دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی صنایع

پایان‌نامه کارشناسی
مهندسی صنایع

یک روش ابتکاری برای حل مسئله پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر

نگارش

احسان چشمی

استاد راهنما

دکتر مریم رادمان

شهریور ۱۴۰۲

سپاس

از استاد بزرگوارم که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، مرا در به سرانجام رساندن این پایان‌نامه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

محاسبه‌ی عرض‌ـ۱ ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر یک مسئله پوشش مجموعه بوده و از نظر پیچیدگی زمانی در رده‌ی ان‌پی‌ـ سخت است. ماتریس وقوع یاد شده ساختار بلوکی قطری دارد. در این پژوهش یک الگوریتم تجزیه برای حل مسئله توسعه داده می‌شود که با حل مستقل زیرمسائل ظاهر شده در بلوک‌های ماتریس یک جواب موجه برای مسئله تولید می‌کند. این الگوریتم بر روی نمونه مسائل استاندارد سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر اجرا شد و نتایج حاصل از الگوریتم به طور میانگین ۳٫۲۵ درصد با بهترین جواب شناخته شده فاصله داشت.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی عدد صحیح، مسئله‌ی پوشش مجموعه، سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر، ساختار بلوکی، جستجوی محلی همسایگی

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ کلیات پژوهش و اهمیت موضوع

سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر یا به اختصار STS[۱] یکی از کاربردهای ویژه طرح‌های بلوکی ناقص متعادل[۲] است که در طراحی آزمایشات آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، اگر نیاز باشد n دارو بر روی m بیمار آزمایش شود و هر بیمار سه دارو دریافت کند، سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر برای طراحی آزمایشی که در آن هر جفت دارو دقیقا بر روی یک بیمار آزمایش شود به کار می‌رود[۱]. یکی از مسائل قابل استخراج از سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر مسئله‌ی پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر[۳] نام دارد که از نوع پوشش مجموعه است. این مسئله با وجود تعداد متغیرهای کم مسئله‌ی سختی است[۲]. ماتریس ضرایب مسئله‌ی پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر دارای ساختار بلوکی قطری[۴] است. در این ساختار بلوک‌هایی از محدودیت‌ها و متغیرها وجود دارد که مستقل از هم هستند و در ماتریس به صورت قطری تعبیه شده‌اند. هدف از این پژوهش ارائه یک الگوریتم برای به دست آوردن یک جواب اولیه‌ی موجه با حل زیرمسئله‌ی موجود در بلوک‌ها است. سپس این جواب با استفاده از یک الگوریتم جستجوی همسایگی محلی بهبود داده می‌شود.

---

[۱] Steiner Triple System

[۲] balanced incomplete block designs

[۳] Steiner Triple Covering Problem(STCP)

[۴] diagonal block

۱–۲ نوآوری پژوهش

در این پژوهش یک روش جدید بر مبنای تجزیه برای مسائل پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر با ساختار بلوکی ارائه می‌شود. در این روش با حل زیرمسئله‌های ظاهر شده در بلوک‌های موجود در ماتریس ضرایب مسئله یک جواب موجه برای مسئله اصلی تولید شده و سپس این جواب با استفاده از یک الگوریتم جستجوی همسایگی محلی بهبود داده می‌شود.

۱–۳ ساختار پژوهش

این پژوهش از شش فصل تشکیل شده است. در فصل دوم جواب‌های موجود در ادبیات و روش‌های به کار رفته مرور می‌شود. در فصل سوم به تعریف مسئله و مفاهیم پرداخته می‌شود. در فصل چهارم منطق الگوریتم پیشنهادی و نحوه عملکرد آن تشریح می‌شود. در فصل پنجم نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان داده شده و این نتایج با جواب‌های موجود در ادبیات مقایسه می‌شود و در نهایت در فصل آخر به جمع‌بندی کارهای انجام شده و نتایج پرداخته می‌شود.

