احسان آقازاده

سؤال 3 : (a)

این مسئله را می‌توان به شکل یک مسئله least-squares بازنویسی کرد. مسئله را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2u_1^T & 1 \\ 2u_2^T & 1 \\ \vdots & \\ 2u_m^T & 1 \end{bmatrix}_{m\times(n+1)} \qquad x = \begin{bmatrix} x_c \\ t \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1} \qquad b = \begin{bmatrix} \|u_1\|_2^2 \\ \|u_2\|_2^2 \\ \vdots \\ \|u_m\|_2^2 \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

x_c بدست می‌آید و $r = (t + \|x_c\|_2^2)^{1/2}$

باید اثبات کنیم که $t + \|x_c\|_2^2 \geq 0$ برقرار است. برای این کار از این قضیه که $\nabla(\|Ax-b\|_2^2) = 0$ در حالت بهینه برقرار است، استفاده می‌کنیم.

$$\nabla(\|Ax-b\|_2^2) = \nabla((Ax-b)^T(Ax-b)) = A^T(Ax-b) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (2u_i^T x_c + t - \|u_i\|_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow t + \|x_c\|_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \|u_i - x_c\|_2^2 \geq 0$$

سؤال 4 :

با توجه به دامنه D، که intersection چندین linear Inequality است، دامنه convex است. حال باید اثبات کنیم که sub level set های تابع convex هستند.

$$\forall \alpha \in R^+ \quad \max_{i=1,\dots,k} |p(t_i)/q(t_i) - y_i| \leq \alpha \quad \xleftrightarrow{q(t_i)>0}$$

ادامه در صفحه‌ی بعد

$$-\alpha q(t_i) \le p(t_i) - y_i q(t_i) \le \alpha q(t_i), \quad i=1,\dots,k$$

با توجه به اینکه intersection ~~چند~~ linear inequality است پس convex است.

← مسئله گفته شده quasiconvex است.

حال برای مسئله زیر:

$$\text{minimize} \max_{i=1,\dots,k} |f(t_i) - y_i|$$

که

$$f(t) = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + b_1 t + b_2 t^2}$$

اگر برای m در $p(t)$، $\underline{\underline{2}}$ و برای n در $q(t)$، $\underline{\underline{2}}$ قرار دهیم همین مسئله نوشته شده در بالا بدست می‌آید پس این مسئله quasiconvex است و باید بردارهای a و b را بدست آوریم. برای این کار αهای مختلف را قرار می‌دهیم تا به دقت گفته شده یعنی 0.001 برسیم.

سؤال 5: (a) با توجه به objective مسئله یعنی هزینه پایانی grid power و Eq constraint

بیان شده در متن صورت سؤال، مسئله را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \frac{1}{4}(R^{buy})^T \max\{p^{grid}, 0\} - \frac{1}{4}(R^{sell})^T \max\{-p^{grid}, 0\} \\
\text{subject to} \quad & p^{ld} = p^{grid} + p^{batt} + p^{pv} \\
& 0 \le q_i \le Q \qquad i = 1, \dots, 96 \\
& q_{i+1} = q_i - \frac{1}{4} p_i^{batt} \qquad i = 1, \dots, 95 \\
& q_1 = q_{96} - \frac{1}{4} p_{96}^{batt} \\
& -C \le p_i^{batt} \le D \qquad i = 1, \dots, 96
\end{aligned}
$$

اثبات convex بودن objective: ترم $\frac{1}{4}(R^{buy})^T \max\{p^{grid}, 0\}$ به این دلیل که $\max\{p^{grid}, 0\}$، convex است و $\frac{1}{4}(R^{buy})^T \alpha$ هم affine است و نسبت به α، non-decreasing است، پس این ترم convex است. ترم $-\frac{1}{4}(R^{sell})^T \max\{-p^{grid}, 0\}$ به این دلیل که $-\max\{-p^{grid}, 0\}$، concave است و $\frac{1}{4}(R^{buy})^T(-\alpha)$ هم affine است و نسبت به α، non-increasing است، پس این ترم هم convex خواهد بود. در نتیجه objective مسئله convex است. constraint ها هم با توجه به این که تعدادی linear equality و linear inequality هستند، به وضوح convex هستند. مشکلی که در برنامه‌نویسی به وجود می‌آید این است که objective مسئله DCP نیست. برای حل این مشکل از دو متغیر میانی استفاده می‌کنیم که یکی مربوط به میزان power ای است که می‌خریم و دیگری نیز مربوط به میزان power ای است که می‌فروشیم که هر دوی این‌ها نامنفی بوده و می‌دانیم p^{grid} نیز برابر

power ها که می‌خریم منفی power هایی است که می‌فروشیم پس constraint های q به مسئله اولیه اضافه می‌شود و مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \frac{1}{4}(R^{buy})^T p^{buy} - \frac{1}{4}(R^{sell})^T p^{sell} \\
\text{subject to} \quad & p^{ld} = p^{grid} + p^{batt} + p^{PV} \\
& 0 \le q_i \le Q \quad i = 1, \dots, 96 \\
& q_{i+1} = q_i - \frac{1}{4} p_i^{batt} \quad i = 1, \dots, 95 \\
& q_1 = q_{96} - \frac{1}{4} p_{96}^{batt} \\
& -C \le p_i^{batt} \le D \quad i = 1, \dots, 96 \\
& p^{grid} = p^{buy} - p^{sell} \\
& p_i^{buy} \ge 0 \quad i = 1, \dots, 96 \\
& p_i^{sell} \ge 0 \quad i = 1, \dots, 96
\end{aligned}
$$

در پیاده‌سازی p_i و q_i ها به صورت وکتوری پیاده‌سازی شده‌اند

(b) با توجه به تعریف ارائه شده از LMP در سوال، این بخش پیاده‌سازی شد و مقایسه آن نیز با قیمت‌های خرید و فروش نیز رسم شده است.

