احسان آقازاده / 810197668 / تمرین سری 4

سؤال 1 : (a) برای قضیه "$(1+\lambda u)_+ \geq 1(u>0)$ for all $u\in\mathbb{R}$" ، λ, u

برابر $f_i(x)$ قرار می‌دهیم $\Leftarrow$ $(1+\lambda f_i(x))_+ \geq 1(f_i(x)>0)$ for all i

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} 1(f_i(x)>0) \leq \sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+$$

constraint: $\sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+ \leq m-k \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} 1(f_i(x)>0) \leq m-k$

که این نامساوی به این معنی است که حداکثر $(m-k)$ تا از iها شرط $f_i(x)>0$ را دارند که به عبارت دیگر حداقل k تا از iها شرط $f_i(x)\leq 0$ را دارا هستند.

(b) اگر $\lambda>0$ $\Leftarrow$ $(\lambda u)_+ = \lambda(u)_+$ برای هر $u\in\mathbb{R}$

از همین قاعده استفاده می‌کنیم و نتیجه زیر را می‌گیریم

$$(1+\lambda f_i(x))_+ = \lambda\left(\tfrac{1}{\lambda} + f_i(x)\right)_+$$

حال constraint $\sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+ \leq m-k$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{\lambda}+f_i(x)\right)_+ \leq m-k$$

معادل است

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\lambda}+f_i(x)\right)_+ \leq (m-k)\frac{1}{\lambda}$$

حال $t=\frac{1}{\lambda}$ می‌گیریم و مسئله به شکل صفحه بعد بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{minimize } f_0(x)$$
$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{m} (t + f_i(x))_+ \le (m-k)\, t$$
$$t > 0$$

تابع $(\cdot)_+$ convex و nondecreasing است و $t + f_i(x)$ نیز در هر متغیر t و x

convex است $\Leftarrow$ $(t + f_i(x))_+$ convex است $\Leftarrow$ این یک مسئله convex optimization است.

$$\lambda^* = \frac{1}{t^*}$$

سؤال 2 :

$$L(x, z, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - z^T(Ax - b) - v(1^T x - 1)$$

نسبت به x مشتق گرفتیم و x این optimal به شکل زیر بدست می‌آید

$$x_k \frac{1}{x_k} + \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - a_k^T z - v = 0$$

$$x_k^* = \frac{1}{\underbrace{\sum_k y_k e^{a_k^T z}}_{Z}} y_k e^{a_k^T z}$$

حال این مقدار x را قرار می‌دهیم

$$g(z) = L(x^*, z, v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z} y_k e^{a_k^T z} \log\left(\frac{e^{a_k^T z}}{Z}\right) - z^T \left(A \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} y_1 e^{a_1^T z} \\ \vdots \\ \frac{1}{Z} y_n e^{a_n^T z} \end{bmatrix} - b \right)$$

$$g(z) = b^T z - \log Z \implies \left\{ \max_{z \in \mathbb{R}^m} b^T z - \log \sum_{k=1}^{n} y_k e^{a_k^T z} \right.$$

Scanned with CamScanner

سؤال 3 :

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\|x-a\|_2^2 + \lambda(\|x\|_1 - 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-a_k)^2}{2} + \lambda|x_k| - \lambda$$

$$g_k(\lambda) = \inf_{x_k}\left(\frac{(x_k-a_k)^2}{2} + \lambda|x_k|\right) = \begin{cases} -\lambda^2/2 + \lambda|a_k| & \lambda \le |a_k| \\ a_k^2/2 & \lambda > |a_k| \end{cases}$$

dual problem به شکل زیر می شود :

$$\text{maximize} \quad g(\lambda) = \sum_k g_k(\lambda) - \lambda$$
$$\text{subject to} \quad \lambda \ge 0$$

$$g'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \max\{|a_k|-\lambda, 0\} - 1$$

این مقدار از -1 ($\lambda \ge \max|a_k|$) تا $\|a\|_1 - 1$ است ($\lambda=0$)

اگر $\|a\|_1 \le 1$ ، g بر روی R_+ ، decreasing خواهد $\Leftarrow$ $\lambda^* = 0$

