i_C \quad \Leftrightarrow \quad V_C = -j |Z_C| i_C \quad (19)$$

ou seja, num condensador puro  $Z_C$  só tem a parte imaginária<sup>2</sup>, a reactância:

$$\boxed{|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad Z_C = \frac{-j}{\omega C} = X_C j} \quad (20)$$

## 5 A resposta do circuito RC a um sinal sinusoidal

### 5.1 O desfasamento do sinal de saída

Considere-se que o gerador ideal no circuito RC dá um sinal sinusoidal de amplitude  $V_m$  e frequência angular  $\omega$ , do tipo eq. (12) (pág. anterior). Assim, a anterior equação diferencial (6) do circuito passa a ser:

$$\frac{1}{C} i(t) + (R + R_g) \frac{di}{dt} = V_m \omega \cos(\omega t) \quad (21)$$

<sup>2</sup>A derivação desta relação é mais clara quando se admite que a tensão é do tipo  $V(t) = V_m e^{j\omega t}$ , a expressão mais geral para um sinal alternado, pois uma composição de funções sin e cos ainda é uma função sinusoidal com fase diferenciada.

Usando a definição da resistência ôhmica total no circuito

$$R_t = R + R_g \quad (22)$$

e sendo  $\tau = R_t C$  a solução da equação (21) é:

$$i(t) = \frac{V_m \omega C}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ \cos(\omega t) + \omega \tau \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (23)$$

Note-se que o último termo da eq. (23) é evanescente para  $t \gg \tau$ , devido à exponencial negativa. Introduzindo a solução de  $i(t)$  em

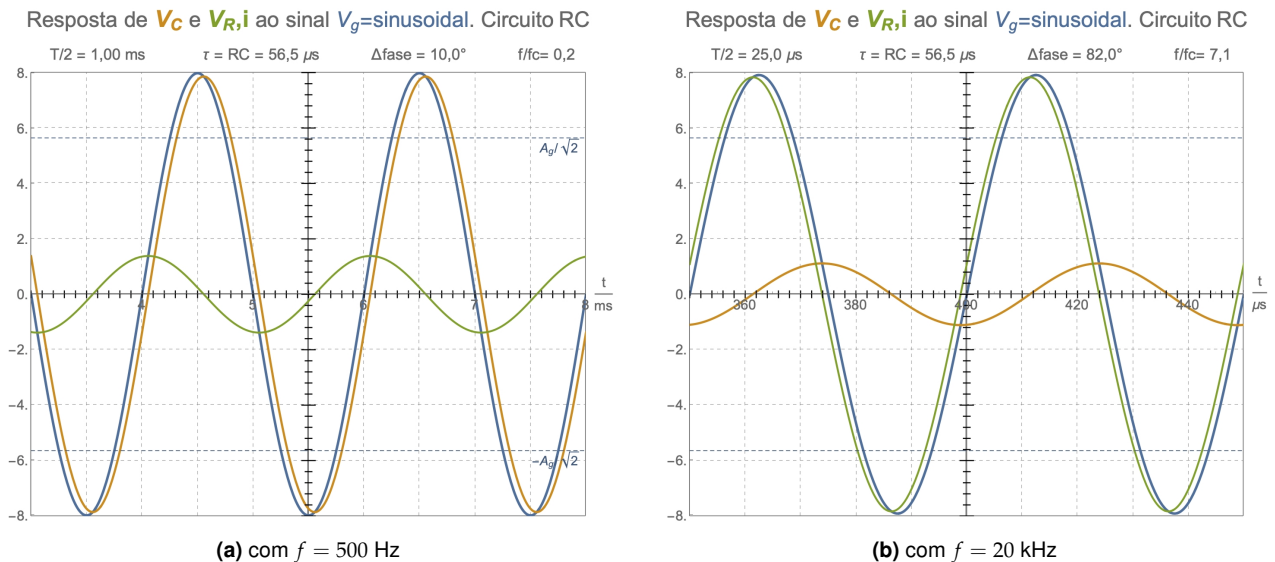
$$V_C(t) = V_m \sin(\omega t) - R_t i(t) \quad (24)$$

e trabalhada a expressão, obtém-se a solução da tensão no condensador  $V_C(t)$ , cuja forma geral é:

$$V_C(t) = \frac{V_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ \sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t) + \omega \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (25)$$

