احسان آقازاده / 810197668 / تمرین سری 2

سوال 1 : تابع اول quasiconvex است به این دلیل که sublevel set ها convex هستند. این تابع قطعا concave یا quasiconcave نیست به این دلیل که superlevel set ها convex نیستند.

این تابع همچنین شرط convexity را ندارد به این دلیل که دو نقطه‌ای وجود دارد که تابع هم پایین و هم بالای خط اتصال بین آن دو نقطه قرار دارد پس convex هم نیست.

تابع دوم concave است زیرا هر دو نقطه را که به هم متصل می‌کنیم تابع بالای خط اتصال قرار دارد، پس تابع quasiconcave هم هست. این تابع convex و quasiconvex نیست به این دلیل که sublevel set ها convex نیستند.

سوال 2 :

(a)

$$f(x) = e^{x} - 1 \rightarrow f'(x) = e^{x} \rightarrow f''(x) = e^{x} > 0$$

$\Rightarrow$ strictly convex , quasiconvex

$$S_\alpha = \{x \in \mathrm{dom}\, f \mid -(e^{x} - 1) \leq \alpha\}$$

$$= \{x \in \mathrm{dom}\, f \mid 1-\alpha \leq e^{x}\}$$

$$= \{x \in \mathrm{dom}\, f \mid x \geq \ln(1-\alpha)\}$$

با توجه به $1-e^{x}$ پس $\alpha < 1$

برای هر $\alpha < 1$ ، به وضوح convex است

$-f$ ، quasiconvex است $\Rightarrow$ f ، quasiconcave است

اما $f(x)$ با توجه به $f''(x)$ ، concave نیست .

(b)

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nabla^2 f(x) \not\succeq 0 \\ \nabla^2 f(x) \not\preceq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نه convex است و
نه concave است

f ، quasiconcave که مشخصات اسلاید بوده است .

(c)

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2} \begin{bmatrix} 2/x_1^2 & 1/x_1x_2 \\ 1/x_1x_2 & 1/x_2^2 \end{bmatrix} \succeq 0$$

$f(x_1,x_2)$ ، convex و quasiconvex است

با توجه به $\nabla^2 f(x_1,x_2)$ ، concave نیست . برای رد quasiconcave بودن
مثال نقض می‌آوریم

$$\underset{\text{superlevel}}{S_1} = \left\{ x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \;\middle|\; \frac{1}{x_1 x_2} \geq 1 \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{a}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \end{bmatrix}}_{b} \in S_1 \Rightarrow x_2 = -x_1 + \frac{13}{4}$$

خط بین a و b

$$\frac{1}{\frac{5}{4} \times 2} \not\geq 1 \quad \text{چون} \quad \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \end{bmatrix} \notin S_1 \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{4} \\ x_2 = 2 \end{array} \quad 2 = \frac{-5}{4} + \frac{13}{4} \checkmark$$

$\Rightarrow$ S_1 ، convex نیست $\Rightarrow$ f ، quasiconcave نیست

(d)

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1/x_2^2 \\ -1/x_2^2 & 2x_1/x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \nabla^2 f(x_1,x_2) \not\succeq 0 \\ \nabla^2 f(x_1,x_2) \not\preceq 0 \end{matrix} \Rightarrow$$ نه convex و نه concave است

$\underset{\text{sublevel}}{S_\alpha} = \left\{ x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \mid \frac{x_1}{x_2} \le \alpha \right\} \Rightarrow$ halfspace است پس convex است

$\underset{\text{superlevel}}{S_\alpha} = \left\{ x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \mid \frac{x_1}{x_2} \ge \alpha \right\} \Rightarrow$ این هم halfspace است پس convex است

$\Leftarrow$ f هم quasiconvex و quasiconcave است پس quasilinear است

(e)

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2/x_2 & -2x_1/x_2^2 \\ -2x_1/x_2^2 & 2x_1^2/x_2^2 \end{bmatrix} = (2/x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_1/x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2x_1/x_2 \end{bmatrix} \succeq 0$$

f هم convex و هم quasiconvex است و با توجه به Hessian، concave نیست. برای اثبات quasiconcave نبودن، مثال نقض می‌آوریم.

$$S_1 = \left\{ x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \mid \frac{x_1^2}{x_2} \ge 1 \right\} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{a}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{b} \in S_1$$

به وضوح $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ روی خط واصل a و b قرار دارد و

$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \notin S_1 \longrightarrow$ S_1، convex است

f، quasiconcave نیست

$$\nabla^2 f_{(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} & (1-\alpha)(-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha-1} \end{bmatrix} \qquad (f,$$

$$= \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \begin{bmatrix} -1/x_1^2 & 1/x_1x_2 \\ 1/x_1x_2 & -1/x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= -\alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ -1/x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ -1/x_2 \end{bmatrix}^T \preceq 0$$

⇐ concave و quasiconcave است و convex نیست.

