Aulas 2 e 9 de outubro 2023

Circuitos de corrente alternada
Circuitos RC e RL básicos:

- **Regime transitório e**
- **Regime estacionário ou permanente**

Análise de circuitos: período transitório e regime permanente

Quando se fornece energia a um circuito, o tempo correspondente ao "*arranque*" e designa-se por ***período* transitório**, a que se segue o regime/período de funcionamento **permanente** ou **regime estacionário (pode-se assumir que neste regime *os valores médios não variam*)**.

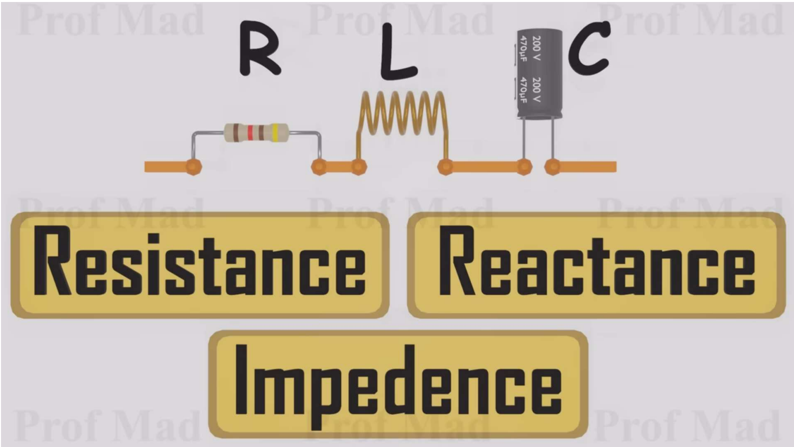
Quando fazemos a análise de um circuito podemos ter de considerar a:

- **Análise DC - regime transitório/"transiente": determinação de como variam as grandezas desde o instante em que se começa a fornecer energia até ser atingido o regime estacionário**
- **Análise DC – ponto quiescente (ponto de operação do ponto de vista DC):** determinação do ponto de funcionamento DC em regime permanente (estacionário). Aplica-se também a circuitos que os sinais podem variar no tempo, normalmente são aplicados aos circuitos sinais compostos (sinais com componentes DC e AC)
- **Análise em regime estacionário:** determinação de como os sinais variam no tempo; normalmente centra-se na determinação dos parâmetros do sinais AC/variáveis no tempo (amplitudes, etc.).
- **Analise sinusoidal:** análise dinâmica em regime estacionário em que os circuitos são excitados apenas com sinusoidais (com ou sem componente DC).
- **Resposta/análise em frequência (AC sweep, AC analysis)**: determinar como é que um circuito responde a sinais sinusoidais (sempre com mesma amplitude) de diferentes frequências (e.g. diagramas de Bode, como veremos adiante – ver também notas sobre o PSpice).

Condensadores e capacidade

Bobines e indutância

Rever: https://youtu.be/UrCFv2qCELI?si=euCJ6u0HFQum5AQI



* "Engineering Circuit Analysis," By William Hayt and Jack Kemmerly and Jamie Phillips and Steven Durbin; McGraw Hill.

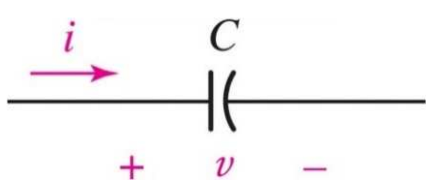
Exemplos condensadores

Os condensadores armazenam energia na forma de um campo elétrico entre as suas armaduras.

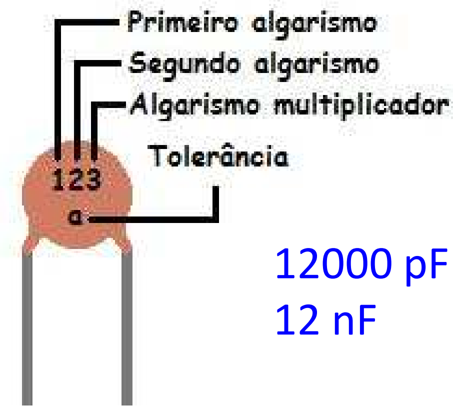
O condensadores variam em tamanho dependendo da capacidade de e da tensão que toleram/suportam.

Há também os supercondensadores.

Gama de valores típicos picofarad (pF) a milifarad (mF) em circuitos eletrónicos.



Condensador cerâmico (pF):



12000 pF

12 nF

Tolerância

Até 10pF	Acima de 10pF	
B=0,10pF	F=1%	M=20%
C=0,25pF	G=2%	P=+100%-0%
D=0,50pF	H=3%	S=+50%-20%
F=1pF	j=5%	Z=+80%-20%
G=2pF	K=10%	

Condensadores cerâmicos:

(a)

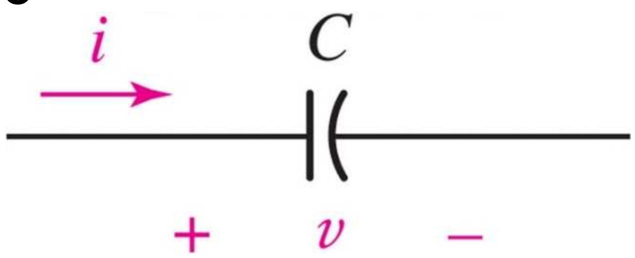
(b)

Condensadores eletrolíticos

(c)

O condensador e a capacidade elétrica

Um condensador ideal é um elemento passivo cujo símbolo é



$$\boxed{v = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt}$$

Ao contrário de uma resistência, um condensador ideal não dissipa energia. Armazena energia, que quando for necessário devolve ao resto do circuito.

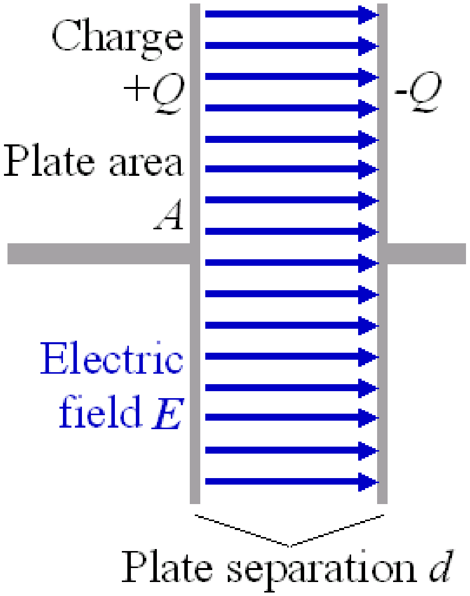
- A relação ou característica corrente-tensão num condensador é $\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$

- A capacidade C é a expressa em farad (F)

1 F é um valor muito grande; valores típicos são mF, uF e nF

O condensador de placas paralela

A capacidade de um condensador só depende da forma do condensador e do material de que é feito. O condensador "mais simples" corresponde a duas placas metálicas separadas por um meio isolador (pode ser o ar).



Neste caso a capacidade *C* é dada por:

$$\boxed{C = \frac{A\varepsilon}{d}}$$

A representa a área da placas, *d* a distância entre as placas e ε é a permitividade elétrica do meio que separa as placas.

No caso do ar, $\varepsilon = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m

A expressão acima pode ser escrita como: $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

onde $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_r \times 8{,}85\times10^{-12}$ F/m

ε_r representa a permitividade relativo do meio (no caso do ar, ε_r=1)

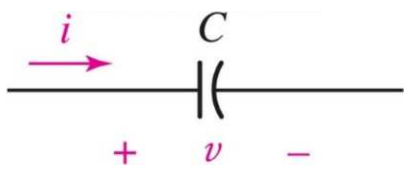
Exercício:

considere um condensador de placas paralelas com secção quadradas de lado 0.4 m, separadas por um material com ε_r=2 e com espessura 2 mm. Determine a capacidade do condensador.

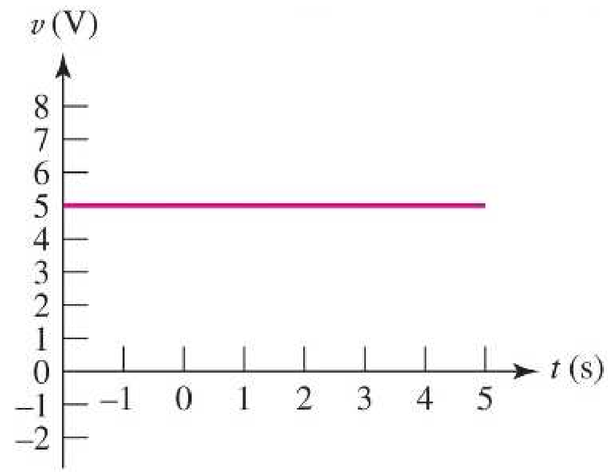
Resposta: *C*=1.56 nF

Exercício: curvas *i*–*v*[1]

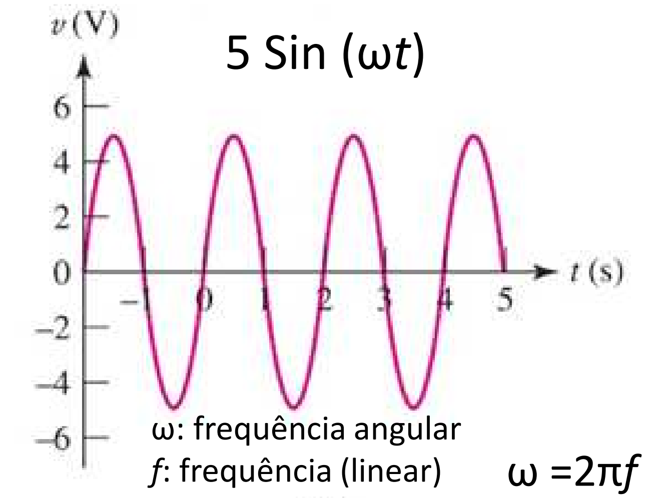
Determinar a corrente *i*(*t*) para as tensões indicadas nas figuras, se *C* = 2 F.



$$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

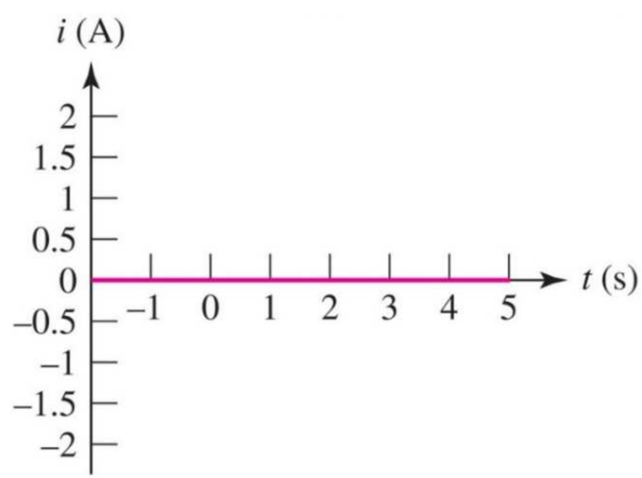


(*a*)

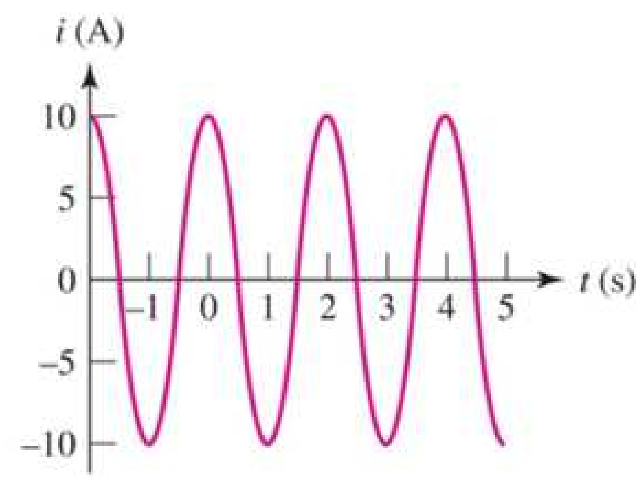


(*b*)

Solução: aplicando $i(t) = C\,dv/dt = 2\,dv/dt$ temos:



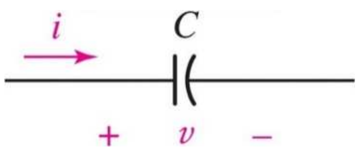
(*a*)



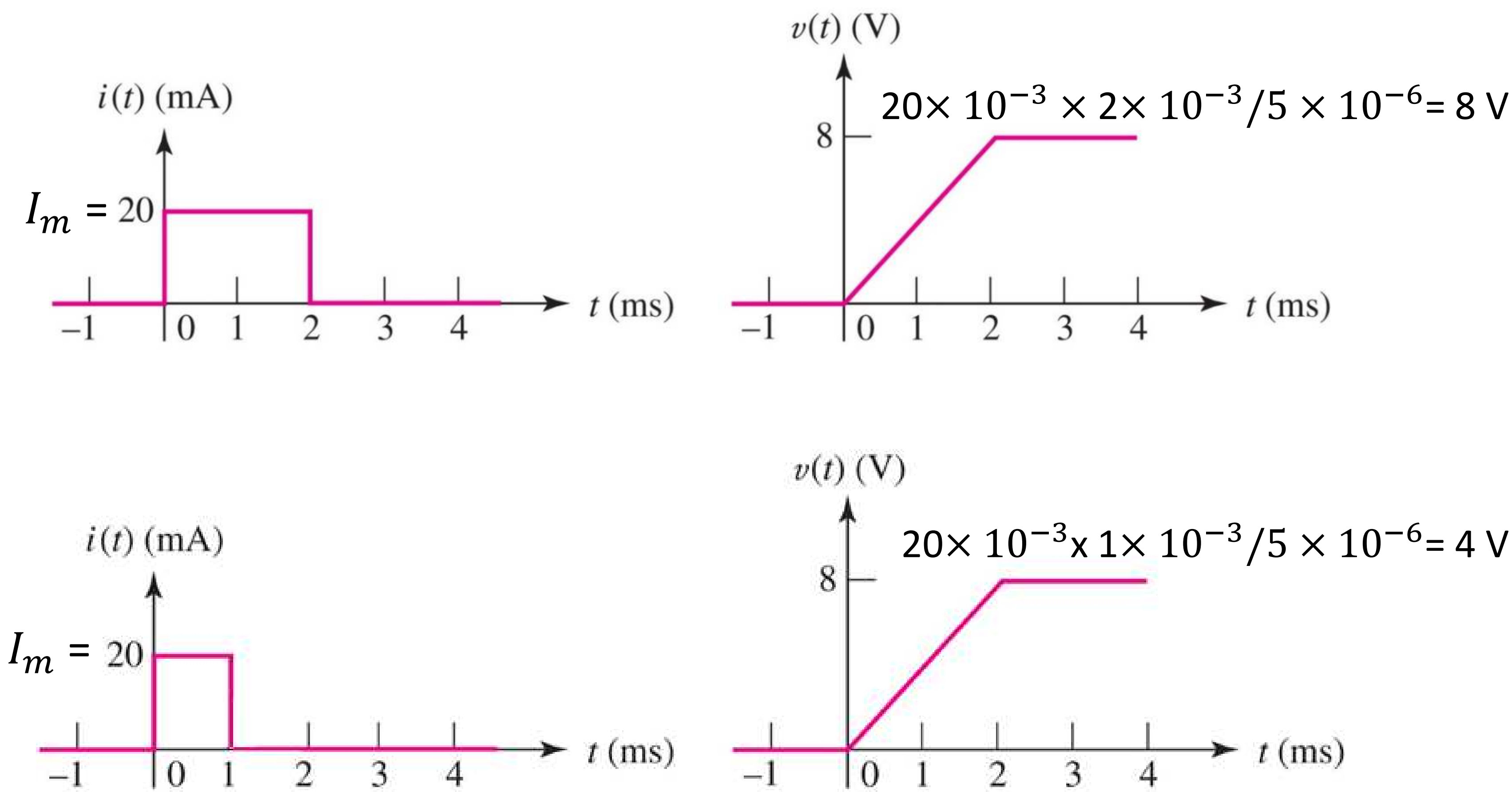
(*b*)

Exercício: curvas *i*–*v*2

Considere um condensador de $C = 5\ \mu F$. Verifique se gráfico da tensão aos terminais do condensador é resultado da corrente indicada que percorre o condensador.



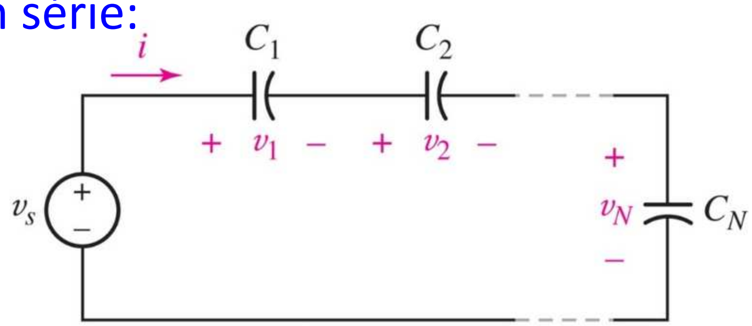
$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ e } v_C(t) = \frac{q(t)}{C} \longrightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^{t_f} i_C(t)\,dt = \frac{1}{C} i_m\, t_f$$

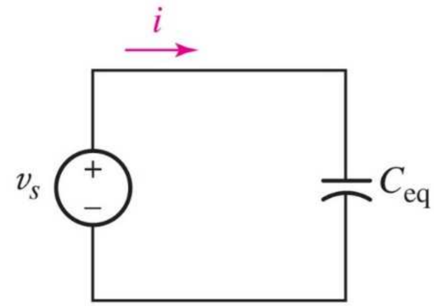


Condensadores em série e em paralelo

Associação em série:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$





$$v_s = v_{\mathrm{Ceq}} = \frac{q_{\mathrm{eq}}(t)}{C_{\mathrm{eq}}}$$

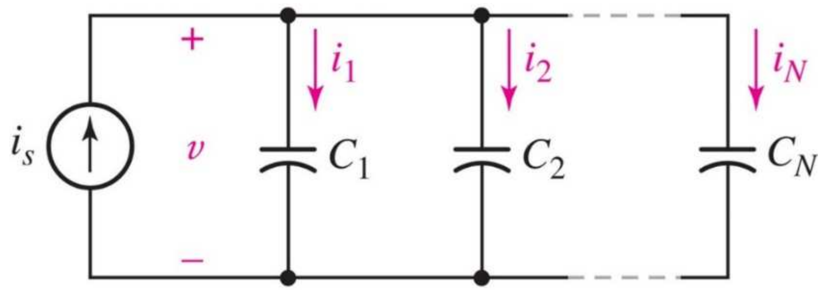
- Aplicando a lei das malhas:

$$v_s = \sum_{k=1}^{K=N} v_k = \sum_{k=1}^{K=N} \frac{q_k(t)}{C_k},\ k=1,\ 2,\ \dots,\ N$$

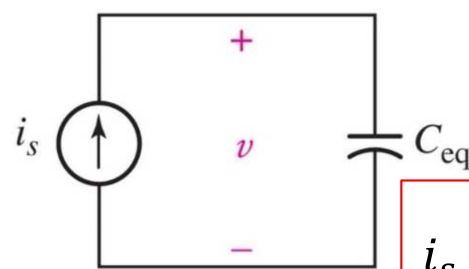
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}}$$

Associação em paralelo:



$$i_k = C_k\frac{dv(t)}{dt}$$



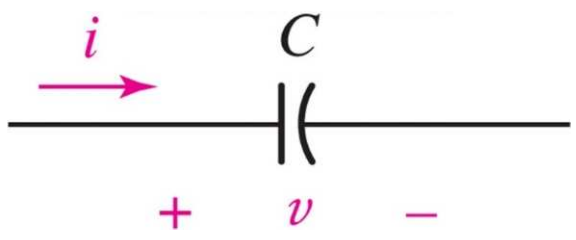
$$i_s = C_{eq}\frac{dv(t)}{dt}$$

- Aplicando a lei dos nós, obtém-se:

$$i_s = \sum_{k=1}^{K=N} i_k = \sum_{k=1}^{K=N} C_k\frac{dv(t)}{dt},\ k=1,\ 2,\ \dots,\ N$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

Comportamento básico de um condensador



$$i = C\frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_i}^{t_f} i(t)dt$$

A tensão aos terminais de um condensador não pode variar repentinamente (não por sofrer transições instantâneas/bruscas).

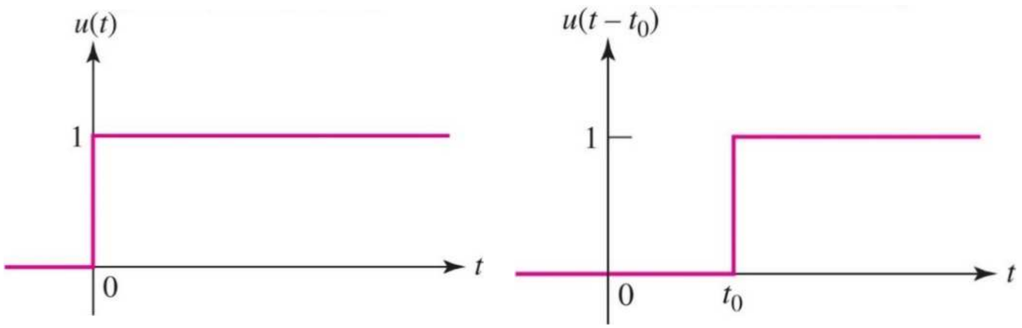
Em circuitos de corrente continua, após o período transitório os condensadores comportam-se como circuitos abertos, mantendo aos seus terminais as tensões que adquiriram durante o período transitório.

Como iremos ver, em circuitos de corrente alternada de muito alta frequência, após o período transitório os condensadores comportam-se como curto-circuitos.

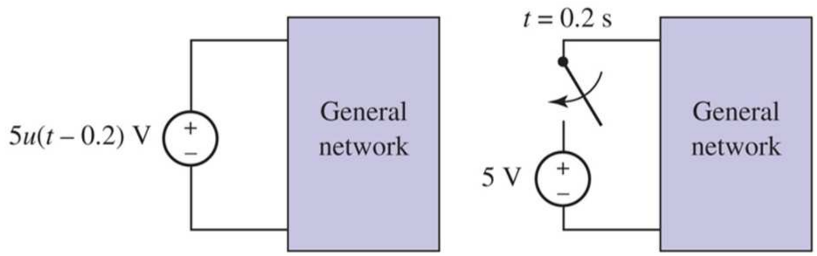
Os condensadores podem armazenar energia na forma de um campo elétrico entre as suas armaduras ($i \times v > 0$) ou devolver a energia que possam ter armazenado (anteriormente) ao circuito ($i \times v < 0$)

Função degrau unitário e pulsos de tensão

A função degrau unitário *u*(*t*) – **Função de Heaviside** - é uma notação (forma) conveniente de representar uma alteração do valor de tensão/corrente (e.g., (ligar e/ou desligar uma fonte):



Degrau unitário reproduzido com um interruptor:



O interruptor está aberto para $t < 0.2$ s (não é um curto-circuito; é um curto-circuito para *t*=> 0.2 s).

Dois degraus unitários usados para *modelar* um pulso de tensão:

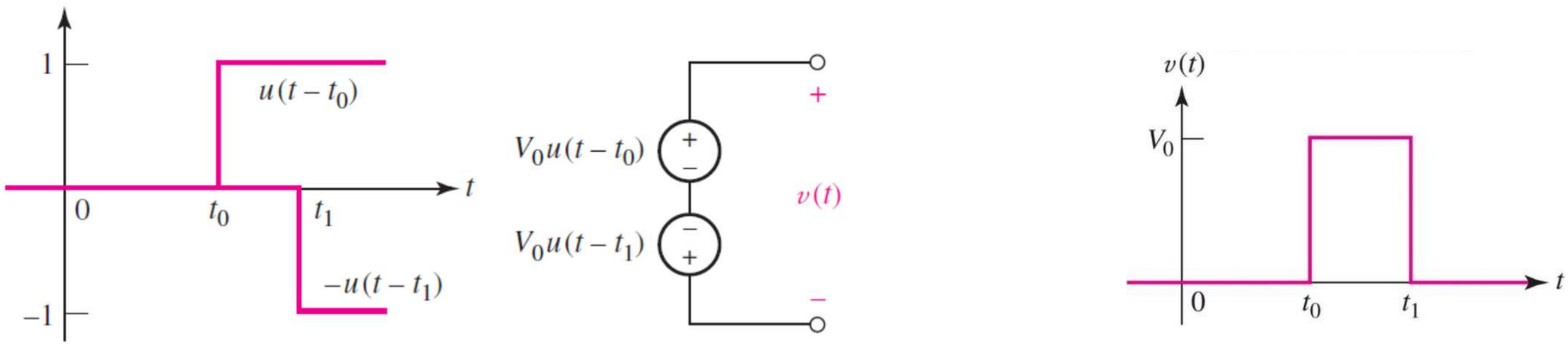
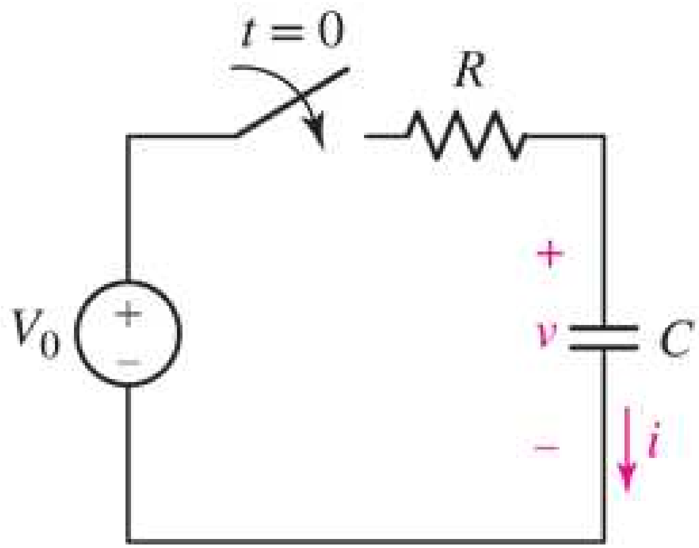
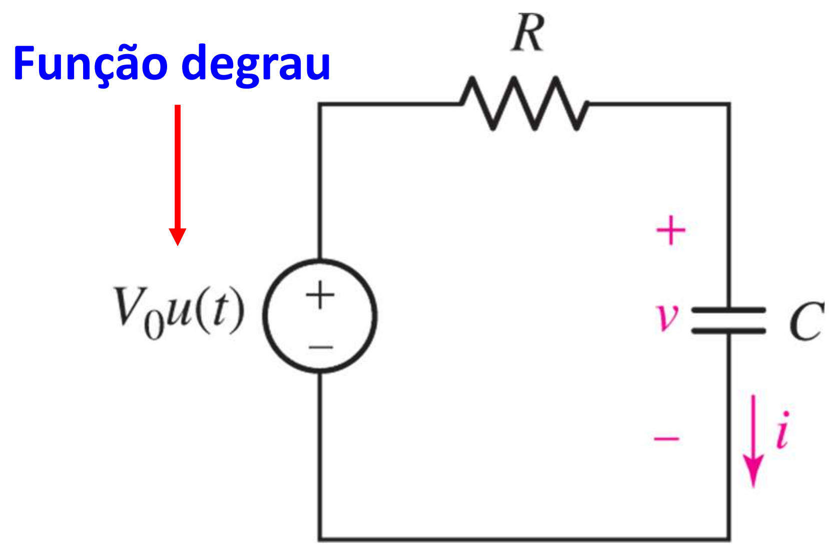


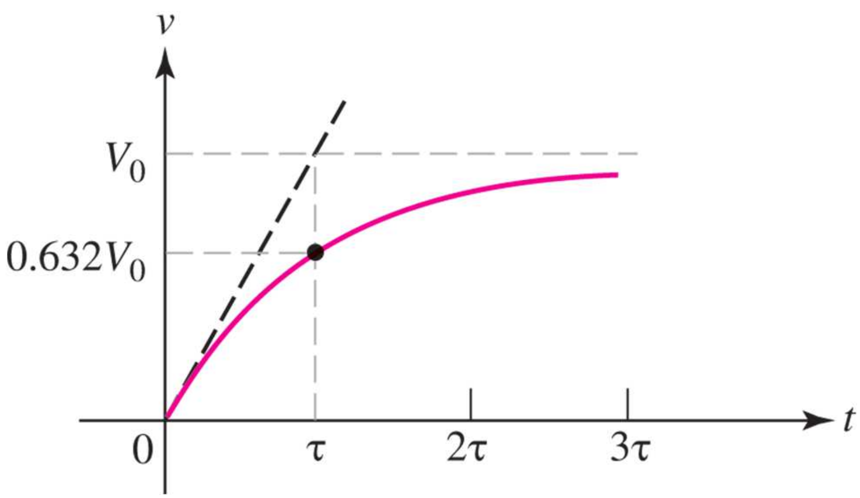
FIGURE 8.31 (*a*) The unit steps $u(t - t_0)$ and $-u(t - t_1)$. (*b*) A source which yields the rectangular voltage pulse of Fig. 8.30.