O último termo é evanescente para  $t \gg \tau$  (exponencial negativa). Por isso  $\omega \tau e^{-t/\tau} \rightarrow 0 \Rightarrow$  pode ser desprezado. Deste modo, para frequências tais que

- $\omega \tau \gg 1$  o termo  $\cos(\omega t)$  domina, pondo  $V_C(t)$  desfasado de  $90^\circ$  com  $V_g(t)$  e amplitude evanescente.
- $\omega \tau \ll 1$  o termo  $\sin(\omega t)$  domina, pondo  $V_C(t)$  em fase com  $V_g(t)$  e amplitude  $\approx V_m$ .



**Figura 6.** É notória a perda de amplitude no sinal de saída ( $V_C$ ) em função da frequência. Note-se a diferença de fase entre  $V_C$  e o sinal  $V_g$  do gerador (cf. na fig. 7 (pág. seguinte)). Neste caso usou-se  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 50 \Omega$  e  $C = 10 \text{ nF}$ .

O comportamento da equação (25), mostrado na fig. 6, pode ter uma forma mais simples de interpretar se for usada a igualdade matemática

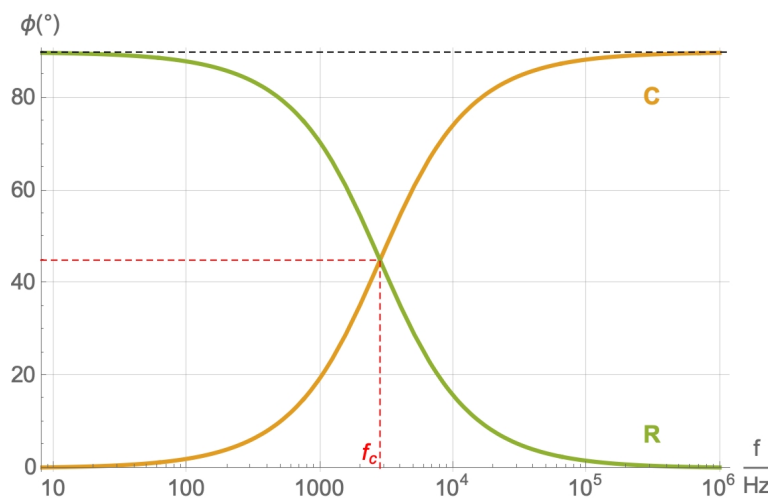
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} [\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)] = \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau)) \quad (26)$$



Considerando que o argumento ' $\arctan(\omega \tau)$ ' na função seno representa o ângulo de desfasamento (de *atraso* temporal) em relação ao sinal do gerador, a equação (25) transforma-se em:

$$V_C(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \phi(\omega)) \quad \text{com} \quad \phi(\omega) = \arctan(\omega \tau) \quad (27)$$

A diferença de fase  $\phi(\omega)$  dada pela equação (27), visualiza-se na figura 7. Na figura 6 (pág. anterior) também se nota que a ddp na resistência  $R$  (a verde) está adiantada (temporalmente) em relação ao gerador. Na realidade tem  $\Delta\phi = +90^\circ$  a  $V_C$ , devido à equação (4) (pág. 3), pois  $V_R \propto i$ . A sua diferença de fase ao sinal do gerador, em função da frequência, também aparece na fig. 7.



**Figura 7.** Módulo da diferença de fase (em graus) entre os sinais de saída  $V_C$  e  $V_R$  ao sinal do gerador  $V_g$ . A frequência de corte  $f_c = 2817 \text{ Hz} \Rightarrow \phi = 45^\circ$  e uma atenuação  $V_C/V_g = 1/\sqrt{2}$ . Neste caso usou-se  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 50 \Omega$  e  $C = 10 \text{ nF}$ .

