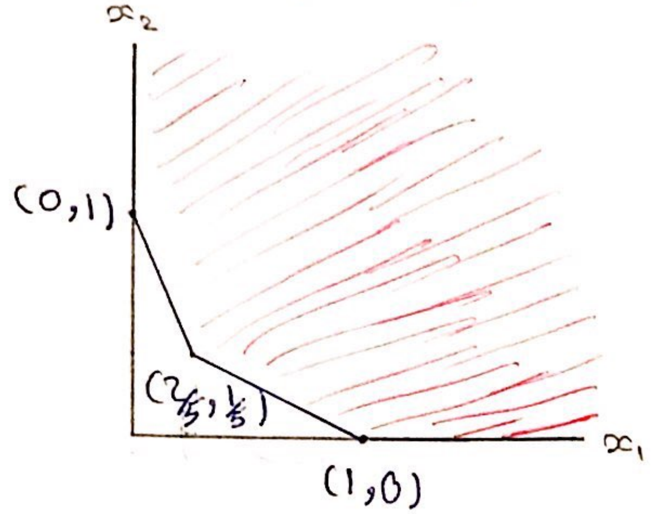
احسان آقازاده / 810197668 / تمرین سوم

سوال 1: feasible set به شکل زیر خواهد بود:




حال با توجه به این feasible set می توان به راحتی optimal set و optimal value تابع هدف را بدست آورد

(a) $x^* = (2/5, 1/5)$ با توجه به شکل مشخص است

(b) تابع بر روی feasible set، unbounded below است.

(c) $X_{opt} = \{(0, x_2) \mid x_2 \geq 1\}$ . با توجه به شکل کمترین مقدار $x_1$ در feasible set برابر 0 است نقطه ی ابتدایی خط $x_1 = 0$ بر روی feasible set، $(0,1)$ است پس $x_2 \geq 1$

(d) $x^* = (1/3, 1/3)$

(e) $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ ⇐ $2x_1 + x_2 = 7/6 > 1$ ✓

$x_1 + 3x_2 = 1 \geq 1$ ✓

$\nabla f_0(x^*) = (1,3)$ که بر خط $x_1 + 3x_2 = 1$ عمود است

سؤال 2 :

(a)

① dom $f_0$ ، unbounded است $\Longrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n , v \neq 0 , Av \preceq 0$

اثبات: فرض می‌کنیم $x^k$ دنباله‌ای از نقاط در dom $f_0$ با $\|x^k\| \to \infty$ باشند (با توجه به این که dom $f_0$ ، unbounded است، می‌توان این فرض را کرد). حال تعریف می‌کنیم $v^k = x^k / \|x^k\|_2$ . این دنباله یک convergent subsequence دارد. به این دلیل که $\|v^k\|_2 = 1$ یعنی این دلیل که این sequence ، bounded است. فرض کنیم $v$ حد این convergent subsequence باشد و چون $a_i^T v^k < b_i / \|x^k\|_2$ برای هر k برقرار است پس $a_i^T v \leq 0$ . بنابراین $Av \preceq 0$ و $v \neq 0$ برقرار است

② $\exists v \in \mathbb{R}^n \; v \neq 0 , Av \preceq 0 \Longrightarrow$ dom $f_0$ ، unbounded است

اثبات: اگر چنین $v$ ای موجود باشد، داریم $x_0 + tv \in$ dom $f_0$ برای هر $t \geq 0$ پس dom $f_0$ ، unbounded است.

(b)

① $\exists v \in \mathbb{R}^n , Av \preceq 0 , Av \neq 0 \Longrightarrow f_0$ ، unbounded below است

اثبات: فرض کنید که $a_j^T v$ عنصری از $Av$ باشد ($Av \preceq 0 , Av \neq 0$) که منفی است یعنی $a_j^T v < 0$ . برای $t \geq 0$ می‌نویسیم:

$$f_0(x_0 + tv) = - \sum_{i=1}^{m} \log (b_i - a_i^T x_0 - t a_i^T v)$$

$$\leq - \sum_{i \neq j}^{m} \log (b_i - a_i^T x_0) - \log (b_j - a_j^T x_0 - t a_j^T v)$$

Scanned with CamScanner

بنابراین با افزایش $t$، سمت راست تساوی بدون bound ای کاهش می‌یابد.

