Probabilidad

Clase 10 Curso Propedéutico
2017/06/27

Teorema de Bayes

- Teorema de Bayes es una "fórmula mágica"
- Muy útil porque permite convertir una probabilidad condicional en términos del condicionamiento inverso
- Es la base de la estadística bayesiana

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Demostración

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

y $P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}$$

Ejemplo

"A patient goes to see a doctor. The doctor performs a test with 99 percent reliability--that is, ① 99 percent of people who are sick test positive and 99 percent of the healthy people test negative. ② The doctor knows that only 1 percent of the people in the country are sick. Now the question is: ③ if the patient tests positive, what are the chances the patient is sick?"

P : test positivo
N : test negativo
E : enfermo
S : saludable

① $P(P|E) = .99$

$P(N|S) = .99$

② $P(E) = .01$

③ $P(E|P) = \dfrac{P(P|E)\,P(E)}{P(P)} = \dfrac{(.99)(.01)}{2(.01)(.99)} = \dfrac{1}{2}$

$P(P) \leftarrow ?$

LPT

$P(P) = P(P|E)P(E) + P(P|S)P(S)$

$= (.99)(.01) + (.01)(.99)$

$= 2(.01)(.99)$

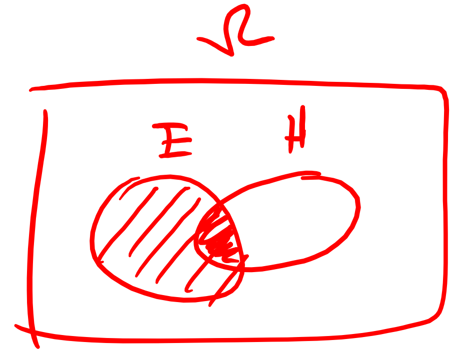
Otro ejemplo

Suppose a patient exhibits symptoms that make her physician concerned that she may have a particular disease. Before agreeing to the screening test, the patient wants to know the probability of disease, given a positive test result

- P(Disease)=0.002 (prevalence)
- P(Screen Positive | Disease)=0.85 (the sensitivity of the test)
- P(Screen Positive)=0.08 (total fraction of positive tests)

Tarea

Otro otro ejemplo



- Con evidencia e hipótesis…

H: hipótesis

E: evidencia

verosimilitud: si el modelo fuera cierto, proba de esta evidencia

$$\underbrace{P(H|E)}_{\text{proba del modelo: creencia posterior}} = \frac{\overbrace{P(E|H)}^{\text{verosimilitud}}\ \underbrace{P(H)}_{\text{creencia previa}}}{P(E)}$$

$P(E)$ ← No importa…

De dónde viene la probabilidad?

Types of Probability

There are THREE types of probability.

- **Classical (or theoretical) probability**

$$P(E) = \frac{Number\ of\ outcomes\ in\ Event\ E}{Total\ number\ of\ outcomes\ in\ sample\ space}$$

