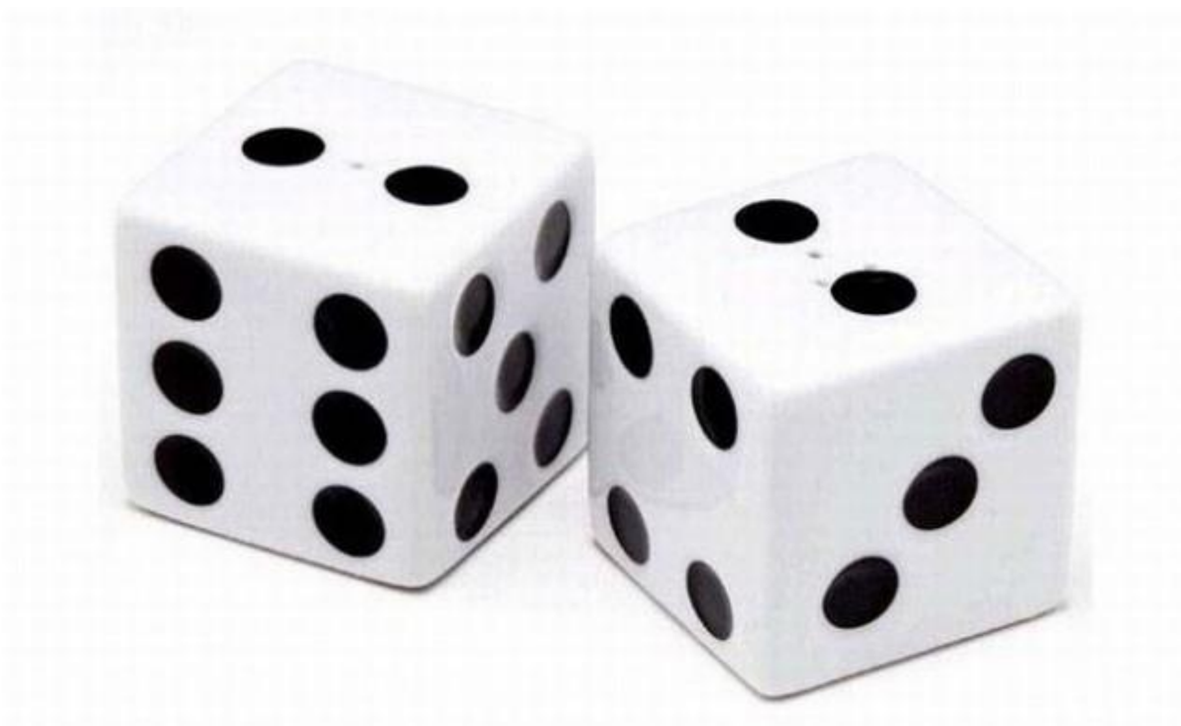
Probabilidad

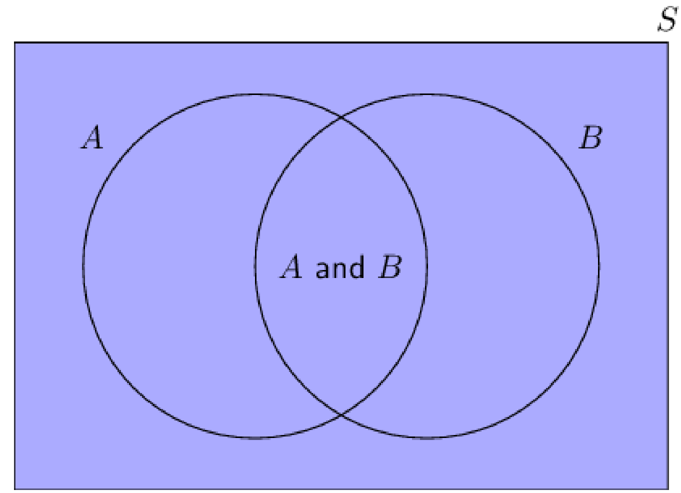
Clase 9 Curso Propedéutico

2017/06/26



I. Axiomas de Probabilidad

Eventos



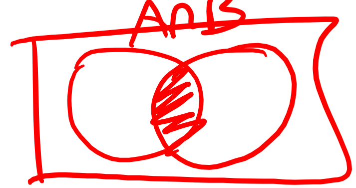
- La proba cuantifica incertidumbre de la ocurrencia de eventos

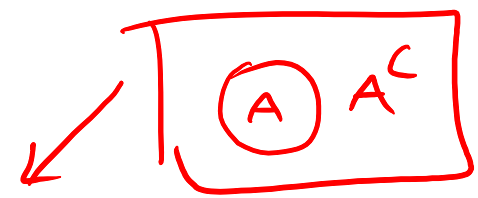
¿Qué es un evento?