برای quasiconvex نبودن مثال نقض می‌آوریم.

$\alpha = 0.5$

$\rightarrow S_1 = \{x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \mid \sqrt{x_1 x_2} \leq 1\}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{a}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \end{bmatrix}}_{b} \in S_1 \Rightarrow$ نشان دادیم $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$ روی خط واصل a و b قرار دارد

و $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \end{bmatrix} \notin S_1$ نیست چون $\sqrt{\frac{5}{4} \times 2} \nleq 1$ پس S_1، convex نیست

→ f، quasiconvex نیست

سوال 3 : (a)

ابتدا نشان می‌دهیم $V^T X V \in S_n$ برقرار است.

$$x^T V^T X V x = (Vx)^T X (Vx) \xRightarrow{X \in S_n} (Vx)^T X (Vx) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^T V^T X V x \geq 0 \Rightarrow V^T X V \in S_n$$

$V^T X V \in S_n \Rightarrow$ (برای هر V) است convex و است linear ،$tr(V^T X V)$

را pointwise supremum یک خانواده از این تابع‌ها نیز convex است

$\Rightarrow$ * است convex ،$\sup\{tr(V^T X V) \mid V \in R^{n\times k}, V^T V = I\}$

داریم: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(X) = \sup\{tr(V^T X V) \mid V \in R^{n\times k}, V^T V = I\}$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(X)$ convex است.

(b) در قسمت قبل اثبات کردیم ،$tr(V^T X V)$ linear است پس concave است (برای هر V)

پس pointwise infimum یک خانواده از این تابع‌ها نیز concave است،

$\Rightarrow$ است concave ،$\inf\{tr(V^T X V) \mid V \in R^{n\times k}, \det(V^T V) = 1\}$

$\xRightarrow[\text{ثابت}]{\times \frac{1}{k}}$ * است concave نیز $\frac{1}{k}\inf\{tr(V^T X V) \mid V \in \mathbb{R}^{n\times k}, \det(V^T V) = 1\}$

داریم: $\left(\prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i(X)\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\inf\{tr(V^T X V) \mid V \in \mathbb{R}^{n\times k}, \det(V^T V) = 1\}$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ است concave ،$\left(\prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i(X)\right)^{\frac{1}{k}}$

(c)

$$\inf\left\{\prod_{i=1}^{k} (V^T X V)_{ii} \mid V \in \mathbb{R}^{n\times k}, V^T V = I\right\}$$

pointwise infimum خانواده‌ای از توابع concave است $\Leftarrow$ concave است

$\Rightarrow$ concave است $\prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i(X)$ ،

$\Rightarrow \log \prod_{i} \lambda_i(X)$ *

concave است

$$\log \prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i(X) = \sum_{i=n-k+1}^{n} \log \lambda_i(X)$$ *

concave است ، $\sum_{i=n-k+1}^{n} \log \lambda_i(X)$

سوال ۴ : (a)

$$g^*(y) = \sup(y^T x - f(x) - c^T x - d) = \sup((y-c)^T x - f(x)) - d$$

$$= f^*(y-c) - d$$

(b)

$$g^*(y,s) = \sup_{x/t \in \mathrm{dom} f,\, t>0} (y^T x + st - t f(x/t))$$

$$= \sup_{t>0} \sup_{x/t \in \mathrm{dom} f} (t(y^T(x/t) + s - f(x/t))$$

$$= \sup_{t>0} t(s + \sup_{x/t \in \mathrm{dom} f} (y^T(x/t) - f(x/t)))$$

$$= \sup_{t>0} t(s + f^*(y))$$

$$= \begin{cases} 0 & s + f^*(y) \leq 0 \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

(c)

$$g^*(y) = \sup_x \left(y^T x - \inf_z f(x,z) \right)$$

$$\inf_z f(x,z) = -\sup_z \left(-f(x,z) \right)$$

$$\to \quad g^*(y) = \sup_x \left(y^T x + \sup_z (-f(x,z)) \right)$$

$$= \sup_z \sup_x \left(y^T x - f(x,z) \right)$$

$$= \sup_z \sup_x \left(y^T x + 0^T z - f(x,z) \right)$$

$$= \sup_z f^*(y,0) = f^*(y,0)$$

برای قسمت دوم سؤال :

$$f(x,z) = \begin{cases} h(z) & Az+b=x \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