فصل ۲

مرور ادبیات

محاسبه عرض‌ـ۱ ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر به عنوان یک دسته از مسائل در سال ۱۹۷۴ توسط فولکرسون و همکاران[۱] معرفی شد که از آن‌ها به عنوان مسئله‌ی پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر نام برده می‌شود. فولکرسون و همکاران[۱] $STS(۹)$ را با استفاده از یک روش صفحات برشی[1] و موارد $STS(۱۵)$ و $STS(۲۷)$ را با استفاده از یک الگوریتم شمارش ضمنی[2] حل کردند ولی موفق به حل $STS(۴۵)$ نشدند. $STS(۴۵)$ پنج سال بعد مطابق گزارش آویس[۳] توسط رتلیف[3] حل شد. فئو و رسنده[۴] در سال ۱۹۸۹ دو مورد $STS(۸۱)$ و $STS(۲۴۳)$ را معرفی کردند. جواب بهینه‌ی $STS(۸۱)$ اولین بار توسط مانینو و ساسانو[۵] در سال ۱۹۹۵ محاسبه شد. مسئله‌ی $STS(۸۱)$ همچنین به سادگی با روش هرس ایزومورفیسم[4] مارگو[۶] و روش انشعاب مداری[5] استروفسکی و همکاران[۷] حل می‌شود، اما این روش‌ها قادر به حل $STS(v)$ از مرتبه‌ی بالاتر نبودند. $STS(۱۳۵)$ توسط کارمارکار و همکاران[۸] معرفی شد. اودیک و ون‌مارن[۲] بهترین جواب شناخته شده برای $STS(۱۳۵)$ و $STS(۴۰۵)$ را در سال ۱۹۹۸ به دست آوردند که بهینگی آن بعدها در سال ۲۰۱۱ توسط استروفسکی و همکاران[۹] ثابت شد. در همان سال‌ها نمونه‌های $STS(۴۰۵)$ و $STS(۷۲۹)$ توسط استروفسکی و همکاران[۱۰، ۱۱] معرفی شد. رسنده و همکاران[۱۲] با استفاده از الگوریتم $BRKGA$[6] خود موفق به محاسبه جوابی برای این دو مسئله شدند که تا امروز بهترین جواب شناخته شده باقی مانده است. گائو و همکاران[۱۳] با ارائه الگوریتم $RWLS$[7] علاوه بر محاسبه بهترین

[1] cutting plane method
[2] implicit enumeration algorithm
[3] Ratliff
[4] isomorphism pruning method
[5] orbital branching method
[6] Biased Random Key Generation Algorithm
[7] Row Weighting Local Search

جواب نمونه‌های تا کنون حل شده، موفق به پیدا کردن جوابی برای STS(۱۲۱۵) شدند که تا کنون بهترین جواب محاسبه شده است. وانگ و همکاران[۱۴] در سال ۲۰۲۱ با پیاده‌سازی چند الگوریتم توسعه داده شده در ادبیات برای مسائل پوشش مجموعه‌ی خاص موفق به حل STS(۲۱۸۷) به عنوان بزرگترین نمونه‌ی حل شده از این خانواده شدند. در جدول ۲-۱ بهترین جواب پیدا شده برای مسائل پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر و اولین کسی که بهترین جواب را ارائه داد آورده شده است. لازم به ذکر است تعداد متغیرهای هر مسئله با مرتبه‌ی آن برابر است.

جدول ۲-۱: بهترین جواب‌های موجود در ادبیات برای مسائل پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر

مرتبه‌ی $STS(v)$	تعداد محدودیت‌ها	بهترین جواب	اثبات بهینگی	مرجع
۹	۱۲	۵	بله	فولکرسون و همکاران (۱۹۷۴)[۱]
۱۵	۳۵	۹	بله	فولکرسون و همکاران (۱۹۷۴)[۱]
۲۷	۱۱۷	۱۸	بله	فولکرسون و همکاران (۱۹۷۴)[۱]
۴۵	۳۳۰	۳۰	بله	رتلیف (۱۹۷۹)[۳]
۸۱	۱۰۸۰	۶۱	بله	مانینو و ساسانو (۱۹۹۵)[۵]
۱۳۵	۳۰۱۵	۱۰۳	بله	اودیک و ونمارن (۱۹۹۸)[۲]
۲۴۳	۹۸۰۱	۱۹۸	بله	اودیک و ونمارن (۱۹۹۸)[۲]
۴۰۵	۲۷۲۷۰	۳۳۵	خیر	رسنده و همکاران (۲۰۱۲)[۱۲]
۷۲۹	۸۸۴۵۲	۶۱۷	خیر	رسنده و همکاران (۲۰۱۲)[۱۲]
۱۲۱۵	۲۴۵۸۳۵	۱۰۶۳	خیر	گائو و همکاران (۲۰۱۵)[۱۳]
۲۱۸۷	۷۹۶۷۹۷	۱۹۶۳	خیر	وانگ و همکاران (۲۰۲۱)[۱۴]