پس $f_0$، unbounded below است

② $f_0$ unbounded below است $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n, Av \preceq 0, Av \neq 0$

اثبات: فرض کنید $f_0$، unbounded below باشد. $x^k$ را یک دنباله با $b - Ax^k \succ 0$ در نظر می‌گیریم و داریم $f_0(x^k) \to -\infty$. با توجه به convexity داریم:

$$f_0(x^k) \geq f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - a_i^T x_0} a_i^T (x^k - x_0) = f_0(x_0) + m - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i^T x^k}{b_i - a_i^T x_0}$$

پس بنابراین اگر $f_0(x^k) \to -\infty$ باشد، باید داشته باشیم: $\max_i (b_i - a_i^T x^k) \to \infty$

فرض کنید یک $z$ وجود داشته باشد که $z \succ 0$ و $A^T z = 0$ برقرار باشند. پس

$$z^T b = z^T b - \underbrace{z^T A x^k}_{0} = z^T (b - Ax^k) \geq z_i \max_i (b_i - a_i^T x^k) \to \infty$$

که این تناقض است که نشان می‌دهد چنان $z$ ای وجود ندارد. با توجه به قضیه اشاره در صورت سؤال، $v$ ای وجود دارد که شرایط $Av \neq 0, Av \preceq 0$ برقرار باشند.

(ج) اگر $f_0$ bounded below باشد $\Longrightarrow$ حداقل به آن رسیده است. این بدان معنی است که $x$ ای وجود دارد که شرط optimality را satisfy می‌کند.

د) در این قسمت نیز فرض می‌کنیم: $\operatorname{rank} A = n$

باید نشان دهیم $f_0$ حداکثر یک نقطه optimal دارد.

$$\nabla^2 f(x) = A^T \operatorname{diag}(A)\, A \;,\quad d_i = \frac{1}{(b_i - a_i^T x)^2} \;,\quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\nabla^2 f(x)$، positive definite است اگر $\operatorname{rank} A = n$ که به این معنی است که $f_0$، strictly convex است. پس اگر نقطه optimal وجود داشته باشد، منحصر به فرد است

سوال 3: مسئله را می‌توان به شکل مسئله زیر مدل کرد:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j) \\ \text{subject to} \quad & x \succeq 0 \\ & Ax \preceq c^{max} \end{aligned}$$

این یک مسئله convex optimization است به این دلیل که تابع هدف concave است و constraint ها هم set ای از linear inequality ها هستند. برای تبدیل به LP معادل ابتدا توابع درآمد را به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$r_j(x_j) = \min\{p_j x_j ,\; p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j)\}$$

که از این شکل نتیجه می‌شود که $r_j(x_j) \geq u_j$ اگر و تنها اگر

$p_j x_j \geq u_j \quad p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j$

معادل LP را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \mathbf{1}^T u \\
\text{subject to} \quad & x \succeq 0 \\
& Ax \preceq c^{max} \\
& p_j x_j \geq u_j ,\ p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j ,\quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

که متغیرها $x$ و $u$ هستند. حال برای اینکه نشان دهیم این LP معادل مسئله اصلی است، $x$ یک ثابت قرار می‌دهیم. آخرین set از constraint ها تضمین می‌کند که $u_i \leq r_i(x_i)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر مقدار feasible، $x$ و $u$، تابع هدف LP کمتر یا مساوی مجموع درآمد است. به عبارت دیگر همیشه می‌توان $u_i = r_i(x)$ را انتخاب کنیم که در این حالت دو تابع هدف برابرند.

سؤال 6: (a) برای ساده‌سازی عبارت، می‌توانیم $I_{des} = 1$ فرض کنیم (اگر این نباشد، $a_{ij}$ را به شکل $a_{ij}/I_{des}$ تعریف می‌کنیم که باز همان می‌شود)

$$f(p) = \max_i \left| \log a_i^T p \right|$$

و دامنه $f$ نیز برابر است با: $\{p \mid a_i^T p > 0,\ i = 1, 2, \dots, n\}$

$$\left| \log(a_i^T p) \right| = \max\{\log(a_i^T p),\ 1/\log(a_i^T p)\} = \log \max\{a_i^T p,\ 1/a_i^T p\}$$

$$\Rightarrow \quad f(p) = \log \max_i \max\{a_i^T p,\ 1/a_i^T p\}$$

$a_i^T p$ و $1/a_i^T p$ بر روی $\operatorname{dom} f$، convex هستند $\Leftarrow$ $\max_i \max\{a_i^T p,\ 1/a_i^T p\}$ تابع convex است

$\Longrightarrow$ $\exp f$ تابع convex است

Scanned with CamScanner

(b) constraint را به شکل زیر می‌توان نشان داد:

$$\sum_{i=1}^{l} P_{[i]} - 0.5 \sum_{i=1}^{m} P_i \le 0$$

که $l = 10$ است و $P_{[i]}$، i امین بزرگترین مؤلفه p است. term اول، مجموع power، l لامپ با بیشترین power است. term دوم نصف مجموع power است.

term اول چون مجموع چندین $P_{[i]}$ است، convex است و تابع linear نیز هست.

