احسان آقازاده / تمرین شماره 1 بهینه سازی محدب

سؤال 2 :

(a) نادرست   (b) نادرست   (c) درست

(d) نادرست   (e) درست   (f) درست

سؤال 4 :

(a) $K = \{0\}$ $K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$

$\Rightarrow K^* = \{y \mid y^T \cdot 0 \geq 0\} \Rightarrow K^* = \mathbb{R}^n$

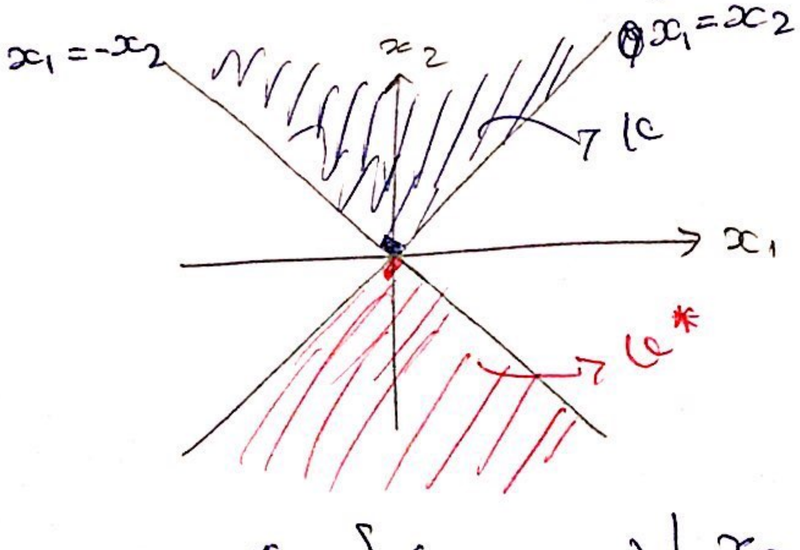
که این جا با توجه به بخش (b) به نظر می‌آید $\mathbb{R}^2$ است

(b) $K = \mathbb{R}^2$ $K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$

$\Rightarrow K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}^2\}$

$\Rightarrow K^* = \{0\}$

(c)



$\Rightarrow K^* = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \leq -|x_1|\}$

(d)

سوال 5 :

(a) $\{(x,y)\in R^2_{++} \mid x/y \leq 1\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2_{++} \mid x-y \leq 0\}$

چون این set برابر intersection دو convex set یعنی
positive orthant و halfspace است پس <u>convex</u> است.

(b) $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2_{++} \mid x/y \geq 1\} = \{(x,y)\in R^2_{++} \mid x-y \geq 0\}$

در این بخش هم مانند بخش قبلی این set برابر intersection دو convex set
یعنی positive orthant و halfspace است پس <u>convex</u> است.

(c) non-convex است - مثال نقض: نقاط $(3, \frac{1}{3})$ و $(\frac{1}{3}, 3)$ در
این set هستند اما میانگین آن‌ها یعنی $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ در این set نیست

(d)

سؤال ۶:

از آنجایی که نرم (norm) همیشه نامنفی است در نتیجه داریم:

$$\|x-a\|_2 \leqslant \|x-b\|_2 \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\Longleftrightarrow} \|x-a\|_2^2 \leqslant \|x-b\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|x-a\|_2^2 \leqslant \|x-b\|_2^2 \Longleftrightarrow (x-a)^T(x-a) \leqslant (x-b)^T(x-b)$$

$$\Longleftrightarrow (x^T-a^T)(x-a) \leqslant (x^T-b^T)(x-b)$$

$$\Longleftrightarrow x^Tx - 2a^Tx + a^Ta \leqslant x^Tx - 2b^Tx + b^Tb$$

$$\Longleftrightarrow 2(b-a)^Tx \leqslant b^Tb - a^Ta$$

$\Leftarrow$ که در واقع این set یک halfspace است. برای تبدیل به فرم $c^Tx \leqslant d$

داریم:

$c = 2(b-a)$

$d = b^Tb - a^Ta$

سؤال 7 :