1) Son conjuntos de posibles experimentos / observaciones
2) Unión de eventos sea un evento
   (La unión matemática es un "ó" de la lógica")
3) Intersección de eventos debe ser eventos: (el "y" lógico)

$A \cup B$

$A \cap B$



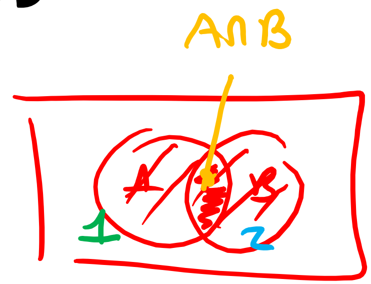


4) Si algo es un evento, su negación también

~~Propiedades de los Eventos~~

1) Ejercicio

Demostrar $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Dem

$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

$= P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap B^c$ $\qquad$ $B \cap A^c$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

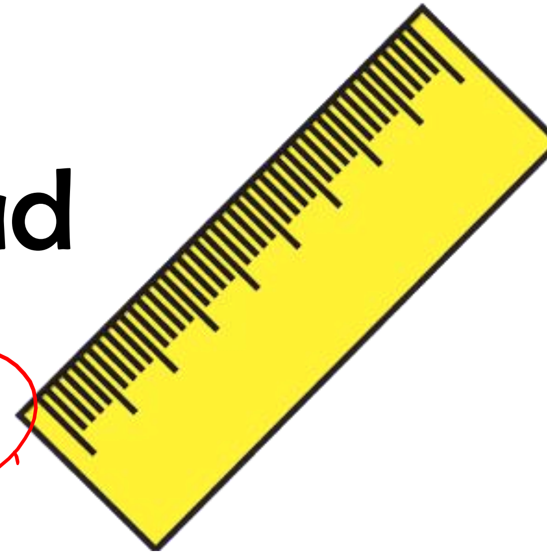
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c)$

2) $P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(Kolmogorov)

Medidas de probabilidad



Una medida de probabilidad es una función

$$\text{Eventos} \xrightarrow{\text{medida de proba}} \text{Valores en } [0,1]$$

$P : \text{Eventos} \to [0,1]$ que cumple:

1) $P(\text{unión de todos los eventos}) = P(\Omega) = 1$ (normalización)

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

3) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Ejemplos

- El clásico: lanzamientos de monedas…

$\Omega = \{ \text{águila}, \text{sol} \}$ experimentos

Eventos: $\{\text{águila}\}$, $\{\text{sol}\}$, $\underbrace{\{\text{águila}, \text{sol}\}}_{}$ Ω, $\{ \}$ $\emptyset$

Probas	$1/2$	$1/2$	1	0

Probabilidad Condicional

Condicionar a un evento B es sustituir el universo Ω por B.

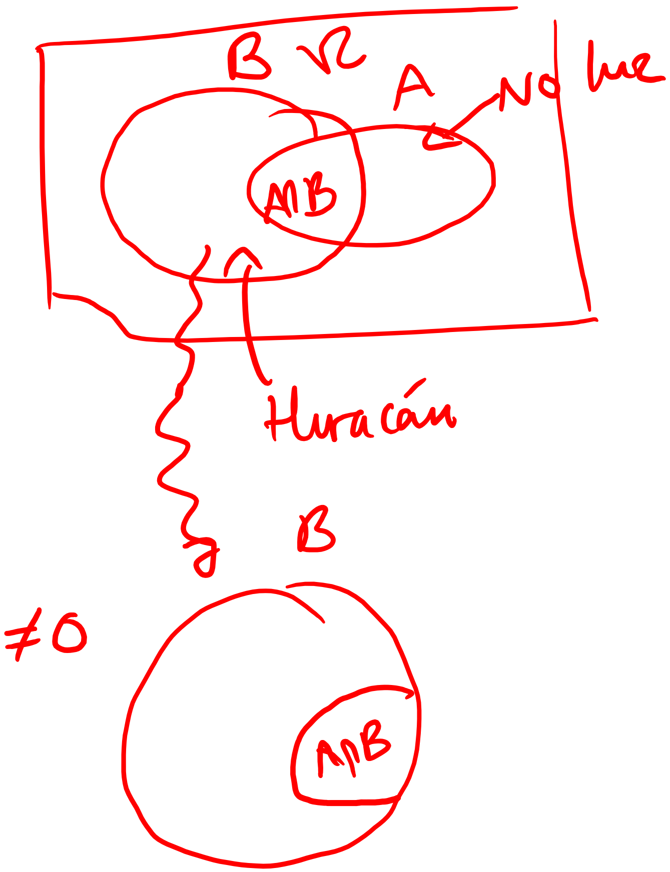
"Es pensar que B es el universo"