$\Rightarrow x^* = a$

اگر $\|a\|_1 > 1$ باشد آنگاه با حل معادله زیر λ را بدست خواهیم آورد :

$$\sum_{k=1}^{n} \max\{|a_k| - \lambda, 0\} = 1$$

با توجه به (1) x به شکل زیر بدست می آید

$$x^*_k = \begin{cases} 0 & \lambda \ge |a_k| \\ a_k - \lambda & \lambda < |a_k|, a_k > 0 \\ a_k + \lambda & \lambda < |a_k|, a_k < 0 \end{cases}$$

سؤال 6: اگر $\lambda = 0$ $\xrightarrow{c \neq 0}$ $g(\lambda) = \inf c^T x = -\infty$

حال اگر $\lambda > 0$ $\rightarrow$

$$g(\lambda) = \inf \left(c^T x + \lambda f(x) \right)$$

$$= \lambda \inf \left(\left(\frac{c}{\lambda}\right)^T x + f(x) \right)$$

$$= -\lambda \sup \left(\left(\frac{-c}{\lambda}\right)^T x - f(x) \right)$$

$$= -\lambda f^*\left(\frac{-c}{\lambda}\right)$$

$\rightarrow$ dual problem به شکل زیر است:

$$\text{minimize} \quad -\lambda f^*\left(-\frac{c}{\lambda}\right)$$
$$\text{subject to} \quad \lambda \geq 0$$

با توجه به اینکه $g(\lambda)$، convex است و برای $\lambda \geq 0$، g، perspective f^* است که در $-\frac{c}{\lambda}$ محاسبه شده است $\Longleftarrow$ dual problem ای که با f^* نیز نوشته شده است convex است.

سؤال 7: (a)

$$L(x, \lambda, v) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) - v^T x + x^T \operatorname{diag}(v)\, x$$

$$= x^T \operatorname{diag}(v)\, x + (c + A^T \lambda - v)^T x - b^T \lambda$$

نسبت به x مشتق بگیریم

$$2 \operatorname{diag}(v)\, x + (c + A^T \lambda - v)^T = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-1}{2} \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 1/v_1 \\ \vdots \\ 1/v_n \end{bmatrix} \right) (c + A^T \lambda - v)^T$$

در معادله x را قرار دهیم

$$g(\lambda, v) = \begin{cases} -b^T \lambda - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (c_i + a_i^T \lambda - v_i)^2 / v_i & v \succ 0 \\ -\infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

$\leftarrow$ a_i ستون iام A است

dual problem به شکل زیر خواهد شد :

$$\text{maximize} \quad -b^T\lambda - (1/4)\sum_{i=1}^{n}(c_i + a_i^T\lambda - v_i)^2/v_i$$

$$\text{subject to} \quad v \succeq 0$$

حال می‌خواهیم این مسئله را ساده سازی کنیم. داریم :

$$\sup_{v_i \geq 0}\left(-\frac{(c_i + a_i^T\lambda - v_i)^2}{v_i}\right) = \begin{cases} c_i + a_i^T\lambda & c_i + a_i^T\lambda \leq 0 \\ 0 & c_i + a_i^T\lambda > 0 \end{cases}$$

$$= \min\{0, c_i + a_i^T\lambda\}$$

حال dual problem به شکل زیر ساده سازی می‌شود :

$$\text{maximize} \quad -b^T\lambda + \sum_{i=1}^{n}\min\{0, c_i + a_i^T\lambda\}$$

$$\text{subject to} \quad \lambda \succeq 0$$

سؤال 4 : (a)

مشتق نسبت به x

$$L(x,\nu) = x^T(A^TA + \mathrm{diag}(\nu))x - 2b^TAx + b^Tb - 1^T\nu$$

$$2(A^TA + \mathrm{diag}(\nu))x - 2A^Tb = 0$$

$$\Rightarrow x = (A^TA + \mathrm{diag}(\nu))^{-1}A^Tb$$

$$g(\nu) = \begin{cases} -1^T\nu - b^TA(A^TA + \mathrm{diag}(\nu))^{+}A^Tb + b^Tb & A^TA + \mathrm{diag}(\nu) \succeq 0,\ A^Tb \in \mathcal{R}(A^TA + \mathrm{diag}(\nu)) \\ -\infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