(a) slab، intersection ۲ halfspace است ⇐ convex set است

(b) rectangle، intersection تعداد محدودی halfspace است

⇒ convex set است

(c) wedge، intersection ۲ halfspace است ⇐ convex set است

(d)

$$\{x \mid \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2 \text{ for all } y \in S\}$$

$$= \bigcap_{y \in S} \{x \mid \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2\}$$

که هرکدام از اینها، به ازای y های ثابت $y \in S$ یک halfspace خواهد بود پس intersection ای از halfspace ها خواهیم داشت

⇒ convex set است

(ح) convex set نیست، مثال نقض:

$S = \{-2, 2\}$

$T = \{-1, 1\}$ $\quad \{x \mid dist(x, S) \leq dist(x, T)\}$

$\Rightarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3/2$ یا $x \geq 3/2\}$

که این set مجموعه convex نیست.

(ط)

$$\{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{x \mid x+y \in S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} (S_1 - y)$$

برای y های ثابت convex set ها خواهند بود پس intersection ای از convex set ها خواهیم داشت $\Leftarrow$ convex set است

(ی)

$$\{x \mid \|x-a\|_2 \leq \theta \|x-b\|_2\} = \{x \mid \|x-a\|_2^2 \leq \theta^2 \|x-b\|_2^2\}$$

$$= \{x \mid (1-\theta^2)x^Tx - 2(a-\theta^2 b)^T x + (a^Ta - \theta^2 b^T b) \leq 0\}$$

$\Rightarrow$

$\xrightarrow{\theta = 1} \{x \mid 2(a-b)^T x \leq b^Tb - a^Ta\} \Rightarrow$ که این یک halfspace است $\Leftarrow$ convex set است

$\xrightarrow{\theta < 1}$ یک ball خواهد شد با مرکز x_0 و شعاع R

$$\{x \mid (x-x_0)^T(x-x_0) \leq R^2\}$$

$$x_0 = \frac{a - \theta^2 b}{1-\theta^2} \qquad R = \left(\frac{\theta^2\|b\|_2^2 - \|a\|_2^2}{1-\theta^2} - \|x_0\|_2^2\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow$ convex set است

سؤال 3 :

$$S := \{a \in \mathbb{R}^k : p(0)=1,\ |p(t)| \le 1,\ \forall t \in [\alpha,\beta]\}$$

این set برابر intersection 2 set T_1 , T_2 است که به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$T_1 := \{a \in \mathbb{R}^k : p(0)=1\}, \quad T_2 := \{a \in \mathbb{R}^k : |p(t)| \le 1,\ \forall t \in [\alpha,\beta]\}$$

این تمام وکتورهای $a \in \mathbb{R}^k$ است که مولفه a_1 آن برابر 1 باشد ، $a_1 = 1$

و به وضوح convex است

$$T_2 = \bigcap_{t \in [\alpha,\beta]} T_2^{(t)}$$ بطوریکه $$T_2^{(t)} := \{a \in \mathbb{R}^k : -1 \le a^T[1, t, \dots, t^{k-1}] \le 1\}$$

که به ازای tهای ثابت $T_2^{(t)}$ یک slab خواهد بود که در سوال 7 بخش (a) اثبات شد convex set است پس T_2 intersection چندین convex set است ⇐ convex set است

⇐ S ، intersection 2 convex set است ⇐ S یک convex set است

سؤال 1:

- نادرست - مثال نقض:

$$A = [0 \quad 1], \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = [1 \quad 1]$$

AB، full rank است درحالی که B، full rank نیست

- نادرست - مثال نقض:

$$A = [0 \quad 1], \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = 0$$

A و B، full rank هستند درحالی که AB، full rank نیست.