## 5.2 A resposta do filtro em amplitude

Como já reparou, a amplitude de  $V_C(t)$  diminui com o aumento da frequência  $f$ . Essa variação está bem explícita na equação (27), pois o termo em denominador tem  $\omega^2$ . Por isso, quando

- a)  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow V_C \rightarrow V_m$
- b)  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow V_C \rightarrow 0$

Deduz-se este mesmo resultado utilizando a impedância complexa do condensador, calculada pela equação (20) (pág. 7) e recorrendo à fórmula do divisor da tensão  $V_{int}$ , entre  $R_t$  e  $Z_C$ :

$$\begin{aligned} A_C(\omega) &= \left| \frac{Z_C}{R_t + Z_C} \right| V_m \\ &= \frac{1/(\omega C)}{\sqrt{R_t^2 + 1/(\omega C)^2}} V_m \quad \left( \times \frac{\omega C}{\omega C} \right) \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{1 + (R_t \omega C)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \quad \text{QED.} \end{aligned} \quad (28)$$

A variação de  $A_C(\omega)$  em função da frequência do sinal está na fig. 9 (pág. 11).

### 5.3 A amplitude do sinal à saída do gerador

No laboratório não há acesso ao sinal do gerador ideal interno (sem resistência óhmica), mas só se pode usar/medir a tensão do gerador à saída (na ficha BNC), que é obtida por

$$V_g(t) = V_{\text{int}}(t) - R_g i(t) = V_m \sin(\omega t) - R_g i(t) \quad (29)$$

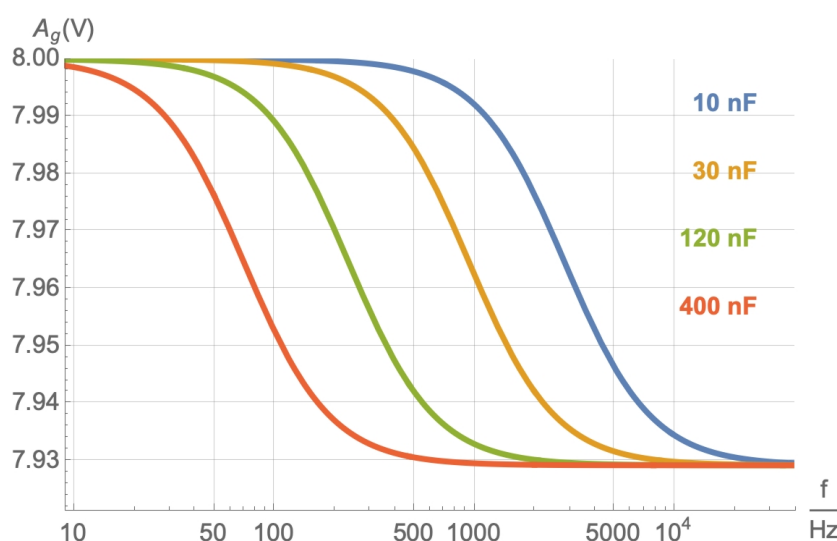
e equivalente a:

$$V_g(t) = V_m \left[ \sin(\omega t) - \frac{R_g C \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \phi(\omega)) \right] \quad (30)$$

Além de ter diferença de fase em relação ao gerador ideal, a amplitude  $A_g$  do sinal  $V_g$  também é afetada. O seu valor calcula-se pela divisão da tensão  $V_{\text{int}}$  pelos componentes em série,  $R_g$ ,  $R$  e  $Z_C$ :

$$\begin{aligned} A_g(\omega) &= \left| V_m - \frac{R_g}{R_t + Z_C} V_m \right| \quad \text{onde} \quad R_t = R + R_g \\ &= \left| 1 - \frac{R_g}{R + R_g + Z_C} \right| V_m \\ &= \left| \frac{R + Z_C}{R + R_g + Z_C} \right| V_m \\ &= \sqrt{\frac{R^2 + 1/(\omega C)^2}{R_t^2 + 1/(\omega C)^2}} V_m \quad \left( \times \frac{\omega C}{\omega C} \right) \Leftrightarrow \\ A_g(\omega) &= \sqrt{\frac{1 + (R \omega C)^2}{1 + (R_t \omega C)^2}} V_m \end{aligned} \quad (31)$$

Repare que se obtém o valor máximo quando a diferença de fase é nula (eq. (30)), o que só acontece a frequências baixas neste tipo de filtro:  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A_g \rightarrow V_m$  (cf. na figura 8). Este efeito é visível na resposta do filtro RC em função da frequência, na figura 6 (pág. 8).



