Macroeconomía II

Tarea 1: Consumo

Germán Augusto Campos Ortiz* Marcos Ehekatzin García Guzmán†

Magdaleno Mendoza del Toro‡ Sergio Arturo Vargas Magaña§

Contenido

*gacampos@colmex.mx

†marcgarcia@colmex.mx

‡mamendoza@colmex.mx

§sevargas@colmex.mx

Ejercicios teóricos

Ejercicio 8.5

(a) Find the Euler equation relating C_t to expectations concerning C_{t+1}.

Para encontrar la ecuación de Euler es necesario tener en cuenta el problema de maximización del consumidor:

$$\max_{C_t} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{(C_t)^{-\theta}}{(1-\theta)} \quad \text{s.a.} \quad A_0 + E[\sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t}{(1+r)^t}] = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{1}$$

Que se resume en la resolución del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{(C_t)^{-\theta}}{(1-\theta)} + \lambda[A_0 + E[\sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t}{(1+r)^t}] - \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}] \tag{2}$$

Obteniendo la condición de primero orden para C_t:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} - \frac{\lambda}{(1+r)^t} = 0 \tag{3}$$

Lo anterior implica que $\lambda = [\frac{1+r}{1+\rho}]^t C_t^{-\theta}$ para cualquier periodo t. Tomando los periodos t y $t+1$ obtenemos e igualando λ obtenemos:

$$[\frac{1+r}{1+\rho}]^t C_t^{-\theta} = [\frac{1+r}{1+\rho}]^{t+1} C_{t+1}^{-\theta} \quad \forall \quad t = 1, 2, ..., T-1 \tag{4}$$

Lo que resulta en:

$$\frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} = \frac{1+r}{(1+\rho)^{t+1}} C_{t+1}^{-\theta} \quad \forall \quad t = 1, 2, ..., T-1 \tag{5}$$

Para obtener la ecuación de Euler es útil suponer descenso en el nivel de consumo en el periodo t de dC. Dicho descenso provocaría una reducción de la utilidad de $C_t^{\theta} dC$.

Si el consumidor es un agente maximizador se espera que la reducción de la utilidad en el periodo t sea contrarrestada por un aumento en la utilidad esperada en el siguiente periodo, de tal forma que:[1]

$$C_t^{\theta} dC = (1+\rho) E_t[(1+r) C_{t+1}^{-\theta} dC] \tag{6}$$

Por lo que la ecuación de Euler resultante es: [2]

$$C_t^{\theta} = \frac{1+r}{1+\rho} E_t[C_{t+1}^{-\theta}] \tag{7}$$

(b) Suppose that the log of income is distributed normally, and that as a result the log of C_{t+1} is distributed normally: let σ^2 denote its variance conditional on information available at time t. Rewite the expression in part (a) in terms of lnC_t, $E_t[lnC_{t+1}]$, σ^2, and the parameters r, ρ, and θ.

---

[1] Derivado de la ecuación 5 se sabe que el consumidor espera consumir en el periodo $t+1$ hasta que se cumpla $\frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} = \frac{1+r}{(1+\rho)^{t+1}} C_{t+1}^{-\theta}$.

[2] Para este resultado se necesita que la tasa de interés nosean una variable aleatoria. Además es útil recordar que el cambio dC en t y t_1 es igual si el agente es maximizador.

Usando el *hint* de la pregunta (si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $E[x] = e^{\mu}e^{V/2}$) y sustituyendo $x = lnCt + 1^{-\theta}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} E[e^{lnC_{t+1}^{-\theta}}] &= [e^{E[-\theta lnC_{t+1}]}e^{Var[-\theta lnC_{t+1}]/2}] \\ &= e^{-\theta E[lnC_{t+1}]}e^{\theta^2\sigma^2/2} \end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación 8 en la ecuación 7 y aplicándole logaritmos a ambos lados tenemos:

$$\begin{aligned} -\theta lnC_t &= ln[\frac{1+r}{1+\rho}] - \theta E[lnC_{t+1}] \\ &= ln(1+r) - ln(1+\rho) - \theta E[lnC_{t+1}] + \theta^2\frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

Dividiendo ambos lados entre $-\theta$ se obtiene:

$$lnC_t = -\frac{ln(1+r) - ln(1+\rho)}{\theta} + E[lnC_{t+1}] - \theta\frac{\sigma^2}{2} \tag{10}$$

(c) Show that if r and σ^2 are constant over time, the result in (b) implies that the log of consumption follows a random walk with drift: $lnC_t = a + lnC_t + u_{t+1}$, where u is white noise.

Reordenando la ecuación 10:

$$E[lnC_{t+1}] = lnC_t + \frac{ln(1+r) - ln(1+\rho)}{\theta} + \theta\frac{\sigma^2}{2} \tag{11}$$

En la ecuación 11 podemos ver que, gracias a que la varianza y θ son constantes a través del tiempo, se espera que el consumo del periodo $t+1$ variará en una cantidad constante $lnC_t + \frac{ln(1+r)-ln(1+\rho)}{\theta} + \theta\frac{\sigma^2}{2}$ para cualquier $t = 1, 2, ...$

Incluyendo un término de error ϵ_t tal que $E[\epsilon_t] = 0$ la ecuación resultante es:

$$E[lnC_{t+1}] = lnC_t + \frac{ln(1+r) - ln(1+\rho)}{\theta} + \theta\frac{\sigma^2}{2} + \epsilon_t \tag{12}$$

Que tiene la forma de una caminata aleatoria con deriva, en donde el término $lnC_t + \frac{ln(1+r)-ln(1+\rho)}{\theta} + \theta\frac{\sigma^2}{2}$ es el componente de deriva (a).

(d) How do changes in each r and σ^2 affect the expected consumption growth in light of the discussion of precautionary saving in Section 8.6.

El aumento esperado del consumo se define como $E[C_{t+1}] - E[C_t]$, por lo que de la ecuación 11 obtenemos

$$E[lnC_{t+1}] - lnC_t = \frac{ln(1+r) - ln(1+\rho)}{\theta} + \theta\frac{\sigma^2}{2} \tag{13}$$

Derivando 13 con respecto a r se obtiene:

$$\frac{\partial[E[lnC_{t+1}] - lnC_t]}{\partial r} = \frac{1}{\theta(1+r)} > 0 \tag{14}$$

La ecuación 14 indica que a una mayor tasa de interés el crecimiento esperado del consumo también será mayor. Además, entre mayor sea la elasticidad intertemporal del consumo (θ) el crecimiento del consumo esperado será menor.

Por otra parte, drivando 13 con respecto a σ^2 se obtiene:

$$\frac{\partial[E[lnC_{t+1}] - lnC_t]}{\partial\sigma^2} = \frac{\theta}{2} > 0 \tag{15}$$

Ejercicios prácticos