Resposta de circuitos RC à função degrau$_1$

Nos dois circuitos temos $i(t) = 0$ para $t < 0$ s e for $t > 0$ s.





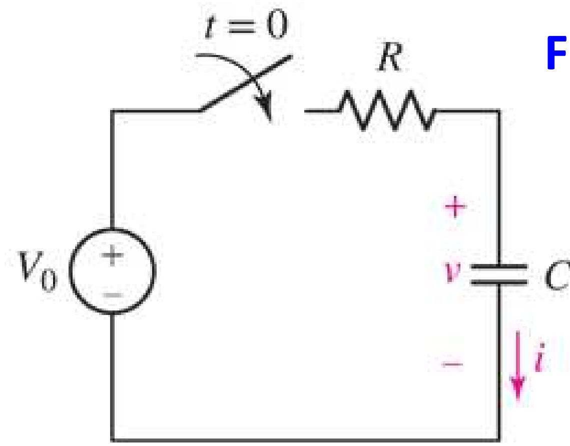


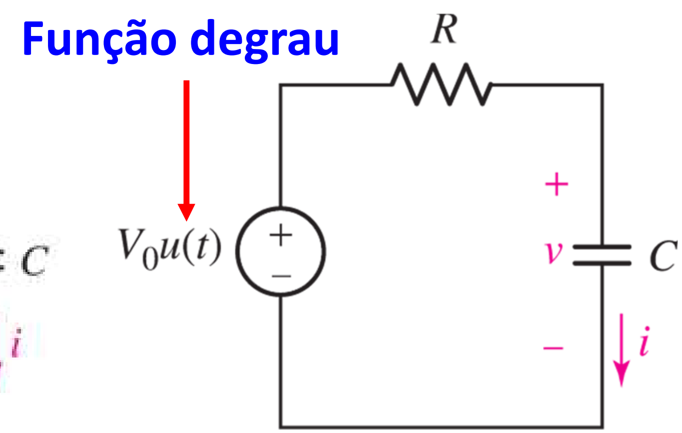
$$v(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

A constante de tempo $\tau = RC$ determina a taxa de crescimento de $v(t) = v_C(t)$.

Resposta de circuitos RC à função degrau[1]

Nos dois circuitos temos $i(t) = 0$ para $t < 0$ s e for $t > 0$ s.





Aplicando KVL

$$Ri(t) + v(t) = V_0 \quad \text{e} \quad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Substituindo $i(t)$:

$$RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = V_0. \text{ Dividindo por } RC\text{, obtém-se } \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{V_0}{RC}$$

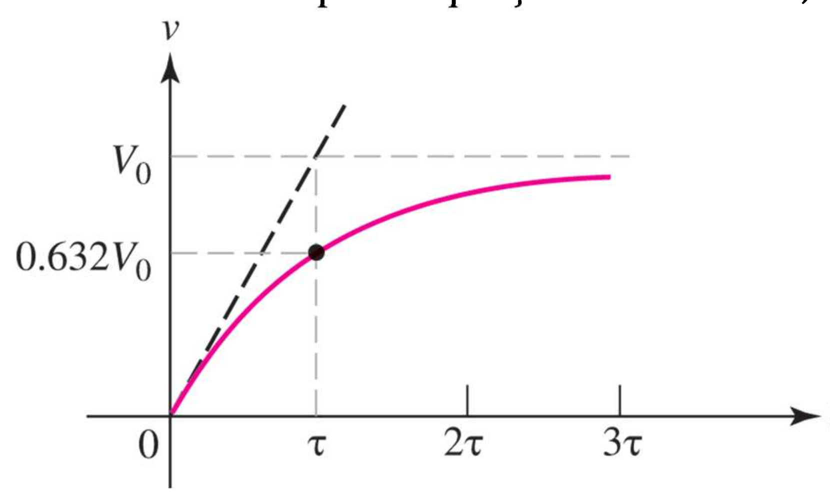
Temos de encontrar as respostas **natural** (n) e **forçada** (f) devido à V_0.

As soluções **natural (n)** e **forçada (f)** são: $v_n(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ e $v_f(t) = K$

A resposta total combina as resposta natural e forçada: K é determinado pela equação diferencial, neste caso $K = V_0$: $v(t) = v_n(t) + v_f(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + V_0$

A é determinado pelas condições iniciais ($v(0) = 0$).

$$\boxed{v(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

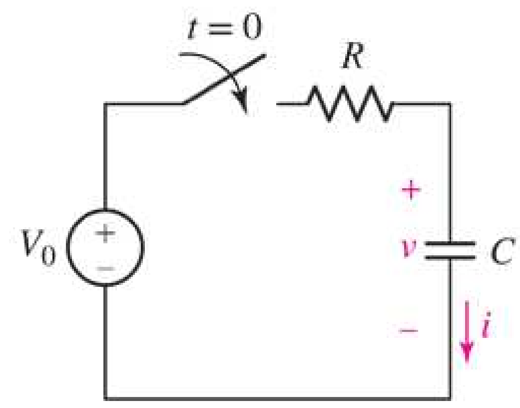


A constante de tempo $\tau = RC$ determina a taxa de crescimento de $v(t) = v_C(t)$.

Resposta de circuitos RC à função degrau$_2$

Consideremos o circuito com $i(t) = 0$ e $v(t) = 0$ para $t < 0$ s.

Qual será a corrente e a tensão v após se fechar o interruptor?



Aplicando KVL ao circuito tem-se $Ri(t) + v(t) = V_0$;

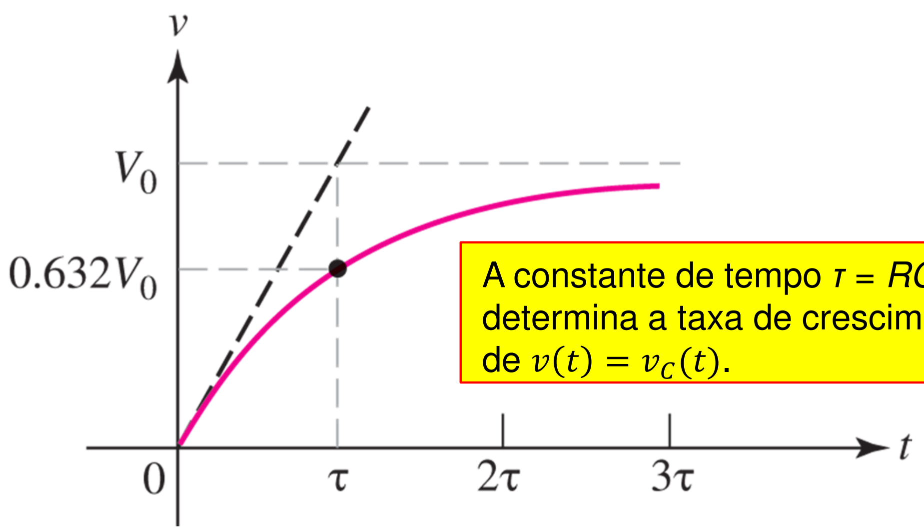
substituindo $i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$ e dividindo cada parcela por RC,

obtém-se a equação diferencial $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{V_0}{RC}$

A solução é **do tipo** $v(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + K \rightarrow$(**se $t \rightarrow \infty \rightarrow v(t) = K = V_0$**)$\rightarrow v(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + V_0$

A resposta do circuito combina as resposta natural e a resposta forçada: K é determinado pela equação diferencial; A é determinado pelas **condições iniciais** ($v(0) = 0$), obtendo-se $A = -V_0$:

$$\boxed{v(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$



A constante de tempo $\tau = RC$ determina a taxa de crescimento de $v(t) = v_C(t)$.

TPC:

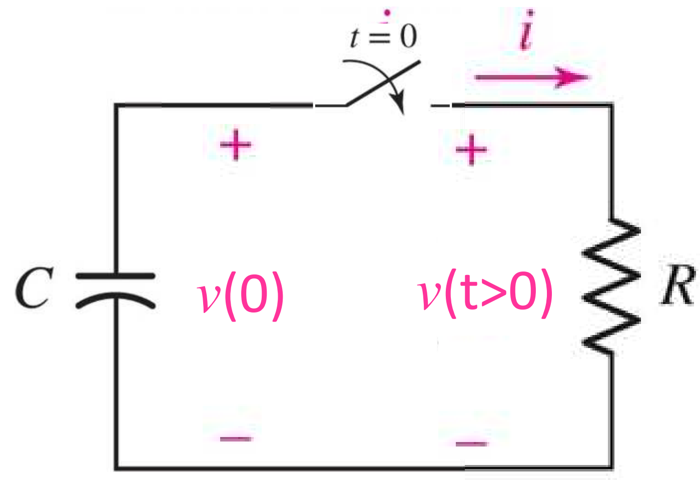
Como variará a corrente $i(t)$ e a carga $q(t)$ armazenada no condensado?

Representar graficamente em função do tempo as duas grandezas.

Ajuda: ter presente que $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=C\frac{dv(t)}{dt}$.

Circuito RC sem fonte – resposta natural

Condensador inicialmente carregado: $v(0) = V_0$



Do exemplo anterior tem-se:

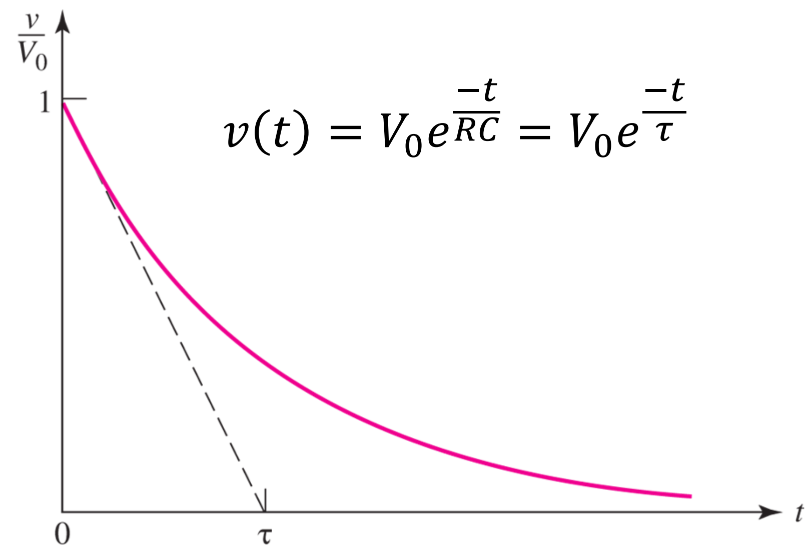
$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0$$

Condição inicial: $v(t \leq 0) = V_0$ e $i(t < 0)$=0 A

(condensador carregado em t=0 s: $v(0) = V_0$)

Resposta natural do circuito tendo presente a condição inicial: $v(0) = V_0$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}} \text{ para } t > 0 \text{ s}$$



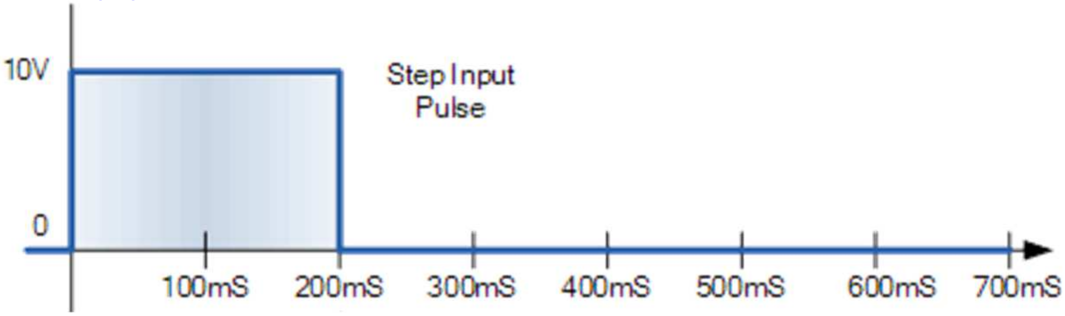
A constante de tempo τ = RC determina a taxa de decaimento da tensão.

TPC:

Como variará a corrente $i(t)$ e a carga $q(t)$ armazenada no condensado? Representar graficamente as duas grandezas.

Pulso de Tensão e Onda Quadrada

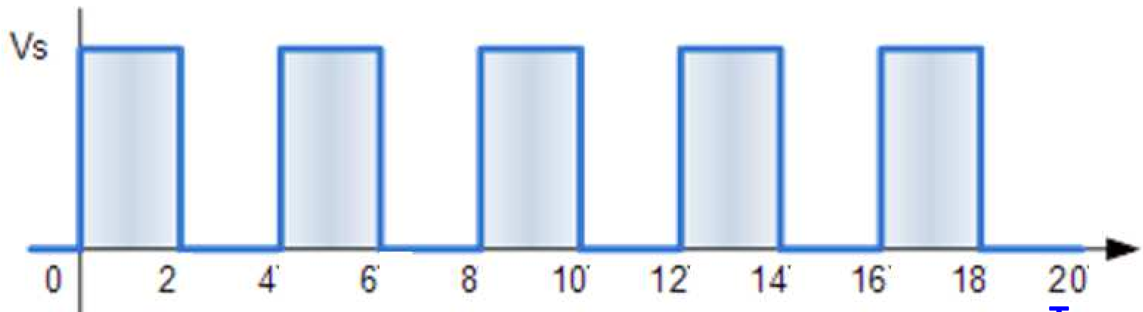
Tensão (V)



Tempo (ms)

Onda Quadrada

Tensão (V)

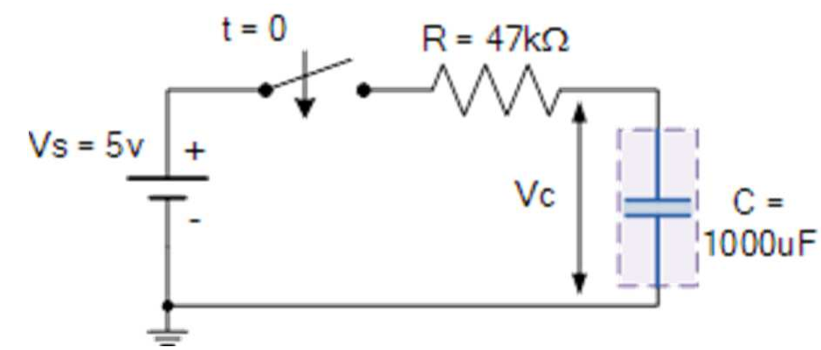


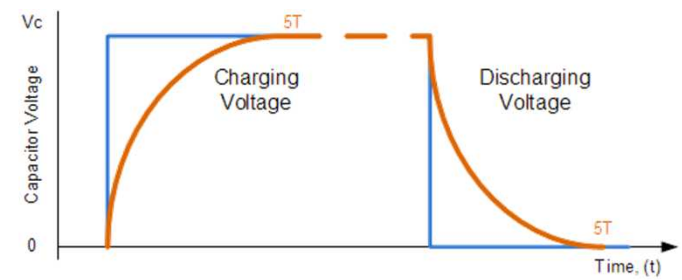
Tempo (ms)

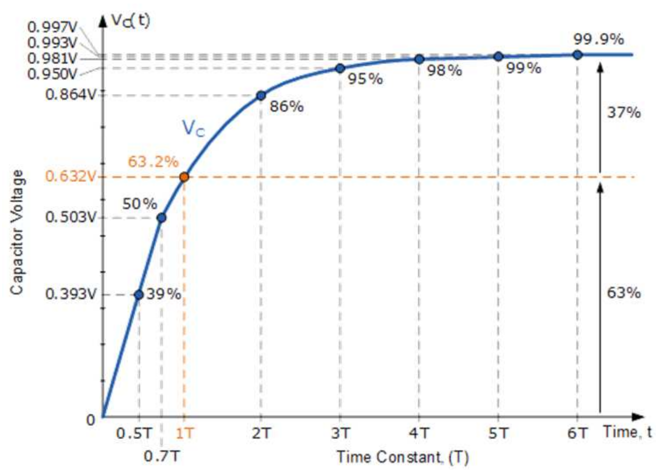
PSPICE: ver VPULSE (pag. 9):
Esta fonte de tensão é normalmente usada para simulações onde se pretende estudar o comportamento transiente dos circuitos, i.e., quando queremos que aplicar uma onda quadrada. Parâmetros relevantes: DC – componente DC; AC – componente AC; V1 – valor da tensão quando o pulso está "desligado" (para uma onda quadrada corresponde ao valor inferior, pode ser zero, positivo ao negativo; 0 V no caso da figura); V2 – é o valor correspondente ao pulso propriamente dito (para uma onda quadrada corresponde ao valor superior), pode ser zero, positivo ao negativo; Vs V no caso da figura); TD – tempo de atraso (não pode ser negativo, em geral é 0 s); TR/TF – tempos de subida e de descida do pulso, respetivamente; em geral é muito pequeno, 1 ns; TW – largura do pulso; PER – período do pulso (tempo total do pulso: TW + o tempo em que o pulso está "desligado")

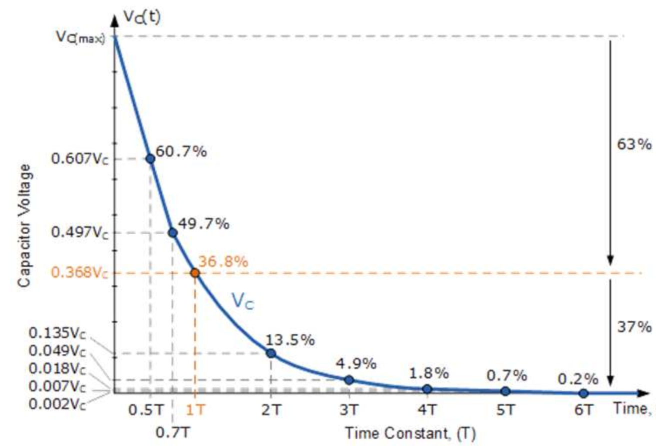
https://moodle.ciencias.ulisboa.pt/pluginfile.php/507721/mod_resource/content/1/CESDig_2122_Introdu%C3%A7%C3%A3o%20ao%20simulador%20PSPICE.pdf

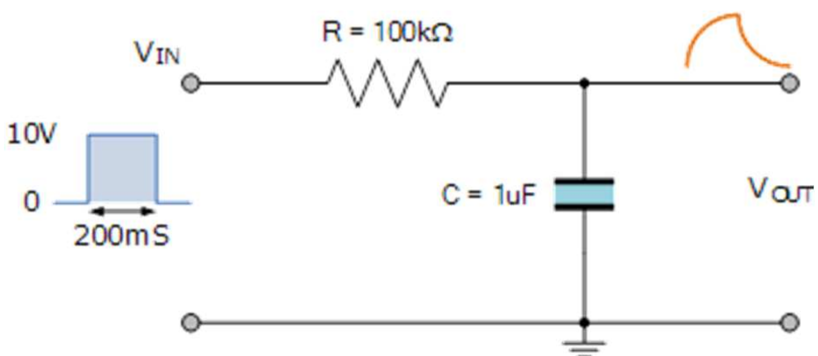
Resposta de circuitos *RC* a pulsos de tensão[1]

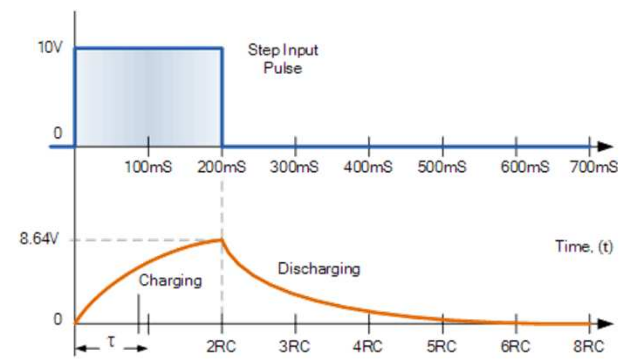




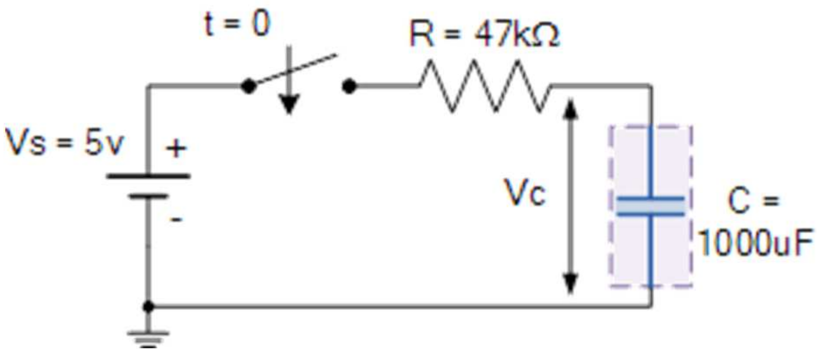








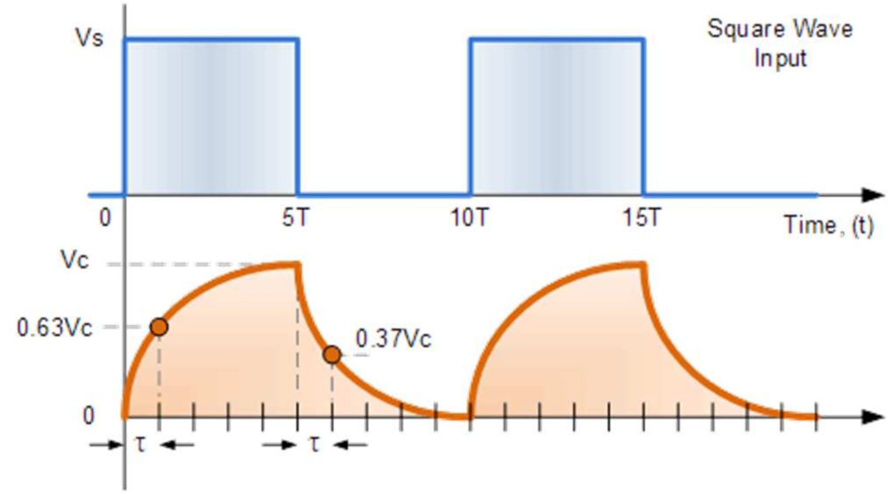
Resposta de circuitos *RC* a pulsos de tensão$_2$

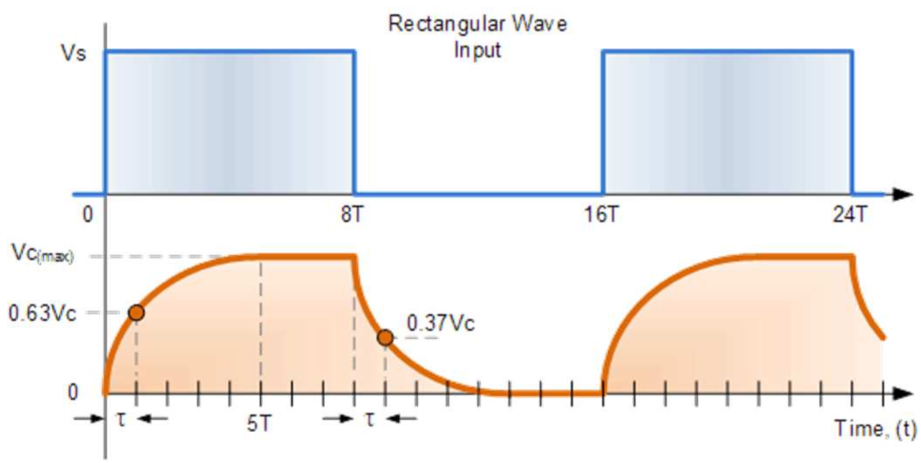


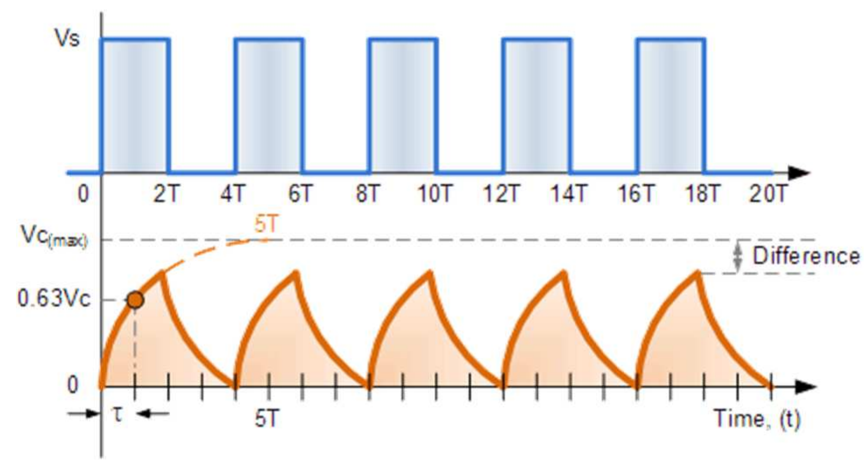
$$Ri(t) + v(t) = V_S$$

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{e} \quad i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{V_S}{RC}$$

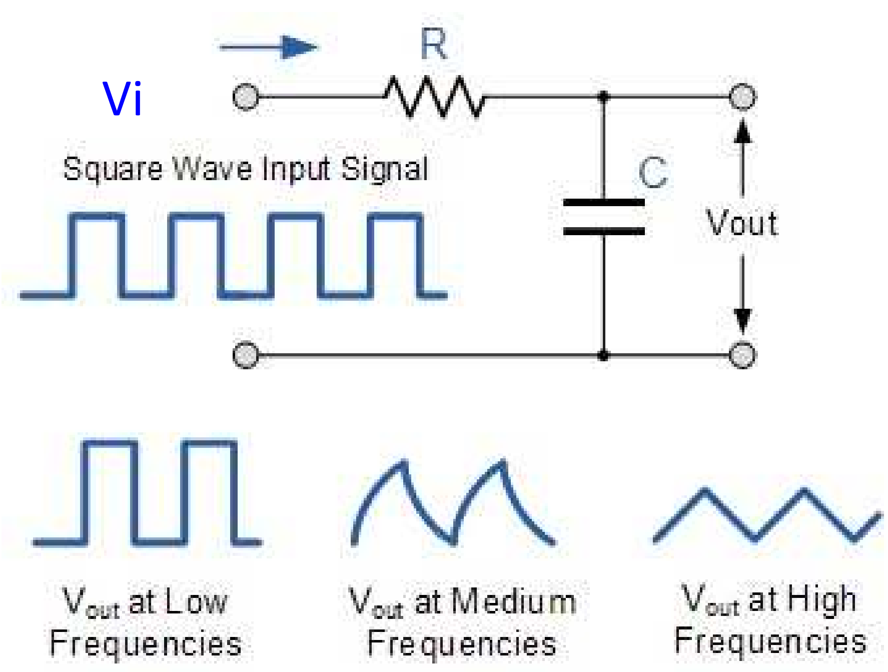


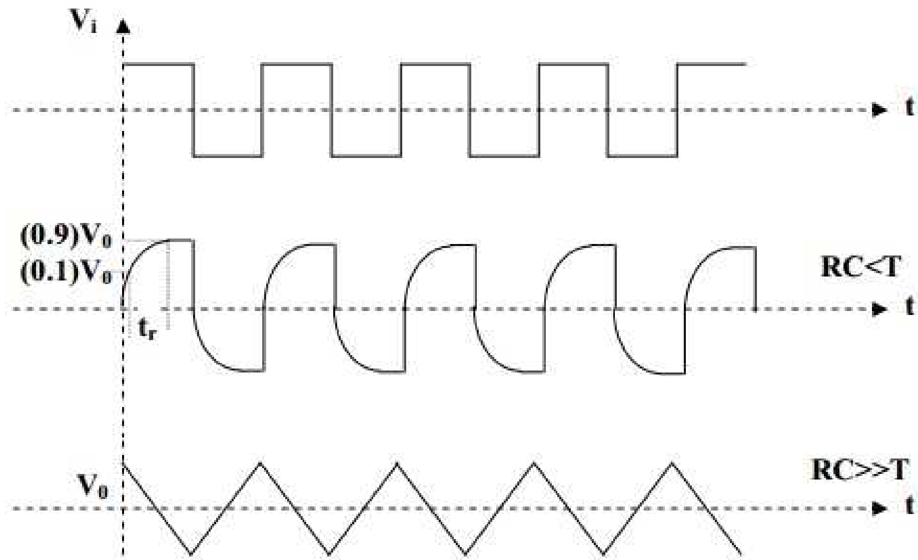




O circuito RC integra os sinais de alta frequência

Iremos analisar mais tarde com detalhe o funcionamento do circuito “RC” como passa-baixo.

