Ej181

Sergio Vargas

5/2/2021

Problema 8.1

Ahorro en el ciclo vital (Mondigliani y Brumberg, 1954). Suponga un individuo que vive de 0 a T y cuya utilidad vital viene dada por $U = \int_{t=0}^{T} u(C(t))dt$, donde $u'(\bullet) > 0$ y $u''(\bullet) > 0$. La renta de este individuo es igual a $Y_0 + gt$ cuando $0 \leq t < R$ e igual a 0 cuando $R \leq t < T$. La edad de jubilación, R, satisface que $0 < R < T$. El tipo de interés es cero, el individuo no dispone de ninguna riqueza inicial y no hay incertidumbre.

Inciso a)

¿Cuál es la restricción presupuestaria vital de este individuo?

El consumo en el tiempo de vida debe ser igual al ingreso total a lo largo de la misma, esto es:

$$\int_{t=0}^{T} C(t)dt = \int_{t=0}^{R} (Y_0 + gt)dt \tag{1}$$

Integrando del lado derecho.

$$\int_{t=0}^{R} (Y_0 + gt)dt = \left[Y_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \right]_{t=0}^{R} = RY_0 + \frac{1}{2} g R^2 \tag{2}$$

Substituyendo obtenemos la restricción presupuestaria:

$$\int_{t=0}^{T} C(t)dt = RY_0 + \frac{1}{2} g R^2 \tag{3}$$

Inciso b)

¿Qué trayectoria del consumo, $C(t)$, maximiza su utilidad?

Como $u''(\bullet) < 0$ y tanto la tasa de interés como de descuento son cero la condición de optimalidad requiere que el consumo sea constante, entonces:

$$\int_{t=0}^{T} C(t)dt = \int_{t=0}^{T} C^* dt = [C^* t]_0^T = C^* T \tag{4}$$

Sustituyendo

$$C^* T = RY_0 + \frac{1}{2} g R^2 \tag{5}$$

Despejando obtenemos el consumo

$$C^* = \frac{1}{T}\left[RY_0 + \frac{1}{2}gR^2\right] \tag{6}$$

Inciso c)

¿Qué trayectoria sigue la riqueza de este individuo en función de t?

La riqueza de un individuo en el tiempo t es igual a la suma de sus ahorros hasta ese momento, o sea:

$$W(t) = \int_0^t S(t)dt \tag{7}$$

Recordando que el ahorro es igual al ingreso menos el consumo.

$$S(t) = Y(t) - C(t) \tag{8}$$

Sustituyendo

$$S(t) = \begin{cases} Y_0 + gt - C^* & si \quad 0 \leq t < R \\ \\ -C^* & si \quad R \leq t \leq T \end{cases} \tag{9}$$

Si $0 \leq t < R$ entonces:

$$W(t) = \int_0^t (Y_0 + gt - C^*)dt = Y_0 t + gt^2 - C^* t \tag{10}$$

Si $R \leq t \leq T$ entonces:

$$W(t) = \int_0^R (Y_0 + gt - C^*)dt + \int_R^t -C^* dt \tag{11}$$

Integrando.

$$W(t) = [Y_0 t + \frac{1}{2}gt^2 - C^* t]_0^R - [C^* t]_R^t \tag{12}$$

Evaluando.

$$W(t) = Y_0 R + \frac{1}{2}gR^2 - C^* R - C^* t + C^* R = Y_0 R + \frac{1}{2}gR^2 - C^* t \tag{13}$$

Multiplicamos por un uno conveniente.

$$W(t) = \frac{T}{T}\left[RY_0 + \frac{1}{2}gR^2\right] - C^* t \tag{14}$$

Sustituimos por C^*

$$W(t) = C^* T - C^* t = C^*[T - t] \tag{15}$$

La trayectoria de la riqueza es:

$$S(t) = \begin{cases} Y_0 t + g t^2 - C^* t & si \quad 0 \leq t < R \\ \\ C^*[T - t] & si \quad R \leq t \leq T \end{cases} \tag{16}$$