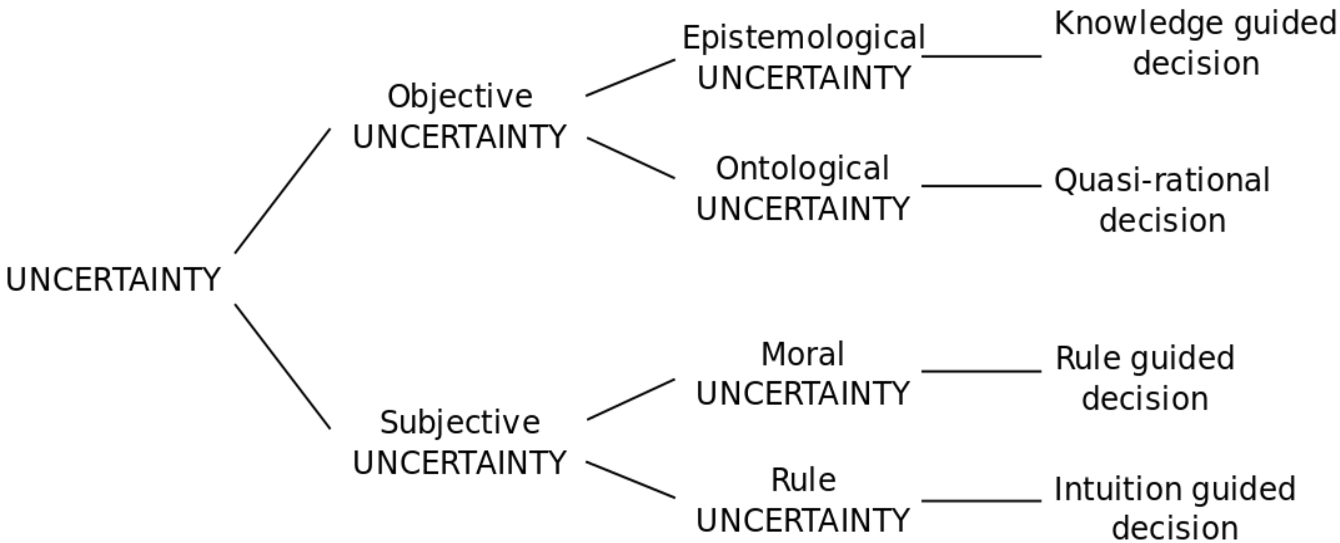
- **Empirical (or statistical) probability**

$$P(E) = \frac{Frequency\ of\ event\ E}{Total\ frequency} = \frac{f}{n}$$

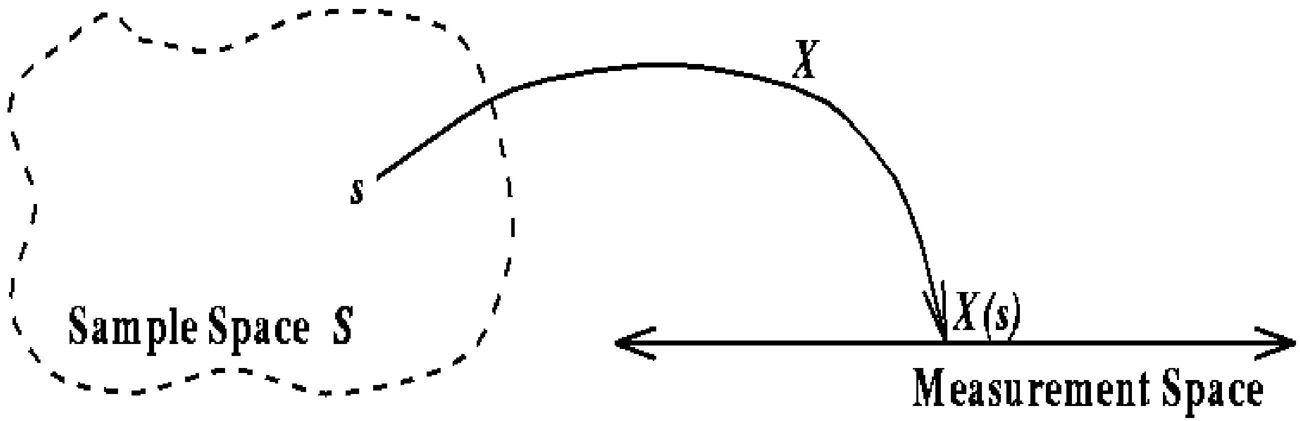
- **Subjective probability**

  Result from intuition, educated guesses and estimates

Fuentes de Incertidumbre:

