Álgebra Lineal

Clase 5 Curso Propedéutico

2016/06/13

ITAM

Determinantes

Continuamos con la interpretación geométrica y definición oficial:

Si $A \in R_{n \times n}$:

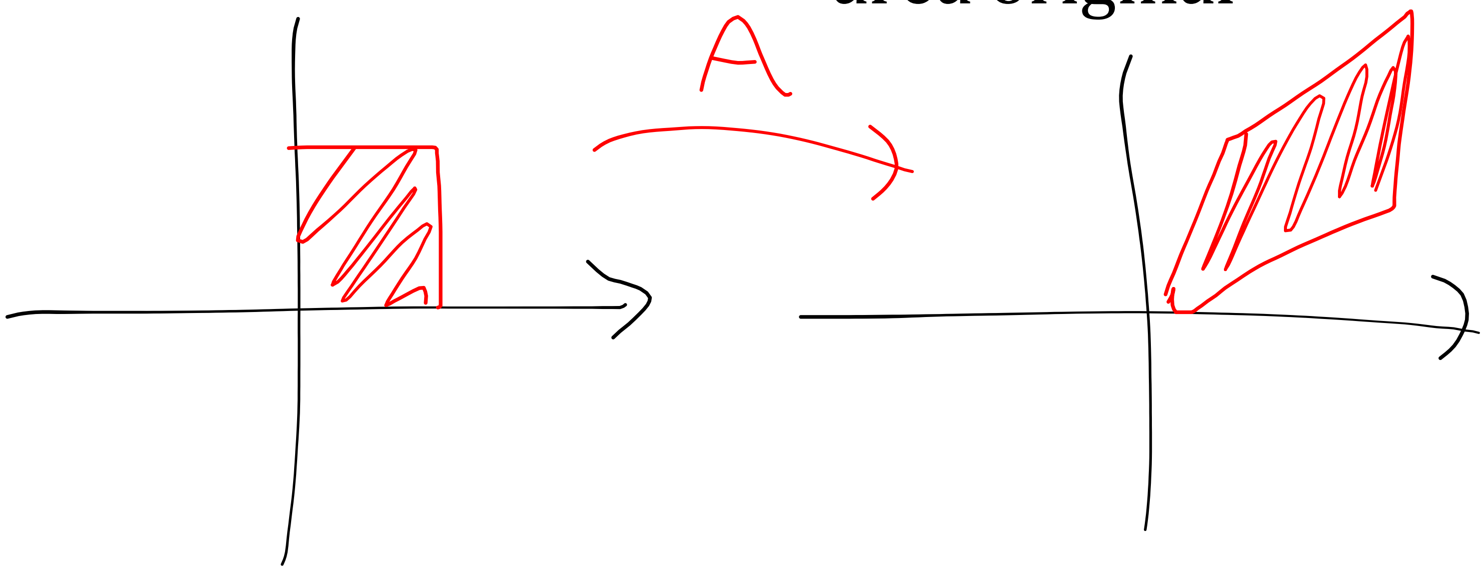
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(1,\ldots,n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

(no se espanten todavía)

Interpretación Geométrica

- Nos gustaría llegar a que el determinante es la distorsión del volumen/área tras aplicar la transformación

$$\det(A) = \frac{\text{nueva área}}{\text{área original}}$$



- Una observación: los volúmenes pueden ser negativos!! (*si se cambia la "orientación" de los ejes*)

- *Ej:* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \underline{-1}$$

- Primero veamos que pasa si la matriz es diagonal

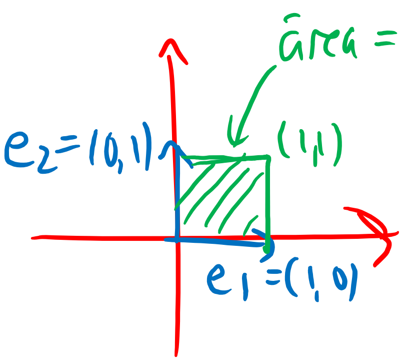
$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

