Macroeconomía II

Tarea 1: Consumo

Germán Augusto Campos Ortiz* Marcos Ehekatzin García Guzmán†
Magdaleno Mendoza del Toro‡ Sergio Arturo Vargas Magaña§

Contenido

*gacampos@colmex.mx
†marcgarcia@colmex.mx
‡mamendoza@colmex.mx
§sevargas@colmex.mx

Ejercicios teóricos

Ejercicio 8.5

(a) Find the Euler equation relating C_t to expectations concerning C_{t+1}.

Para encontrar la ecuación de Euler es necesario tener en cuenta el problema de maximización del consumidor:

$$\max_{C_t} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{(C_t)^{-\theta}}{(1-\theta)} \quad \text{s.a.} \quad A_0 + E[\sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t}{(1+r)^t}] = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{1}$$

Que se resume en la resolución del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{(C_t)^{-\theta}}{(1-\theta)} + \lambda[A_0 + E[\sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t}{(1+r)^t}] - \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}] \tag{2}$$

Obteniendo la condición de primero orden para C_t:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} - \frac{\lambda}{(1+r)^t} = 0 \tag{3}$$

Lo anterior implica que $\lambda = [\frac{1+r}{1+\rho}]^t C_t^{-\theta}$ para cualquier periodo t. Tomando los periodos t y $t+1$ obtenemos e igualando λ obtenemos:

$$[\frac{1+r}{1+\rho}]^t C_t^{-\theta} = [\frac{1+r}{1+\rho}]^{t+1} C_{t+1}^{-\theta} \quad \forall \quad t = 1, 2, ..., T-1 \tag{4}$$

Lo que resulta en:

$$\frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} = \frac{1+r}{(1+\rho)^{t+1}} C_{t+1}^{-\theta} \quad \forall \quad t = 1, 2, ..., T-1 \tag{5}$$

Para obtener la ecuación de Euler es útil suponer descenso en el nivel de consumo en el periodo t de dC. Dicho descenso provocaría una reducción de la utilidad de $C_t^{\theta} dC$.

Si el consumidor es un agente maximizador se espera que la reducción de la utilidad en el periodo t sea contrarrestada por un aumento en la utilidad esperada en el siguiente periodo, de tal forma que:[1]

$$C_t^{\theta} dC = (1+\rho) E_t[(1+r) C_{t+1}^{-\theta} dC] \tag{6}$$

Por lo que la ecuación de Euler resultante es: [2]

$$C_t^{\theta} = \frac{1+r}{1+\rho} E_t[C_{t+1}^{-\theta}] \tag{7}$$

[1] Derivado de la ecuación 5 se sabe que el consumidor espera consumir en el periodo $t+1$ hasta que se cumpla $\frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} = \frac{1+r}{(1+\rho)^{t+1}} C_{t+1}^{-\theta}$.

[2] Para este resultado se necesita que la tasa de interés nosean una variable aleatoria. Además es útil recordar que el cambio dC en t y t_1 es igual si el agente es maximizador.

(b) Suppose that the log of income is distributed normally, and that as a result the log of C_{t+1} is distributed normally: let σ^2 denote its variance conditional on information available at time t. Rewite the expression in part (a) in terms of lnC_t, $E_t[lnC_{t+1}]$, σ^2, and the parameters r, ρ, and θ.

Usando el *hint* de la pregunta (si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $E[x] = e^{\mu}e^{V/2}$) y sustituyendo $x = lnCt + 1^{-\theta}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} E[e^{lnC_{t+1}^{-\theta}}] &= [e^{E[-\theta lnC_{t+1}]}e^{Var[-\theta lnC_{t+1}]/2}] \\ &= e^{-\theta E[lnC_{t+1}]}e^{\theta^2\sigma^2/2} \end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación 8 en la ecuación 7 y aplicándole logaritmos a ambos lados tenemos:

$$\begin{aligned} -\theta lnC_t &= ln[\frac{1+r}{1+\rho}]E[lnC_{t+1}] \\ = ln(1+r) - ln(1+\rho) - \theta E[lnC_{t+1}] + \theta^2\frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

Dividiendo ambos lados entre $-\theta$ se obtiene:

$$lnC_t = \frac{ln(1+r) - ln(1+\rho)}{-\theta} + E[lnC_{t+1}] + \theta\frac{\sigma^2}{2} \tag{10}$$

(c) Show that if r and σ^2 are constant over time, the result in (b) implies that the log of consumption follows a random walk with drift: $lnC_t = a + lnC_t + u_{t+1}$, where u is white noise.

(d) How do changes in each r and σ^2 affect the expected consumption growth in light of the discussion of precautionary saving in Section 8.6.