فصل ۳

تعریف مسئله

۳-۱ تعریف سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر

یک سیستم سه‌گانه اشتاینر یا به اختصار از مرتبه v از یک مجموعه‌ی S با v عضو و یک مجموعه B از سه‌گانه‌های[۱] S تشکیل شده و با $STS(v)$ نشان داده می‌شود، با این ویژگی که هر جفت از اعضای S تنها در یک سه‌گانه از B ظاهر می‌شود. کرکمن[۱۵] ثابت کرد که یک سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه v وجود دارد اگر و فقط اگر $v \overset{6}{\equiv} 1$ یا $v \overset{6}{\equiv} 3$.

۳-۲ تعریف مسئله‌ی پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر

محاسبه عرض-۱[۲] ماتریس وقوع[۳] مسئله پوشش سه‌گانه اشتاینر نام دارد که یک مسئله پوشش مجموعه بوده و ان‌پی-سخت[۴] است[۱۶]. شایان ذکر است که عرض-k ماتریس صفر و یک A حداقل تعداد ستون‌های انتخاب شده از A است به گونه‌ای که جمع مقادیر هر سطر حداقل k شود[۱۷]. ماتریس وقوع یک سیستم سه‌گانه اشتاینر از مرتبه $3n$ را اگر با A_{3n} نمایش دهیم، آنگاه A_{3n} دارای یک ساختار بلوکی قطری شامل سه بلوک است که هر بلوک یک ماتریس A_n می‌باشد[۱۸]. فولکرسون و همکاران[۱] برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را برای مسئله پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر از

---

[۱] Triples
[۲] 1-width
[۳] Incidence matrix
[۴] NP-hard

مرتبه‌ی v پیشنهاد دادند:

$$z_v \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x\in\{۰,۱\}^v} \{e_v^\top x \mid A_v x \geqslant ۱\}$$

که در آن $A_v \in \{۰,۱\}^{|\mathcal{B}|\times v}$ ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه اشتاینر و e_v یک بردار ستونی از اندازه v که تمام عناصر آن مقدار یک دارد می‌باشد. برای تولید ماتریس‌های وقوع ابتدا داده‌های $STS(۹)$ و $STS(۱۵)$ از $OR-Library$[۵] استخراج شده و سپس بر پایه‌ی آن‌ها ماتریس وقوع STS از مرتبه $n = ۳^{k+۱}$ و $n = ۱۵\cdot ۳^k$ به ازای $k = ۱,۲,۳,...$ با استفاده از یک روش سه برابر کردن[۶] ارائه شده توسط هال[۱۸] به صورت بازگشتی ساخته می‌شود. از آنجا که در این پژوهش از ساختار بلوکی حاصل از ساخت هال برای حل مسائل پوشش سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه‌ی بالاتر بهره برده می‌شود، به شرح روش ساخت پرداخته می‌شود.

عناصر $STS(v)$ را $\{۱,۲,...,v\}$ و مجموعه‌ی سه‌گانه‌های آن را B_v در نظر بگیرید. در این روش عناصر $STS(۳v)$ به صورت زوج مرتب‌های $\{(i,j)|i\in\{۱,۲,...,v\}, j\in\{۱,۲,۳\}\}$ هستند و مجموعه‌ی سه‌گانه‌ها $B_{۳v}$ به شیوه‌ی زیر ساخته می‌شود:

۱. $\{(a,k),(b,k),(c,k)\}\in\mathcal{B}_{۳v} \quad \forall\{a,b,c\}\in\mathcal{B}_v, \forall k\in\{۱,۲,۳\}$،

۲. $\{(i,۱),(i,۲),(i,۳)\}\in\mathcal{B}_{۳v} \quad \forall i\in\{۱,\dots,v\}$،

۳. $\{(a,i),(b,j),(c,k)\}\in\mathcal{B}_{۳v} \quad \forall\{a,b,c\}\in\mathcal{B}_v, \forall i,j,k\in\{۱,۲,۳\}$، $i\neq j\neq k$.