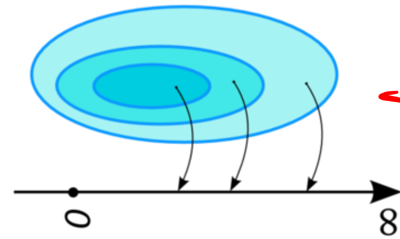


Indertidumbre → Aleatoriedad



II. Variables Aleatorias

Mediciones

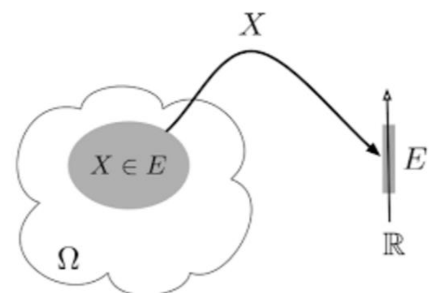


Asignación de valores a observaciones

$\Omega = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$

$$\text{Medición} \begin{cases} \text{cara} \rightarrow 1 \\ \text{cruz} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Variables Aleatorias

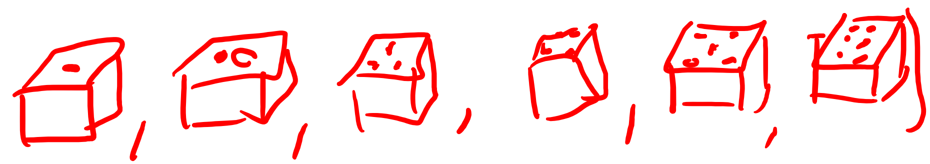


"Es una función del espacio de observaciones"

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

✓ Asigna un valor numérico a cada "observación"

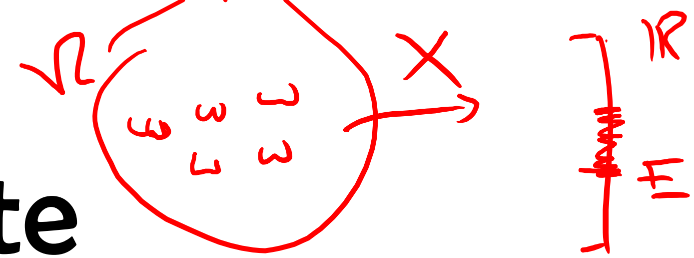
Ejemplo

Lanzamiento dado $\Omega = \{$  $\}$

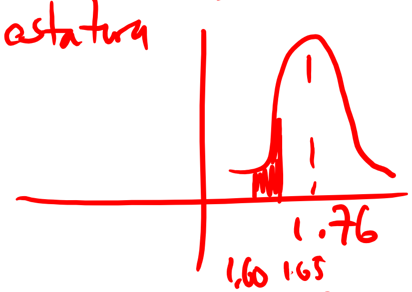
X indicadora de par	X:	0	1	0	1	0	1
X el número del dado	X:	1	2	3	4	5	6
X cero siempre	X:	0	0	0	0	0	0

~~Inuitivamente vs Matemáticamente~~

Distribución y Soporte



Def La distribución o ley de probabilidad es la medida de probabilidad que induce una v.a. X



$$\mathbb{P}_X(E) \underset{\text{notación}}{=} \mathbb{P}(X\in E) \underset{\text{definición}}{=} \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)\in E\})$$

Def Soporte: todos los posibles que puede tomar una variable aleatoria X

$$\text{Supp}(X) = \{x : \exists\omega \; X(\omega)=x\} = X(\Omega)$$

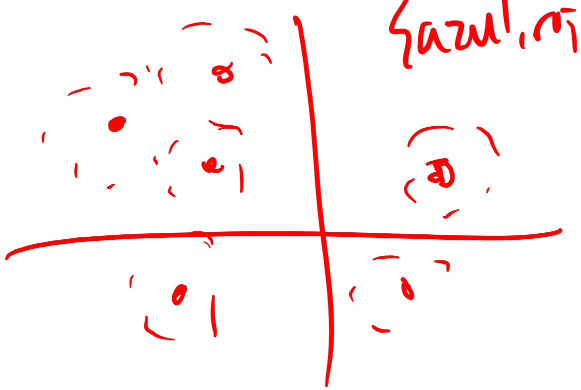
Variables Discretas vs Variables Continuas