(c) از مثال نقض استفاده می‌کنیم: $p^1$ و $p^2$ دو جواب هستند که constraint برای آن دو صدق می‌کند (satisfy می‌شود). در جواب اولی $\frac{m}{2}$ تا لامپ اول روشن است و بقیه‌ی لامپ‌ها خاموش است. به واقع $\frac{m}{2}$ تا مؤلفه اول $p^1$ مثبت و بقیه صفر است.

در جواب دوم $\frac{m}{2}$ تا لامپ اول خاموش و بقیه‌ی لامپ‌ها روشن است. این هم یعنی $\frac{m}{2}$ تا مؤلفه اول $p^2$ صفر و بقیه مؤلفه‌ها مثبت است. تعداد مؤلفه‌های ناصفر convex combination $p^1$ و $p^2$ برابر m است در نتیجه constraint برای convex combination صدق نمی‌کند

→ این constraint، convex نیست.

سؤال 5 :

(a) سمت چپ equality به درستی به عنوان convex مشخص شده است اما

equality constraint ها زمانی معتبر هستند که دو طرف equality ها affine باشند.

چون نرم (norm) یک بردار زمانی صفر است که خود بردار صفر باشد پس constraint

را می‌توان به شکل روبه‌رو نشان داد : $x+2*y == 0 ; x - y == 0 ;$

همچنین آن را به شکل $norm([x+2*y , x-y]) <= 0 ;$ نیز می‌توان نوشت.

(b) مشکل این‌جا است که square() فقط آرگومان‌های affine می‌پذیرد به این دلیل که convex است اما increasing نیست. برای رفع این اشکال باید به جای آن از square_pos() استفاده کنیم

$square\_pos(square(x+y)) <= x-y$

تابع square_pos به شکل روبه‌رو است : $square\_pos(x) = square(max(x,0))$

(c) $1/x$ ، convex نیست مگر اینکه دامنه آن به $R_{++}$ محدود شود اما اینجا $x >= 0$ است. این خط را به شکل روبه‌رو می‌توانیم بنویسیم : $inv\_pos(x) + inv\_pos(y) <= 1$

تابع inv_pos به شکل روبه‌رو است : $inv\_pos(x) = 1/max(x,0)$

(d) مشکل این‌جا است که norm() فقط آرگومان‌های affine می‌پذیرد به این دلیل که convex است اما increasing نیست. یک روش برای تصحیح این خطا معرفی متغیرهای جدید مانند u و v است.

$norm([u, v]) <= 3*x + y ;$

$max(x,1) <= u ;$

$max(y,2) <= v ;$

تجزیه تابع هدف با معرفی متغیرهای جدید به این دلیل این‌جا به درستی کار می‌کند که تابع norm بر روی $R^2_+$ ، convex و monotonic است و به خصوص در این‌جا که $max(x,1)$ و $max(y,2)$ داریم بر روی $(1,\infty) \times (2,\infty)$ ، convex و monotonic است.

(e) $xy$ ، concave نیست پس به شکلی که بیان شده است، درست عمل نمی‌کند. باید شکل constraint را تغییر دهیم (به عنوان یکی از راه‌حل‌ها) و به شکل زیر بنویسیم:

x >= inv_pos(y)

در اینجا جای $x$ و $y$ نیز می‌توان جابجا کرد.

یک راه‌حل دیگر تعریف constraint به شکل geomean([x, y]) >= 1 است

که geomean همان میانگین هندسی است

$$\text{geomean}([x, y]) = \sqrt{xy}$$

(f) به این دلیل اشکال دارد که یک تابع convex را تقسیم بر یک تابع concave می‌کنیم
می‌توان عبارت را به شکل روبه‌رو نوشت: quad_over_lin(x+y, sqrt(y)) <= x-y+5
به این دلیل که quad_over_lin در آرگومان دوم monotone decreasing است، می‌تواند تابع concave (در آن آرگومان) بپذیرد (sqrt همان تابع concave است)

(g) $x^3+y^3$ بر روی $x \geq 0, y \geq 0$ ، convex است اما نکته اینجا است که خود $x^3$ برای $x<0$ ، convex نیست پس cvx این عبارت را رد می‌کند.
یک راه برای تصحیح، نوشتن constraint به شکل زیر است:

quad_pos_over_lin(square(x), x) + quad_pos_over_lin(square(y), y) <= 1

به این دلیل این عبارت درست است که تابع quad_pos_over_lin ، convex است و در آرگومان اول increasing است، بنابراین یک تابع convex را در آرگومان اولش می‌پذیرد.

سوال 5 قسمت (h) : اینجا اشکال concave نبودن $xy$ است که باعث می‌شود cvx عبارت را رد کند. برای حل این مشکل به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\sqrt{xy - z^2} = \sqrt{y(x - z^2/y)}$$

و constraint را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

x + z <= 1 + geo_mean([x - quad_over_lin(z, y), y])

این عبارت درست عمل می‌کند چون geo_mean، concave است و برای هر آرگومان non decreasing است. بنابراین یک تابع concave را برای آرگومان اولش می‌پذیرد.