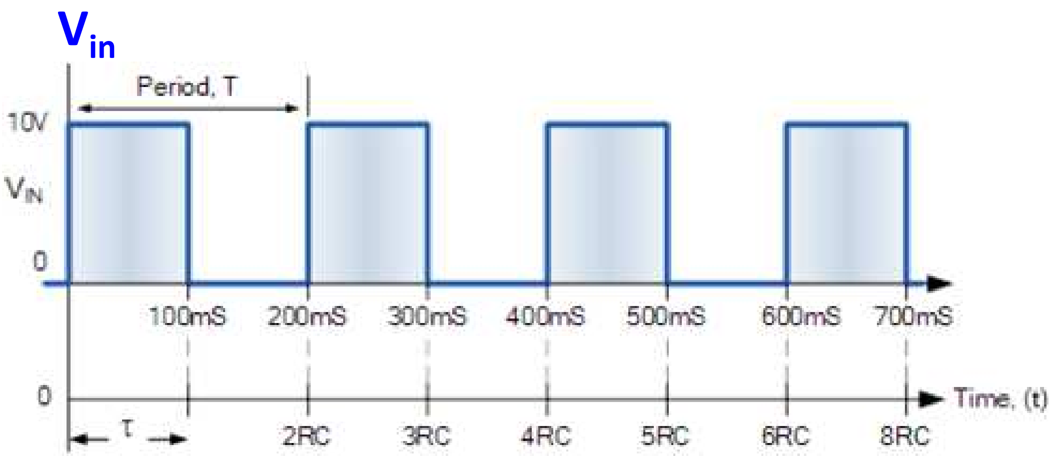


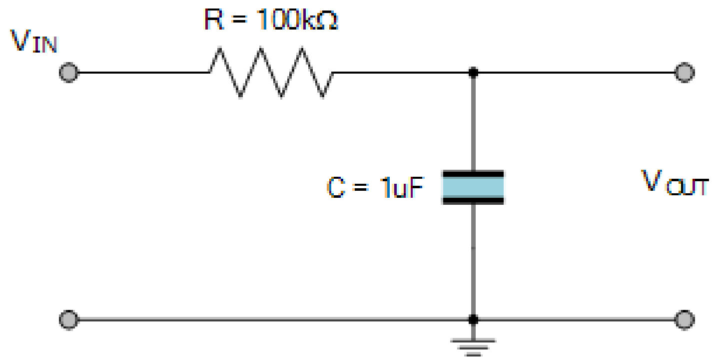


Integral de Vi

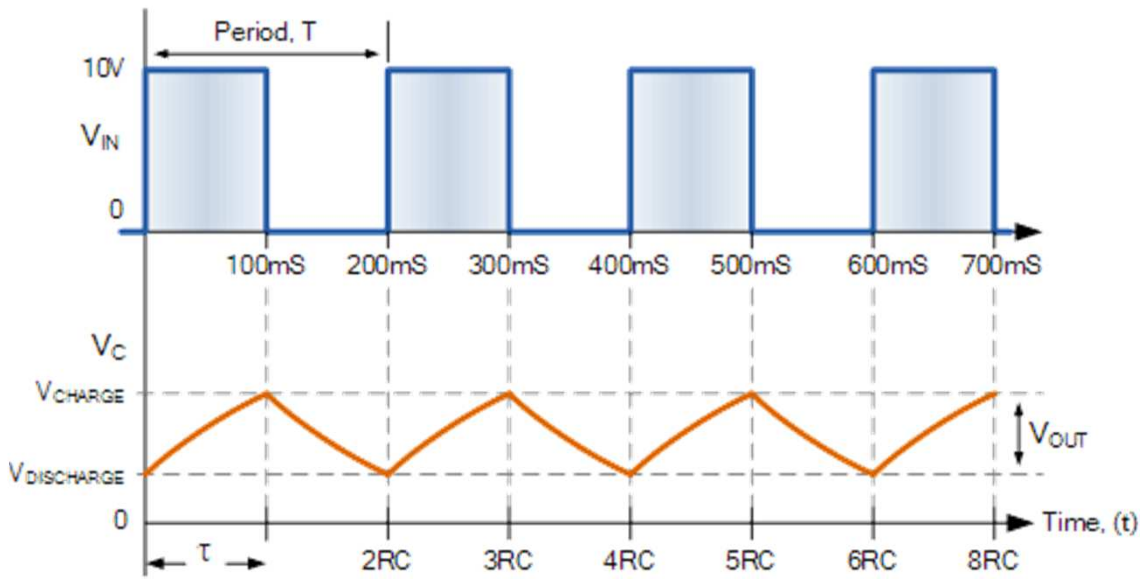
Resposta de Circuitos *RC*; circuito *RC* integrador

Trem de pulsos de tensão: -∞ < *t* < +∞





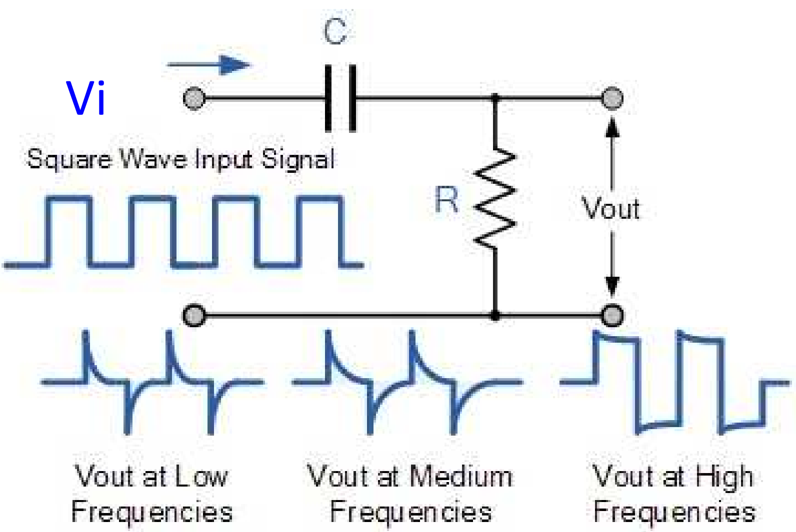
Resposta a trem de pulsos de tensão: -∞ < *t* < +∞: regime permanente

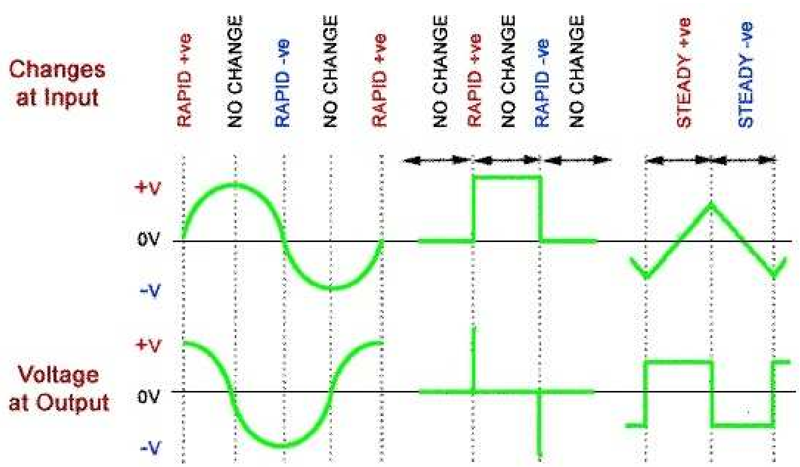


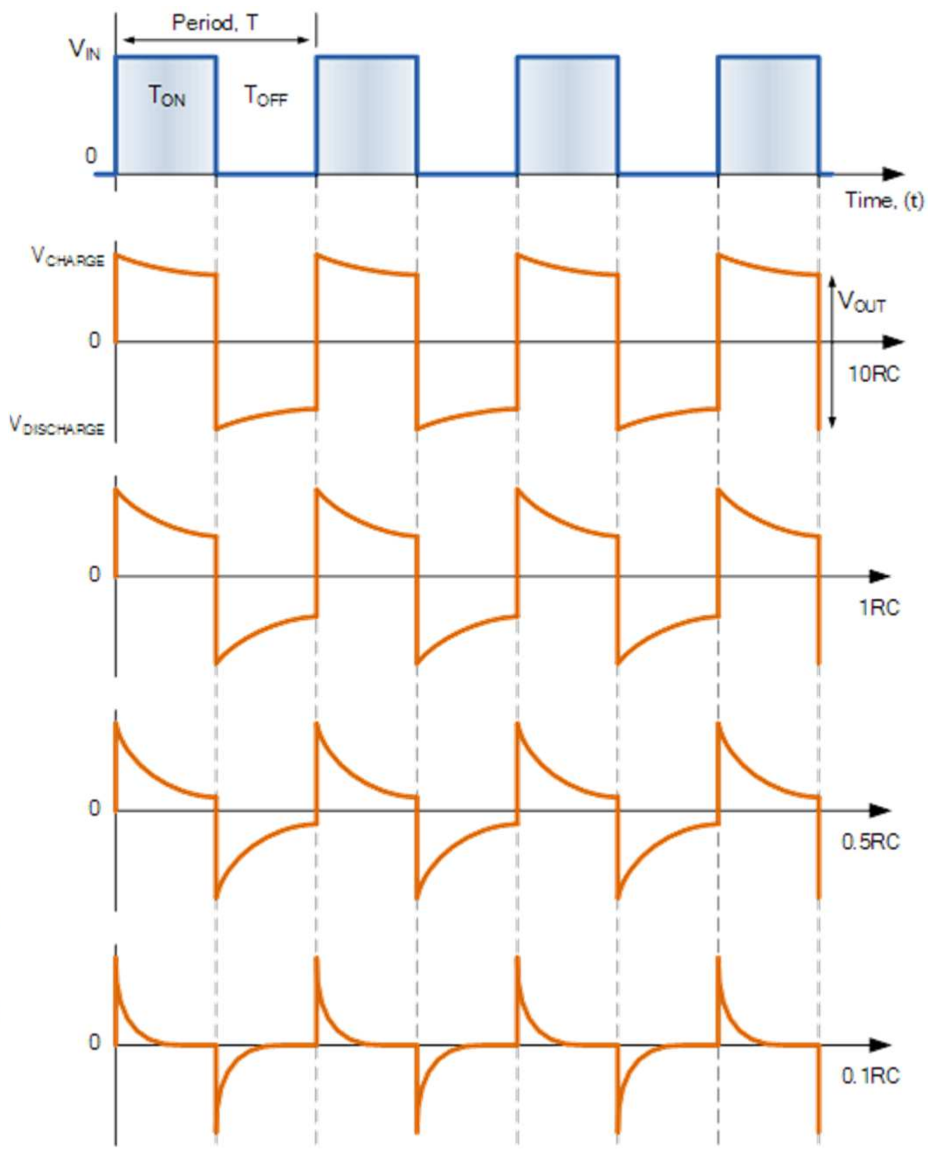
Integração do
sinal de entrada

Resposta de Circuitos *CR*; circuito *CR* diferenciador

Iremos analisar mais tarde com detalhe o funcionamento do circuito "CR" como passa-alto





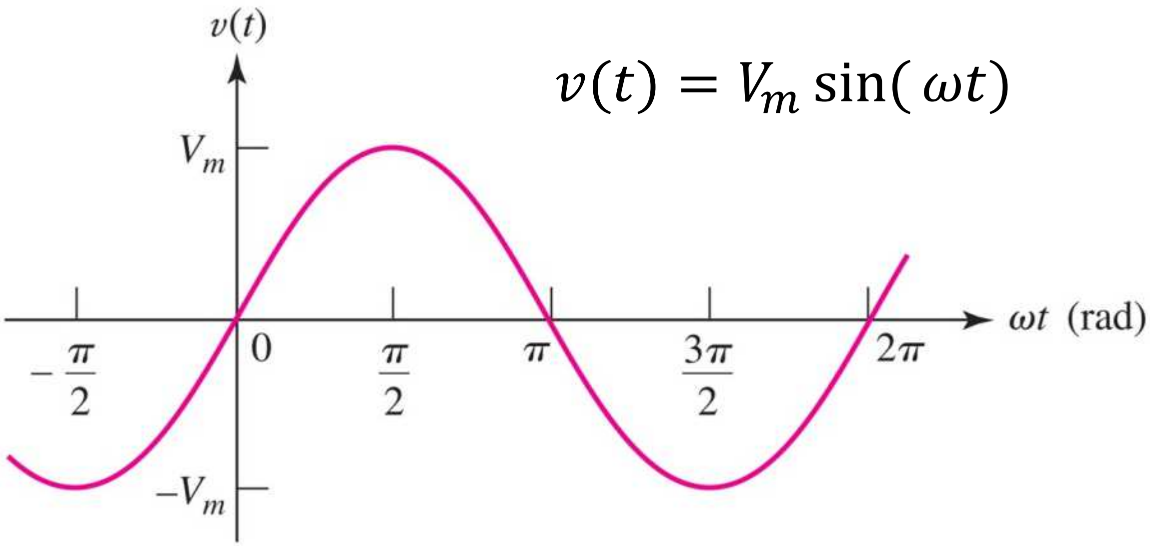


Frequência aumenta

Análise de circuitos no estado estacionário em regime sinusoidal:

conceito de impedância
e
função de transferência

Sinais sinusoidais - definições



$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

Também podiamos escrever

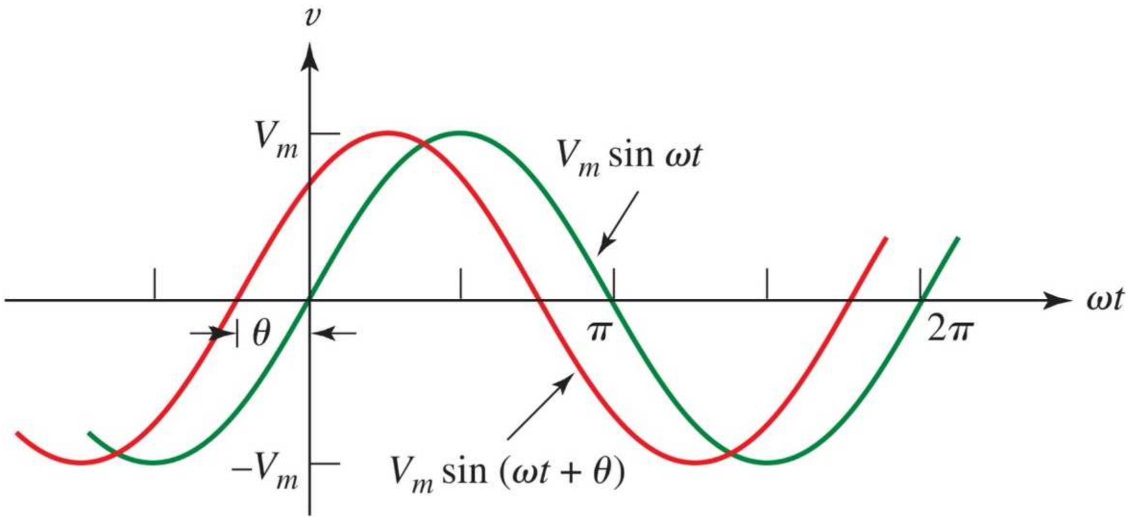
$$v(t) = V_m \cos(\omega t - \pi/2)$$

- V_m é a amplitude da função sin()
- ωt é o argumento ou fase da função (expresso sempre em radianos)
- ω *é* frequência angular, unidade 1/s ou rad/s
- f é a frequência (linear), unidade hertz (Hz)
- T é o período, unidade segundo (s).
- Ter presente que a função sin () é periódica.

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Fase de um sinal sinusoidal



$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

- A forma mais geral da função seno incluiu a fase para *t*=0 s: θ (fase em *t*=0s).
- θ representa a fase da função para *t*=0 s, e pode ser descrita em graus ou em radianos.
- **Contudo, o argumento do seno/cos é sempre expresso em radianos**.

- A nova função seno - **representada a vermelho** – está **adiantada** (**"lead"**) relativamente à função sino original (representada a verde) em θ.

- A função seno original (**representada a verde**) está **atrasada** (**"lag"**) relativamente à nova função seno (representada a vermelho) em θ.

Valor eficaz ("RMS") de um sinal sinusoidal

O **valor eficaz** de um sinal periódico $i(t)$ ou $v(t)$, também referido como valor RMS ("root-mean-square" - média quadrática), é dado por:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2 dt}$$

Para sinais sinusoidais:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{e} \qquad v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \cong 0.707 I_m \qquad V_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \cong 0.707 V_m$$

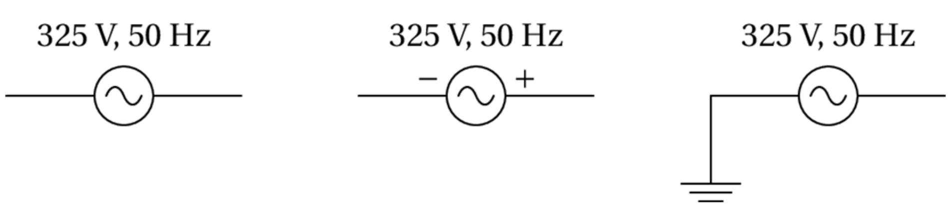
Exemplo:

Redes de distribuição elétrica de 220 V e 110 V.

Qual é a amplitude os sinais sinusoidais?

220 V_{ef}: 220 V x $\sqrt{2}$ ≈ 311 V

110 V_{ef}: 220 V x $\sqrt{2}$ ≈ 156 V



Três formas de representar fonte ideal de tensão alternada com tensão máxima de 325 V e frequência de 50 Hz.

— Diz-se que uma corrente eléctrica é "alterna" (o termo correcto é alternada)

— Afirma-se — por vezes "com muita segurança" — que a dioptria "é" uma unidade do Sistema Internacional, o que não é verdade.

— Fala-se em "volts eficazes", como se houvesse, no SI, "volts" maiores e menores. Os atributos "eficaz", "de pico", etc., aplicam-se à grandeza e não à unidade: teremos assim, por exemplo, uma tensão eficaz de 12 V.

— Há quem chame "massa específica" à massa volúmica e também quem dê o nome de "calor específico" à capacidade térmica mássica.

— Continua-se a indicar (incorrectamente, é claro) temperaturas em "graus centígrados", quando deveriam ser Celsius (esta é a única excepção para um nome de unidade com a primeira letra maiúscula), e também em "graus Kelvin" (o nome desta unidade é kelvin)

Conceito de fasor

Em física e em engenharia, um **vetor de fase** ou **fasor**, é uma representação de uma função senusoidal cuja amplitude (*A*), frequência angular (ω) e fase (θ) são invariantes no tempo.

Nos circuitos lineares excitados por sinais sinusoidais, i.e. sinais do tipo $v_s(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$, o termo $e^{j\omega t}$ é comum a todas as tensões e a todas as correntes, e pode, por isso, ser ignorado nas representações e cálculos intermédios. Quando o termo $e^{j\omega t}$ é ignorado a grandeza é representada pelo respetivo **fasor** $V_m e^{j\theta}$. O termo $e^{j\omega t}$ deve ser incluído na solução final.

Formas de representar um sinal sinusoidal:

Representação real: $i_s(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

Representação exponencial:

$$i_s(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m e^{j\phi} e^{j\omega t}$$

Representação **fasorial** e forma polar da representação fasorial:

$$\mathrm{I} = I_\mathrm{m} e^{j\phi} = I_\mathrm{m}\angle\phi$$

A representação fasorial de uma corrente (ou tensão) corresponde à representação dessa grandeza no *domínio da frequência* (ω).

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\downarrow$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

$$\downarrow$$

Fasor

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\downarrow$$

Fasor na forma polar

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

Regime sinusoidal: conceito de impedância

Define-se **impedância** de um dado **elemento/componente** como a razão entre os **fasores** da tensão ao seus terminais e da corrente que o percorre:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)}$$

No domínio da frequência, a **lei de Ohm** tomas as formas: $\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}$

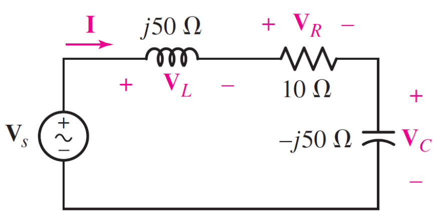
Impedâncias da resistência (R), da bobine (L) e da capacidade (C):

$$\boxed{Z_R = R} \qquad Z_L = j\omega L \qquad \boxed{Z_C = 1/j\omega C = -j\, 1/\omega C}$$

A impedância é uma grandeza complexa (unidade SI: ohm), e no regime sinusoidal estacionário é o equivalente à resistência em circuitos dc.

Impedâncias em série ou em paralelo podem ser combinadas usando as "regras" da associação de resistências em paralelo e em série.