(c) این بخش نیز پیاده‌سازی شد و balance بودن پرداختی‌ها هم نشان داده شده است

سؤال یک ; (a

$$L(z,\theta,\nu) = \sum_{i=1}^{m} f(z_i) + \frac{\lambda}{2}\theta^T\theta + \sum_{i=1}^{m} \nu_i (z_i - y_i x_i^T \theta)$$

$$\Rightarrow g(\nu) = \inf_{z,\theta \in dom} \left(\sum_{i=1}^{m} f(z_i) + \frac{\lambda}{2}\theta^T\theta + \sum_{i=1}^{m} \nu_i (z_i - y_i x_i^T \theta) \right)$$

$$= -\sup_{z,\theta \in dom} \left(\sum_{i=1}^{m} -f(z_i) - \nu_i z_i - \frac{\lambda}{2}\theta^T\theta + \sum_{i=1}^{m} \nu_i y_i x_i^T \theta \right)$$

$$= \underbrace{-\sup_{z \in dom} \left(\sum_{i=1}^{m} -f(z_i) - \nu_i z_i \right)}_{-\sum_{i=1}^{m} f^*(-\nu_i)} - \sup_{\theta \in dom} \left(\underbrace{-\frac{\lambda}{2}\theta^T\theta + \sum_{i=1}^{m} \nu_i y_i x_i^T \theta}_{\frac{\partial}{\partial\theta} = 0} \right)$$

$$-\lambda\theta + \sum_{i=1}^{m} \nu_i y_i x_i = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{m} \nu_i y_i x_i\right) = \frac{1}{\lambda}(x^T \operatorname{diag}(y)\nu)$$

جای

$$= -\sum_{i=1}^{m} f^*(-\nu_i) - \frac{\lambda}{2}\theta^T\theta + \lambda\theta^T\theta$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} f^*(-\nu_i) + \frac{1}{2\lambda}\|x^T \operatorname{diag}(y)\nu\|_2^2$$

$\alpha_i = -\nu_i$

$$= -\sum_{i=1}^{m} f^*(\alpha_i) + \frac{1}{2\lambda}\|x^T \operatorname{diag}(y)\alpha\|_2^2 \checkmark$$

سؤال ۲: (a) طبق گفته سؤال objective مسئله α است و با توجه به نامساوی‌های درون سؤال تعدادی constraint داریم. می‌توانیم مسئله را به صورت زیر بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \alpha \\
&\text{subject to} \quad \sup_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \le 1.12 \\
&\qquad\qquad\quad \inf_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \ge 0.89 \\
&\qquad\qquad\quad \sup_{\omega_c \le \omega \le \pi} H(\omega) \le \alpha \\
&\qquad\qquad\quad \inf_{\omega_c \le \omega \le \pi} H(\omega) \ge -\alpha
\end{aligned}
$$

objective این مسئله convex است. constraintها هم convex هستند به این دلیل که در نامساوی‌هایی که sup موجود است، sublevel set یک تابع convex داریم که convex می‌شود و در آن‌هایی که inf داریم، superlevel sets یک تابع concave داریم که آن‌ها هم convex می‌شوند $\Longleftarrow$ کل مسئله convex است

(b) objective این مسئله به این صورت است که کوچکترین مقدار زاویه θ که نامساوی $|H(\omega)| \le \alpha$ در بازه $\theta \le \omega \le \pi$ برقرار باشد. constraint ۳ و constraint ۴ از مسئله بخش (a) کلاً درون objective است و ۲ constraint دیگر باقی خواهند:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \inf\{\theta \mid \forall \omega \in [\theta, \pi] \Rightarrow |H(\omega)| \le \alpha\} \\
&\text{subject to} \quad \sup_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \le 1.12 \\
&\qquad\qquad\quad \inf_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \ge 0.89
\end{aligned}
$$

objective مسئله quasiconvex است؟ این دلیل که:

$$\underbrace{\inf \{\theta \mid \forall \omega \in [\theta, \pi] \Rightarrow |H(\omega)| \le \alpha\}}_{} \le \theta'$$

که ورودی این تابع a است

$$\Rightarrow \text{set} = \{a \mid \theta' \le \omega \le \pi \Rightarrow |H(\omega)| \le \alpha\}$$

$$= \{a \mid \theta' \le \omega \le \pi \Rightarrow -\alpha \le H(\omega) \le \alpha\}$$

این convex است؛ به این دلیل که intersection تعدادی halfspace است

با توجه به این که دیدیم constraint ها هم convex هستند پس مسئله quasiconvex است.

(c)

constraint های این مسئله مشابه ؟ قسمت قبل است، objective آن $\min\{t \mid a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_N = 0\}$ است مسئله به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \min\{t \mid a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_N = 0\} \\
&\text{subject to} \quad \sup_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \le 1.12 \\
&\qquad\qquad \inf_{0 \le \omega \le \pi/3} H(\omega) \ge 0.89 \\
&\qquad\qquad \sup_{\omega_c \le \omega \le \pi} H(\omega) \le \alpha \\
&\qquad\qquad \inf_{\omega_c \le \omega \le \pi} H(\omega) \ge -\alpha
\end{aligned}$$

حال اثبات می‌کنیم objective quasiconvex است:

$$\min \{ t \mid a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_N = 0 \} \le t'$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{set} = \{ a \mid a_{t'+1} = a_{t'+2} = \dots = a_N = 0 \}$$

این set affine است پس convex است پس objective quasiconvex
است و می‌دانیم (از قسمت‌های قبل) ما convex constraint داشتیم پس مسئله
quasiconvex است.