Esercizi 3AIIN 09.04.2021

- Salva in Moodle un file zip che contiene solo i pgm sorgenti.
- Formato nome file: **CognomeNomeGGMMAAAA.estensione**

dove GGMMAAAA è la data di assegnazione del lavoro.

- Terminata ogni lezione di laboratorio devi caricare in Moodle il lavoro svolto.
- A casa eventualmente puoi finirlo e/o correggerlo. Hai tempo una settimana.
- Anche chi è assente il giorno della consegna è tenuto a svolgere il lavoro assegnato.
- Verranno fatti controlli a campione e sicuramente durante le interrogazioni.

Esercizio n.1 VETTORI – STRINGHE - RECORD - FUNZIONI

Dati due vettori di record contenenti alcune informazioni su quadri e pittori, aventi rispettivamente le seguenti strutture:

typedef struct{ char titolo[DIM_STR_TITOLO]; char autore [DIM__STR_PITTORE]; double altezza; double larghezza; }quadro;	**typedef struct{ char nomePittore[DIM_STR_PITTORE]; char genere[DIM_STR_GENERE]; }pittore;** L'attributo nomePittore (= autore) è chiave primaria. L'attributo genere è una chiave secondaria.

Esempio:

Titolo	Autore	Altezza	Larghezza
Tramonto	Rossi	1.20	2.40
Tramonto	Verdi	1.20	2.40
Egitto	Verdi	0.60	0.60
Andrea	Bianchi	0.60	0.40

NomePittore	Genere
Rossi	paesaggista
Bianchi	ritrattista
Verdi	paesaggista

Scrivere le seguenti funzioni C++:

A) Stampare le informazioni di tutti i quadri di forma quadrata;

Nel nostro esempio:

Egitto	Verdi	0.60	0.60

B) Determinare il numero di quadri fatti da un certo pittore (il nome del pittore è un parametro e il numero di quadri non deve essere stampato dalla funzione);

Nel nostro esempio: input (Verdi) output (2)

C) Stampare per ogni pittore il numero dei suoi quadri;

Nel nostro esempio:

Rossi 1
Bianchi 1
Verdi 2

Scrivere un main di prova (richiama in sequenza le funzioni):

- leggiPittori() [richiedere e controllare il numero di pittori, numPittori ≤ MAX_PITTORI, poi effettua un inserimento di massa];
- leggiQuadri() [richiedere e controllare il numero di quadri, numQuadri ≤ MAX_QUADRI, poi effettua un inserimento di massa];
- stampaQuadriQuadrati();
- numQuadriPittore();
- numQuadriPerOgniPittore();

Ti consiglio, come test, di stampare il contenuto dei due vettori di record dopo che hai effettuato l'inserimento.

Esercizio n.2 Funzioni - Numeri reali

Scrivi una funzione C++ che calcola la radice quadrata di un numero reale utilizzando l'algoritmo di Newton.

La radice quadrata di un numero reale **x** può essere calcolata come limite per $n \to \infty$ della successione

$$\mathbf{y_0, y_1, y_2, \dots y_i, \dots, y_{n-1}, y_n}$$

dove i valori y_i con $i = 1, 2, 3, \dots$ sono calcolati tramite la relazione

$$\mathbf{y_i = 1/2 * (y_{i-1} + x / y_{i-1})}$$

e $\mathbf{y_0} = \mathbf{x}$ (stima iniziale).

y_i è il valore della radice all'iterazione n-esima e y_{i-1} è quello all'iterazione i-1.

Ad ogni iterazione si ottiene una approssimazione via via sempre migliore. Il processo continua fintantoché $| \mathbf{y_i} - \mathbf{y_{i-1}} | < \varepsilon$ (ad es. $\varepsilon = 1.0E-7$)

N.B. Più ε è piccolo, più preciso è il risultato.

Il procedimento presentato è un metodo iterativo, ad ogni passo (iterazione) ottieni una approssimazione migliore.

