ejer186

Sergio Vargas

5/2/2021

Problema 8.2

Un marco para analizar el aplanamiento excesivo. Suponga que C_t es igual a $\left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right]$, y que $A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t)$.

Inciso a)

Demuestre que estos supuestos implican que $E_t[C_{t+1}] = C_t$(y que por tanto, el consumo exhibe un comportamiento aleatorio) y que $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_t[Y_{t+s}]}{(1+r)^s}$.

$$E_t[C_{t+1}] = E_t\left[\left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_{t+1} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_{t+1}(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right]\right] \tag{1}$$

Sustituyendo A_{t+1}

$$E_t[C_{t+1}] = E_t\left[\left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[(1+r)(A_t + Y_t - C_t) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_{t+1}(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right]\right] \tag{2}$$

Sustituyendo C_t

$$E_t[C_{t+1}] = E_t\left[\left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[(1+r)\left(A_t + Y_t - \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right]\right) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_{t+1}(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right]\right] \tag{3}$$

Desarrollando

$$E_t[C_{t+1}] = E_t\left[\left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[(1+r)A_t + (1+r)Y_t - rA_t - r\sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_{t+1}(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right]\right] \tag{4}$$

Sacando la constante del valor esperado y separando el primer factor de la primera suma.

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right] E_t\left[A_t + (1+r)Y_t - rY_t - r\sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_{t+1}(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right] \tag{5}$$

Usando propiedades del valor esperado nos queda.

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + Y_t - r\sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_t(Y_{t+1+s})}{(1+r)^s}\right] \tag{6}$$

Desarrollando las sumas.

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + Y_t - r\left(\frac{E_t(Y_{t+1})}{(1+r)} + \frac{E_t(Y_{t+2})}{(1+r)^2} + ...\right) + E_t(Y_{t+1}) + \frac{E_t(Y_{t+2})}{(1+r)} + \frac{E_t(Y_{t+3})}{(1+r)^2} + ...\right] \tag{7}$$

Reordenando términos y factorizando.

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + Y_t + \left(1 - \frac{r}{1+r}\right)E_tY_{t+1} + \left(\frac{r}{1+r} - \frac{r}{(1+r)^2}\right)E_tY_{t+2} + ...\right] \tag{8}$$

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + Y_t + \frac{E_tY_{t+1}}{(1+r)} + \frac{E_tY_{t+2}}{(1+r)^2} + ...\right] \tag{9}$$

Escribiéndolo como suma.

$$E_t[C_{t+1}] = \left[\frac{r}{(1+r)}\right]\left[A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_tY_{t+s}}{(1+r)^s}\right] \tag{10}$$

Veamos que el término de la derecha es C_t, remplazando nos queda.

$$E_t[C_{t+1}] = C_t \tag{11}$$

Inciso b)

Suponga que $\Delta Y_t = \phi\Delta Y_{t-1} + u_t$ donde u es ruido blanco, y que Y_t excede a $E_{t-1}[Y_t]$, en una unidad (es decir, que $u_t = 1$).¿Cuánto aumentaría en este caso el consumo?

El incremento del consumo viene dado por $C_t - E_{t-1}[C_t]$ donde:

$$E_{t-1}[C_t] = E_{t-1}\left[\frac{r}{(1+r)}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right)\right] \tag{12}$$

$$E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}E_{t-1}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) \tag{13}$$

$$E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(E_{t-1}[A_t] + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_{t-1}[E_t(Y_{t+s})]}{(1+r)^s}\right) \tag{14}$$

Como $A_t = (1+r)[A_{t-1} + Y_{t-1} - C_{t-1}]$ solo depende de variables en el periodo $t-1$ entonces el valor esperado de A_t en el periodo $t-1$ es A_t, además por la ley de las proyecciones iteradas $E_{t-1}[E_t(Y_{t+s})] = E_{t-1}(Y_{t+s})$

$$E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_{t-1}(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) \tag{15}$$

Entonces

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) - \frac{r}{(1+r)}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_{t-1}(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) \tag{16}$$

Factorizando

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(A_t + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_t(Y_{t+s})}{(1+r)^s} - A_t - \sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_{t-1}(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) \tag{17}$$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_t(Y_{t+s}) - E_{t-1}(Y_{t+s})}{(1+r)^s}\right) \tag{18}$$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left([Y_t - E_{t-1}Y_t] + \left[\frac{E_tY_{t+1} - E_{t-1}Y_{t+1}}{1+r}\right] + \left[\frac{E_tY_{t+2} - E_{t-1}Y_{t+2}}{(1+r)^2}\right] + ...\right) \tag{19}$$