Notación: Prob de A dado B

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"dado"

Para que tenga sentido necesitamos $P(B) \neq 0$



Ejemplo:

- Se entrevistan 100 personas

	Cáncer	No Cáncer
Fumar	9	8
No Fumar	3	80

- Fumadores y cáncer

- $P(\text{Fumar}) = (9+8)/100 = \frac{17}{100}$
- $P(\text{No Fumar}) = 1 - \frac{17}{100} = \frac{83}{100}$
- $P(\text{cáncer}) = \frac{9+3}{100} = \frac{12}{100}$
- $P(\text{No cáncer}) = \frac{88}{100}$

- $P(\text{Cáncer} \mid \text{Fumar}) = \frac{9}{9+8} = \frac{C \cap F}{F}$
- $P(\text{No cáncer} \mid \text{Fumar}) = 8/(9+8)$

$\}$ $+ = 1$

- $P(\cancel{\text{cáncer}} \mid \text{No Fumar}) = 3/(80+3)$
- $P(\text{No cáncer} \mid \text{No Fumar}) = 80/(80+3)$

$\}$ $+ = 1$

Independencia ($\neq$ Excluyente)

- En el ejemplo anterior Fumar y Cáncer no son independientes, y vimos que $P(\text{cáncer}) \neq P(\text{cáncer} \mid \text{No fumar})$

Vamos a abstraer la propiedad de independencia

<u>def</u> (Independencia entre eventos)

A indep de B si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

¿de dónde viene la definición?

$$P(A \cap B) \overset{①}{=} P(A \mid B)P(B) \overset{②}{=} P(B \mid A)P(A)$$

Sustituyendo ①: $P(\cancel{A})P(\cancel{B}) = P(A \mid B)P(\cancel{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \mid B)$

" ② $P(\cancel{A})P(B) = P(B \mid A)P(\cancel{A}) \Rightarrow \underbrace{P(B) = P(B \mid A)}_{\text{saber una ~~no cambia~~ el conocimiento de la otra}}$

Ejemplo: experimentos independientes

Monedas ✓

$\boxed{\text{Dado}}$

¿Probabilidades de tirar dados en orden, y que el primero sea par y el segundo ≥ que 5?

$$P(\text{dado 1 par}) = P(\{2,4,6\}) = 1/2$$

$$P(2 \geq 5?) = P(\{5,6\}) = 1/3$$

$$P(\text{Evento 1} \cap \text{Evento 2}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

No independencia

- Fumadores y cáncer nuevamenete….

	C	NC
F	9	8
NF	3	80

$P(F) = 17/100$

$P(NF) = 83/100$

$P(C) = 12/100$

$P(NC) = 88/100$

Si fumar y tener cancer fuera independiente

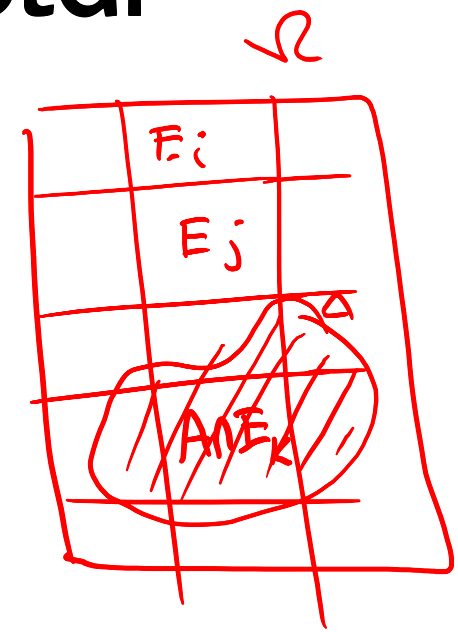
$P(C \mid F) = \cancel{P(C)} = 12/100$ y $\cancel{P(C \cap F) = \frac{(12)(17)}{10000}}$