Exemplo: **Para o circuito RLC série a impedância toma forma:** $\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$



$$Z_R = R = 10\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

$$Z_C = 1/j\omega C = -j\frac{1}{\omega C} = -j50\ \Omega$$

Impedância, admitância e leis de Kirchhoff

Define-se **admitância** como:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$$

Admitâncias (condutância) da resistência, (reactâncias) da bobine e da capacidade:

$$Y_R = 1/R \qquad Y_L = 1/j\omega L \qquad Y_C = j\omega C$$

- Se Z=*R + jX*; *R* é a resistência, *X* é a **reactância** (unidade: ohm Ω)
- Se Y=*G + jB; G* é a condutância, *B* é a ***susceptância*** (unidade: siemens S)

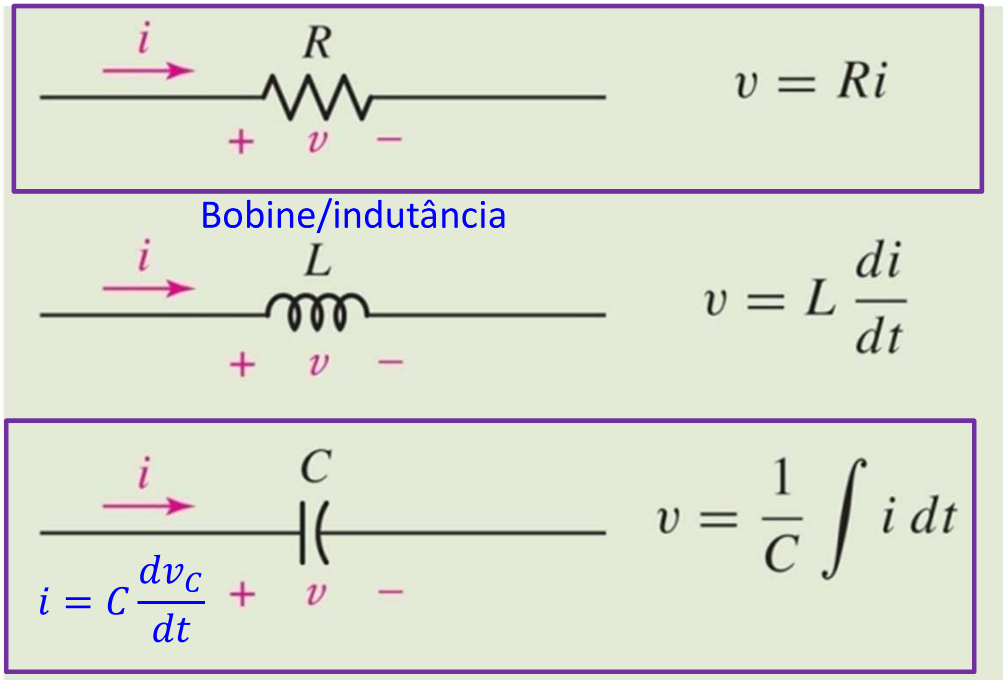
Leis de Kirchhoff na versão fasorial

KVL para fasores: $V_1 + V_2 + \ ... + V_N = \ 0$ $\qquad \mathbf{V_k} = V_m e^{j\theta}$ fasor de tensão

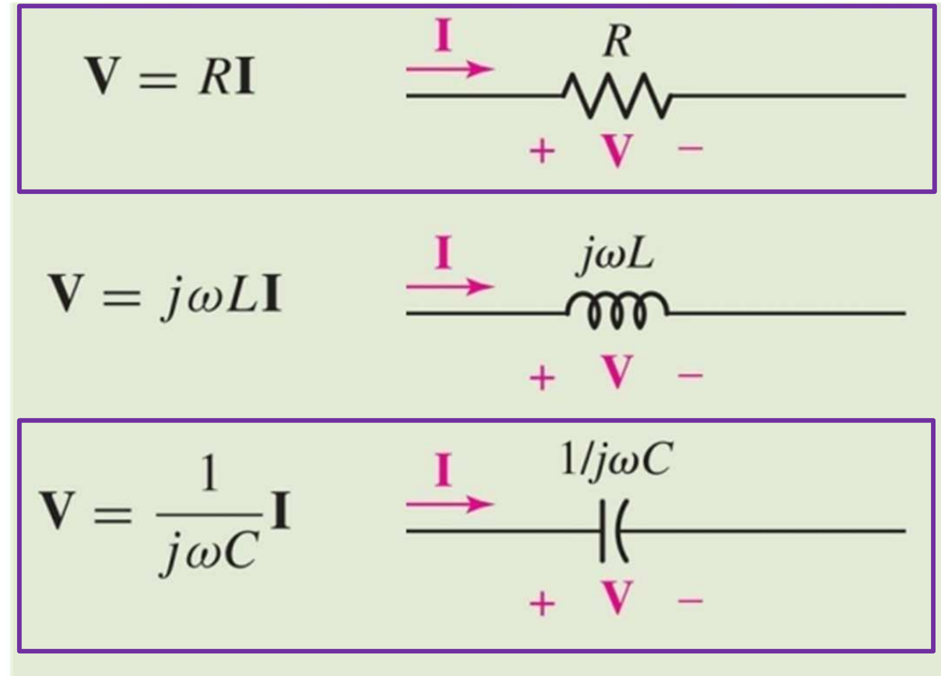
KCL para fasores: $I_1 + I_2 + \ ... + I_N = \ 0$ $\qquad \mathbf{I_k} = I_m e^{j\varphi}$ fasor de corrente

Relações fasoriais entre a tensão e a corrente

Domínio do tempo



Domínio da frequência



Usa o *cálculo* (é mais difícil, mas lidamos com grandezas reais)

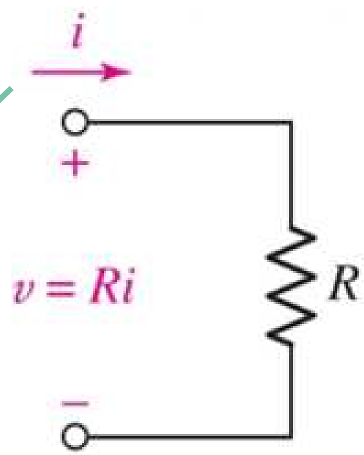
Usa a álgebra (é mais fácil, mas emprega grandezas complexas)

Lei de ohm para a resistência no domínio da frequência

Em geral, os fasores representam grandezas que dependem da frequência, i.e.,

$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\omega)$ e $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\omega)$

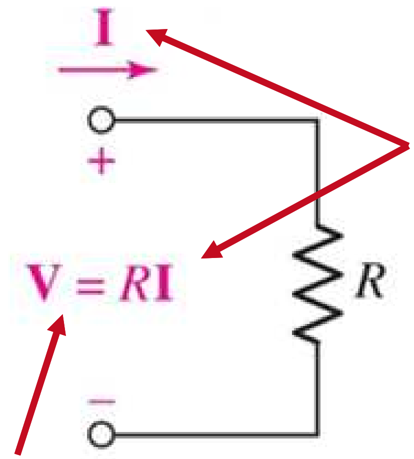
Domínio do tempo



Seja

$$i(t) = I_m e^{j\theta} e^{j\omega t}$$
$$= \mathbf{I}\, e^{j\omega t}$$
$$i(t) = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

Domínio da frequência



Fasor da corrente

Fasor da tensão

$\mathbf{I} = \mathbf{I}(\omega)$

$\mathbf{V} = \mathrm{V}(\omega)$

No domínio do tempo, a lei de Ohm toma a forma:

$$v(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$v(t) = R \cdot I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

No domínio da frequência a lei de Ohm toma a mesma forma que no domínio do tempo:

$$i(t) = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \mathbf{I}\,(\omega) e^{j\omega t}$$

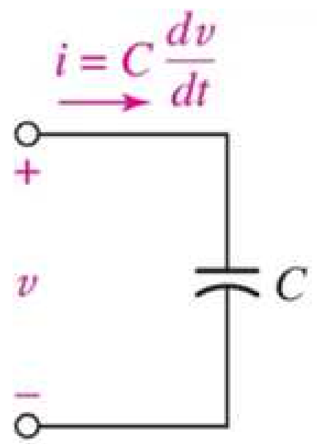
$$v(t) = \mathrm{V}\,(\omega) e^{j\omega t}$$
$$= R \cdot I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = R \cdot \mathbf{I}\,(\omega)\, e^{j\omega t}$$

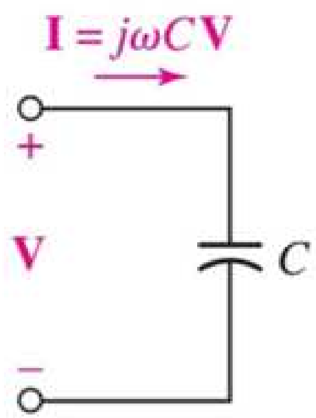
$\mathbf{V}(\omega) = R\,\mathbf{I}(\omega)$ ou $\mathbf{V} = R\,\mathbf{I}$, $\mathbf{V} = Z_R\,\mathbf{I}$, $Z_R = R$

Lei de ohm na versão fasorial para condensador

Domínio do tempo *Domínio da frequência*

Seja $v(t) = V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}$=**V** $e^{j\omega t}$





$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{I}\, e^{j\omega t} \\ &= C \cdot j\omega V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} \\ &= j\omega C \cdot \mathbf{V}\, e^{j\omega t} \end{aligned}$$

No domínio da frequência a **lei de Ohm** para condensadores toma a forma: $\mathbf{V} = \mathbf{Z} \times \mathrm{I}$

$\mathbf{I}(\omega) = j\omega C\mathbf{V}(\omega)$

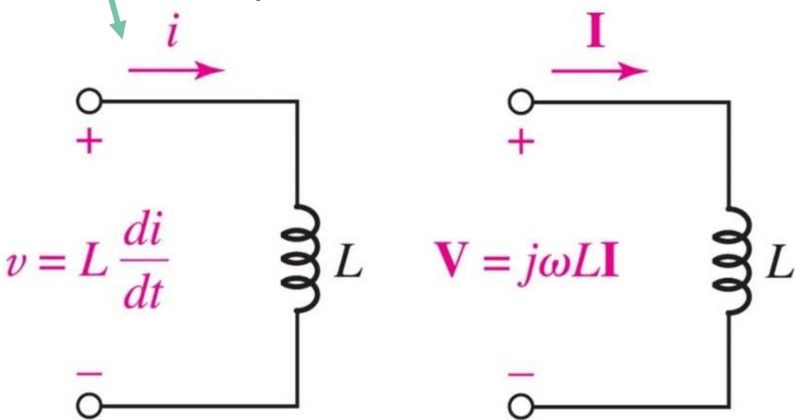
I$= j\omega C\mathrm{V}$ ou **V**$= 1/(j\omega C)\mathrm{I} = Z_c\mathrm{I}$, $\mathbf{Z_c} = 1/(j\omega C)$

A derivada no tempo transforma-se numa multiplicação na representação fasorial. (i.e., o *cálculo* transforma-se em *álgebra*!)

Lei de ohm nas versões fasorial para L e C

Seja $i(t) = I_m e^{j\theta} e^{j\omega t}$=**I** $e^{j\omega t}$

Domínio do tempo *Domínio da frequência*



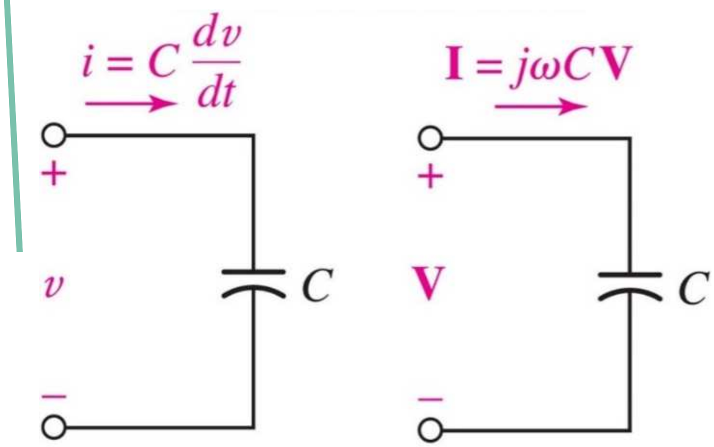
$$v(t) = \mathrm{V}\, e^{j\omega t}$$
$$= L \cdot j\omega I_m e^{j\theta} e^{j\omega t}$$
$$= j\omega L \cdot \mathbf{I}\, e^{j\omega t}$$

No domínio da frequência a lei de Ohm para as bobines toma a forma:

$\mathbf{V}(\omega) = j\omega L\,\mathbf{I}(\omega) \;\rightarrow$ **V**= $j\omega L$ **I**

Seja $v(t) = V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}$=**V** $e^{j\omega t}$

Domínio do tempo *Domínio da frequência*



$$i(t) = \mathrm{I}\, e^{j\omega t}$$
$$= C \cdot j\omega V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}$$
$$= j\omega C \cdot \mathbf{V}\, e^{j\omega t}$$

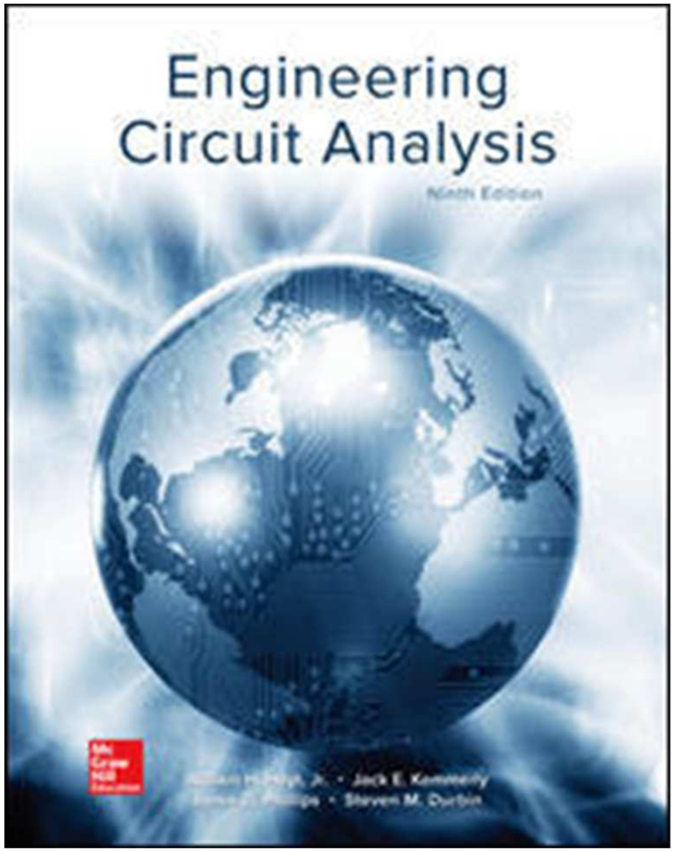
No domínio da frequência a lei de Ohm para condensadores toma a forma:

$\mathbf{I}(\omega) = j\omega C\,\mathbf{V}(\omega) \rightarrow$ **I**= $j\omega C$V ou **V**= $1/(j\omega C)$I

A derivada no tempo transforma-se numa multiplicação na representação fasorial. (i.e., o *cálculo* transforma-se em *álgebra*!)

Análise de circuitos lineares no estado estacionário em regime sinusoidal (2):

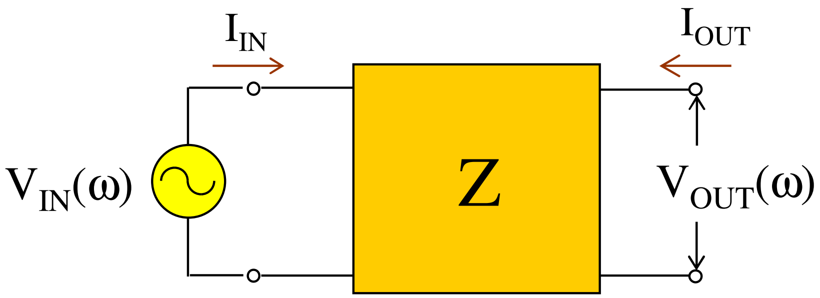
- Resposta em Frequência de um Circuito
- Função de transferência (FT)
- Filtros
- Decibéis e diagramas de Bode



Resposta em Frequência de um Circuito

(Ver Microelectronics Circuits, A. S. Sedra & K. C. Smith, Saunders College Publishing, capítulo 1)

Considere o circuito linear abaixo, ao qual é aplicada uma tensão $v_{in}(t)=V_{IN}\cos(\omega t)$, representada no esquema pela amplitude $V_{IN}(\omega)$.



Pretende-se estudar o comportamento do sinal de saída, $V_{OUT}(\omega)$, em função da frequência do sinal de entrada $V_{IN}(\omega)$, i.e., caracterizar a resposta em frequência do circuito.

A **resposta em frequência** é descrita pela **função de transferência do circuito**, **H**(ω), que é a razão entre a tensão a saída, $V_{OUT}(\omega)$, e a tensão aa entrada, $V_{IN}(\omega)$, com a saída em aberto (i.e., $I_{OUT}=0$).

Em geral, **H**(ω) é uma função complexa:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_{OUT}(\omega)}{V_{IN}(\omega)} = |V_{OUT}/V_{IN}|\, e^{j\theta(\omega)} = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)},$$

onde $|H(\omega)|=|V_{OUT}/V_{IN}|$ e $\theta(\omega)$ é a ddf entre a tensão a entrada e a tensão a saída.

Função de transferência (FT)

Como é que um circuito responde a um sinal de frequência variável?

O comportamento do circuito é descrito pela sua função de transferência H(ω).

Temos 4 implementações canónicas.

Entrada em tensão e saída em tensão

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathrm{V}_{out}(\omega)}{\mathrm{V}_{in}(\omega)} = \text{ganho em tensão}$$

Entrada em corrente e saída em tensão

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathrm{V}_{out}(\omega)}{\mathrm{I}_{in}(\omega)}$$
$$= \text{"ganho" transimpedância}$$

Entrada em corrente e saída em corrente

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathrm{I}_{out}(\omega)}{\mathrm{I}_{in}(\omega)} = \text{ganho em corrente}$$

Entrada em tensão e saída em corrente

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathrm{I}_{out}(\omega)}{\mathrm{V}_{in}(\omega)}$$
$$= \text{"ganho" transadmitância}$$

Representação na forma fasorial: $\mathbf{H}(j\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(j\omega)}$

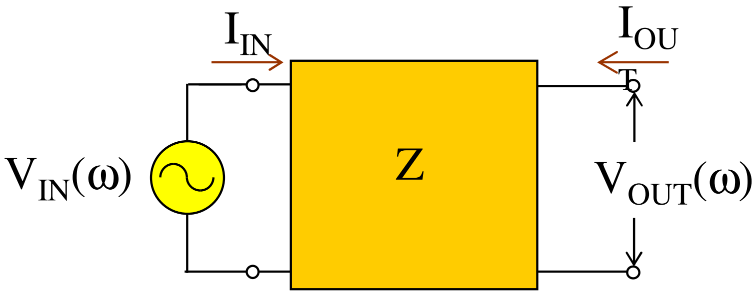
forma polar: $\mathbf{H}(j\omega) = |H(\omega)|\angle\phi(j\omega)$

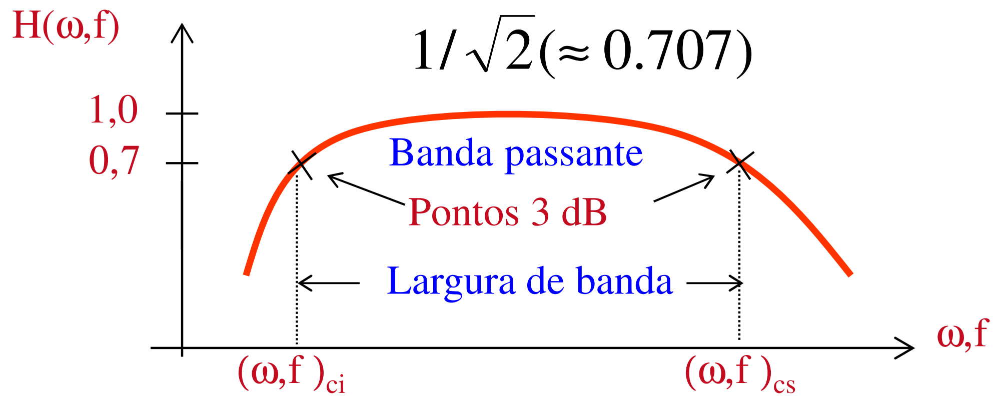
Resposta em frequência e largura de banda

- A resposta em frequência de um sistema corresponde à análise do seu comportamento quanto **ao ganho e à fase** numa certa faixa/banda de frequências (ou frequência angular).
- A representação gráfica da resposta em frequência traduz-se nos **diagramas de Bode**. A representação de Bode consiste em dois diagramas, **um relativo ao ganho (módulo da função de transferência)** com uma escala linear no eixo das ordenadas, e o outro diagrama correspondendo **à diferença de fase** entre os sinais de entrada e de saída.
- Em ambos, no eixo das abscissas representa-se a frequência (Hz) ou frequência angular (rad/s) numa escala logarítmica.
- A "unidade" mais utilizada para o **ganho** é o dB, mas pode ser usado também o dBm, que corresponde ao nível de potência em dB em relação ao nível de referência de 1 mW.
- A **largura de banda** é um conceito central em diversos campos, incluindo a **teoria da informação**, **sistemas de comunicação rádio e óticas**, **processamento de sinais**, **eletrónica** e espectroscopia.
- Em sistemas de comunicação a largura de banda corresponde à faixa de frequência ocupada pelo **sinal modulado**.
- Em eletrónica corresponde normalmente à faixa de frequências na qual o sistema tem uma resposta em frequência aproximadamente plana (i.e., com variação de ganho igual ou inferior a 3 dB) - banda passante.
- Quando se refere a sinais analógicos, a largura de banda corresponde à faixa de frequência, medida em hertz, para a qual a transformada de Fourier do sinal é diferente de zero. *Esta definição normalmente é relaxada considerando um certo limiar de amplitude, tipicamente 3 dB em relação ao pico.*
- Para sistemas, aplicam-se os conceitos acima, mas considerando a função de transferência do sistema.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Largura_de_banda

Frequências de corte e largura de banda





$f_{c(i,s)}$: frequência de corte, c, (i: inferior; s: superior)

Define-se **largura de banda** de um circuito, ***LB***, como o **gama de frequências**, Δf, para a qual o módulo da função de transferência é maior ou igual a **valor na banda passante/√2**, ver gráfico $H(\omega,f)$. (Ter presente que $f = \omega / 2\pi$.)

Os filtros passivos são caracterizados pela sua resposta em frequência. Quando $f_{ci}=0$, diz-se que o circuito é um filtro **passa-baixo**; se $f_{cs}=\infty$, o circuito funciona como um filtro **passa-alto**.

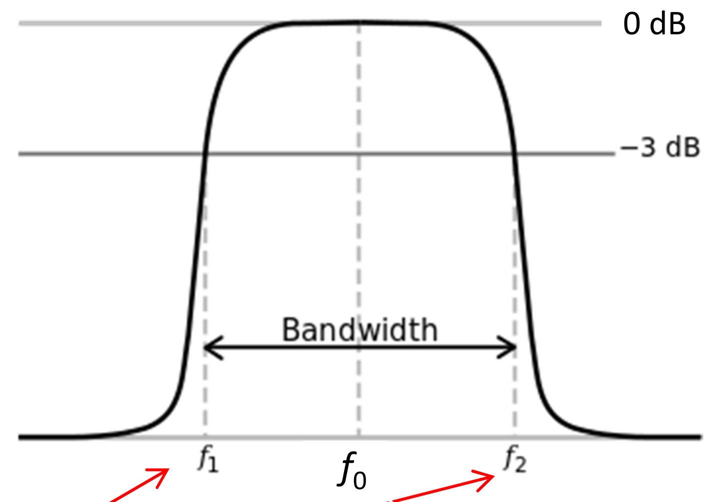
Se $0<f_{ci}<f_{cs}<\infty$, o circuito actua como filtro **passa-banda**, permitindo apenas a passagem de sinais de frequência f na banda $[f_{cs}, f_{ci}]$. Há ainda circuitos cuja resposta em frequência pode ser representada como a combinação de um passa-alto (pa) com um passa-baixo (pb), em que $f_{c\text{-}pb}<f_{c\text{-}pa}$: filtro **rejeita-banda**. Estes não permitem a passagem de sinais de frequência $f \in [f_{c\text{-}pb}, f_{c\text{-}pa}]$.

Os filtros analógicos são circuitos lineares básicos utilizados em diversos sistemas eletrónicos. São imprescindíveis, por exemplo, na generalidade dos circuitos de transmissão e receção de sinais, na rejeição de ruído, ou na implementação de moduladores/desmoduladores.

Filtros: largura de banda e frequência de corte

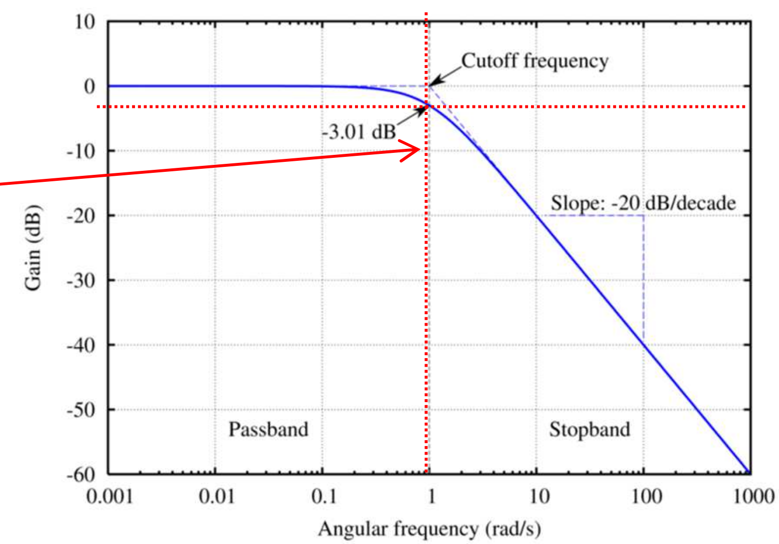
- **Filtro passa-banda:**

  A largura de banda (*LB* ou simplesmente *B ou BW*) de um filtro passa-banda é a parte da resposta em frequência do filtro que está situada na faixa de 3 dB do valor de pico da resposta em frequência. Ou seja, num filtro passa-banda *LB* é a diferença entre f_2 e f_1: $LB = f_2 - f_2$.



Frequência central

- Num **filtro passa-baixo** a largura de banda corresponde ao valor da frequência de corte (f_c): $LB = f_C$.



- A **frequência de corte** (f_c) ou **frequência metade da potência** (f_{3dB}) é a frequência abaixo da qual ou acima da qual a potência na saída de um sistema (circuito eletrónico, linha de transmissão, filtro ou amplificador) é reduzida a metade do valor máximo (valor de pico) da potência na faixa de passagem.

Representação gráfica da FT e Diagramas de Bode

É corrente representar-se graficamente a resposta em frequência recorrendo aos gráficos do módulo e da fase da função de transferência em função da frequência angular.

O diagrama de Bode é de um circuito uma ferramenta bastante útil para visualizar as funções de transferências e a respostas em frequência de circuitos.

o diagrama de Bode mostra graficamente como variam a amplitude e a fase da função de transferência em função da angular ω, em que frequência angular ω é representada no eixo das abcissas usando uma escala logarítmica – ver PL3.

A fase é representada no eixo das ordenadas, normalmente em graus, sendo que o eixo das abcissas se representa o logaritmo da frequência angular ω.

A amplitude (magnitude ou módulo) é mostrada no eixo das ordenadas numa escala em decibel (dB) definida como:

$$\boxed{H_{\mathrm{dB,V}} = 20\log_{10}|\mathbf{H}_{\mathbf{V}}(\omega)|}$$

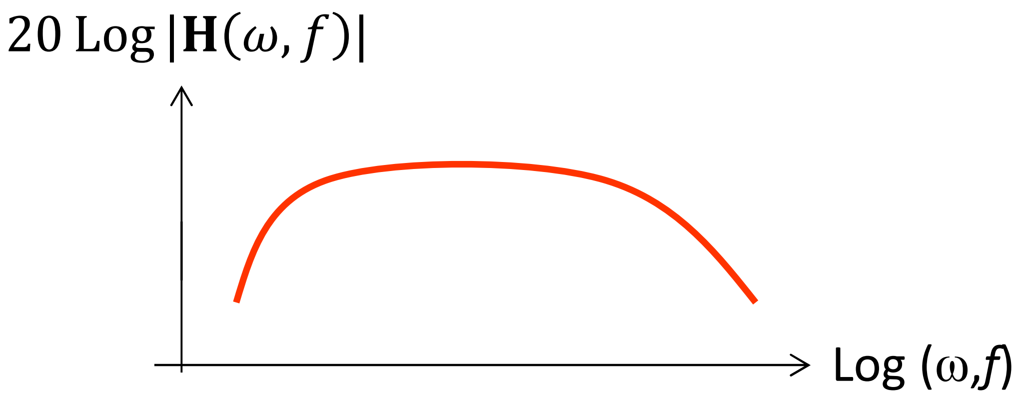
O decibel é uma "unidade" que indica o logaritmo decimal da razão entre o valor de uma quantidade física em relação a um nível de referência especificado ou implícito.