با این روش ماتریس وقوع STS از مرتبه‌ی کوچک در ماتریس وقوع STS از مرتبه بزرگتر تعبیه می‌شود. ساختار ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه‌ی $۳v$ برای نمونه در شکل ۳-۱ نمایش داده شده است.

$$A_{۳v} = \begin{bmatrix} A_v & ۰ & ۰ \\ ۰ & A_v & ۰ \\ ۰ & ۰ & A_v \\ I & I & I \\ D_۱ & D_۲ & D_۳ \end{bmatrix}$$

شکل ۳-۱: ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه‌ی $۳v$

که در آن A_v ماتریس وقوع $STS(v)$ و I ماتریس همانی بوده و ماتریس‌های D_j (با اندازه‌ی $۶۰\cdot|B_v|\times v$) در هر سطر دقیقا یک «۱» دارند. ماتریس‌های A_v را به عنوان بلوک می‌شناسیم و محدودیت‌های متشکل از ماتریس‌های همانی و D_jها را محدودیت‌های مشترک[۷] می‌نامیم.

---

[۵] http://people.brunel.ac.uk/ mastjjb/jeb/info.html
[۶] tripling
[۷] common constraints

فصل ۴

الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم ارائه شده در این پژوهش از دو بخش تشکیل شده است: ابتدا زیرمسائل موجود در ساختار بلوکی به طور مستقل حل می‌شوند و جواب حاصل در محدودیت‌های مشترک جایگذاری شده و محدودیت‌های برآورده نشده به صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح حل می‌شوند. سپس جواب موجه حاصل با استفاده از یک الگوریتم جستجوی محلی همسایگی $۳FNLS$[۱] بهبود داده می‌شود. جزئیات الگوریتم‌ها در ادامه شرح داده می‌شود.

۴-۱ الگوریتم تجزیه‌ی بازگشتی

فرض کنید $STS(۳v)$ یک سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه‌ی ۲۷ یا بزرگتر باشد. همان‌طور که قبلا توضیح داده شد، در ماتریس وقوع $STS(۳v)$ سه ماتریس وقوع $STS(v)$ با آرایش بلوکی تعبیه شده است. در این الگوریتم برای حل مسئله ابتدا به سراغ حل زیرمسئله‌ی موجود در بلوک‌ها یعنی $STS(v)$ می‌رویم. برای حل زیرمسئله نیز همین فرآیند تجزیه را تکرار می‌کنیم تا زمانی که زیرمسئله‌ی ظاهر شده مربوط به سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه‌ی ۹ یا ۱۵ باشد. در این صورت این مسئله را به عنوان یک برنامه‌ریزی عدد صحیح حل می‌کنیم. قابل ذکر است که برای حل مسائل عدد صحیح از کتابخانه‌ی $OR-Tools$ گوگل[۲] و سالور[۳] $SCIP$ استفاده شده است. سپس با کنار هم چیدن جواب حاصل از حل بلوک‌ها یک جواب اولیه برای مسئله‌ی بزرگتر تولید می‌کنیم. این جواب موجه نبوده و تعدادی از محدودیت‌های مشترک برآورده نشده باقی می‌مانند. لذا مسئله‌ی عدد صحیح حاصل از

[۱] 3 Flip Neighborhood Local Search
[۲] Google
[۳] solver

این محدودیت‌ها را حل کرده و با این کار به یک جواب موجه برای مسئله می‌رسیم. این فرآیند توسعه جواب را تکرار می‌کنیم تا به یک جواب موجه برای مسئله اصلی برسیم. این جواب توسط الگوریتم $۳FNLS$ بهبود داده می‌شود و حاصل این الگوریتم به عنوان جواب نهایی برگردانده می‌شود.

الگوریتم ۱ $STC\_RA(A_v)$

ورودی: ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه v

خروجی: پاسخ مسئله STC به عنوان یک بردار صفر و یک از اندازه v

۱: اگر ۱۵ یا ۹ $= v$:

۲: برنامه‌ریزی عدد صحیح مربوطه را حل کن و جواب را برگردان

۳: در غیر این صورت:

۴: بلوک ماتریس ضرایب زیرمسئله‌ی $A(\frac{v}{۳})$ را از A_v برش بده

۵: $STC\_RA(A_{\frac{v}{۳}})$ را اجرا کن و خروجی را در S^{block} ذخیره کن

۶: آرایه $S_۱ = [S^{block} S^{block} S^{block}]$ را تشکیل بده

۷: $S_۱$ را در محدودیت‌های مشترک جایگذاری کن

۸: مسئله‌ی عدد صحیح حاصل از محدودیت‌های برآورده نشده را حل کن و جواب را در $S_۲$ ذخیره کن