Pero $P(C \mid F) = P(C \cap F) / P(F) = 9/17$ y $P(C \cap F) = \frac{9}{100}$

Ley de Probabilidad Total

Una partición del universo Ω es una colección de eventos $\{E_i\}$ tal que

$$\bigcup_i E_i = \Omega \text{ y } E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$$



$$P(A) = P\Big(\bigcup_i (A \cap E_i)\Big)$$

(Kolmogorov 2)

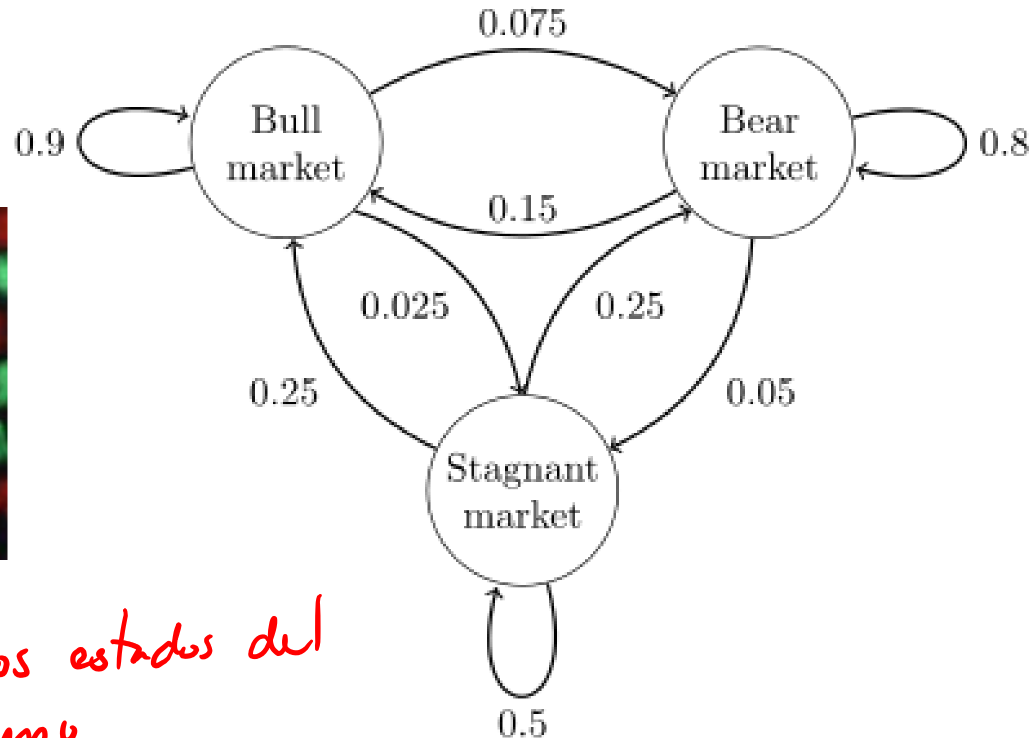
$$= \sum_i P(A \cap E_i)$$

(Proba condicional)

$$= \sum_i P(A \mid E_i) P(E_i)$$

<u>LPT</u>: $P(A) = \sum_i P(A \mid E_i) P(E_i)$ para una partición $\{E_i\}$

Ejemplo:



$X_1, X_2, X_3, \ldots$ son los estados del mercado en el tiempo

En el diagrama se muestra $P(X_{t+1}=j \mid X_t = i) = p_{ij}$

origen/destino

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} S & \text{Bear} & \text{Bull} \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ \text{Bear} \\ \text{Bull} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.05 & 0.8 & 0.15 \\ 0.025 & 0.075 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Supuesto:

$$P(X_{t+1}=j \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t)$$
$$= P(X_{t+1}=j \mid X_t = x_t)$$

El futuro solo depende del presente (Markov)

Ejercicio 2:

Proba de transición después de 2 días

(Entregar en papel)

- Calcular $\underbrace{P(X_2 = \text{Bear} \mid X_0 = \text{Bull})}$

Hint: Usar ley de proba total y la partición es $E_1 = \{\text{Stagnant}\}$ $E_2 = \{\text{Bear}\}$ $E_3 = \{\text{Bull}\}$