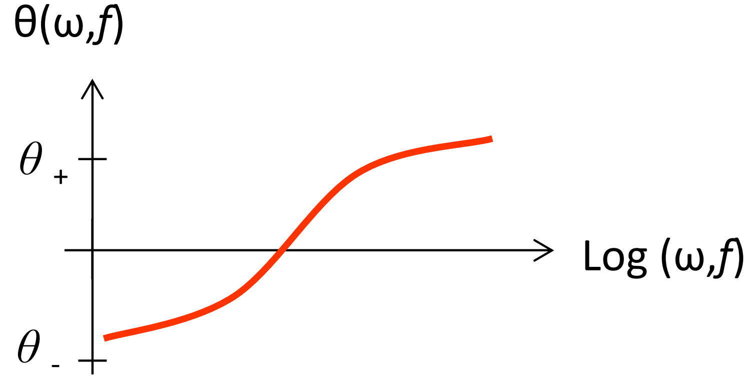
E.g., a potência expressa em decibel (dB) é igual a dez vezes o logaritmo de base 10 da razão entre duas quantidades de potência:

$$\boxed{H_{\mathrm{dB,Pout}} = 10\log_{10}|P_{\mathrm{out}}/P_{\mathrm{in}}|}$$

Formas de representar a função de transferência
Diagramas de Bode

Diagramas de Bode: representações gráficas das funções $|\mathbf{H}(w)|$ e $\theta(\omega,f)$ na forma $20\,\mathrm{Log}\,|\mathbf{H}(\omega,f)|$ e $\theta(\omega)=\arg\mathbf{H}(\omega,f)$, e o eixo das abcissas corresponde ao logaritmo de ω/f:





A representação do diagrama de amplitude e do diagrama de fase, **diagramas de Bode**, caracteriza o comportamento do filtro, i.e., os diagramas de Bode de um filtro contêm a informação necessária e suficiente para caracterizar a resposta em frequência do filtro a um sinal de entrada genérico.

Decibel (em tensão):

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\left|\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right|\right)$$

Ponto -3 dB

$$-3\ \mathrm{dB} \equiv \left|\frac{V_{OUT}(\omega_{ci})}{V_{IN}(\omega_{ci})}\right| = \left|\frac{V_{OUT}(\omega_{cs})}{V_{IN}(\omega_{cs})}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{1/\sqrt{2}(\approx 0.707)}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} = 0$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} \approx 6\ \mathrm{dB}$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} = 20\ \mathrm{dB}$$

Ver: https://pt.wikipedia.org/wiki/Decibel ou https://en.wikipedia.org/wiki/Decibel

Decibéis

dB	Power ratio	Amplitude ratio
100	10000000000	100000
90	1000000000	31623
80	100000000	10000
70	10000000	3162
60	1000000	1000
50	100000	316.2
40	10000	100
30	1000	31.62
20	100	10
10	10	3.162
6	3.981 ≈ 4	1.995 ≈ 2
+3	**1.995 ≈ 2**	**1.413 ≈ $\sqrt{2}$**
1	1.259	1.122
0	**1**	**1**
−1	0.794	0.891
−3	**0.501 ≈ $\frac{1}{2}$**	**0.708 ≈ $\sqrt{\frac{1}{2}}$**
−6	0.251 ≈ $\frac{1}{4}$	0.501 ≈ $\frac{1}{2}$
−10	0.1	0.3162
−20	0.01	0.1
−30	0.001	0.03162
−40	0.0001	0.01
−50	0.00001	0.003162
−60	0.000001	0.001
−70	0.0000001	0.0003162
−80	0.00000001	0.0001
−90	0.000000001	0.00003162
−100	0.0000000001	0.00001

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} = 0$$

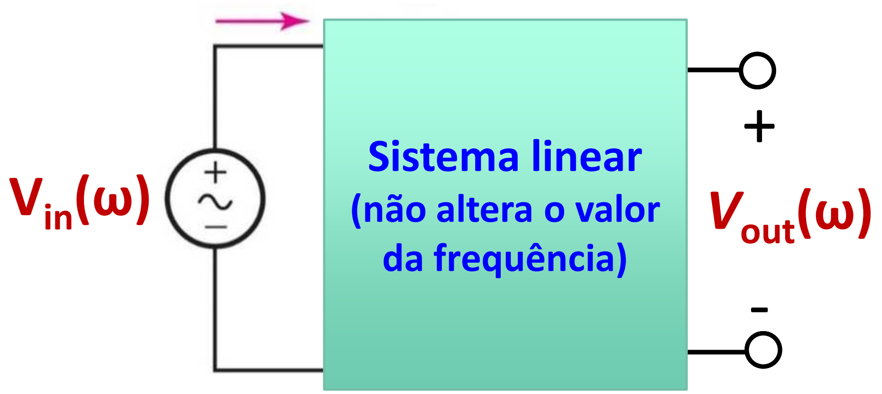
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} \approx 6 \text{ dB}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{\mathrm{dB}} = 20 \text{ dB}$$

An example scale showing power ratios x, amplitude ratios $\sqrt{x}$, and dB equivalents $10 \log_{10} x$.

Função de transferência – análise em frequência

Muitas vezes queremos saber como é que um dado circuito se comporta/responde a sinais de várias frequências ou a um sinal de frequência variável.



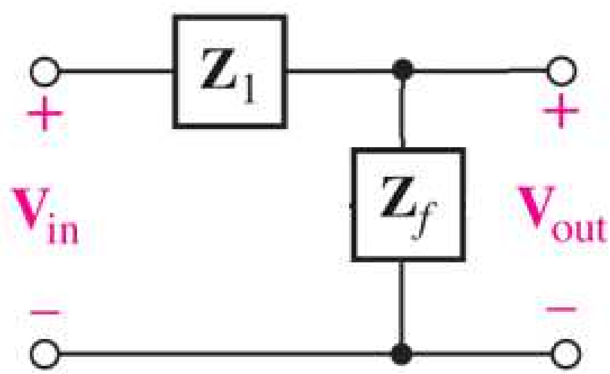
Este comportamento é descrito pela **função de transferência H($j\omega$)**, definida como:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_{out}}(\omega)}{\mathbf{V_{in}}(\omega)}$$

Em geral, $\mathbf{H}(\omega)$ é uma grandeza complexa, i.e., tem a forma: $a + jb$, onde $j=\sqrt{(-1)}$.

$$\mathbf{H} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\; e^{j \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Exercício: determinar $\mathbf{H}(\omega)$ para o circuito abaixo:

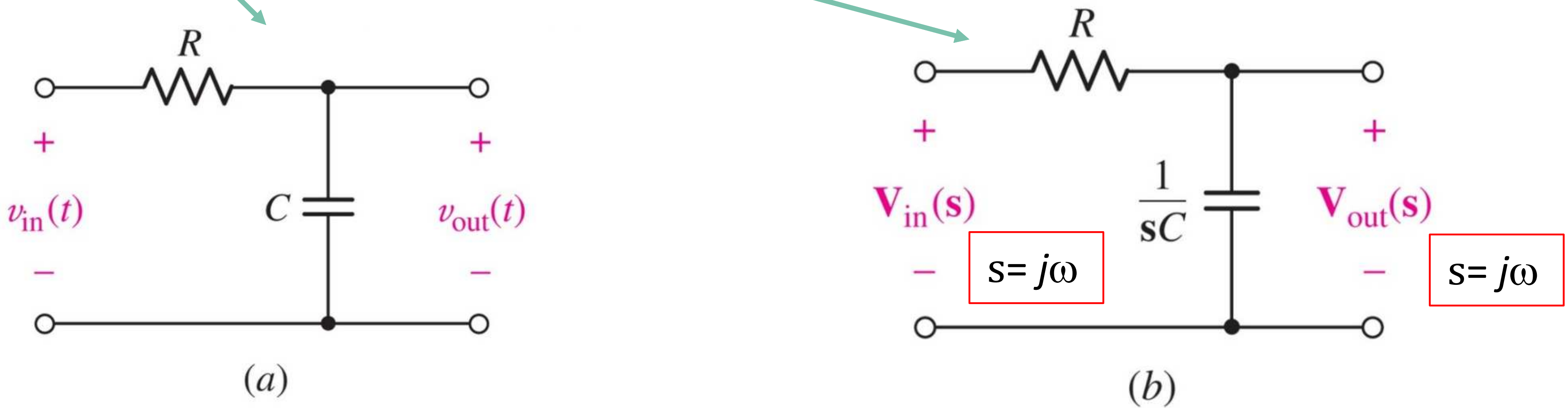


$$V_{out}(\omega) = \frac{Z_f}{Z_1 + Z_f} V_{in}(\omega)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_{out}}(\omega)}{\mathbf{V_{in}}(\omega)} = \frac{Z_f}{Z_1 + Z_f}$$

Exemplo: Função de transferência de circuitos RC

No domínio do tempo a razão Vout(*t*)/Vin(*t*) é difícil de visualizar. A análise fica simplifica se for realizada no **domínio da frequência**, i.e., usando a representação fasorial.



H(s) ou H(ω) representa a função de transferência de um circuito, definida como a razão entre o fasores do sinal na saída e o sinal na entrada:

$$\mathbf{H}(\mathrm{s}) \equiv \mathbf{H}(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_C}{Z_R+Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{1+sRC} = \frac{1/RC}{s+1/RC} = \frac{1}{j\omega RC+1} = \frac{-j\omega RC+1}{(j\omega RC+1)(-j\omega RC+1)}$$

$$\mathrm{H} = |\mathrm{H}|e^{j\text{fase de }\mathbf{H}} = |\mathrm{H}|e^{j\theta}$$

$$|\mathrm{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \qquad \text{Fase de H: } \theta = \arctan\left(-\frac{\omega RC}{1}\right)$$

Filtros passivos RC:
frequências de corte e larguras de banda

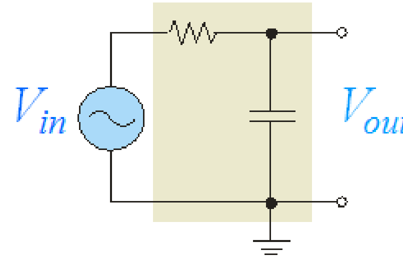
Um filtro seleciona **(deixa passar)** sinais de certas frequências (numa gama de frequências) e exclui **(atenua)** os sinais com frequências nas gamas restantes.

Um filtro ativo usa Amp-Ops para otimizar a resposta em frequência do filtro.

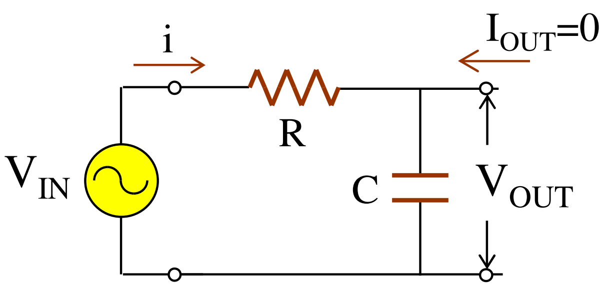
Os filtros são caracterizados pela sua resposta em frequência.

Os filtros analógicos são circuitos lineares básicos utilizados em diversos sistemas eletrónicos. São imprescindíveis na generalidade dos circuitos de transmissão e de receção de sinais, muito úteis na rejeição de ruído, ou na multiplexagem de sinais, nomeadamente na implementação de moduladores/desmoduladores de sinais.

Circuito RC como filtro passa-baixo



Circuito RC Passa-Baixo



$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

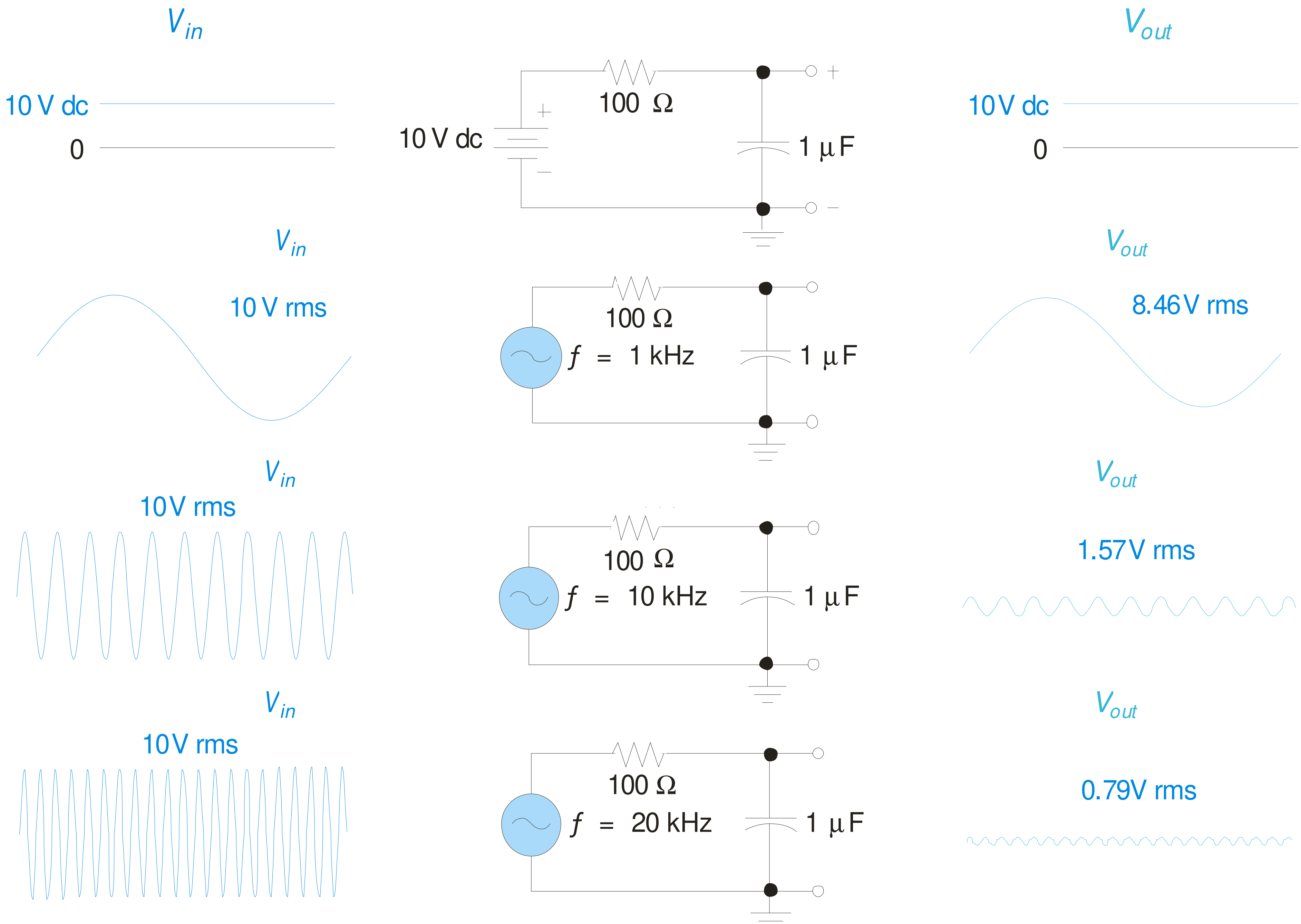
$$\theta = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

A amplitude da tensão aos terminais do condensador (tensão de saída V_{OUT}), decresce à medida que a frequência do sinal de entrada, V_{IN}, aumenta.

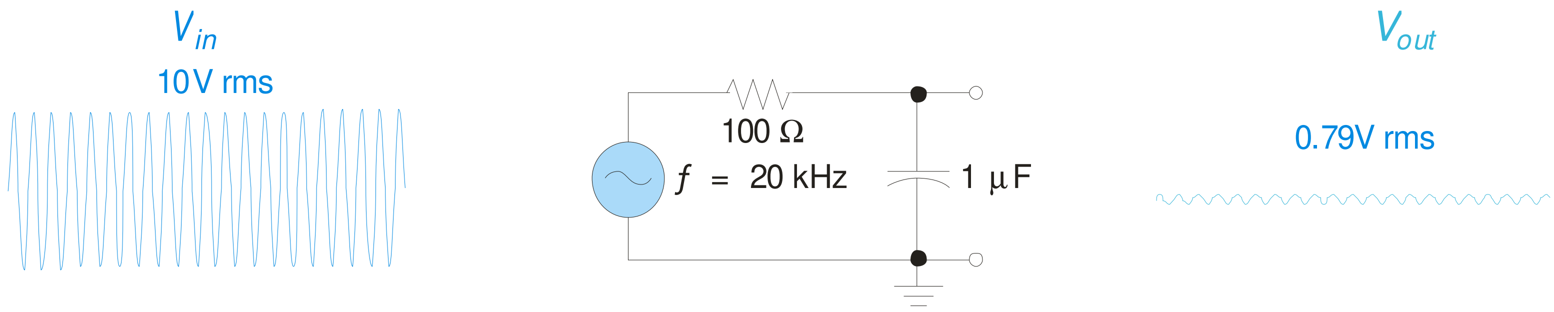
A **frequência angular de corte** deste circuito, ω_c, é $|H(\omega_c)|=|V_{OUT}/V_{IN}|=\mathbf{1/\sqrt{2}}$: $\omega=\omega_c=1/RC$. A frequência angular $\omega_{ci}=0$ e $\omega_{cs}=1/RC$. A largura de banda é $LB=\omega_{cs}/2\pi - \omega_{ci}/2\pi = 1/(2\pi RC)$.

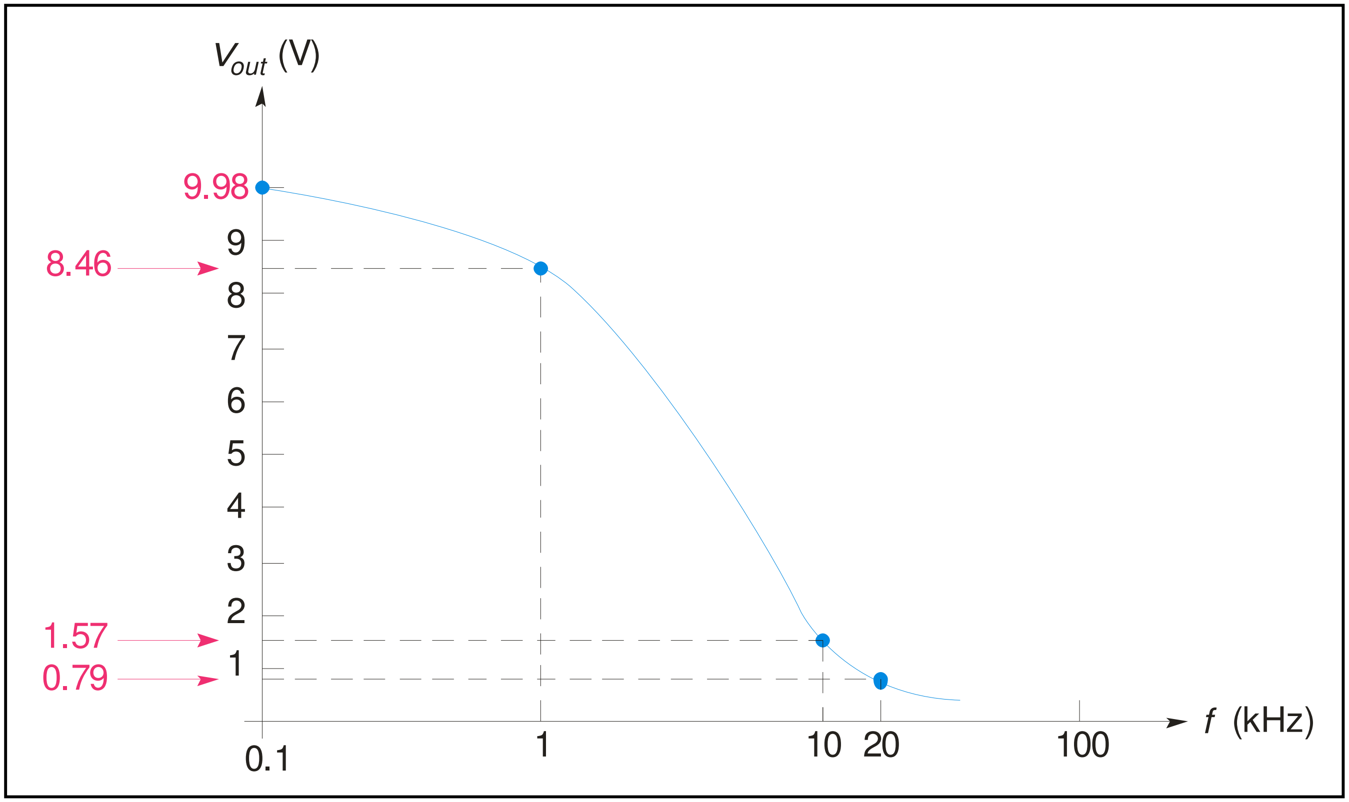
O circuito comporta-se como um **filtro passa-baixo**: só os sinais de entrada de frequência inferior a ω_c são "bem" transferidos para a saída.

Resposta do filtro RC passa-baixo em função da frequência$_1$

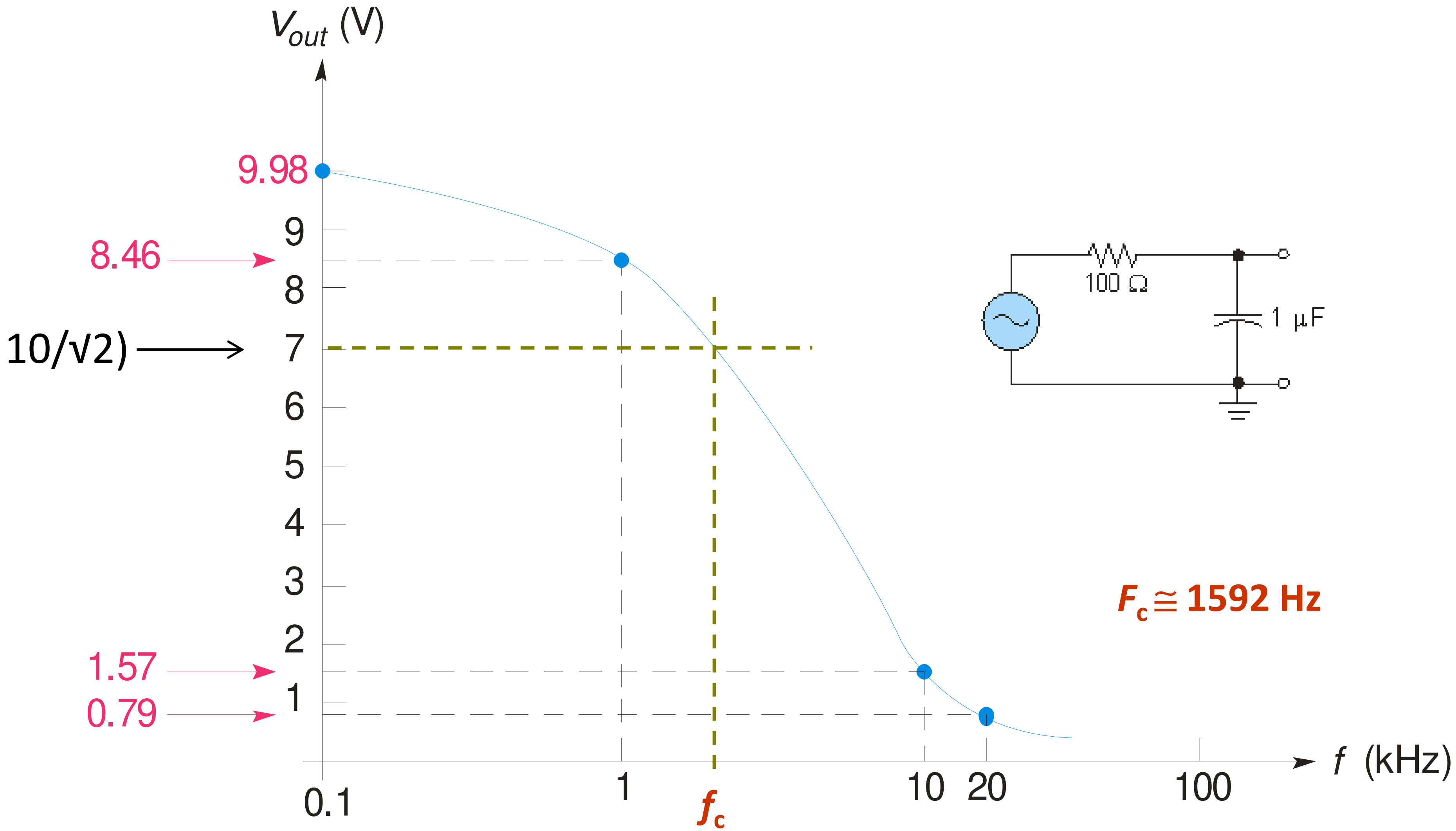


Resposta do filtro RC passa-baixo em função da frequência$_2$





Resposta em frequência e frequência de corte do filtro RC passa-baixo

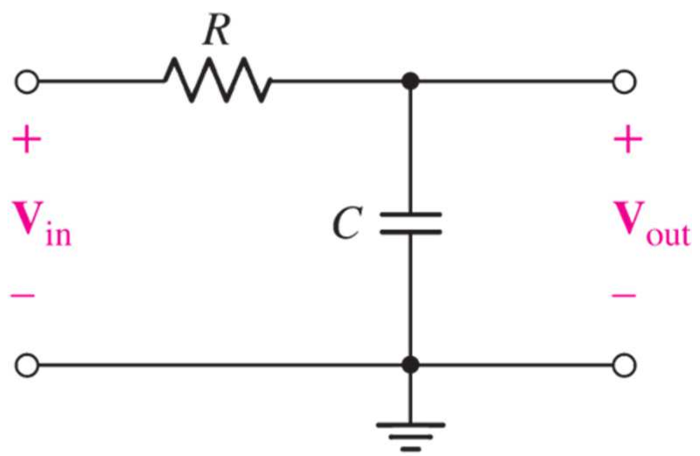


$F_c \cong$ **1592 Hz**

$\omega_c = \frac{1}{RC}$, **frequência angular de corte do circuito;** $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$, **frequência de corte do circuito**

Exercício: Função de transferência do circuito RC_1

Determinar H(s)= H(ω) = V_{out}/V_{in} e representar graficamente a magnitude (módulo) e a fase em função da frequência angular



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{Z_C}{Z_R+Z_C} = H(\omega)e^{j\theta}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega CR} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \qquad \omega_0 = \omega_C = \frac{1}{RC}$$