- La formula del determinante se reduce a

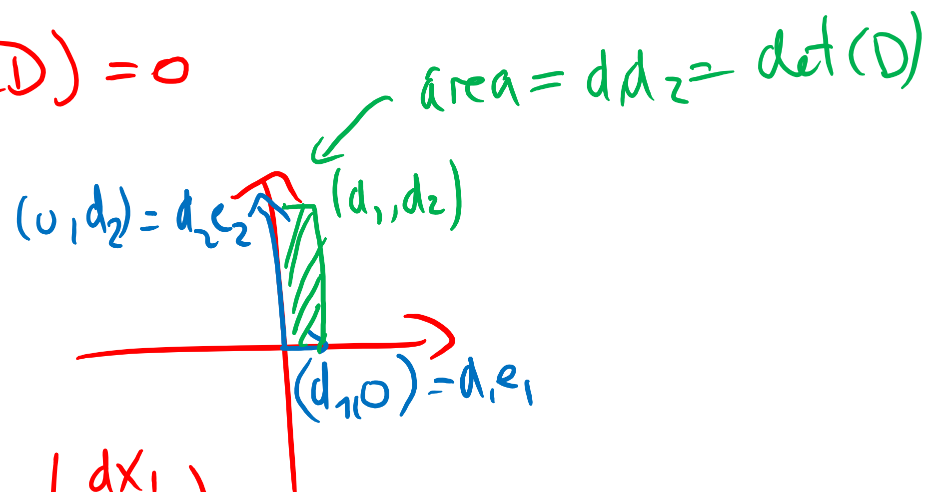
$$\det(D) = \prod d_i = d_1 \times \cdots \times d_n$$

- En este caso es fácil ver que el determinante es el cambio en el volumen.

Si algún $d_i = 0 \Rightarrow \det(D) = 0$



$x \longmapsto Dx$



$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

Determinantes e invertibilidad

- Una matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

- Las matrices invertibles se llaman también **no singulares.**

Propiedades determinantes

$$\det(A) = \frac{\text{Área}(A(E))}{\text{Área}(E)}$$

- $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\det(B) = \frac{\text{Área}(B(F))}{\text{Área}(F)}$$

$$\det(AB) = \frac{\text{Área}(A(B(F)))}{\text{Área}(F)} = \frac{\text{Área}(A(B(F)))}{\text{Área}(B(F))} \frac{\text{Área}(B(F))}{\text{Área}(F)} = \det(A)\det(B)$$

- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

$AA^{-1} = I \quad \det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1})$

$\det(I) = 1$

- $\det(A^{\top}) = \det(A)$

Se cumple para el caso diagonal pues D diagonal $\Rightarrow D^{T} = D$

Créanme que es suficiente

Matrices Ortogonales

- En álgebra lineal nos gusta trabajar con matrices "bonitas". Las más bonitas suelen ser o diagonales u ortogonales.
- Una matriz ortogonal tiene TODAS sus columnas ortonormales =(ortogonal + vectores de norma uno)

$A = [A^1 | \cdots | A^n]$

$\langle A^i, A^j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

ej: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

- Las matrices ortogonales son sus propias inversas!

si transpuesta

$A^T A = \begin{bmatrix} A^1 \\ \hline \vdots \\ \hline A^n \end{bmatrix} [A^1 | \cdots | A^n] = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle A^i, A^j \rangle & \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{I_n}$

$AA^T = I_n$

Geometría de las matrices ortogonales

- Las matrices ortogonales preservan la norma de los vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = \det(A^T) \\ \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})} \end{array}\right\} \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

- Más aún, ¡preservan volúmenes!