۹: با تجمیع $S_۱$ و $S_۲$ جواب موجه $S^۰$ را تولید کن

۱۰: الگوریتم $۳FNLS$ را بر روی $S^۰$ اجرا کن

۱۱: خروجی الگوریتم $۳FNLS$ را به عنوان S^{final} برگردان

۴-۲ الگوریتم جستجوی محلی $۳FNLS$

از روش جستجوی همسایگی برای بهبود یک جواب موجه اولیه‌ی تولید شده استفاده می‌شود. در این روش جستجوی همسایگی ابتدا برای متغیرهای با مقدار ۱ متغیری به نام $j.score$ برابر با تعداد محدودیت‌هایی که به تنهایی برآورده می‌کنند تعریف می‌شود. سپس این متغیرها بر اساس $j.score$ به صورت صعودی مرتب می‌شوند. سپس سه متغیر ابتدای این لیست از مقدار ۱ به صفر تبدیل می‌شوند. محدودیت‌هایی که برآورده نشده‌اند به صورت یک برنامه‌ریزی عدد صحیح حل می‌شوند و پاسخ آن‌ها با پاسخ اولیه تجمیع می‌شود، با این شرط که سه متغیری که صفر شده‌اند در این تکرار نمی‌توانند مقدار یک بگیرند. در این عملیات احتمال ظاهر شدن متغیرهای زائد در جواب وجود

دارد. متغیر زائد به متغیری گفته می‌شود که هیچ محدودیتی را به تنهایی برآورده نمی‌کند، یعنی با صفر کردن متغیر به یک جواب همچنان موجه با اندازه کمتر می‌رسیم. لذا در هر تکرار به حذف متغیرهای زائد تا زمانی که متغیر زائدی وجود نداشته باشد می‌پردازیم. در صورتی که جواب تولید شده بهتر از جواب اولیه باشد به عنوان بهترین جواب به دست آمده ذخیره می‌شود. این عملیات تا زمانی که شرط توقف برقرار شود تکرار می‌شود و در انتها بهترین جواب به دست آمده برگردانده می‌شود.

الگوریتم ۲ جستجوی همسایگی $3FNLS$

ورودی: ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر از مرتبه v ، پاسخ اولیه ، شرط توقف

خروجی: جواب بهبود داده شده به عنوان یک بردار صفر و یک از اندازه v

۱: S^{new} را برابر با جواب اولیه قرار بده

۲: S^{best} را برابر با جواب اولیه قرار بده

۳: تا وقتی شرط توقف برقرار نشده:

۴: برای هرکدام از متغیرها با مقدار یک در S^{new} مقدار $j.score$ را محاسبه کن

۵: سه متغیر با کمترین مقدار $j.score$ را در طول تکرار صفر قرار بده

۶: محدودیت‌های برآورده نشده را به صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح حل کن

۷: با استفاده از جواب حاصل از ۶ S^{new} را به روزرسانی کن

۸: متغیرهای زائد را در صورت وجود از S^{new} حذف کن

۹: در صورتی که اندازه‌ی S^{new} از اندازه‌ی S^{best} کمتر است S^{best} را به روزرسانی کن

۱۰: S^{best} را برگردان

این الگوریتم به ما اجازه می‌دهد تا با حذف متغیرهایی که در برآورده کردن محدودیت‌ها نقش کمتری دارند طی تکرارهای متوالی به سمت جواب‌های بهتر حرکت کنیم.

فصل ۵

نتایج محاسباتی

الگوریتم ارائه شده با زبان برنامه‌نویسی پایتون[1] پیاده‌سازی و اجرا شد. درصد محدودیت‌های مشترک برآورده شده توسط جواب حاصل از کنار هم چیدن جواب بلوک‌ها در جدول ۵-۱ آورده شده است.