$\omega_0 = \omega_C = \frac{1}{RC}$, frequência de corte do circuito

Vamos considerar **três situações:**

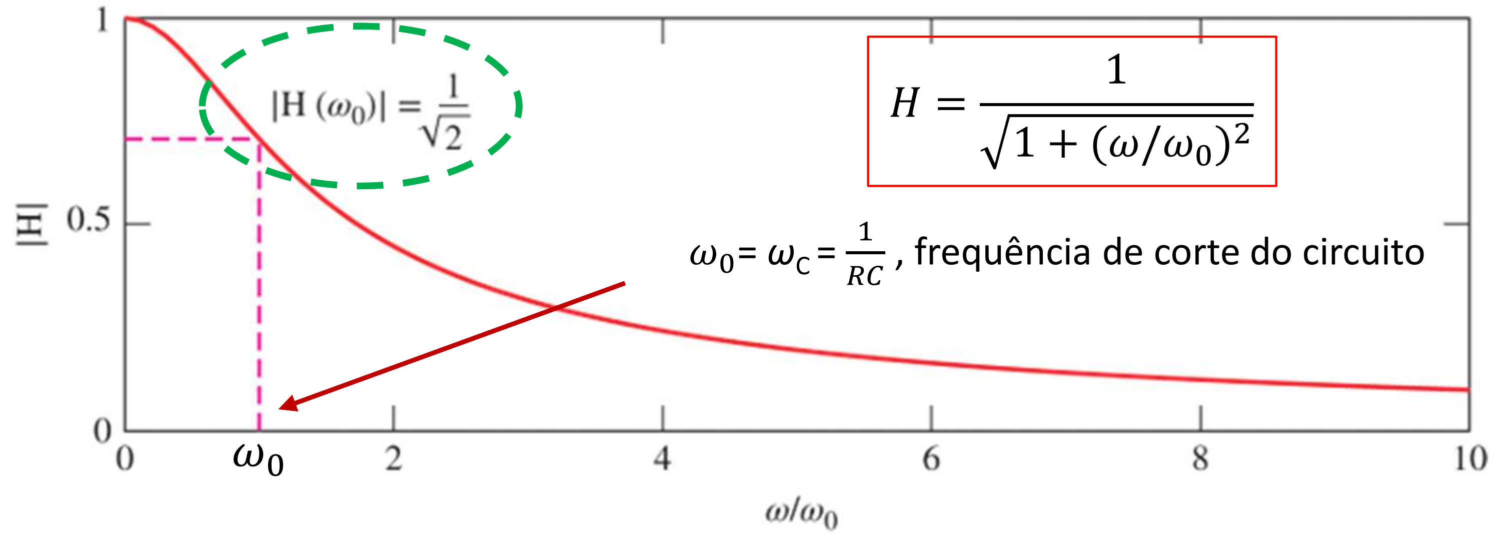
i) $\omega(\ll \omega_C) \to 0$: $Z_C \to \infty \to H(\omega) \to 1,\ \theta(\omega) \to 0^0$

ii) $\omega = \omega_C$: $Z_C = jR \to H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \theta(\omega) = -45^0,$

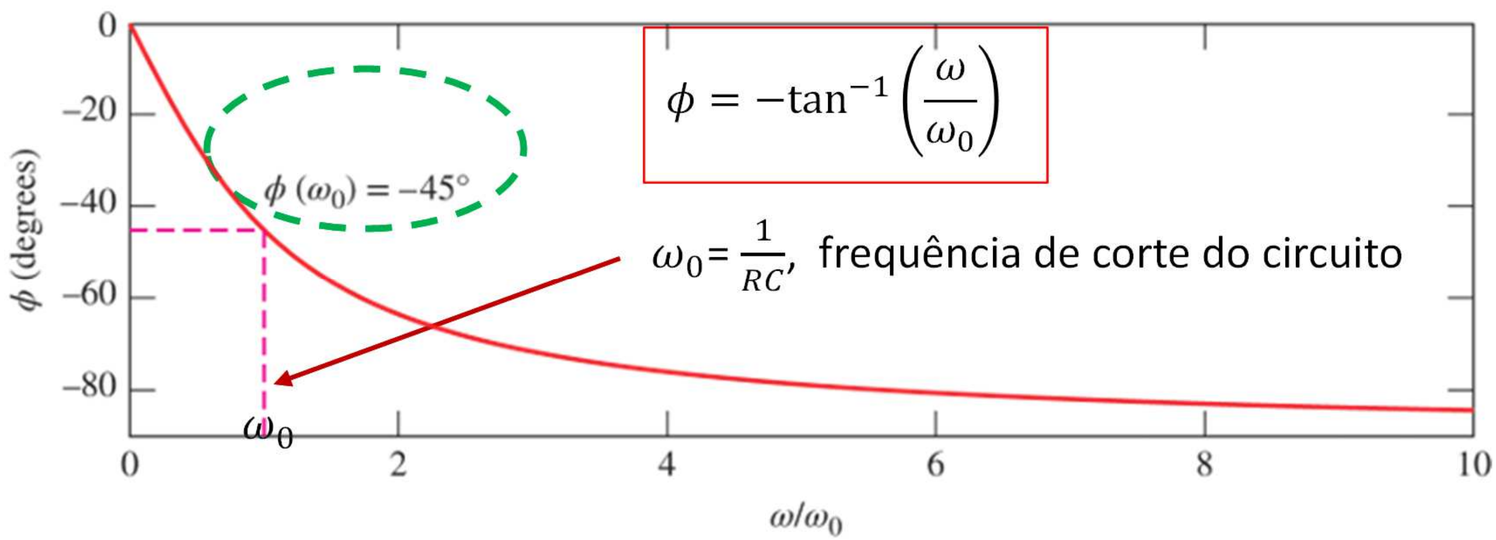
iii) $\omega(\gg \omega_C) \to \infty$: $Z_C \to 0 \to H(\omega) \to 0,\ \theta(\omega) \to -90^0,$

Exercício: Função de transferência do circuito RC_2

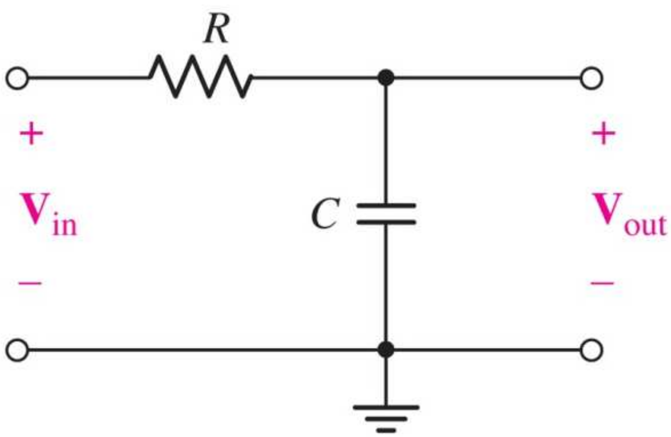
Representação gráfica da **magnitude (módulo) em função** da frequência:



Representação gráfica **da fase em função** da frequência:



Diagramas de Bode assimptóticos – passa-baixo$_1$



A função de transferência do circuito é:

H(s)=1/(1+s*RC*)

e a frequência de corte ("the corner frequency") é

$\omega_0 = \omega_C = 1/RC$.

$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$. Se $\omega = \omega_0$, $H(\omega = \omega_C) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (-3 dB^*)

Vamos considerar **três situações** para o módulo e a fase da função de transferência

i) $\omega(\ll \omega_C) \rightarrow 0$: $Z_C \rightarrow \infty \rightarrow H(\omega) \rightarrow 0$ dB

$\theta(\omega) \rightarrow 0^0$

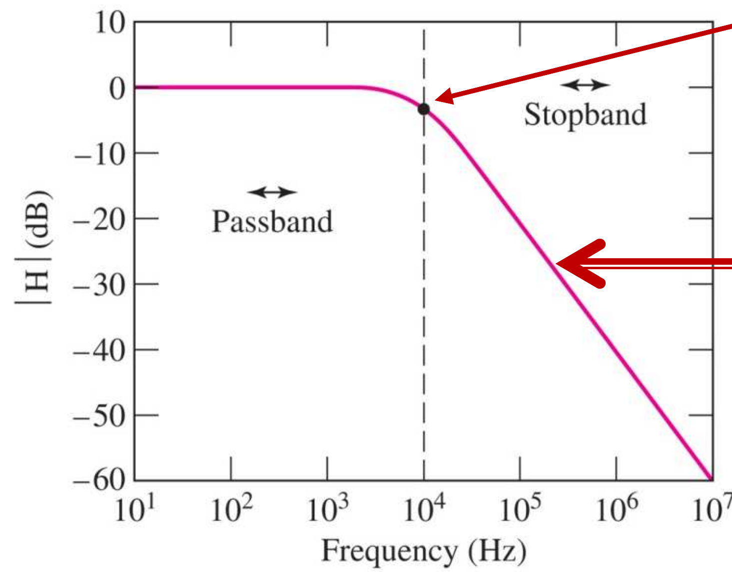
ii) $\omega = \omega_C$: $Z_C = jR \rightarrow H(\omega) = -3\text{ dB}$

$\theta(\omega) = -45^0$,

iii) $\omega(\gg \omega_C) \rightarrow \infty$: $Z_C \rightarrow 0 \rightarrow H(\omega) \rightarrow$ -20 dB por década, $\theta(\omega) \rightarrow -90^0$,

$^* H_{dB} = 20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega)|$

$\omega_0 = 1/RC$.



Na banda/região opaca a resposta (amplitude) cai 20 dB/década

Filtros passivos CR: frequências de corte e larguras de banda

Um filtro seleciona sinais com certas frequências (numa gama de frequências) e exclui os sinais com frequências nas gamas restantes.

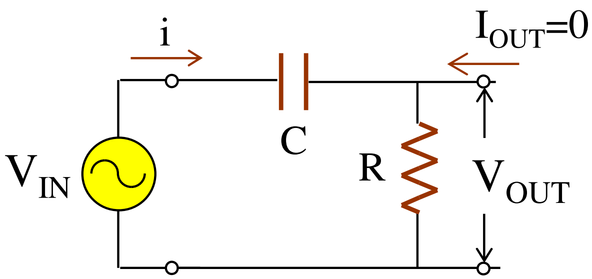
Um filtro ativo usa Amp-Ops para otimizar a resposta em frequência do filtro.

Os filtros são caracterizados pela sua resposta em frequência.

Os filtros analógicos são circuitos lineares básicos utilizados em diversos sistemas eletrónicos. São imprescindíveis na generalidade dos circuitos de transmissão e receção de sinais, muito úteis na rejeição de ruído, ou na multiplexagem de sinais, nomeadamente na implementação de moduladores/desmoduladores de sinais.

Circuito CR: Filtro CR passa-alto

Circuito RC Passa-Alto



$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}(1/\omega RC)$$

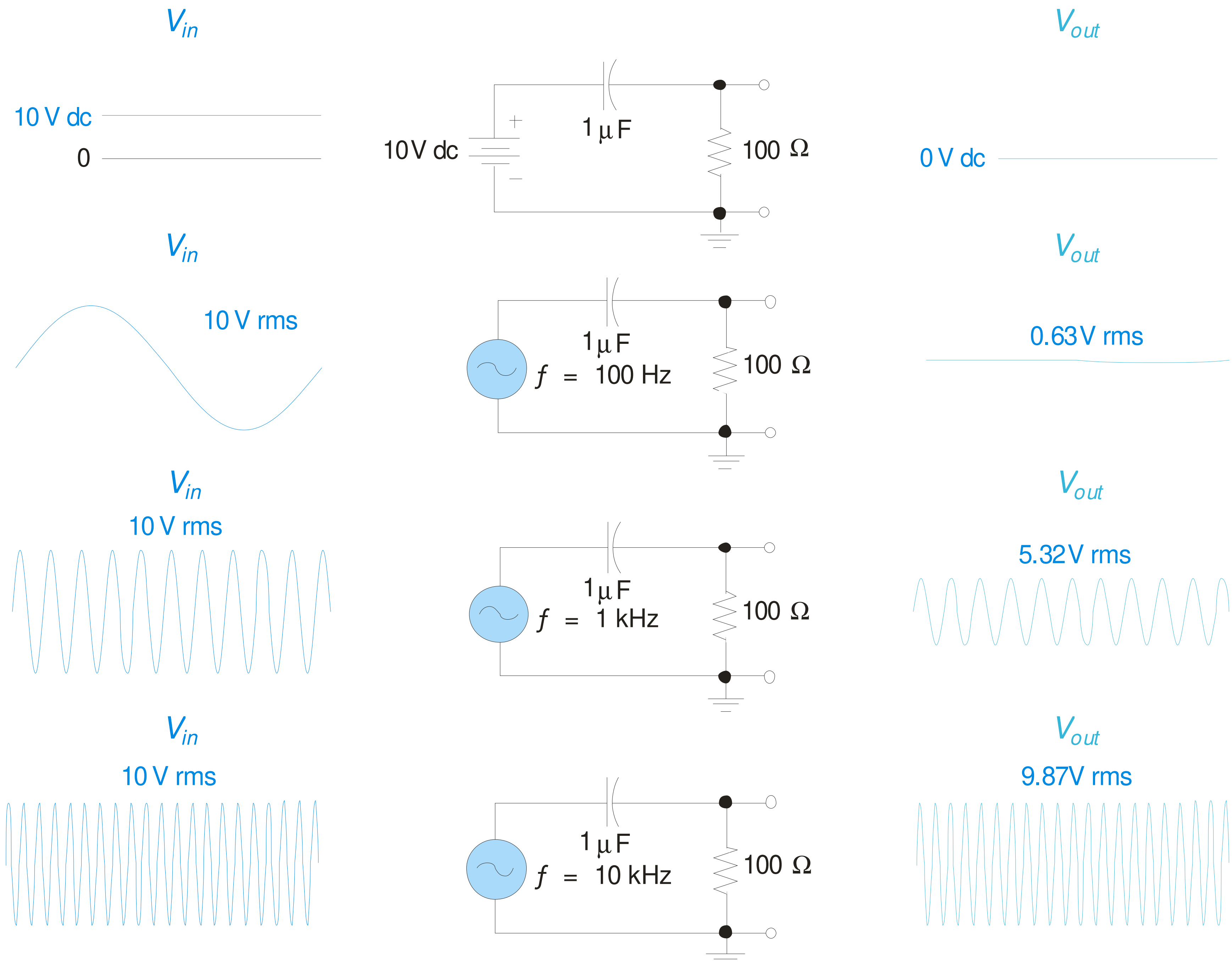
Nesta montagem, a amplitude da tensão aos terminais da resistência (tensão de saída V_{OUT}), decresce à medida que a frequência do sinal de entrada, V_{IN}, diminui.

A **frequência de corte** deste circuito, ω_c, é $|H(\omega_c)|=|V_{OUT}/V_{IN}|=\mathbf{1/\sqrt{2}}$: $\omega=\omega_c=1/RC$.

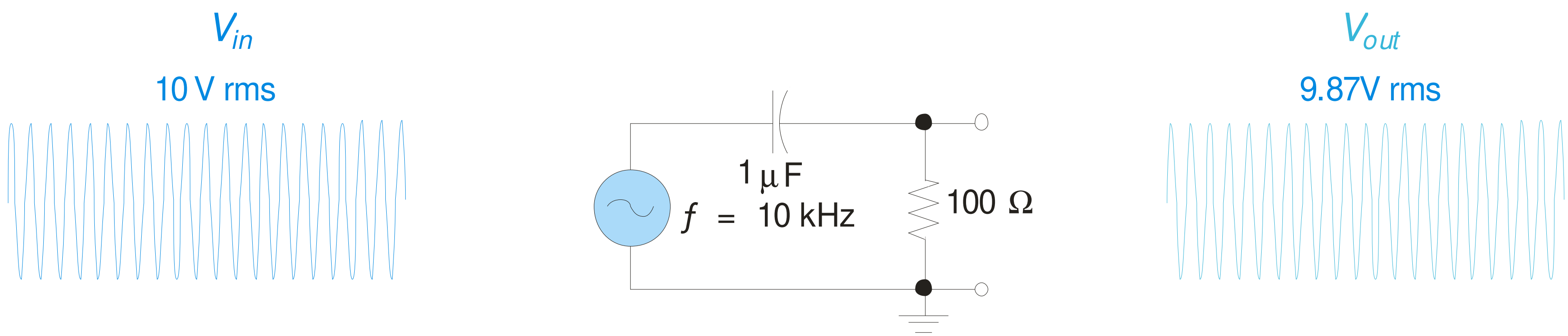
A frequência $\omega_{ci}=1/RC$ e $\omega_{cs}=\infty$. A largura de banda é $LB=\infty$, com $f_{ci}=1/2\pi RC$.

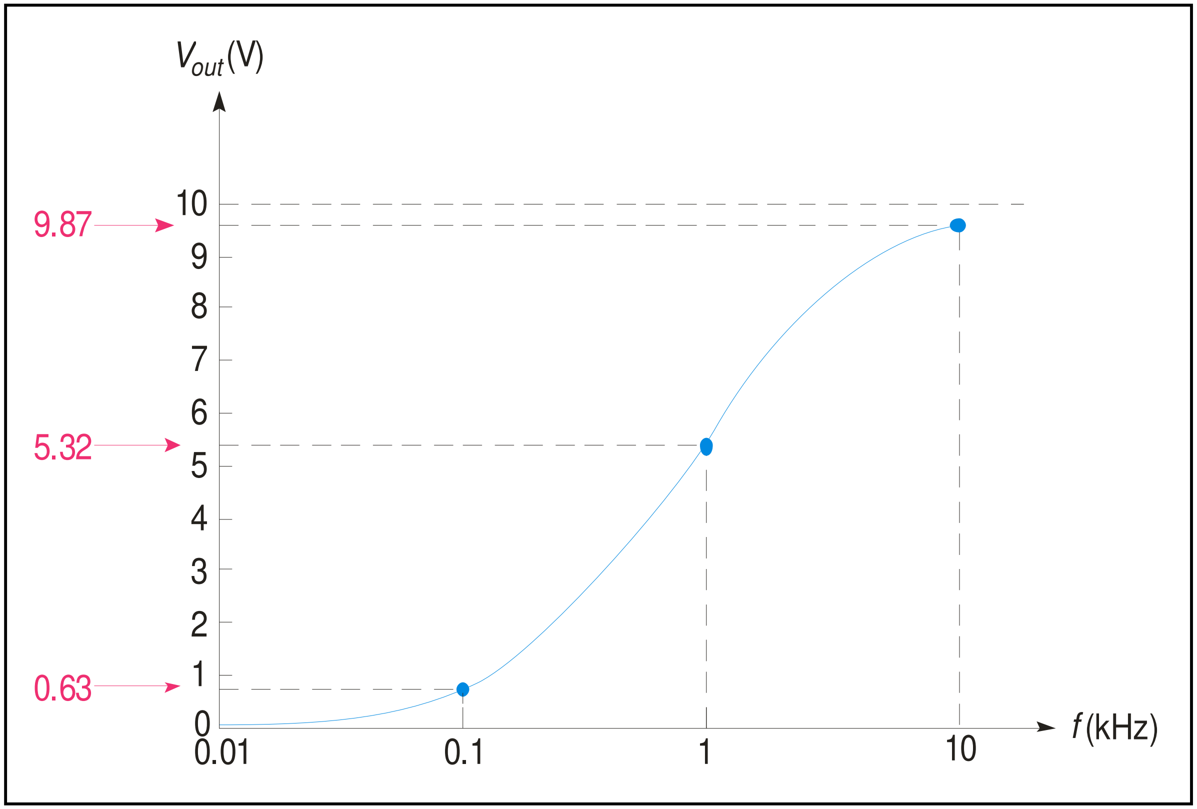
O circuito comporta-se como um **filtro passa-alto**: só os sinais de entrada com frequência superior a ω_c são transferidos, *de forma eficiente*, para a saída.

Resposta do filtro RC passa-alto em função da frequência[1]

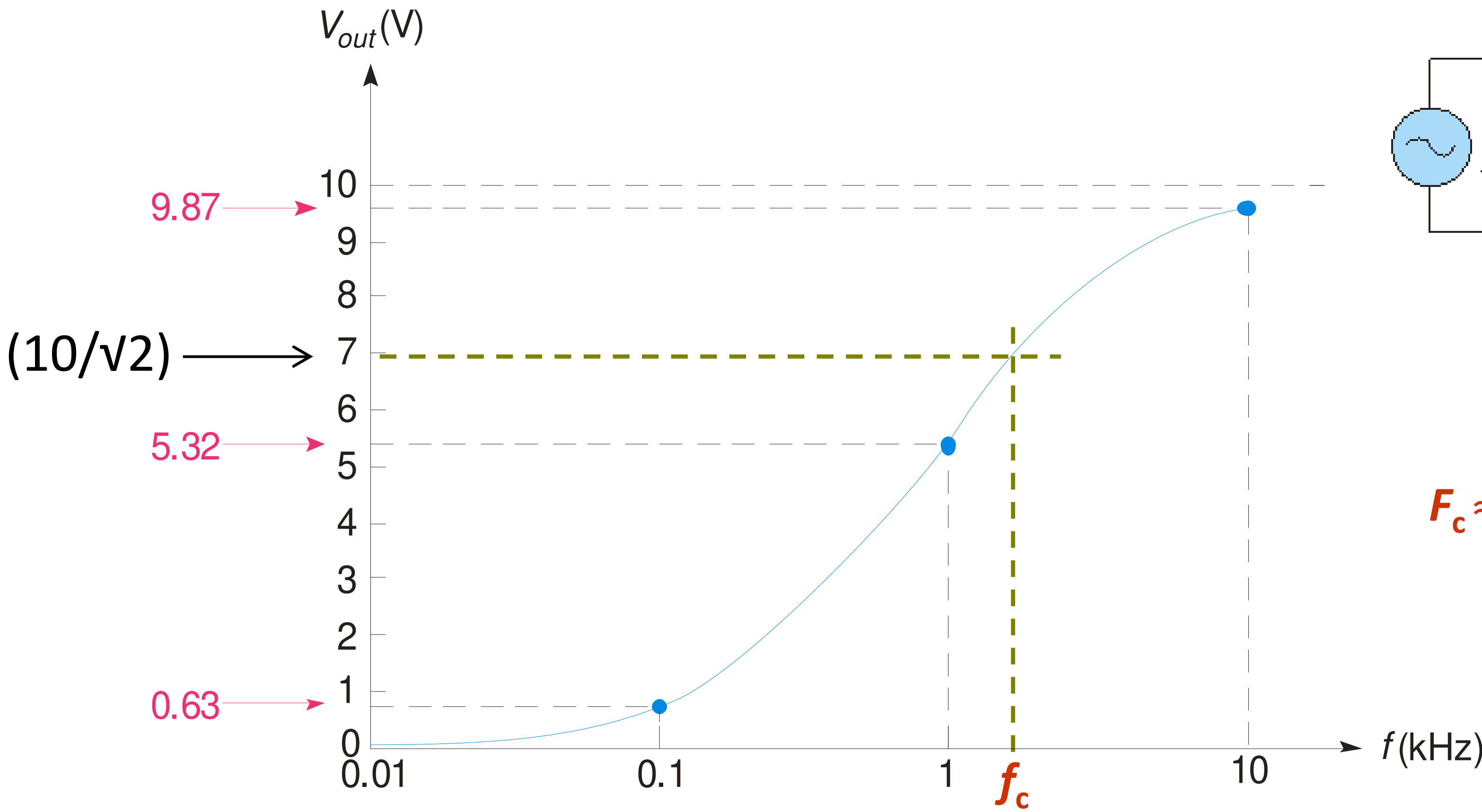


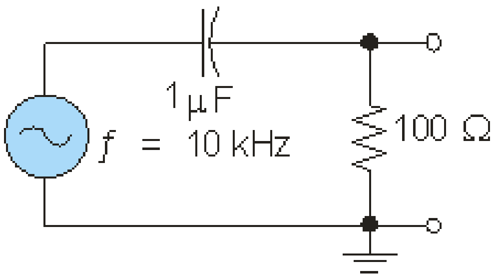
Resposta do filtro RC passa-alto em função da frequência$_2$





Resposta em frequência e frequência de corte do filtro RC passa-alto

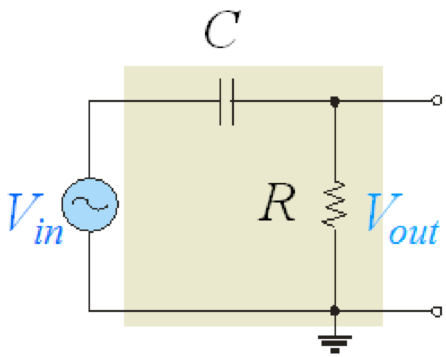




$F_c \approx$ 1592 Hz

$\omega_c = \frac{1}{RC}$, frequência angular de corte do circuito , $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$, frequência de corte do circuito

Diagramas de Bode do circuito RC passa-alto$_1$



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}(\omega)}{\mathbf{V}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + j\omega RC}} = |\mathbf{H}(\omega)| e^{j\emptyset}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2}} e^{+j\arctan\frac{\omega_C}{\omega}}, \quad \omega_C = \frac{1}{RC}$$ frequência de corte

Vamos considerar três situações: para o módulo da função de transferência

i) $\omega \ll \omega_C$: $H(\omega) \rightarrow \frac{\omega}{\omega_C}$, $H(\omega)_{\text{dB}} = 20\,\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$ (-20 dB por década)

ii) $\omega = \omega_C$: $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $H(\omega)_{\text{dB}} = 20\,\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{ dB}$

iii) $\omega \gg \omega_C$: $H(\omega) \rightarrow 1$, $H(\omega)_{\text{dB}} = 20\,\text{Log}_{10}(1) = 0$ dB

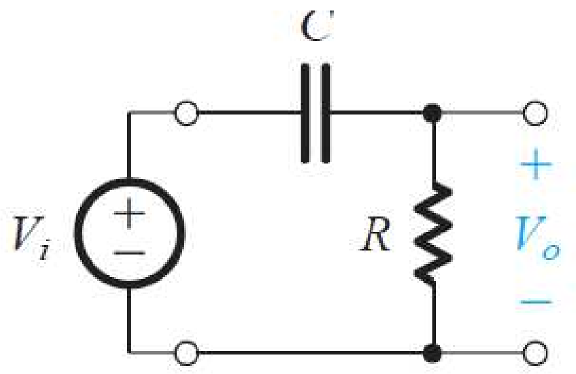
Da mesma forma para a fase função de transferência:

i) $\omega \ll \omega_C$: $\emptyset(\omega) \rightarrow 90^0$

ii) $\omega = \omega_C$: $\emptyset(\omega) = 450$,

iii) $\omega \gg \omega_C$: $\emptyset(\omega) \rightarrow 0^0$,

Diagramas de Bode do circuito RC passa-alto$_2$



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{v}_{out}(\omega)}{\mathbf{v}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+j\omega RC}}$$

$$= |\mathbf{H}(\omega)|e^{j\emptyset}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2}} e^{+j\arctan\frac{\omega_C}{\omega}}$$