Sabemos por el enunciado que $\Delta Y_t = \phi\Delta Y_{t-1} + u_t$ entonces:

$$E_t(Y_t) - E_{t-1}(Y_t) = \phi[E_t(Y_{t-1}) - E_{t-1}(Y_{t-1})] + u_t \tag{20}$$

$$Y_t - E_{t-1}(Y_t) = \phi[Y_{t-1} - Y_{t-1}] + u_t \tag{21}$$

Sabemos por el enunciado que $Y_t - E_{t-1}(Y_t) = 1$ entonces:

$$Y_t - E_{t-1}(Y_t) = 1 = u_t \tag{22}$$

Desarrollando $\Delta Y_{t+1} = \phi\Delta Y_t + u_{t+1}$

$$E_t(Y_{t+1}) - E_{t-1}(Y_{t+1}) = \phi[E_t(Y_t) - E_{t-1}(Y_t)] + u_t \tag{23}$$

Sustituyendo

$$E_t(Y_{t+1}) - E_{t-1}(Y_{t+1}) = \phi + 1 \tag{24}$$

Análogamente para ΔY_{t+2}

$$E_t(Y_{t+2}) - E_{t-1}(Y_{t+2}) = \phi[E_t(Y_{t+1}) - E_{t-1}(Y_{t+1})] + u_{t+2} = \phi(\phi+1) + 1 = \phi^2 + \phi + 1 \tag{25}$$

De donde podemos inferir el patrón que se sigue y lo sustituimos en $C_t - E_{t-1}[C_t]$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(1 + \left[\frac{\phi+1}{1+r}\right] + \left[\frac{\phi^2+\phi+1}{(1+r)^2}\right] + ...\right) \tag{26}$$

Factorizando

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{(1+r)}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s} + \phi\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s} + \phi^2\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s} + ...\right) \tag{27}$$

haciendo $h = \frac{1}{1+r}$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = rh\left(\sum_{s=0}^{\infty}h^s + \phi\sum_{s=1}^{\infty}h^s + \phi^2\sum_{s=2}^{\infty}h^s + ...\right) \tag{28}$$

Las series convergen a:

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = rh\left(\frac{1}{1-h} + \frac{\phi h}{1-h} + \frac{\phi^2 h^2}{1-h} + ...\right) \tag{29}$$

Factorizando

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{rh}{1-h}\left(1 + \phi h + \phi^2 h^2 + ...\right) \tag{30}$$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{rh}{1-h}\sum_{j=0}^{\infty}(\phi h)^j \tag{31}$$

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{rh}{1-h}\frac{1}{1-\phi h} \tag{32}$$

Recuperando $h = \frac{1}{1+r}$ nos queda

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{r}{1-\frac{1}{1+r}}\frac{1}{1+r}\frac{1}{1-\phi\frac{1}{1+r}} \tag{33}$$

Finalmente obtenemos

$$C_t - E_{t-1}[C_t] = \frac{1+r}{1+r-\phi} \tag{34}$$

Inciso c)

En el caso de que $\phi > 0$, ¿cual variable tiene una mayor varianza, la innovación en el ingreso u_t o la innovación en el consumo $C_t - E_{t-1}[C_t]$? ¿Acudirían los consumidores de este modelo al ahorro o al endeudamiento con el fin de suavizar las oscilaciones del consumo? Explique su respuesta.

$$var[C_t - E_{t-1}(C_t)] = var\left[\frac{1+r}{1+r-\phi}\right] = var\left[\frac{1+r}{1+r-\phi}u_t\right] \tag{35}$$

Comparando las varianzas:

$$var[C_t - E_{t-1}(C_t)] = \left[\frac{1+r}{1+r-\phi}\right]^2 var(u_t) > var(u_t) = var[Y_t - E_{t-1}(Y_t)] \tag{36}$$

Como $\frac{1+r}{1+r-\phi} > 0$ entonces la varianza de la innovación en el consumo es mayor que la varianza en la innovación en el ingreso.

Como el agente tiene menos incertidumbre sobre su ingreso que sobre su consumo este optara por utilizar el ahorro y endeudamiento para suavizar su trayectoria de consumo