Probabilidad

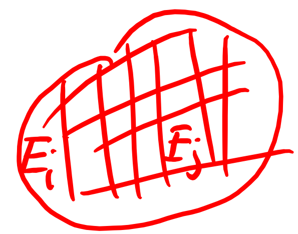
Clase 11 Curso Propedéutico
2017/06/28

Conceptos de probabilidad para variables aleatorias

- Marginalización
- Probabilidad condicional
- Ley de proba total
- Teorema de Bayes

Marginalización

Con eventos: $\{E_i\}$ partición de Ω



$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap E_i)$$

con v.a. X, Y v.a's

discreto (masas)

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_i \underbrace{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{\text{conjunta}}$$

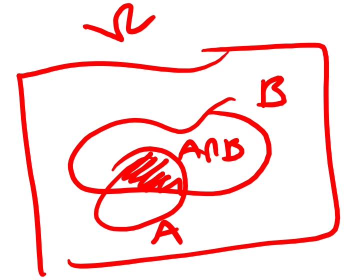
continuo (densidades)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_{X,Y}}_{\text{conjunta}}(x,y)\,dy$$

2) Proba condicional

eventos

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$



Con X, Y v.a.:

	Y discreta	Y continua
X discreta	$\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$	$\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = ?$
X cont	$f_X(x \mid Y=y) = ?$	$f_{X\mid Y}(x \mid Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

?: Tarea

Ejemplo:

- La hora de llegada de ~~Mauricio~~ a dar clase depende de varios factores, por ejemplo:

  a) lluvia
  b) tráfico
  c) jefe o novia psicópatas

Vamos a suponer solo el factor (c).

- Novia o jefe tienen proba 20% de estar en modo "psycho".

$$\text{Psycho} \sim \text{Bernoulli}(0.2)$$

- Si "n o j" están en modo Psycho entonces Mauricio llega en promedio a las 6:30 con desviación ± 10 min
- Si no están en psycho llega 6:15 con desviación ± 5 min
- Podemos suponer normalidad

$$\text{Llegada} \mid \text{Psycho} \sim \begin{cases} N(6{:}30, 10^2) & \text{si Psycho} = 1 \\ N(6{:}15, 5^2) & \text{si Psycho} = 0 \end{cases}$$

Problema A

¿ $\mathbb{P}(\text{Llegada} \in [6{:}15, 6{:}25], \text{Psycho} = 1)$?

R: $\mathbb{P}(\text{Ll} \in [6{:}15, 6{:}25], \text{Psycho} = 1)$

$$= \mathbb{P}(\text{Ll} \in (6{:}15, 6{:}25) \mid \text{Psycho} = 1)\, \mathbb{P}(\text{Psycho} = 1)$$

$$= \text{"Prob de una normal"} * 0.20$$

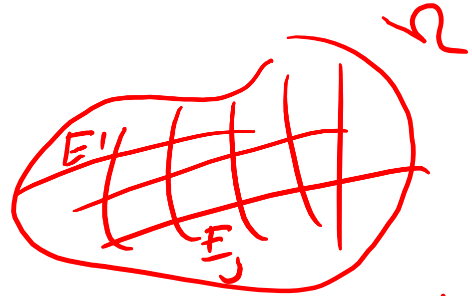
$$= 0.20 \int_{6:15}^{6:25} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, 10^2}}\, e^{-\frac{1}{2\cdot 10^2}(x - 6{:}30)^2}\, dx$$

Problema B (Huele a prob total o marginalización)

$\mathbb{P}(\text{Llegada} \in [6{:}20, 6{:}40])$?

$$\mathbb{P}(\text{Ll} \in (6{:}20, 6{:}40)) = \mathbb{P}(\text{Ll} \in (6{:}20, 6{:}40), \text{Psycho} = 1) + \mathbb{P}(\text{Ll} \in (6{:}20, 6{:}40), \text{Psycho} = 0)$$

3) Ley de prob total



Eventos

$\{E_i\}$ partición de Ω : $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ $\quad \bigcup_i E_i = \Omega$

entonces $$P(A) = \sum_i P(A \mid E_i) P(E_i)$$

Con X, Y vas

	Y discreta	Y cont.
X discreta	$\mathbb{P}(X=x) = \sum_i \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) * \mathbb{P}(Y=y)$	?
X cont	?	$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X\mid Y}(x \mid Y=y) f_Y(y)$

4) Teorema de Bayes

Eventos

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)}$$

$\{E_i\}$ partición

$$\mathbb{P}(E_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|E_i)\,\mathbb{P}(E_i)}{\sum_i \mathbb{P}(B|E_j)\,\mathbb{P}(E_j)}$$

Variables

X, Y discreta

$$\mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(Y=y|X=x)\,\mathbb{P}(X=x)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \frac{\mathbb{P}(Y=y|X=x)\,\mathbb{P}(X=x)}{\sum_j \mathbb{P}(Y=y|X=j)\,\mathbb{P}(X=j)}$$

X, Y continua

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f_{Y|X}(y|X=x)\,f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|X=x)\,f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(y|X=s)\,f_X(s)\,ds}$$