$\omega_C = \frac{1}{RC}$ frequência de corte

Microelectronic_Circuits_6th_Edition_Sedra

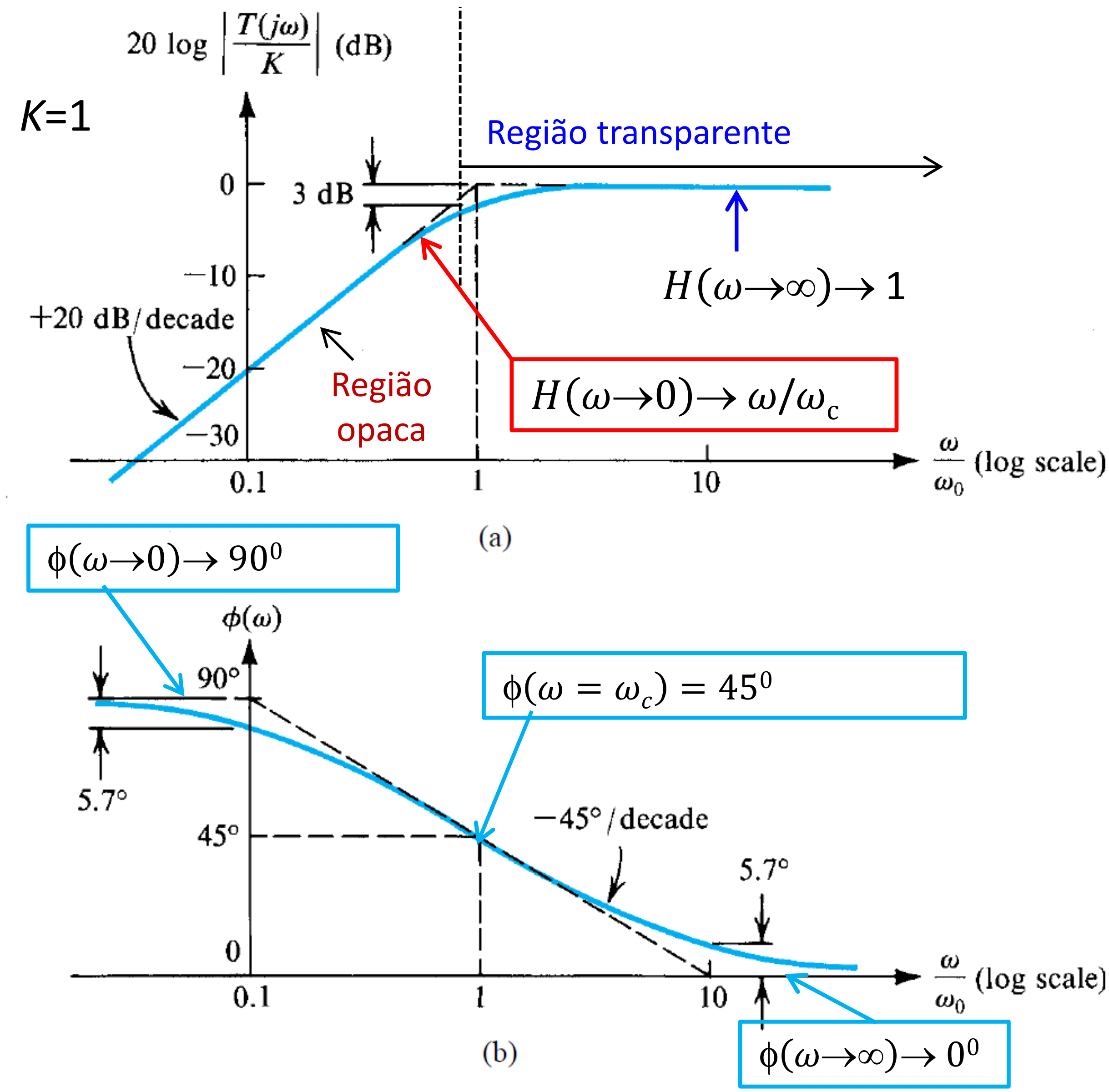


Figure 1.24 **(a)** Magnitude and **(b)** phase response of STC networks of the high-pass type.

http://www.ufrgs.br/eng04030/Aulas/teoria/cap_12/respfreq.htm

TPC

Circuitos RLC

- Fator de qualidade Q
- Ressonância
- Filtros passivos RLC (filtros de segunda a ordem)
- Frequências de corte e largura de banda

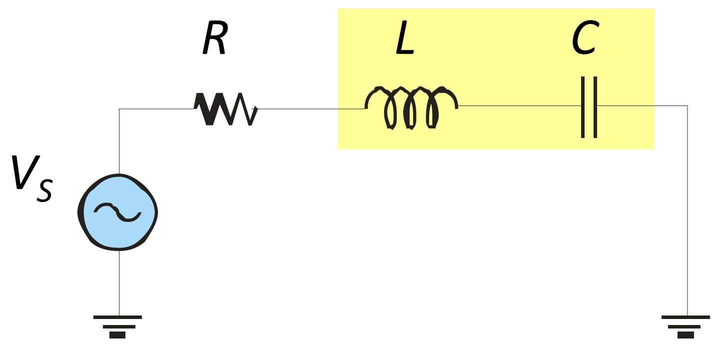
Circuito RLC série: impedância *vs* frequência

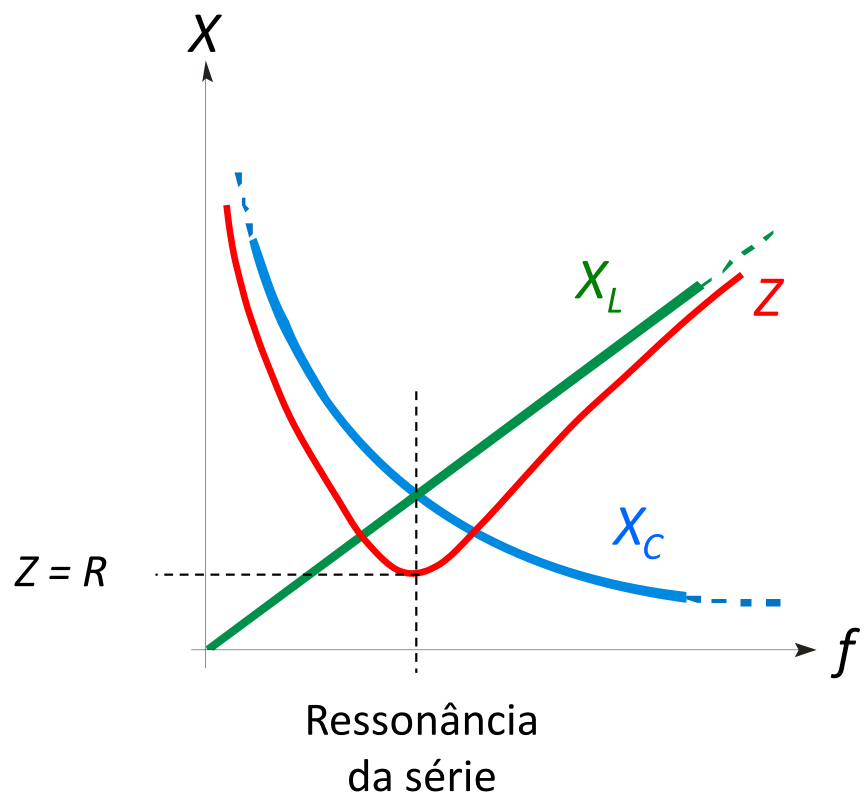
A impedância é uma grandeza complexa (unidade SI: ohm), e no regime sinusoidal estacionário é o equivalente à resistência em circuitos dc.

Impedâncias da resistência (*R*), da bobine (*L*) e da capacidade (*C*):

$\boxed{Z_R = R}$ $\quad Z_L = j\omega L \quad$ $\boxed{Z_C = 1/j\omega C\text{=-}j\,1/\omega C}$

Impedâncias em série ou em paralelo podem ser combinadas usando as "regras" da associação de resistências em paralelo e em série.

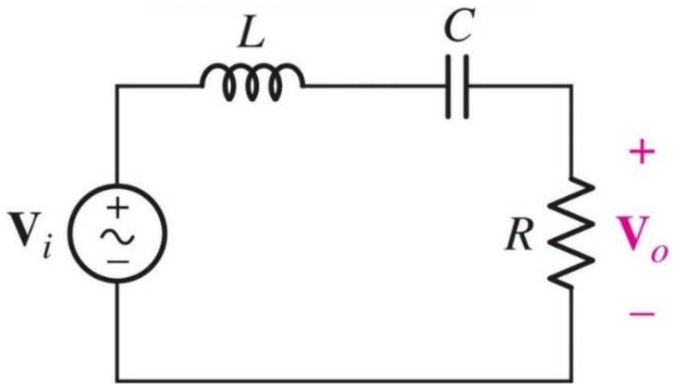




Circuito RLC série – ressonância

Um circuito ou rede está em ressonância (é ressonante) quando a tensão e a corrente na entrada do circuito ou rede estão em fase, i.e., a fonte "**só vê uma resistência**".

No caso do circuito RLC série abaixo tal ocorre quando $Z_L(\omega)+Z_c(\omega)=0$ ou $|Z_L(\omega)|=|Z_c(\omega)|$, então $\boldsymbol{\omega = \omega_R}$ **:**



A frequência de ressonância $\omega = \omega_R$ do circuito do RLC série

$|Z_L(\omega)|=|Z_c(\omega)|$ ou $\omega L = 1/(\omega C)$: $\omega_R = \omega = 1/\sqrt{LC}$

Isto é, neste caso (circuito RLC série), a frequência de ressonância do circuito corresponde à frequência para a qual $Z_{total}(\omega_R) = R$, com $\omega_R = 1/\sqrt{LC}$.

Na ressonância $\mathbf{V_0(\omega=\omega_R) = R\, I\, (\omega=\omega_R) = V_i(\omega=\omega_R)}$

Função de transferência $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{A}_V$

$$\mathbf{A}_V = \frac{sRC}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad |\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

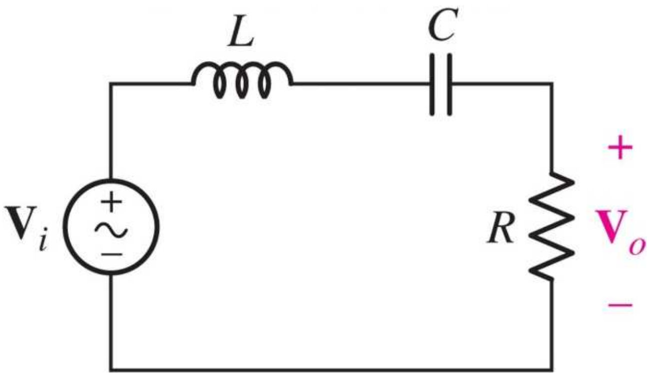
$$\omega \to 0,\ |\mathbf{A}_V| \approx \omega RC \to 0$$

$$\omega \to \infty,\ |\mathbf{A}_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

Frequência de corte:

$$\omega_c = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

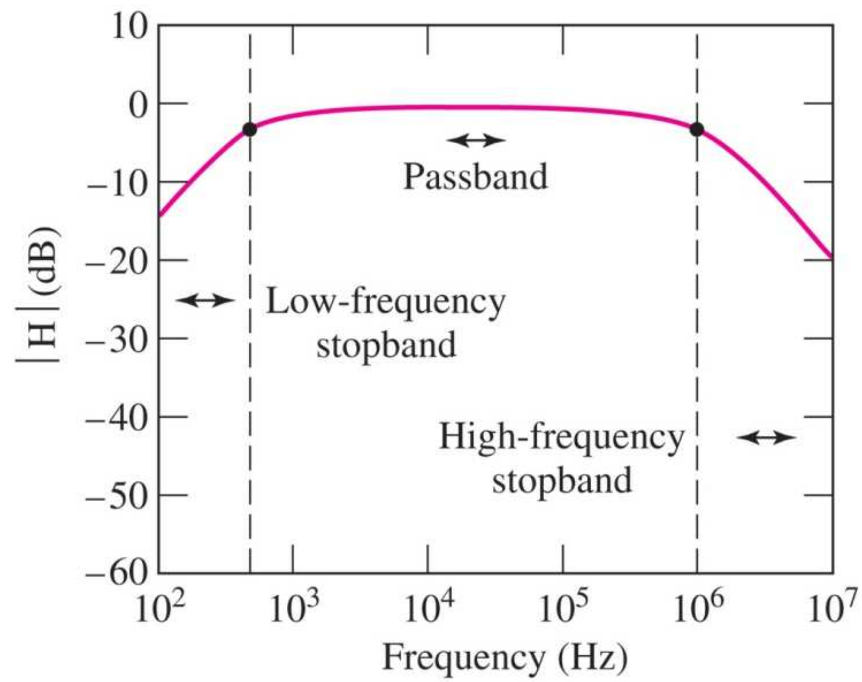
Filtro passivo RLC série passa-banda



$$H(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad s = j\omega$$

No caso do circuito RLC série abaixo tal ocorre quando $Z_L(\omega)+Z_c(\omega)=0$ ou $|Z_L(\omega)|=|Z_c(\omega)|$.

Diagrama de Bode da amplitude

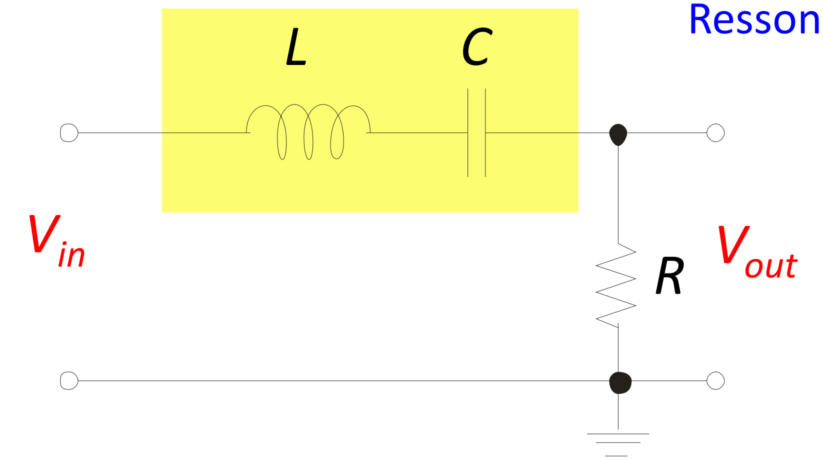


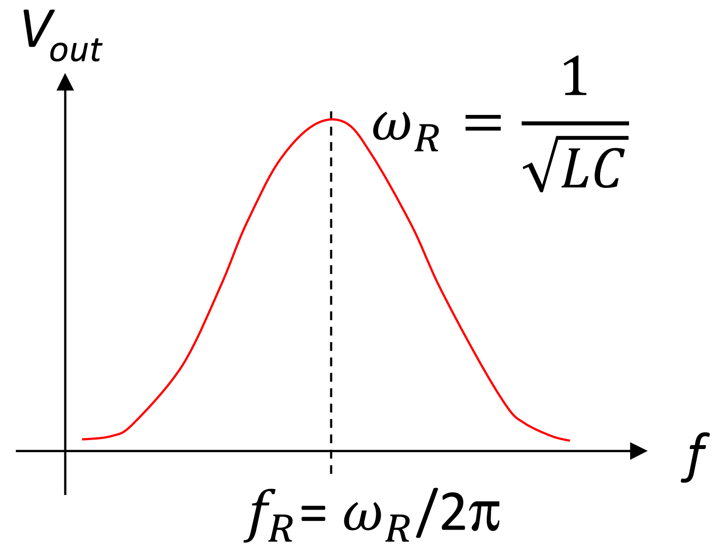
Neste caso temos duas frequências de corte: uma inferior (menor que a frequência de ressonância) e outra superior (maior que a frequência de ressonância)

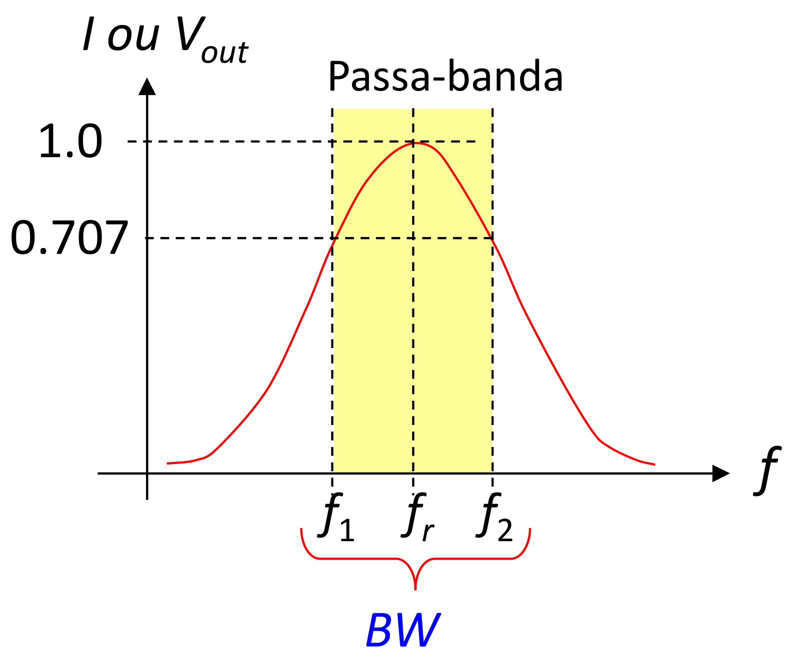
A **largura de banda (diferença entre as frequências de corte superior e inferior)** é ***R/L*** e a frequência central do filtro (frequência de ressonância) é $\omega_0 = \omega_R = 1/\sqrt{LC}$.

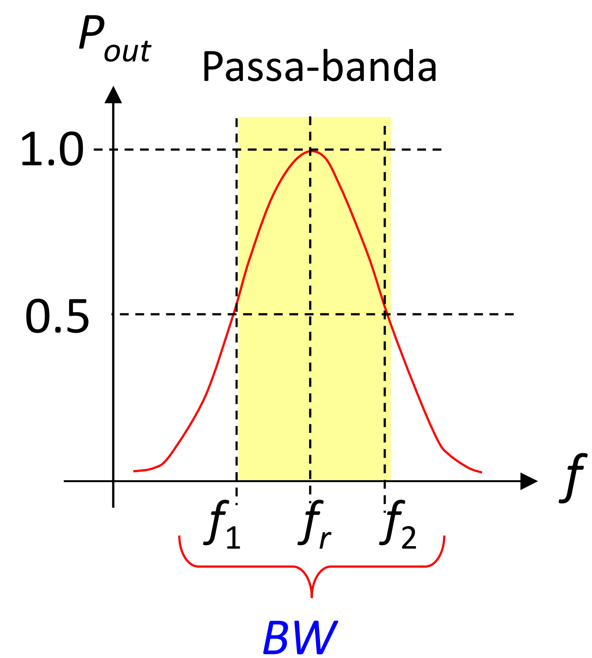
Circuito RLC série: filtro ressonante passa-banda

Ressonância série









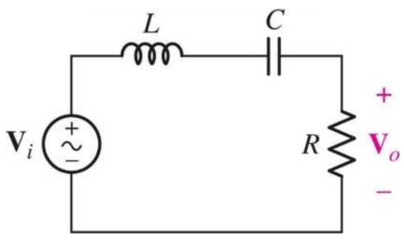
Largura de banda (BW):

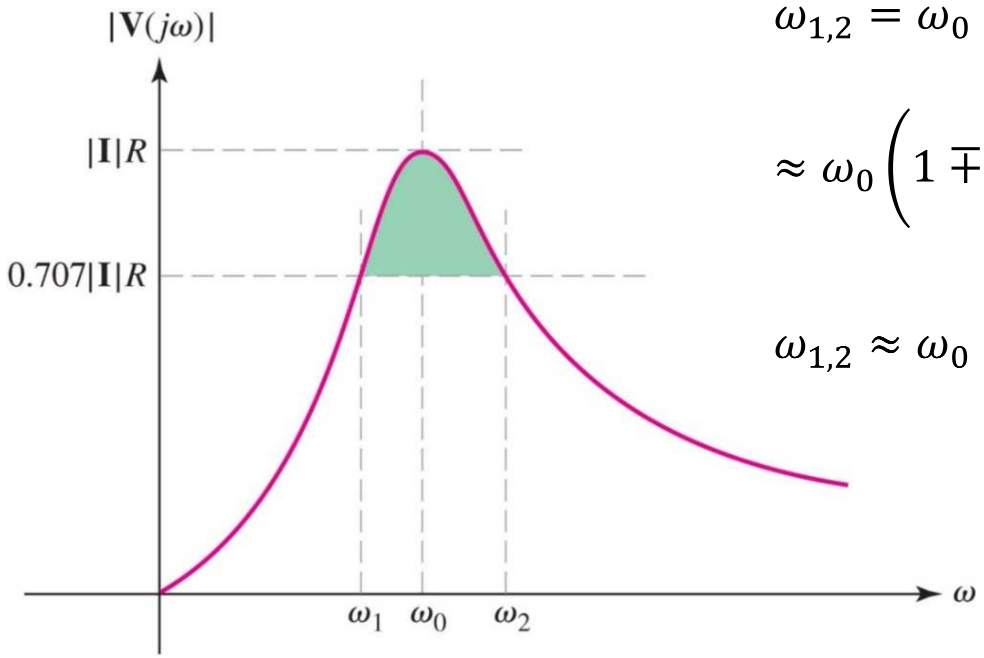
$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_R}$$

$$Q_R = \frac{X_{L,\omega_R}}{R}$$

A **largura de banda** (banda de frequências correspondente à saída com potência igual ou superior a metade da potencia máxima), é definida como a diferença entre as duas frequências em que a saída tem metade da potência máxima.

Largura de banda de um filtro e fator de qualidade
(Bandwidth and Quality Factor)





$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

$$\approx \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q_0}\right)$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2} BW$$

$$Q_R = \frac{X_{L,\omega_R}}{R}$$

$$\omega_0 = \omega_R$$

ω_1: frequência de corte inferior (frequência a metade da potência máxima)

ω_2: frequência de corte inferior (frequência a metade da potência máxima)

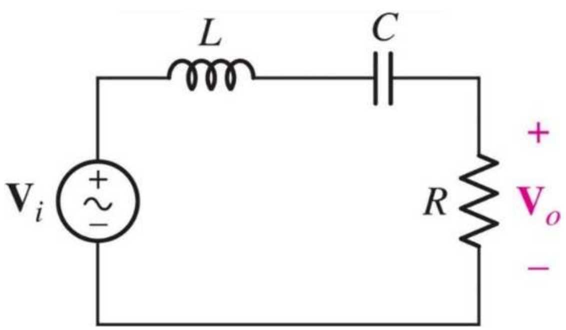
A **largura de banda** (banda de frequências correspondente à saída com potência igual ou superior a metade da potencia máxima), é definida como a diferença entre as duas frequências em que a saída tem metade da potência máxima:

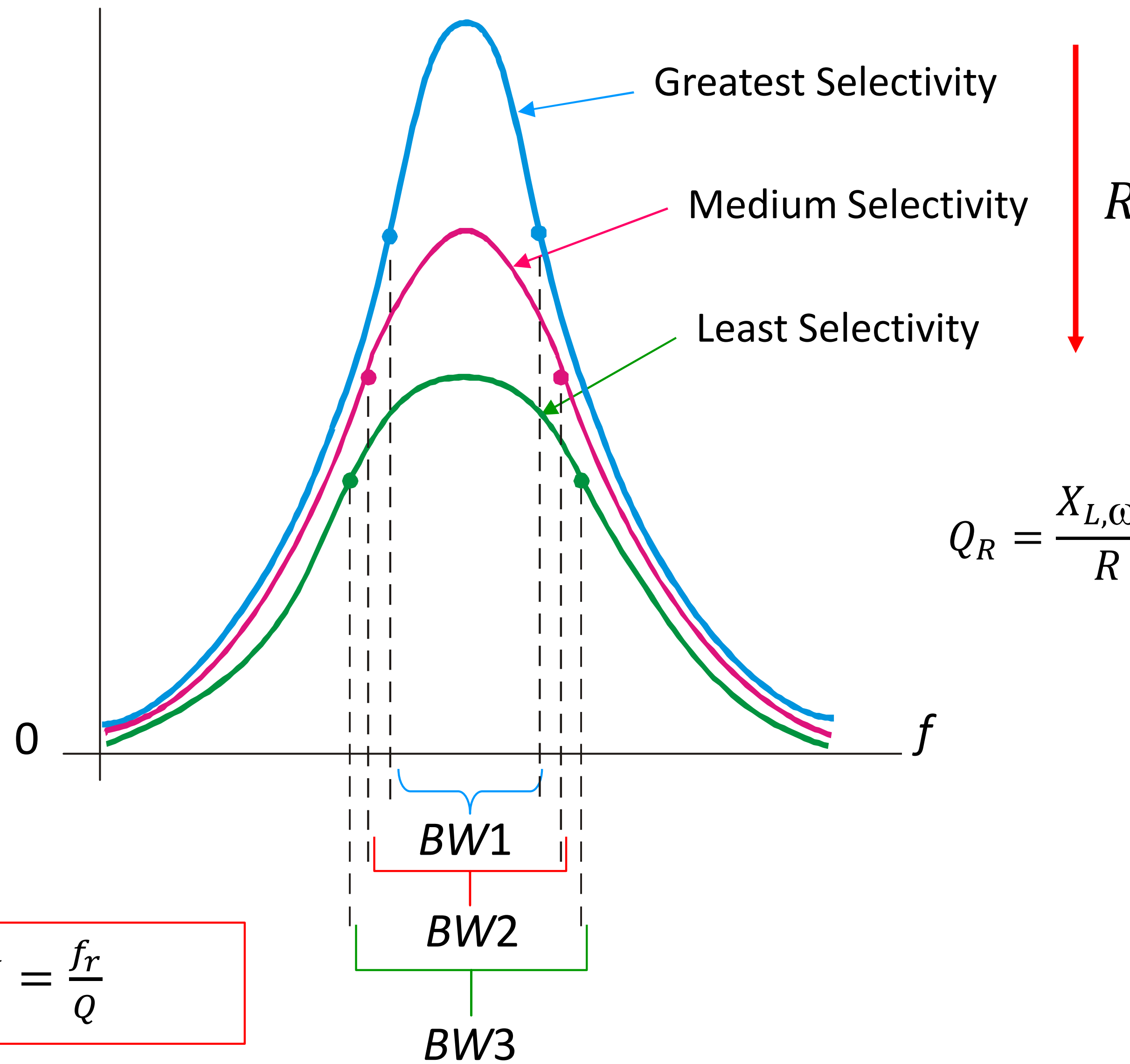
$$B = BW \equiv \omega_2 - \omega_1$$

$$\boxed{\text{Largura de banda (BW): } BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q}}$$

Circuito RLC série: seletividade de frequência

A **largura de banda** (banda de frequências correspondente à saída com potência igual ou superior a metade da potencia máxima), é definida como a diferença entre as duas frequências em que a saída tem metade da potência máxima.





$$Q_R = \frac{X_{L,\omega_R}}{R}$$

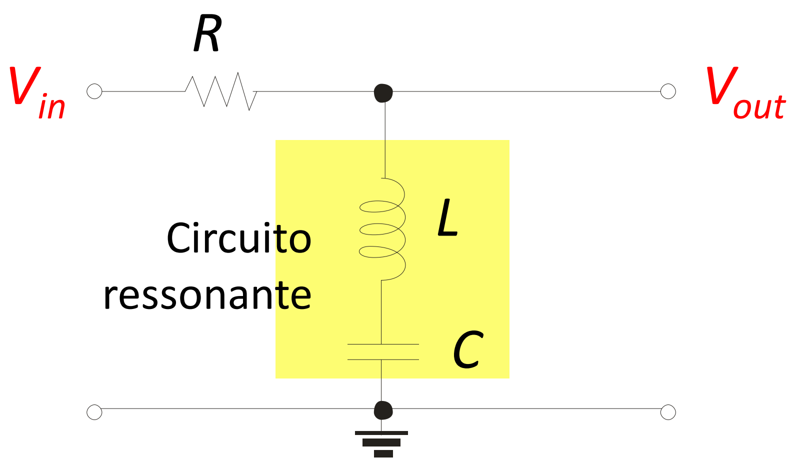
Largura de banda (BW):