- Def: v.a. discretas tienen soporte discreto
- Def v.a continuas " " "continuo"

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

Discreto $\{0,1,2,3\}$

{azul, rojo}



$\{-1,-2,1\dots\}$

$\mathbb{Z}$

Continuo

$[0,\infty)$

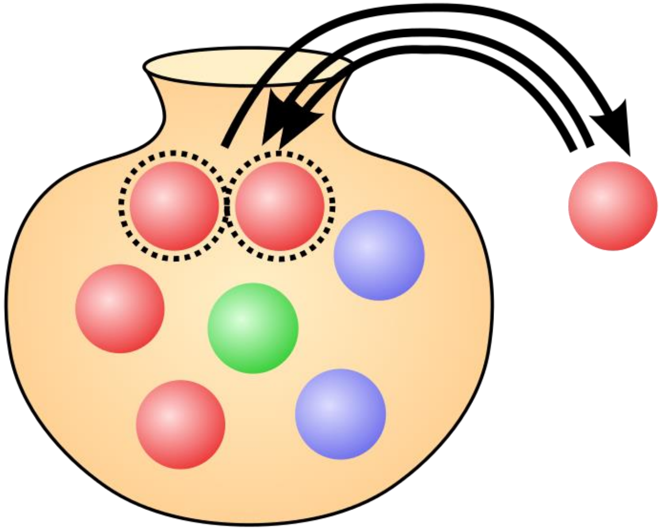
$\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

Variables Aleatorias Independientes

Notación

Def: $\mathbb{P}(X\in E, Y\in F) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)\in E\}\cap\{\omega : Y(\omega)\in F\})$

$$= \mathbb{P}(X\in E)\,\mathbb{P}(Y\in F)$$



III. Variables Discretas

Conjutos Discreto y Funciones Masa

Función masa de probabilidad de una v.a X es

$$f_X(x) := \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=x\})$$

La ley de X se escribe en función de su función masa:

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X\in E) = \sum_{x\in E} f_X(x) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X=x)$$

Principales Variables Discretas

$X \sim Ber(p)$ p es un parámetro

•) Bernoulli: sirve para modelar fracaso - éxito

Soporte $= \{0,1\}$ Masa: $\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \end{cases}$

$\hookrightarrow f_{\underline{X}}(x) = p^x(1-p)^{1-x}$

" p mide la proba de que a un individuo le guste una película, a Netflix le interesa estimar p y recomendarle la película si p es alta "

•) $X \sim Bin(n,p)$: Binomial, cuenta de éxitos en n intentos independientes con proba de éxito p

Soporte $= \{0,1,\ldots,n\}$ $f_{\underline{X}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Otras que tienen que saber:

•) Poisson : "Ley de eventos raros"

•) Uniforme : "todos las observaciones misma proba"

•) Geométrica : { " # fracasos antes del primer éxito"
" # intentos " " " " "

IV. Variables Continuas

Conjuntos "continuos" y Funciones de densidad

En conjuntos continuos la prob de cualquier punto es 0

$\mathbb{P}(X=x)=0$ "ningún punto tiene masa"