سؤال ۷: (۹) با استفاده از تئوری Schur complement می‌توان مسئله را به شکل SDP نوشت.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad t \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} F(x) & c \\ c^T & t \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

این را با استفاده از Schur complement می‌توان نوشت:

$$t - c^T F_{(x)}^{+} c \geq 0$$

$$\rightarrow t \geq c^T F_{(x)}^{+} c$$

که با توجه به minimize کردن $t$، همان مسئله اصلی است (البته باید $F(x)$ معین مثبت باشد تا $F_{(x)}^{-1} = F_{(x)}^{+}$ برقرار باشد)

دقت شود که دامنه‌ی دو مسئله معادل (equivalent) نیستند. یعنی به ازای برخی $x$ها، $F(x)$ نیمه معین مثبت (positive semidefinite) است اما معین مثبت (positive definite) نیست.

طبق linear matrix inequality گفته در مسئله SDP بالا معادل زیر است:

$$F(x) \succeq 0 \,,\quad c \in R(F(x)) \,,\quad c^T F_{(x)}^{+} c \leq t$$

پس در واقع SDP نوشته شده در بالا معادل مسئله زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad c^T F_{(x)}^{+} c \\ &\text{subject to} \quad F(x) \succeq 0 \\ &\qquad\qquad\quad c \in R(F(x)) \end{aligned}$$

اگر $F(x)$ نیمه معین مثبت و singular باشد و $c \in R(F(x))$، آنگاه objective تابع $c^T F_{(x)}^{+} c$ محدود است در حالی که با همین شرایط objective در مسئله اصلی $+\infty$ است. اما این مسئله optimal value مسئله را تغییر نمی‌دهد (مگر در حالتی که $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ خالی باشد)

(b) این مسئله تقریباً مشابه قبلی است. به شکل زیر آن را به صورت SDP می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } t \\ &\text{subject to } \begin{bmatrix} F(x) & c_i \\ c_i^T & t \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

(c) تابع هدف صورت سوال را به صورت $\lambda_{max}(F^{-1}(x))$ می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \lambda_{max}(F^{-1}(x)) \qquad f(x) \le t \iff F^{-1}(x) \preceq tI$$

$$\Rightarrow tI - F^{-1}(x) \succeq 0 \Rightarrow tI - I^T F^{-1}(x) I \succeq 0$$

$$\begin{bmatrix} F(x) & I \\ I & tI \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad I^T = I$$

به وسیله Schur complement

حال مسئله به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } t \\ &\text{subject to } \begin{bmatrix} F(x) & I \\ I & tI \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

(d) تابع هدف را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c} + tr(F^{-1}(x) S)$$

$S = \sum_{k=1}^{m} c_k c_k^T$ قرار می‌دهیم که مسئله معادل مسئله زیر است:

$$\text{minimize } \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c} + \sum_{k=1}^{m} c_k^T F^{-1}(x) c_k$$

حال چون مشابه هر یک از دو term تابع هزینه مسئله نوشته شده در بخش‌های قبلی بود میتوان این مسئله به راحتی به فرم SDP نوشت !

$$\text{minimize} \quad t_0 + \sum_k t_k$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} F(x) & \bar{c} \\ \bar{c}^T & t_0 \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\begin{bmatrix} F(x) & c_k \\ c_k^T & t_k \end{bmatrix} \succeq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

سؤال ۴: مسئله گفته در سؤال معادل (equivalent) مسئله LP زیر است:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \mathbf{1}^T t \\
\text{subject to} \quad & Hu = x_{des} \\
& -t \preceq u \preceq t \\
& 2u - 1 \preceq t \qquad u, t \in \mathbb{R}^n \\
& -2u - 1 \preceq t
\end{aligned}
$$

$$H = \begin{bmatrix} A^{N-1}b & A^{N-2}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix}$$

سؤال ۹ : (a)

feasible set مربوط به LP relaxation شامل feasible set مربوط به Boolean LP است ⇐

① اگر LP relaxation، infeasible باشد آنگاه Boolean LP نیز infeasible است

② مقدار optimal مربوط به LP relaxation کمتر یا مساوی مقدار optimal مربوط به Boolean LP است پس مقدار optimal مربوط به LP relaxation، lower bound مقدار optimal مربوط به Boolean LP است

(b) در این حالت می‌توان گفت راه حل optimal مربوط به LP relaxation، راه حل optimal برای Boolean LP نیز است.

(c) که در این بخش و الف سؤال ۹ قرار داده شده است