جدول ۵-۱: جدول:درصد محدودیت‌های مشترک برآورده شده با حل بلوک‌ها

درصد محدودیت برآورده شده	تعداد محدودیت برآورده نشده	تعداد محدودیت‌های مشترک	مرتبه‌ی STS
۹۶٫۰۶٪	۴	۸۱	۲۷
۹۷٫۳۳٪	۶	۲۲۵	۴۵
۹۸٫۹۰٪	۸	۷۲۹	۸۱
۹۹٫۴۱٪	۱۲	۲۰۲۵	۱۳۵
۹۹٫۷۶٪	۱۶	۶۵۶۱	۲۴۳
۹۹٫۸۷٪	۲۴	۱۸۲۲۵	۴۰۵
۹۹٫۹۵٪	۳۲	۵۹۰۴۹	۷۲۹
۹۹٫۹۷٪	۴۸	۱۶۴۰۲۵	۱۲۱۵
۹۹٫۹۹٪	۶۴	۵۳۱۴۴۱	۲۱۸۷

سپس محدودیت‌های برآورده نشده به صورت یک مسئله‌ی عدد صحیح حل شدند. نتایج حاصل شده بدون تعبیه‌ی الگوریتم جستجوی همسایگی در جدول ۵-۲ آورده شده است. درصد فاصله از بهترین پاسخ پیدا شده از رابطه‌ی اختلاف پاسخ‌ها تقسیم بر بهترین پاسخ پیدا شده محاسبه شده است.

[1] Python

جدول ۵-۲: نتایج حاصل از الگوریتم تجزیه‌ی بازگشتی

زمان اجرا (ثانیه)	درصد فاصله	بهترین جواب پیدا شده	پاسخ الگوریتم بازگشتی	مرتبه‌ی STS
۰٫۰۷۷	۵٫۶٪	۱۸	۱۹	۲۷
۰٫۱۰۸	۱۰٪	۳۰	۳۳	۴۵
۰٫۱۳۵	۶٫۶٪	۶۱	۶۵	۸۱
۰٫۱۳۴	۷٫۸٪	۱۰۳	۱۱۱	۱۳۵
۰٫۲۶	۶٫۶٪	۱۹۸	۲۱۱	۲۴۳
۰٫۱۶۰	۶٫۶٪	۳۳۵	۳۵۷	۴۰۵
۰٫۳۵۵	۷٫۸٪	۶۱۷	۶۶۵	۷۲۹
۰٫۴۷۰	۵٫۳٪	۱۰۶۳	۱۱۱۹	۱۲۱۵
۱٫۸۲۲	۴٫۹٪	۱۹۶۳	۲۰۵۹	۲۱۸۷

سپس مسئله‌ها با تعبیه‌ی الگوریتم جستجوی همسایگی درون الگوریتم حل شدند. پاسخ‌های نهایی در جدول ۵-۳ نشان داده شده‌اند. درصد بهبود از رابطه‌ی اختلاف جواب اولیه و جواب جدید تقسیم بر جواب اولیه محاسبه شده است.

جدول ۵-۳: نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی محلی $FNLS$۳

زمان اجرا (ثانیه)	درصد بهبود	فاصله از بهترین جواب	بهترین جواب	پاسخ الگوریتم	مرتبه‌ی STS
۰٫۳۸	۵٫۳٪	۰٫۰٪	۱۸	۱۸	۲۷
۰٫۷۴	۳٫۰٪	۶٫۷٪	۳۰	۳۲	۴۵
۱٫۱۱	۳٫۱٪	۳٫۳٪	۶۱	۶۳	۸۱
۲٫۱۹	۴٫۵٪	۲٫۹٪	۱۰۳	۱۰۶	۱۳۵
۹٫۷۳	۳٫۸٪	۲٫۵٪	۱۹۸	۲۰۳	۲۴۳
۳۱٫۰۷	۳٫۴٪	۳٫۰٪	۳۳۵	۳۴۵	۴۰۵
۱۸۷٫۶۷	۲٫۷٪	۴٫۹٪	۶۱۷	۶۴۷	۷۲۹
۱۲۳۳٫۶۶	۲٫۴٪	۲٫۷٪	۱۰۶۳	۱۰۹۲	۱۲۱۵

الگوریتم جستجوی همسایگی توسعه داده شده موفق شد با کاهش ۲٫۴ الی ۵٫۳ درصدی فاصله از بهترین جواب به دست آمده، در همه‌ی موارد به جز STS(۴۵) خطا را به زیر ۵ درصد برساند.