با استفاده از Schur complements می‌توان مسئله به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -1^T\nu - t + b^Tb \\ \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} A^TA + \mathrm{diag}(\nu) & -A^Tb \\ -b^TA & t \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

$$t - b^TA(A^TA + \mathrm{diag}(\nu))A^Tb \succeq 0$$

(b) مسئله بهینه SDP را به شکل یک مسئله minimization می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 1^T\nu + t - b^Tb \\ \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} A^TA + \mathrm{diag}(\nu) & -A^Tb \\ -b^TA & t \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم :

$$\text{Lagrange multiplier} = \begin{bmatrix} Z & z \\ z^T & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L(\nu, t, Z, z, \lambda) = 1^T\nu + t - b^Tb - \mathrm{tr}(Z(A^TA + \mathrm{diag}(\nu))) + 2z^TA^Tb - t\lambda$$

$$= (1 - \mathrm{diag}(Z))^T\nu + t(1-\lambda) - b^Tb - \mathrm{tr}(ZA^TA) + 2z^TA^Tb$$

با توجه به lagrangian، به جز $\mathrm{diag}(Z)=1$ و $\lambda=1$، unbounded below خواهد بود

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathrm{tr}(A^TAZ) - 2b^TAz + b^Tb \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{diag}(Z) = 1 \\ & \begin{bmatrix} Z & z \\ z^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

binary LS problem معادل مسئله زیر است:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathrm{tr}(A^TAZ) - 2b^TAz + b^Tb \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{diag}(Z) = 1 \\ & Z = zz^T \end{aligned}$$

در حالت relaxation، constraint $Z \succeq zz^T$ به جای constraint $Z = zz^T$ قرار می‌گیرد

$$\begin{bmatrix} Z & z \\ z^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \xLeftarrow[\text{Schur complements}]{\text{به دلیل}} Z - zz^T \succeq 0 \quad \Longleftarrow$$

[illegible]

$\Longleftarrow$ با حالت relaxation مسئله binary LS معادل هستند.

(ج)

سؤال ۵ : (a)

feasible set : $2 \leq x \leq 4$ optimal value: $p^* = 5$

optimal solution: $x^* = 2$

(b) نمودار رسم شده است و فایل پایین قرار گرفته است

$$L(x, \lambda) = x^2 + 1 + \lambda (x-2)(x-4)$$

$$= (1+\lambda)x^2 - 6\lambda x + (1+8\lambda)$$

برحسب x مشتق می‌گیریم

$$2(1+\lambda)x - 6\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{\lambda+1}$$

$$g(\lambda) = \begin{cases} -9\lambda^2/(1+\lambda) + 1 + 8\lambda & \lambda > -1 \\ -\infty & \lambda \leq -1 \end{cases}$$

$$L(x, \lambda^*) = 5 = p^* \Leftarrow x = 2 \Leftarrow \lambda^* = 2$$

(c) Lagrange dual problem به شکل زیر است :

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad -9\lambda^2/(\lambda+1) + 1 + 8\lambda \\ &\text{subject to} \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$d^* = p^* \Leftarrow d^* = 5 \Leftarrow \lambda^* = 2$$

$\Rightarrow$ strong duality برقرار است

(d)

است infeasible ، $u < -1$ $\Longleftarrow$ $\inf_x ((x-2)(x-4)) = -1$

$u \geq -1 \implies$ feasible set: $[3-\sqrt{1+u},\ 3+\sqrt{1+u}]$

$x^*(u) = 3-\sqrt{1+u}$ $\Longleftarrow$ $-1 \leq u \leq 8$ برای.

$x^*(u) = 0$ $\Longleftarrow$ $u > 8$ برای.

$$\Rightarrow p^*(u) = \begin{cases} \infty & u < -1 \\ 11 + u - 6\sqrt{1+u} & -1 \leq u \leq 8 \\ 1 & u \geq 8 \end{cases}$$