La función de densidad de una v.a X es la única función f_X tal que

$$\mathbb{P}(X\in E)=\int_E f_X(x)\,dx$$

Algunas distribuciones continuas importantes…

V. Distribuciones Conjuntas y Marginales

VI. Esperanza, Varianza y Covarianza

Esperanza

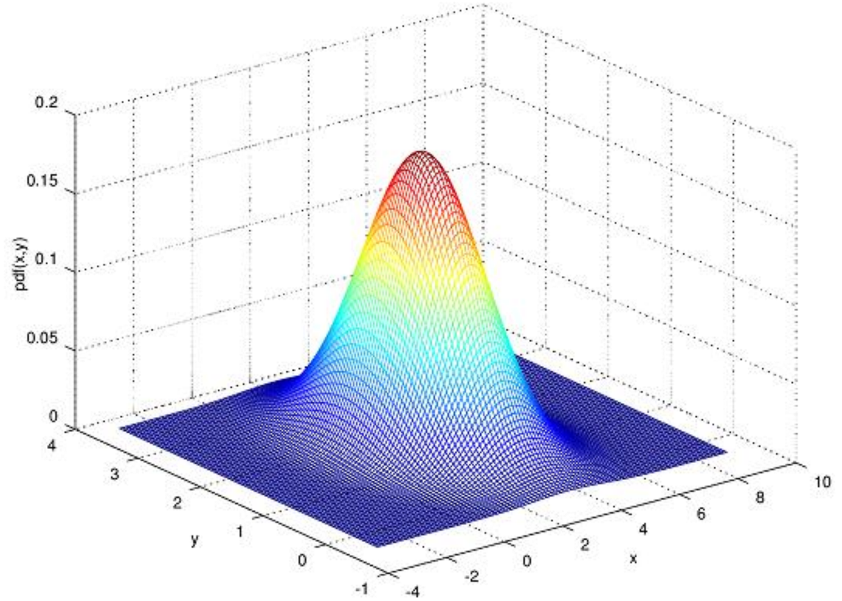
Ejemplos I: Bernoulli

Ejemplo 2: Binomial

Ejemplo 3: Exponencial

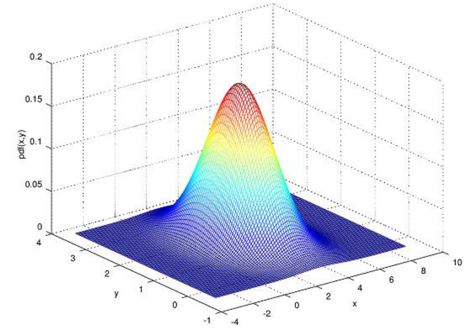
Varianza y Covarianza

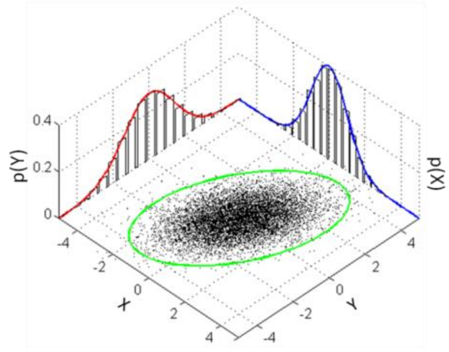
Correlación



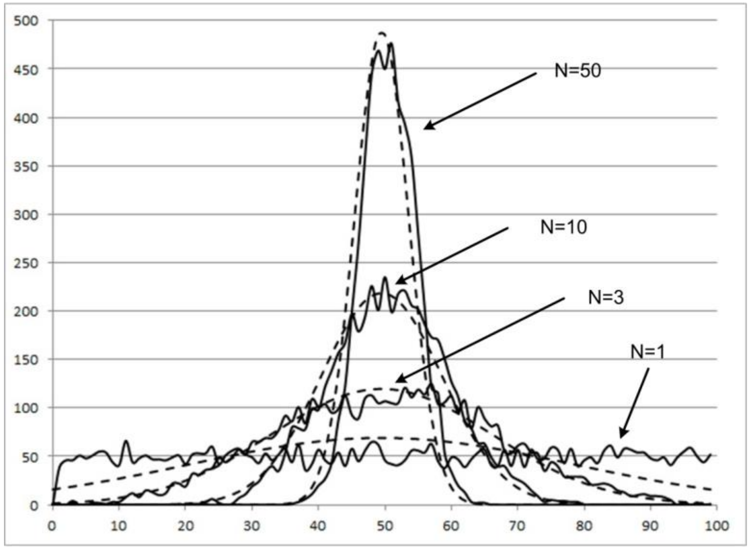
VII. Distribución Normal Multivariada

“Forma” y Marginales





VIII. Ley de los Grandes Números



IX. Teorema Central del Límite