داریم :

$$f^*(y,v) = \inf \left(y^T x - v^T z - f(x,z) \right)$$

$$= \inf_{Az+b=x} \left(y^T x - v^T z - h(z) \right)$$

$$= \inf_z \left(y^T (Az+b) - v^T z - h(z) \right)$$

$$= b^T y + \inf_z \left(y^T A z - v^T z - h(z) \right)$$

$$= b^T y + h^*(A^T y - v)$$

$$\Longrightarrow \quad g^*(y) = f^*(y,0) = b^T y + h^*(A^T y)$$

سؤال 5 : در سؤال 2 بخش (e) اثبات کردیم که :

* $f(x_1,x_2) = x_1^2/x_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ ، convex است ، پس composition آن

با affine function نیز convex است $\Leftarrow$ $\dfrac{\|Ax+b\|_2^2}{x_2} = \dfrac{(Ax+b)^T(Ax+b)}{x_2}$ ، convex است

حال در اینجا اثبات می‌کنیم $1-x^Tx$ ، concave است ، x^Tx ، convex است پس

$-x^Tx$ ، concave ، 1 نیز concave است پس $1-x^Tx$ ، concave است **

$$h(x,x_2) = \frac{\|Ax+b\|_2^2}{x_2}$$

$\tilde{h}$ نسبت به x_2 ، nonincreasing است و با توجه به * و **

دقت شود که $x^Tx < 1$ پس $1-x^Tx \in \mathbb{R}_{++}$ برقرار است

$\dfrac{\|Ax+b\|_2^2}{1-x^Tx}$ ، convex است

سؤال ۶ : (a) نه convex و نه concave است. برای هر دو مثال می‌آوریم:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow median(x) = 0 \quad x' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow median(x') = 0$$

$$median\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'\right) = median\left(\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1.5 \not\leq 0$$

convex نیست.

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow median(x) = 3 \quad x' = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow median(x') = 3$$

$$median\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'\right) = median\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 1 \not\geq 3$$

concave نیست.

(c)

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x' = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(x_{[1]} + x_{[n]})/2 = 2 \quad (x'_{[1]} + x'_{[n]})/2 = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = x'' \quad (x''_{[1]} + x''_{[n]})/2 = 3 \not\leq 2$$

convex نیست

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x_{[1]} + x_{[n]})/2 = 2 \qquad x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (x'_{[1]} + x'_{[n]})/2 = 2$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = x'' \quad (x''_{[1]} + x''_{[n]})/2 = 1 \not\geq 2$$

concave نیست:

(d)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{[n/4]} - x_{[3n/4]} = x_{[1]} - x_{[3]} = 1$$

$$x' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x'_{[n/4]} - x'_{[3n/4]} = x'_{[1]} - x'_{[3]} = 1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x'' \quad x''_{[n/4]} - x''_{[3n/4]} = 0 \not\geq 1$$

نیست concave

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{[n/4]} - x_{[3n/4]} = x_{[1]} - x_{[3]} = 1$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{[n/4]} - x_{[3n/4]} = x_{[1]} - x_{[3]} = 1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = x'' \quad x''_{[n/4]} - x''_{[3n/4]} = 1.5 \not\leq 1$$

convex نیست.

Scanned with CamScanner

(ج) فرض می‌کنیم $n = 20$

$x = e_1 \Rightarrow$ Symmetric trimmed mean$(x) = 0$

$x' = e_2 \Rightarrow$ Symmetric trimmed mean$(x') = 0$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = x''$ Symmetric trimmed mean $(x'') = \frac{1}{34} \not\leq 0$

نیست convex $\Leftarrow$

$x = 1 - e_1 - e_2 \Rightarrow$ symmetric trimmed mean $(x) = 1$

$x' = 1 - e_3 \Rightarrow$ Symmetric trimmed mean$(x') = 1$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' = 1 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3) = x''$ symmetric trimmed mean$(x'') = \frac{31}{34} \not\geq 0$

نیست concave $\Leftarrow$

(f) طبق جزوه: $\frac{9n}{10}$ جمع بزرگترین element ها convex است. حال ضرب

این حاصل جمع در $\frac{1}{\frac{9n}{10}+1}$ نیز convex است. ($\frac{1}{\frac{9n}{10}+1} > 0$)

$\Rightarrow$ lower trimmed mean، convex است

(b) $x_{[n]}$، concave است $\Leftarrow$ $-x_{[n]}$، convex است

$x_{[1]}$ نیز convex است و جمع 2 تابع convex نیز convex است

$\Rightarrow$ $x_{[1]} - x_{[n]}$، convex است