**Figura 8.** Amplitude  $A_g$  do sinal sinusoidal à saída do gerador (eq. (31) na ficha BNC externa), para a amplitude  $V_m = 8$  V do gerador ideal (o interno). Neste caso usou-se  $R = 5,6$  k $\Omega$ ,  $R_g = 50$   $\Omega$  e  $C = 10; 30; 120; 400$  nF.

## 5.4 O fator de atenuação do filtro RC

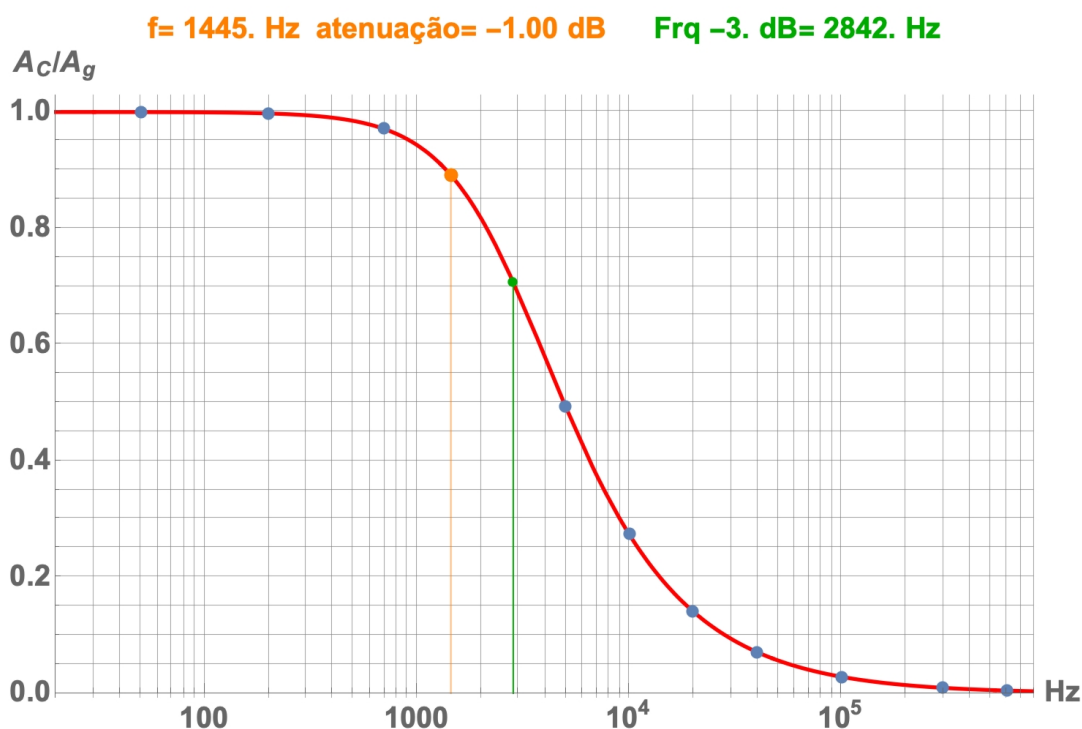
No laboratório são medidos os valores das amplitudes dos sinais no gerador, equação (31), e no condensador (equação (27) na pág. anterior), em função da frequência  $\omega$  para se determinar o fator de atenuação  $\gamma$  do filtro, definido como a razão entre a amplitude de saída  $A_C$  e a de entrada  $A_g$ . Calcula-se destas equações que:

$$\gamma = \frac{A_C}{A_g} = \frac{\frac{Z_C}{R_t + Z_C}}{\frac{R + Z_C}{R_t + Z_C}} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}} \quad (32)$$

Deduz-se daqui que

- a) se  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow 1$ .
- b) se  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma \rightarrow 0$

Na figura 9 apresenta-se a variação da atenuação dum filtro RC em função da frequência.