فصل ۶

نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در این پژوهش با بهره‌گیری از ساختار بلوکی ماتریس وقوع سیستم سه‌گانه‌ی اشتاینر ابتدا الگوریتمی برای رسیدن به یک جواب اولیه‌ی موجه با حل زیرمسئله‌های ظاهر شده در بلوک‌ها ارائه شد و سپس با یک روش جستجوی محلی توسعه داده شده برای این مسئله بهبود داده شد. نتایج حاصل از الگوریتم در همه‌ی موارد به جز STS(۴۵) کمتر از ۵ درصد از بهترین جواب شناخته شده فاصله دارند. روش ارائه شده بر مبنای تجزیه‌ی مسئله به زیرمسئله‌های ظاهر شده در بلوک‌های ماتریس ضرایب مسئله می‌تواند به سایر مسائل دارای ساختار بلوکی در ماتریس ضرایب تعمیم یابد. همچنین می‌توان از سایر روش‌های جستجوی همسایگی هم برای بهبود جواب‌های اولیه استفاده کرد.

References

[1] D. R. Fulkerson and G. L. Nemhauser, “Two computationally difficult set covering problems that arise in computing the 1-width of incidence matrices of steiner triple systems,” *Mathematical Programming Study*, vol.2, pp.72–81, 1974.

[2] M. A. Odijk and H. van Maaren, “Improved solutions to the steiner triple covering problem,” *Information Processing Letters*, vol.65, no.2, pp.67–69, 1998.

[3] D. R. Fulkerson and G. L. Nemhauser, “A note on some computationally difficult set covering problems,” *Mathematical Programming Study*, vol.18, pp.138–145, 1980.

[4] T. A. Feo and M. G. C. Resende, “A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem,” *Operations Research Letters*, vol.8, pp.67–71, 1989.

[5] C. Mannino and A. Sassano, “Solving hard set covering problems,” *Operations Research Letters*, vol.18, pp.1–5, 1995.

[6] F. Margot, “Pruning by isomorphism in branch-and-cut,” *Mathematical Programming*, vol.94, pp.71–90, 2002.

[7] J. Ostrowski, J. Linderoth, F. Rossi, and S. Smriglio, “Orbital branching,” *Mathematical Programming*, vol.126, no.1, pp.147–178, 2011.

[8] N. Karmarkar, M. G. C. Resende, and K. G. Ramakrishnan, “An interior point algorithm to solve computationally difficult set covering problems,” *Mathematical Programming*, vol.52, no.2, pp.697–618, 1991.

[9] J. Ostrowski, J. Linderoth, F. Rossi, and S. Smriglio, “Solving large steiner triple covering problems,” *Operations Research Letters*, vol.39, pp.127–131, 2011.

[10] J. Ostrowski, J. Linderoth, F. Rossi, and S. Smriglio, “Solving large steiner triple covering problems,” *Technical Report 1663, Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison*, 2009.

[11] J. Ostrowski, J. Linderoth, F. Rossi, and S. Smriglio, “Solving large steiner triple covering problems,” *Optima*, vol.83, 2010.

[12] M. G. C. Resende, R. F. Toso, J. F. Gonçalves, and R. M. A. Silva, “A biased random-key genetic algorithm for the steiner triple covering problem,” *Optimization Letters*, vol.6, pp.605–619, 2012.

[13] C. Gao, X. Yao, T. Weise, and J. Li, “An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem,” *European Journal of Operational Research*, vol.246, no.3, pp.750–761, 2015.

[14] Y. Wang, S. Pan, S. Al-Shihabi, J. Zhou, and N. Yang, “An improved configuration checking-based algorithm for the unicost set covering problem,” *European Journal of Operational Research*, vol.294, pp.476–491, 2021.

[15] T. P. Kirkman, “On a problem in combinations,” *Cambridge and Dublin Mathematics Journal*, vol.2, pp.191–204, 1847.

[16] M. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness.* W. H. Freeman and Company, 1979.

[17] D. R. Fulkerson and H. J. Ryser, “Widths and heights of (0,1) -matrices,” *Canadian Journal of Mathematics*, vol.13, no.1, pp.239–255, 1961.

[18] M. Hall. *Combinatorial Theory.* Blaisdell Company, 1967.

Sharif University of Technology
Department of Industrial Engineering

Bachelor Thesis

A Heuristic Method for Solving Steiner Triple Covering Problems

By:

Ehsan Cheshomi

Supervisor:

Dr.Maryam Radman

September 2023