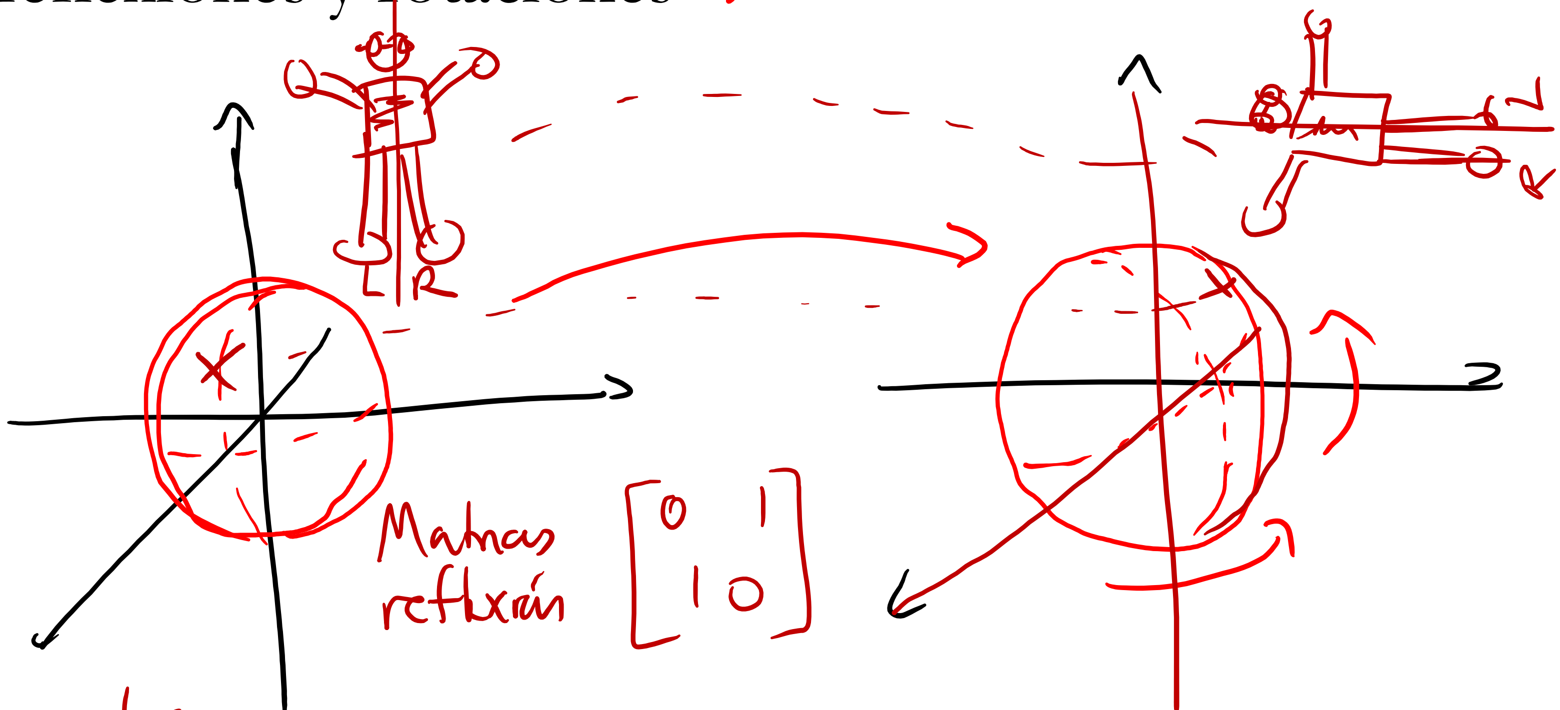
$$A^j = A e_j$$

Si todos A_j tienen $\|A_j\| = 1 \Rightarrow$ todos los vectores canónicos preservan su longitud!

$$\langle A^i, A^j\rangle = \|A^i\| \, \|A^j\| \cos(\angle(A^i, A^j)) = \cos(\angle(A^i, A^j))$$

$\langle A^i, A^j\rangle = 0 \Rightarrow \angle(A^i, A^j) = \pi/2 \Rightarrow$ se preserva el ángulo entre canónicos

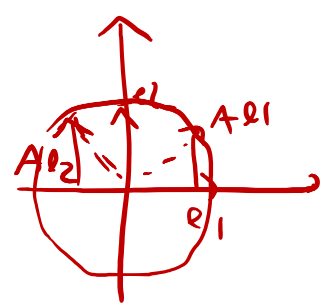
- Todas las matrices ortogonales están hechas de reflexiones y rotaciones



Matriz reflexión $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplos

Matrices de rotación en $\mathbb{R}^2$ $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



Por fin... La SVD!

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Dada $A \in R_{m \times n}$, existe una descomposición de la forma:

$A = U \Sigma V^T$

con :

U matriz ortogonal de $m \times m$

V matriz ortogonal de $n \times n$

Σ una matriz de $m \times n$ "casi" diagonal salvo por el excedente de dimensiones y con diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$

Σ

$m > n$ $$\left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \sigma_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$m < n$ $$\left[\begin{array}{cc|ccc} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Dada $A \in R_{m \times n}$, existe una descomposición de la forma:

$A = U\Sigma V^T$

con :

U matriz ortogonal de $m \times m$

V matriz ortogonal de $n \times n$

Σ una matriz de $m \times n$ "casi" diagonal salvo por el excedente de dimensiones y con diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$

Esencialmente dice que toda transformación lineal es una rotación + redimensión de los ejes canónicos + rotación.