**Figura 9.** Resposta em frequência do filtro RC (passa-baixo) para  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 50 \Omega$  e  $C = 10 \text{ nF}$ .

A atenuação dum filtro, ou seja, o decréscimo da amplitude de saída **face à de entrada**, é geralmente indicada numa escala logarítmica e unidades “decibel” ou *db* (1 décimo de *bel*). Calcula-se pela fórmula

$$At = 20 \log_{10} \frac{A_R}{A_g} \quad (33)$$

A frequência  $f_c$  (dita “frequência de corte” do filtro) que produz a atenuação  $At_c = -3,0103 \text{ db}$  tem

$$\gamma_c = \frac{A_c}{A_g} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (34)$$

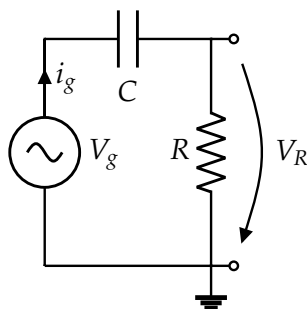
### 5.5 Justificação da designação de filtro “passa-baixo”

Como se depreende da figura 9 (pág. anterior), ao injetar um sinal composto por muitas frequências num filtro RC, e supondo que todas têm a mesma amplitude inicial, os sinais de frequências mais elevadas que  $f_c$  têm as suas amplitudes muito reduzidas, tanto mais quanto maior for a sua frequência.

A razão para se designar (de uma maneira simplista na terminologia) que é um filtro “passa-baixo” é porque apenas os sinais com frequências  $f \lesssim f_c$  é que saem do filtro com uma amplitude quase igual à que traziam. Assim, em termos de sinais, só os de baixas frequências é que o filtro “deixou passar”.

## 6 A resposta em amplitude do filtro CR: passa-alto

Invertendo a posição do condensador C com a da resistência R no diagrama da figura 3 (pág. 4), obtém-se um circuito em que o sinal é retirado da resistência, que fica agora ligada à massa. Ou seja, a tensão de saída não é mais do que a ddp aos terminais da resistência (figura 10).



**Figura 10.** A tensão  $V_R(\omega)$  é o sinal de saída e o gerador  $V_g(t)$  dá um sinal do tipo sinusoidal.

A solução matemática deste caso é exatamente igual à do caso RC, pois ao trocar a posição relativa dos dois componentes permanecem as equações que descrevem as tensões e a corrente no circuito.

### 6.1 A diferença de potencial aos terminais da resistência R

A ddp aos terminais da resistência calcula-se pela lei de Ohm e usando a expressão de  $i(t)$  (equação (23) na pág. 8). Desprezando o termo exponencial evanescente sobra a solução quiescente (temporalmente estável) que leva à expressão geral:

$$V_R(t) = \frac{R}{|Z_C|} \frac{V_m}{1 + \omega^2 \tau^2} [\cos(\omega t) + \omega \tau \sin(\omega t)] \quad (35)$$

Usando a igualdade matemática

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} [\cos(\omega t) + \omega \tau \sin(\omega t)] = \cos(\omega t - \arctan(\omega \tau)) \quad (36)$$

e considerando que o argumento ' $\arctan(\omega \tau)$ ' na função coseno representa o ângulo de desfasamento em relação ao sinal do gerador, a equação (35) assume a seguinte forma:

$$V_R(t) = R \frac{V_m \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \phi(\omega)) \quad \text{com} \quad \phi(\omega) = \arctan(\omega \tau) \quad (37)$$

Daí deduz-se que a amplitude de saída tem dois casos extremos:

a)  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A_R \rightarrow 0$

b)  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A_R \rightarrow \frac{RC}{\tau} V_m \rightarrow \frac{R}{R + R_g} V_m \approx V_m$

A resposta deste filtro está na figura 6 (pág. 8), tomando  $V_R$  (a verde) como o sinal de saída, em vez de ser  $V_C$ . O sinal  $V_R$  está desfasado de  $90^\circ$  em relação ao de  $V_C$  (avanzado), resultado proveniente das funções periódicas 'cos' da eq. (37) e 'sin' da eq. (27) (pág. 9) terem o mesmo argumento.