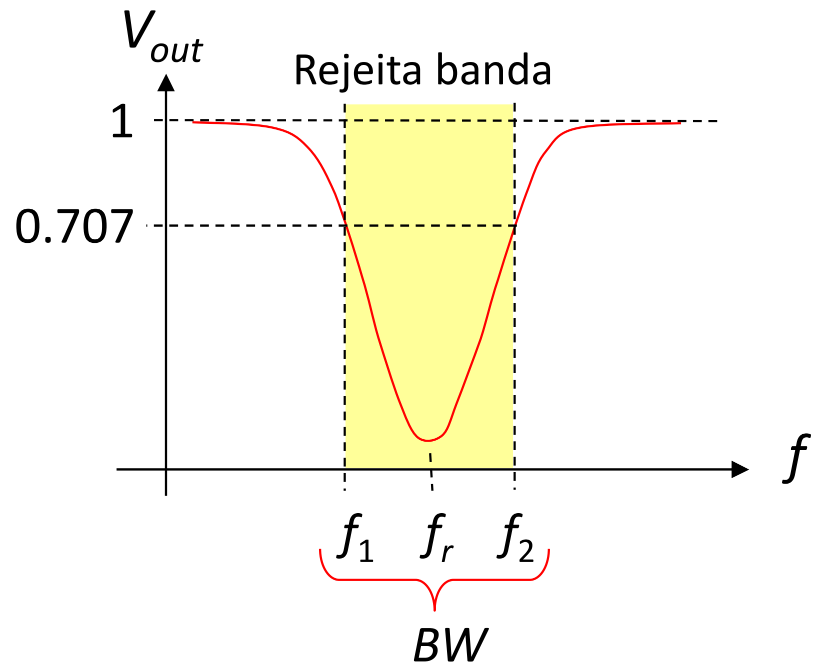
$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_R}$$

$$Q_R = \frac{X_{L,\omega_R}}{R}$$

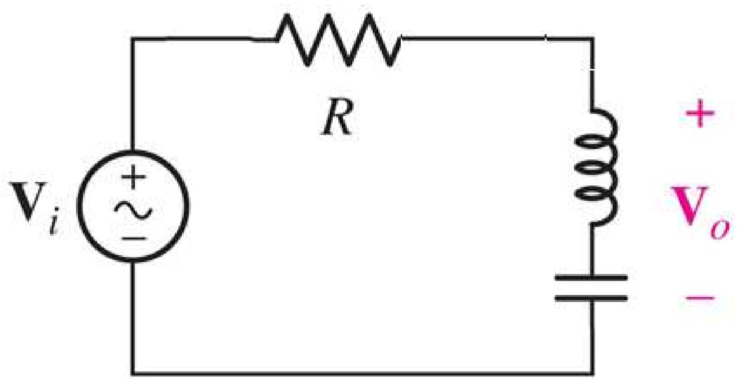
Largura de banda (BW): $BW = \frac{f_r}{Q}$

Circuito RLC série: filtro ressonante rejeita banda





Filtro passivo RLC série rejeita-banda



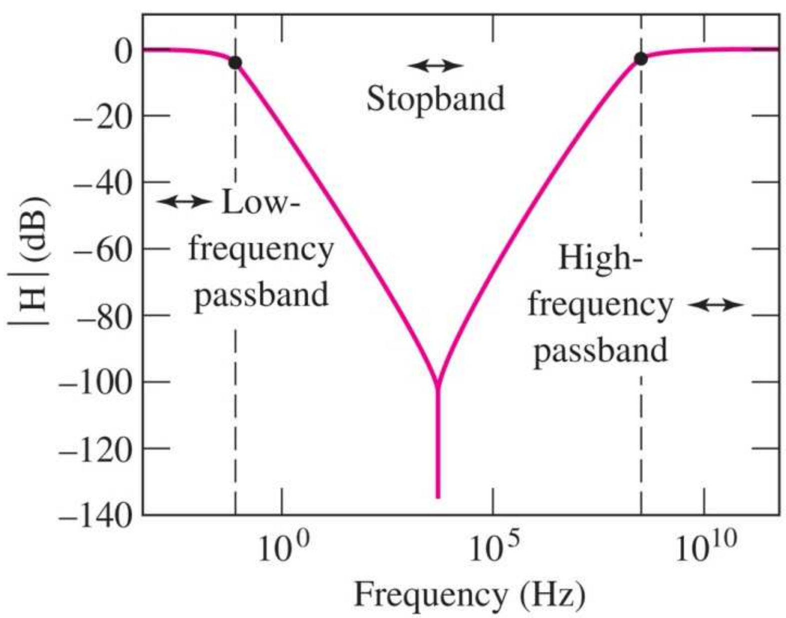
$$H(S)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_L+Z_C}{R+Z_L+Z_C}$$

$$s = j\omega$$

$$H(s)=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+1}$$

No caso do circuito RLC série abaixo tal ocorre quando $Z_L(\omega)+Z_c(\omega)=0$ ou $|Z_L(\omega)|=|Z_c(\omega)|$.

Diagrama de Bode da amplitude

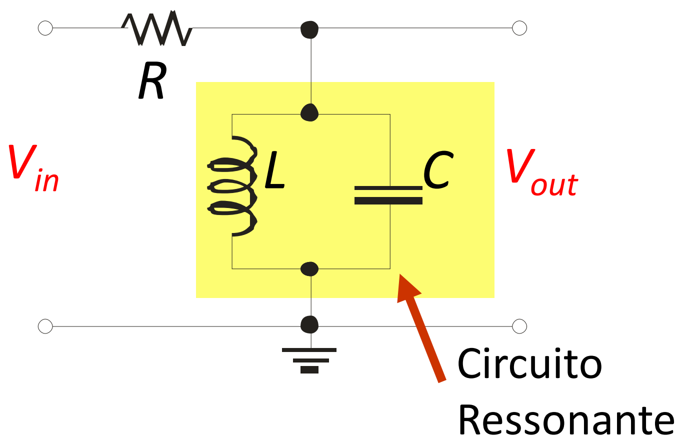


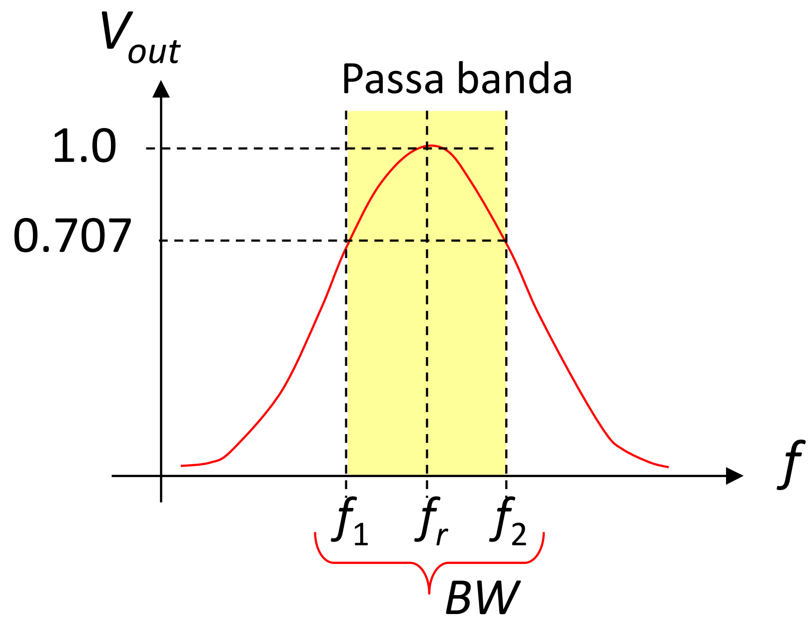
Um circuito ou rede está em ressonância (é ressonante) quando a tensão e a corrente na entrada ado circuito ou rede estão em fase, i.e., a fonte "**só vê a resistência**".

Frequência central do filtro (ressonância) é $\omega_R = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

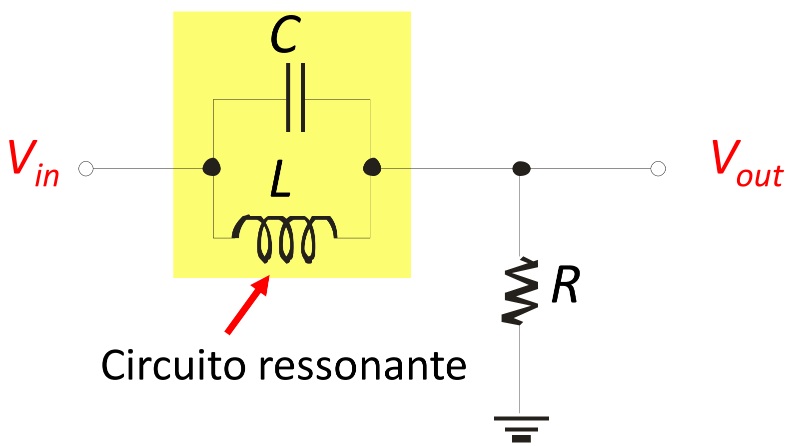
A **largura de banda do filtro rejeita banda (diferença entre as frequências de corte superior e inferior)** é ***R*/*L*** e a frequência central (frequência de ressonância) é $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

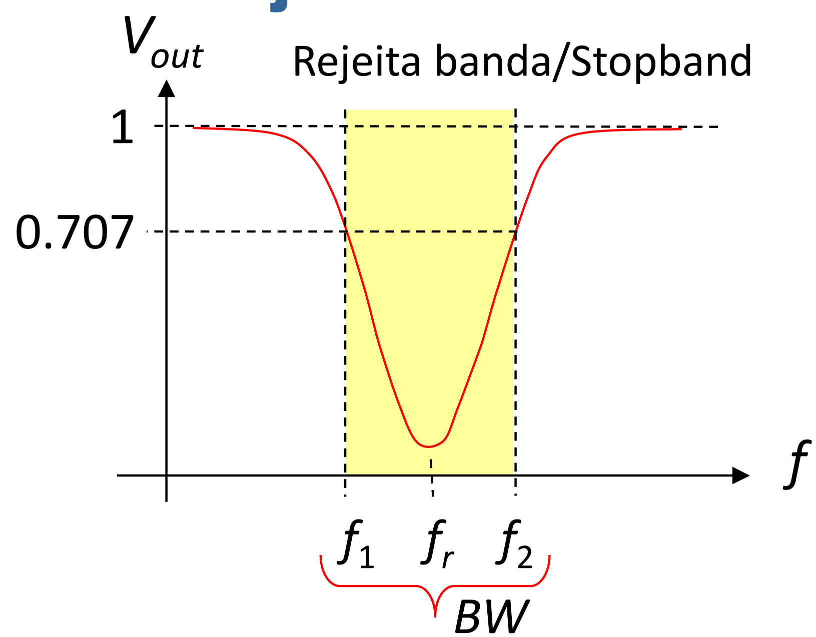
Circuito LC paralelo: filtro passa-banda





Circuito LC paralelo: filtro rejeita-banda





Circuito paralelo ressonante rejeita banda

Exercício TPC 1: determinar a função de transferência

Considere o circuito RLC série da figura.

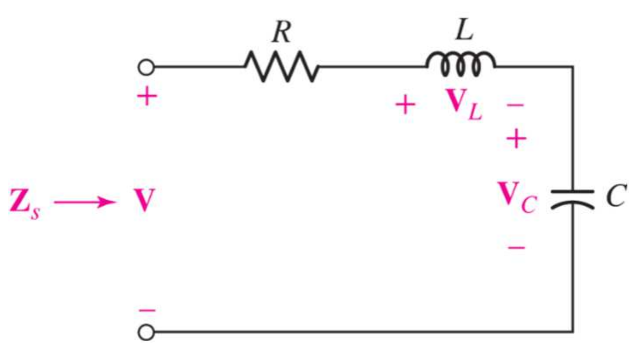
i) Determinar Z_s e a função de transferência do circuito $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \dfrac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{V}_S}$

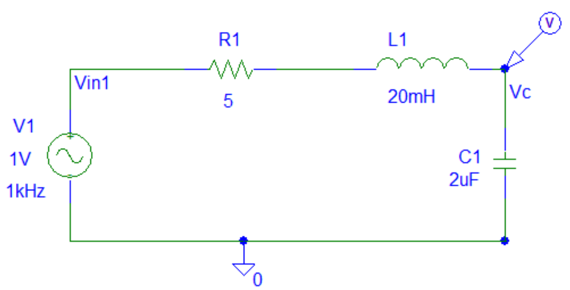
i) Esboçar a amplitude e a fase da função de transferência em função da frequência angular.

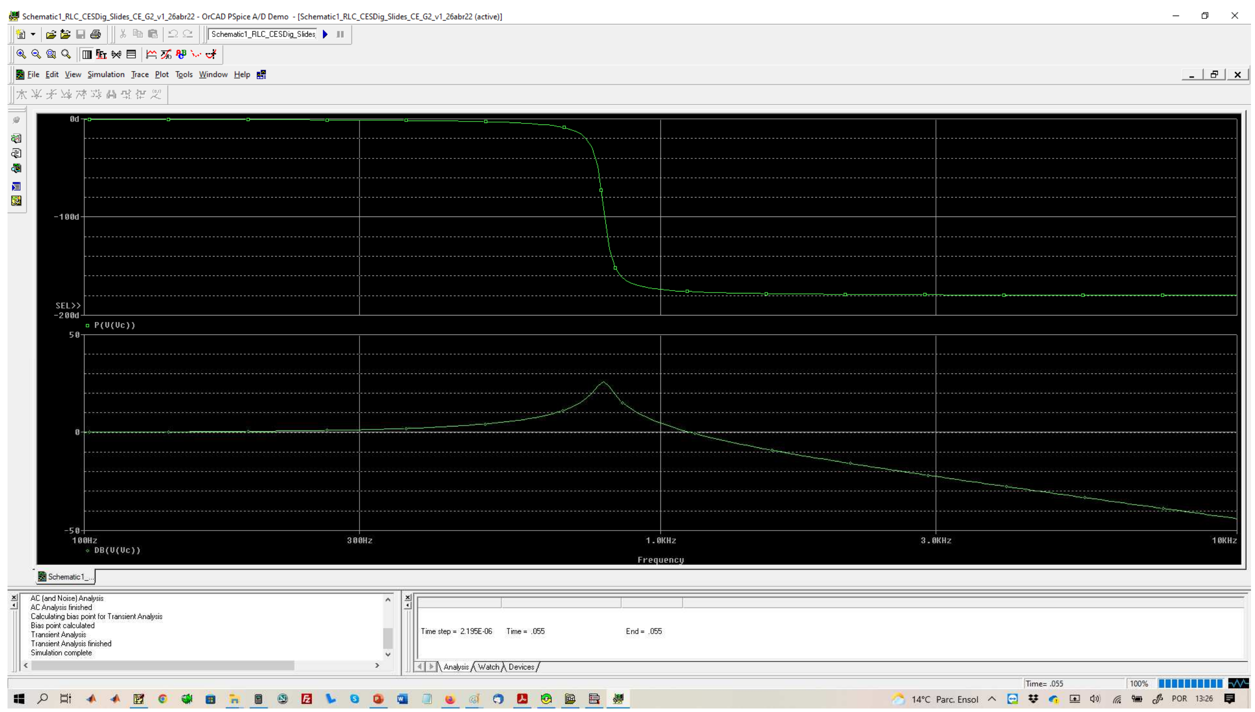
i) Esquissar o diagrama de Bode (amplitude e fase) **assimptóticos**.

ii) Verificar que: $|\mathrm{V}_L\,(j\omega_0)| = |\mathrm{V}_C(j\omega_0)| = Q_0|\mathrm{V}(j\omega_0)|$ com $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ $\quad \omega_0 = \omega_R = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

iii) Simule o circuito para R = 5 Ω , L = 20 mH, e C = 2μF, e determine a frequência de ressonância, Q_0, Z_s na ressonância, e a largura da banda.







Exercício TPC 2: determinar a função de transferência

Considere o circuito RLC série da figura.

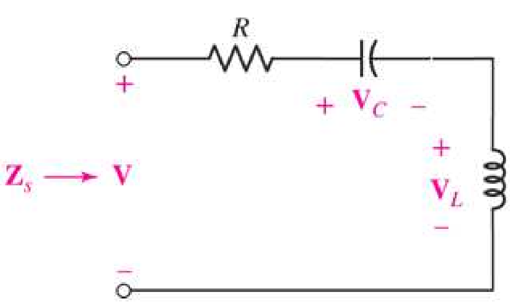
i) Determinar Z_s e a função de transferência do circuito $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \dfrac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{V}_S}$

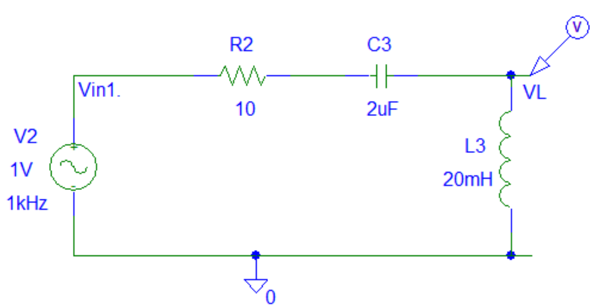
i) Esboçar a amplitude e a fase da função de transferência em função da frequência angular.

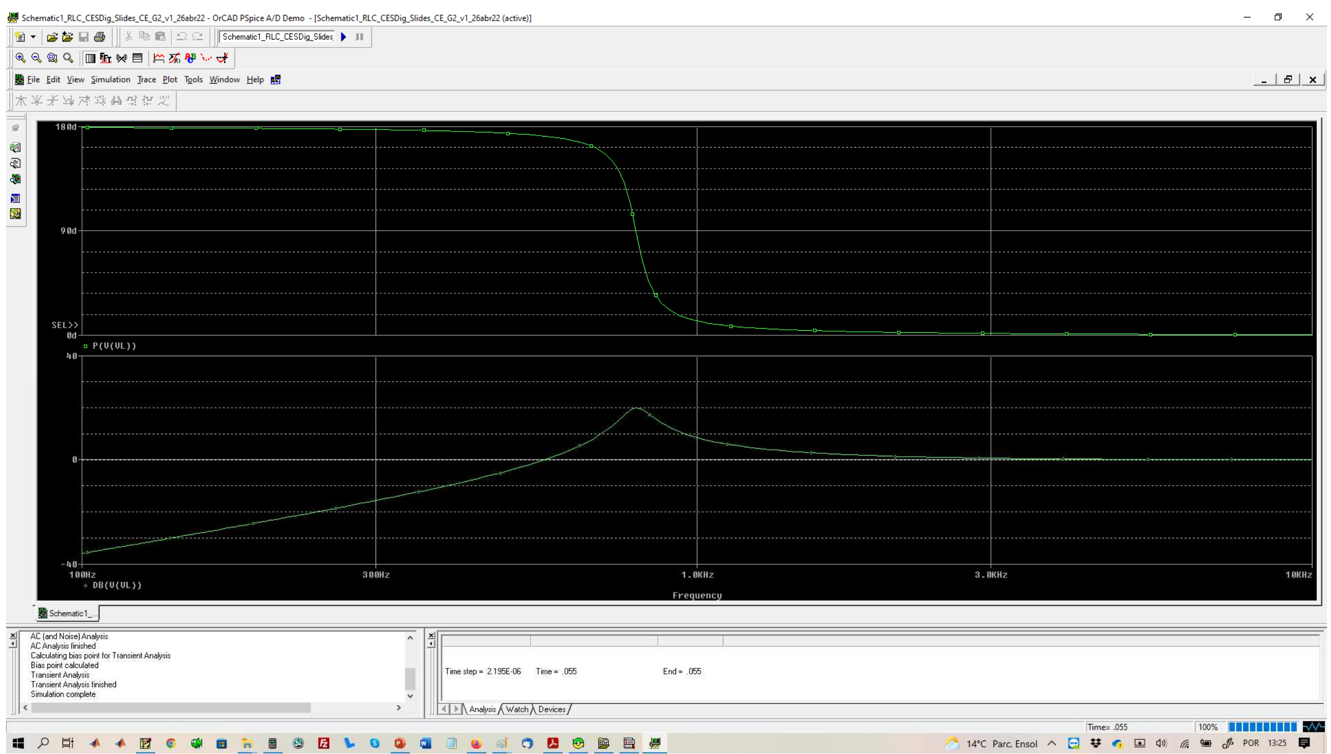
i) Esquissar o diagrama de Bode (amplitude e fase) **assimptóticos**.

ii) Verificar que: $|V_L(j\omega_0)| = |V_C(j\omega_0)| = Q_0|V(j\omega_0)|$ com $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ $\omega_0 = \omega_R = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

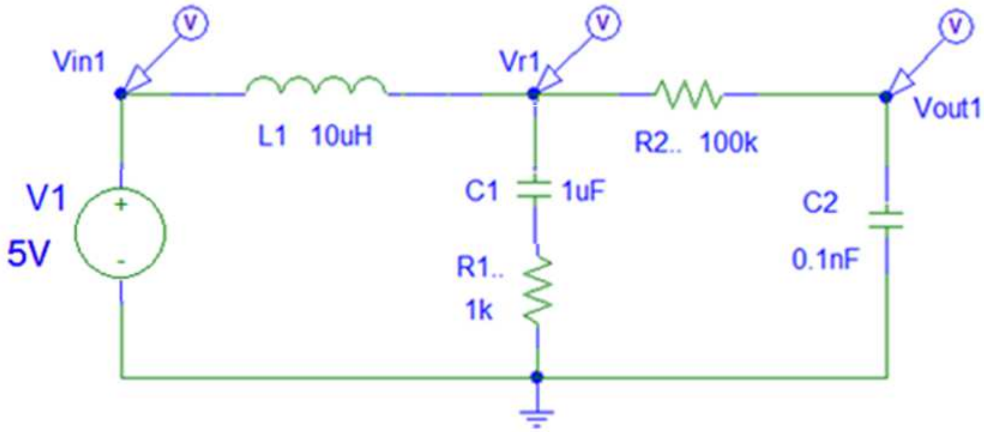
iii) Simule o circuito para R = 10 Ω , L = 20 mH, e C = 2 μF, e determine a frequência de ressonância, Q_0, Z_s na ressonância, e a largura da banda.



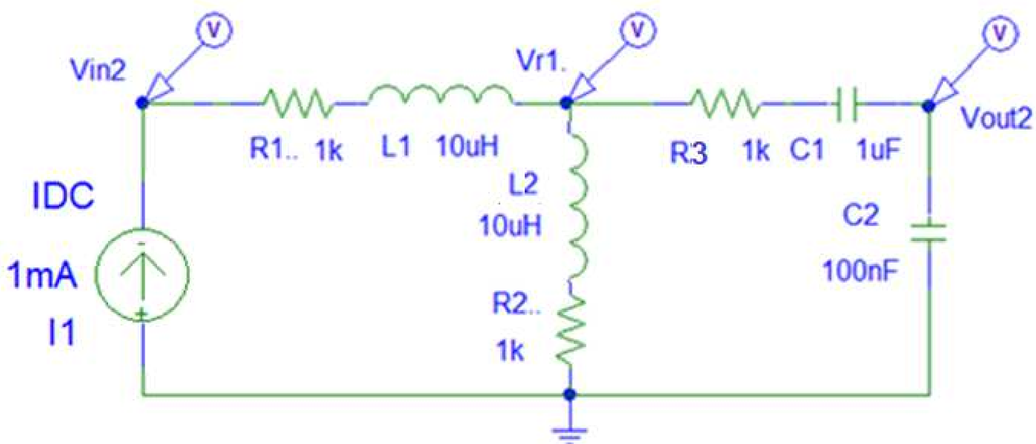




Exercício 1: Análise do regime estacionário de circuitos dc contendo condensadores e bobines



Determinar as tensões Vin1, Vr1, Vout1 e as correntes em R1 e R2.



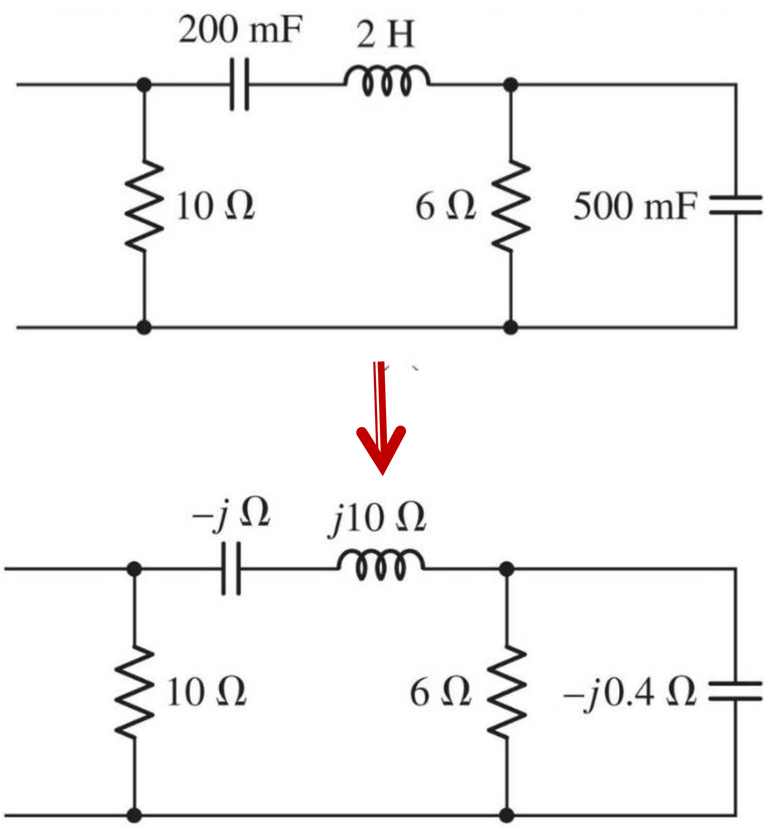
Determinar as tensões Vin2, Vr1, Vout2 e as correntes em R1 e R2.

Exercício 2: determinar a impedância equivalente

Impedâncias em série ou em paralelo podem ser combinadas usando as mesmas "regras usadas para as resistências".

$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = 1/j\omega C$

Determinar a impedância equivalente da rede para ω = 5 rad/s.



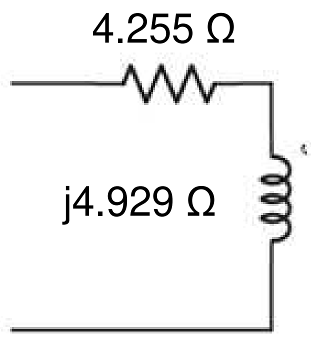
Impedâncias em série: $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N$

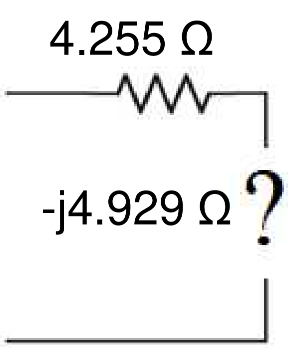
Impedâncias em paralelo:

$$(Z_{eq})^{-1} = (Z_1)^{-1} + (Z_2)^{-1} + \cdots + (Z_N)^{-1}$$

Duas impedâncias em paralelo: $Z_{eq} = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Se a resposta fosse: 4.255 - j4.929 Ω





Resposta: 4.255 + j4.929 Ω