- درست - اثبات:

$$null(AB) = \{x \mid ABx = 0\}$$

اثبات می‌کنیم به ازای هر x ای که $ABx=0$ باشد خواهیم داشت: $x=0$

$$ABx = 0 \xRightarrow{null(A)=0} Bx = 0 \xRightarrow{null(B)=0} x = 0$$

به ازای هر x ای که $ABx=0$ است، آن x برابر 0 است

$$\Rightarrow null(AB) = 0$$

- درست - اثبات:

① باید اثبات کنیم که: $\forall y \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^p \; y = ABx$

اثبات: از آنجایی که A، onto است $\Leftarrow$ $y = A\tilde{x} \quad x \in \mathbb{R}^n$

از آنجایی که B، onto است $\Leftarrow$ $\tilde{x} = Bx \quad x \in \mathbb{R}^p$

پس حکم ① اثبات شد ⟸ AB، onto است

قسمت دوم سؤال

فرض می‌کنیم ماتریس A و B به ترتیب ماتریس با ابعاد mxn و nxp باشند در نتیجه ابعاد ماتریس AB هم mxp خواهد بود

داریم: $rank(A) \leq \min\{m, n\}$, $rank(B) \leq \min\{n, p\}$

$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$

از آن جایی که AB، full rank است ⟸ $rank(AB) = \min\{m, p\}$

$\Rightarrow \min\{m, p\} \leq rank(A) \leq \min\{m, n\}$, $\min\{m, p\} \leq rank(B) \leq \min\{n, p\}$

پس در نتیجه ۶ حالت مختلف برای m و n و p خواهیم داشت (به واقع ۶ بازه‌ی متفاوت برای نامساوی‌ها) . از این ۶ حالت باید ۳ حالت را بررسی کنیم به این دلیل که ۳ حالت دیگر با عملیات transpose حالات مشابه خواهند شد .

① $m \leq n \leq p$; $rank(A) = m$, $m \leq rank(B) \leq n$

از آنجایی که A، full rank خواهد شد ، اظهار نظری در مورد B نمی‌توانیم بکنیم ، تنها حالتی که می‌توانیم استنباط کنیم زمانی است که B، full rank باشد یعنی $m = n$. پس ادعا درست خواهد بود اگر $m = n \leq p$ برقرار باشد .

② $m \leq p \leq n : \operatorname{rank}(A) = m \,,\, m \leq \operatorname{rank}(B) \leq p$

مشابه حالت قبل برای اینکه استنباط کنیم ، A و B full rank هستند ، باید داشته باشیم $m=p$. در نتیجه $m=p\leq n$ باید در این حالت برقرار باشد

③ $n \leq m \leq p : m \leq \operatorname{rank}(A) \leq n$

از آنجایی که $n \leq m$ ← باید داشته باشیم $m = n \leq p$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = m$

← در همه حالت‌های زیر عبارت اول برقرار خواهد بود :

1. $m=n\leq p$ 2. $n=p\leq m$ 3. $m=p\leq n$

حال به بررسی عبارت دوم می‌رسیم :

① $m \leq n \leq p$ داریم: $\operatorname{rank}(AB) \leq \overbrace{\min\{m,p\}}^{m}$

باید اثبات کنیم که : اگر $x^T AB = 0$ آنگاه $x=0$

چون B، full rank است و $n \leq p$ ← $x^T A = 0$

از آنجایی که A، full rank است و $m \leq n$ ← $x=0$

$\Rightarrow$ حکم اثبات

و در این حالت عبارت برقرار است

② $m \leq n \,,\, p \leq n \,,\, m \leq p$

در این حالت برقرار نیست و مثال نقض :

$\underbrace{A=[0 \;\; 1]_{1\times 2}}_{\text{full rank}} \,,\, \underbrace{B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times 1}}_{\text{full rank}}$ و $AB=[0]_{1\times 1}$ full rank نیست

(3) $m \geq n$ و $p \geq n$ و $p \geq m$

در این حالت عبارت برقرار نیست. مثال نقض :

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\text{full rank}} , \underbrace{B = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{\text{full rank}} , \underbrace{AB = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{نیست full rank}}$$

(4) $m \leq n$ و $p \geq n$ و $m \geq p$

در این حالت

این حالت رخ می‌دهد که $m=n=p$ باشد که
زیرمجموعه‌ای از همان حالت اول است که بررسی شد برقرار است

به طور خلاصه عبارت هم در حالت =
$m \leq n \leq p$
برقرار خواهد بود