## 6.2 O fator de atenuação do filtro CR

A razão de amplitudes (atenuação  $\gamma$ ) entre o sinal de saída  $V_R$  e o de entrada (eq. (31) na pág. 10), dá:

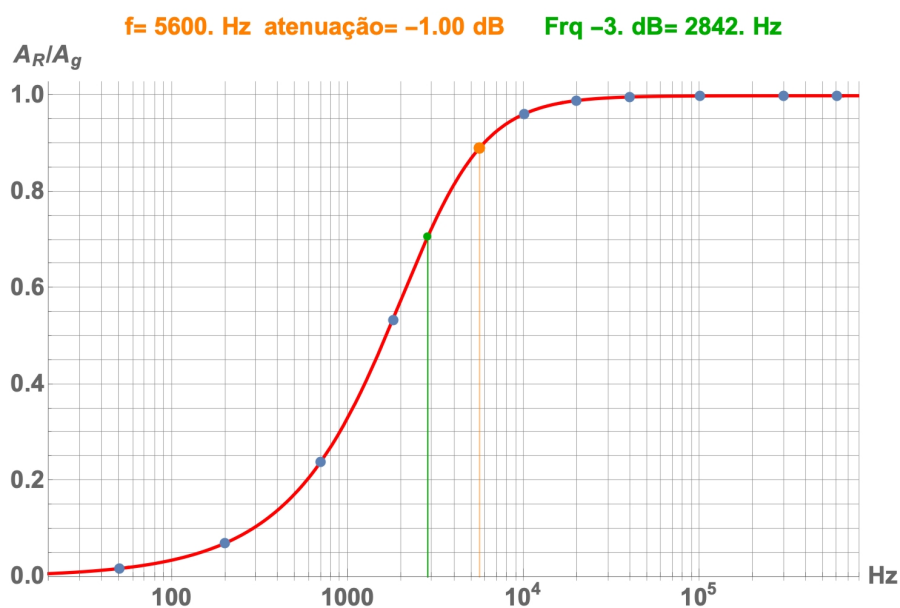
$$\gamma = \frac{A_R}{A_g} = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}} \quad (38)$$

O comportamento geral tem dois casos extremos, a baixas e a altas frequências:

a) se  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow 0$

b) se  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma \rightarrow 1$

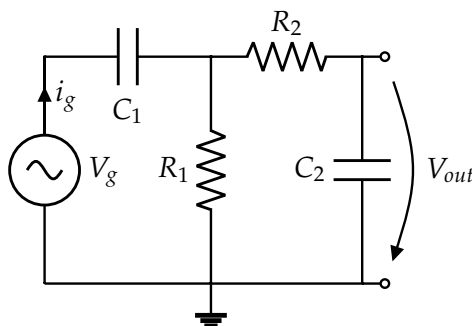
como se vê na figura 11. Por isso é um filtro passa-alto.



**Figura 11.** Resposta em frequência do filtro CR (passa-alto) para  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 50 \Omega$  e  $C = 10 \text{ nF}$ .