Ti ricordo che per calcolare il valore assoluto di numeri reali devi usare la funzione di libreria con prototipo: double fabs(double num);

Esempio di output a fronte dell'input: **12**

3.4641016 (ottenuto con l'utilizzo della funzione sqrt())

Precedente	**Corrente**
12.0000000	6.5000000
6.5000000	4.1730769
4.1730769	3.5243265
3.5243265	3.4646162
3.4646162	3.4641017
3.4641017	3.4641016

Radice = 3.4641016 (ottenuto applicando l'algoritmo di Newton)

Esercizio n.3   A che cosa può servire la funzione fattoriale?

Quanti modi ci sono di scegliere k elementi da un insieme di n elementi?

La teoria del calcolo combinatorio definisce combinazioni (semplici) queste modalità e il loro numero è dato dalla formula:

$$\mathbf{C_{n,k} = n! \;/\; k! * (n-k)!}$$

Scrivi un pgm C++ che utilizzi una funzione per il calcolo di $C_{n,k}$ (naturalmente il programma utilizza un'altra funzione per il calcolo del fattoriale).

Utilizzando la formula precedente, data una classe di 20 studenti determina il numero di possibili squadre da pallavolo.

Esercizio n.4   Coefficiente binomiale

Il simbolo $C_{n,k}$, utilizzato per indicare il numero di combinazioni semplici di n oggetti di classe k, viene anche indicato con il simbolo seguente che si legge semplicemente *n su k*:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Scrivi un pgm C++ che calcoli 2^n applicando la seguente relazione:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Se vuoi approfondire (facoltativo).

Coefficiente binomiale

Il simbolo $C_{n,k}$, utilizzato per indicare il numero di combinazioni semplici di n oggetti di classe k, viene anche indicato con il simbolo seguente che si legge semplicemente n *su* k:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si osservi che valgono le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1},$$

Il nome *coefficiente binomiale* deriva dal fatto che la potenza n-esima di un binomio $(a+b)^n$ può essere espressa in modo compatto come

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Codifica e numero di bit necessari

La codifica è una scelta arbitraria basata su una convenzione che chi usa la codifica deve necessariamente conoscere.

Una codifica può essere considerata buona se facilita:

- l'elaborazione nella quale la si vuole utilizzare;
- le operazioni di codifica e decodifica.

Per stabilire quanti bit sono necessari, bisogna conoscere il numero di configurazioni che la codifica deve rappresentare.

Qualche nozione di calcolo combinatorio è indispensabile.

Regola del prodotto

Una regola generale:

se una cosa può essere realizzata in n modi e per ciascuna di queste realizzazioni una seconda cosa può essere realizzata in m modi, allora il numero di realizzazioni possibili è $n \times m$.

Esempio

Una signora ha cinque cappellini, due borsette, sei paia di scarpe e dodici vestiti.

In quanti modi diversi può abbigliarsi?

Per quanto detto sopra, la signora avrà:

$$5 \times 2 \times 6 \times 12 = 720$$

possibilità di scelta.

Permutazioni (1)

Si chiamano permutazioni di n elementi distinti ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$), tutti i raggruppamenti diversi che si possono formare con gli elementi dati, rispettando le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene n elementi;
2. uno stesso elemento non può figurare più volte in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono tra loro distinti se differiscono per l'ordine con cui sono disposti gli elementi.

Permutazioni (2)

n elementi danno luogo a $n!$ permutazioni:

$$P(n) = n!$$

L'operatore indicato con il simbolo ! si chiama fattoriale e assume la seguente forma:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i & n \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 1 (1)

Sei atleti partecipano ad una gara di corsa.

- Quante possono essere le classifiche finali della gara?
  - Poiché la classifica finale non sarà altro che una permutazione della lista dei partecipanti, ci sono $P(6) = 6! = 720$ ordini di arrivo possibili.
- Quanti bit servono per codificare l'ordine di arrivo?
  - Per codificare in binario 720 configurazioni possibili, servono almeno $\lceil \log_2 720 \rceil = 10$ bit.