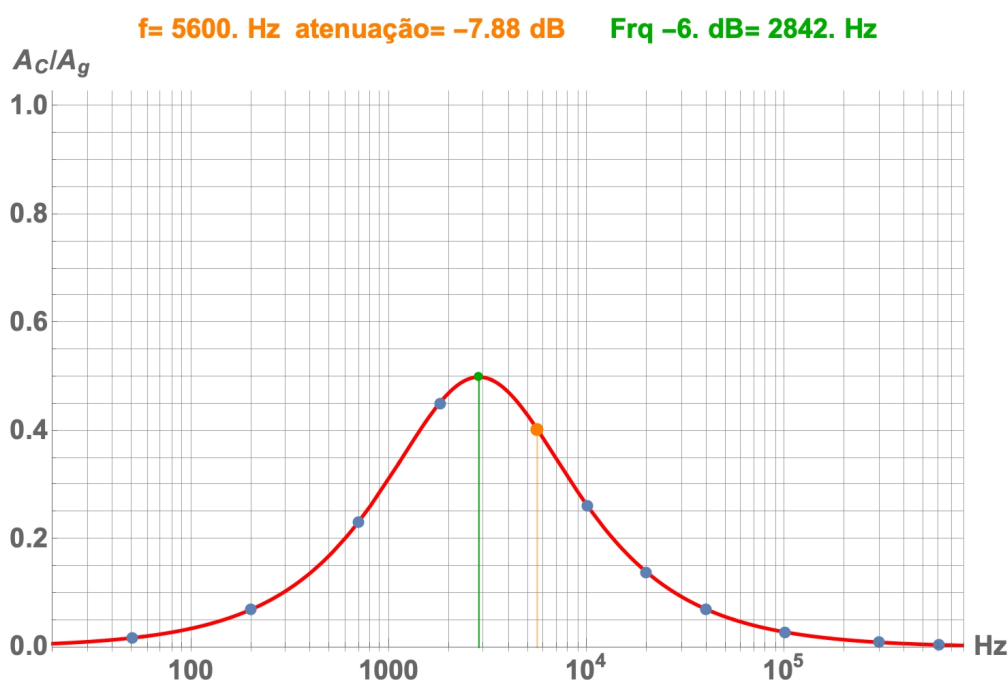
## 7 Usos do filtro passivo “passa-banda”, CR seguido de RC

Em muitos casos é necessário usar filtros que só deixam passar uma banda de frequências, como é comum nas telecomunicações. Por exemplo, isso permite que o sinal proveniente da antena do aparelho capte e introduza sinais de largo espectro em frequências no circuito, mas o filtro seleciona apenas as que interessam, por exemplo, Bluetooth a 2,4 – 2,5 GHz (baixa energia), Wi-Fi 802.11bgn a 2,4 – 2,5 GHz e 802.11n a 5,725 – 5,875 GHz, ou 802.ah em 700, 860 e 902 MHz, LTE em 700, 800, 1800, 2100, 2300 MHz.



**Figura 12.** Filtro passa banda que usa dois filtros passivos: CR (passa-alto) seguido de um RC (passa-baixo).

Como em geral o sinal proveniente de antenas é muito fraco, usam-se filtros ativos com amplificação para recuperar a amplitude do sinal. Uma configuração simples é usarem-se dois filtros passivos (sem



**Figura 13.** Resposta em frequência do filtro passa banda CR+RC para  $R_{1,2} = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $C_{1,2} = 10 \text{ nF}$  e  $R_g = 50 \Omega$ . Nesta configuração a atenuação mínima é de  $-6 \text{ dB}$  para  $f = 2,84 \text{ kHz}$  e decai logo para frequências mais baixas e mais altas. Atenção à escala logarítmica na frequência: a largura de banda está na ordem de grandeza dos kHz.

amplificação) montados em sequência: a saída dum CR (passa-alto) alimenta um RC (passa-baixo), como na figura 12. Escolhe-se a frequência central que interessa através do valor das resistências e dos condensadores. Mas há um preço a pagar: a atenuação desta combinação de filtros decai para  $At = -6 \text{ dB}$ , na frequência central: metade da amplitude de entrada. Veja-se a resposta duma configuração destas na figura 13.

## Referências

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical\\_impedance#Deriving\\_the\\_device-specific\\_impedances](http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_impedance#Deriving_the_device-specific_impedances).
- [2] *Use of Complex Impedance* no site HyperPhysics do Department of Physics and Astronomy, Georgia State University, USA. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/impcom.html#c1>.
- [3] Rui Jorge Agostinho, protocolo do trabalho *Lab #4- O Condensador e os Circuitos RC e CR*, FCUL, 2020.