Questo ragionamento fornisce il minimo numero di bit da utilizzare, ma non dice come effettuare la codifica.

Esercizio 1 (2)

Si può immaginare una codifica del genere:

- ogni atleta è descritto dal suo pettorale (i numeri da 1 a 6);
- l'ordine di arrivo è rappresentato da una sequenza di sei numeri di pettorale.

In tal caso:

- ogni atleta necessita di 3 bit ($\lceil \log_2 6 \rceil = 3$);
- la codifica della classifica richiede $6 \times 3 = 18$ bit.

La codifica scelta non sarebbe quella di ingombro minimo (10 bit), ma sarebbe semplice da costruire e utilizzare.

Disposizioni (1)

Si dice disposizione semplice di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. uno stesso elemento può figurare al più una volta in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono da considerarsi distinti quando essi differiscono per almeno un elemento, o per l'ordine degli elementi.

Disposizioni (2)

Le disposizioni semplici di n elementi presi k per volta sono in totale $\frac{n!}{(n-k)!}$:

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Esercizio 2

Sei atleti partecipano ad una gara di corsa.

- In quanti modi diversi si può verificare la tripletta di atleti che arriva sul podio?
  - La classifica dei primi 3 arrivati è una disposizione di 6 elementi su 3 posti: ci possono essere $D(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = = 120$ configurazioni diverse di atleti sul podio.
- Quanti bit servono per codificare il podio?
  - Per rappresentare 120 configurazioni diverse servono $\lceil \log_2 120 \rceil = 7$ bit.

Disposizioni con ripetizione (1)

Si dice disposizione con ripetizione (o reimmissione) di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $k > 0$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. due qualsiasi raggruppamenti sono da considerarsi distinti quando essi differiscono per almeno un elemento, o per l'ordine degli elementi.

Disposizioni con ripetizione (2)

Rispetto ad una disposizione semplice, quindi, in una disposizione con ripetizione ogni elemento può essere ripetuto.

Le disposizioni con ripetizione di n su k saranno:

$$D_r(n, k) = n^k$$

Esercizio 3

Sei atleti sono impegnati in una gara di triathlon.

- Quante terne dei vincitori in ogni singola gara si possono verificare?
  - Poiché ogni atleta può vincere più di una gara, il numero cercato sono le disposizioni con ripetizione di sei elementi su tre posizioni: $D_r(6, 3) = 6^3 = 216$.
- Quanti bit servono per codificare tale tripletta?
  - Per codificare tale classifica, serviranno almeno $\lceil \log_2 216 \rceil = 8$ bit.

Combinazioni (1)

Si dice combinazione semplice di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. uno stesso elemento può figurare al più una volta in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono da considerarsi diversi soltanto quando differiscono tra loro almeno per un elemento.

Combinazioni (2)

L'ordine degli elementi non ha importanza in una combinazione.

Le combinazioni semplici di n elementi su k posti sono:

$$C(n,k) = \frac{D(n,k)}{P(k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots (n-k+1)}{k!}$$

La quantità $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ è il coefficiente binomiale di n su k, e viene indicato con:

$$\binom{n}{k}$$

Esercizio 4

Un negozio ha in vetrina lo spazio per esporre solo tre manichini ed un campionario di 7 modelli di giacca.

- Volendo mettere una giacca diversa su ogni manichino, quante vetrine può comporre?
  - Si tratta di calcolare le combinazioni semplici di 7 elementi su 3 posti: $C(7,3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$.
- Quanti bit servono per codificare tale composizione?
  - Sono necessari $\lceil \log_2 35 \rceil = 6$ bit.

Combinazioni con ripetizione (1)

Si dice combinazione con ripetizione (o con reimmissione) di n elementi distinti su k ($n, k \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $k > 0$) posizioni una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. due raggruppamenti sono da considerarsi diversi soltanto quando differiscono tra loro almeno per un elemento.

Combinazioni con ripetizione (2)

Uno stesso elemento può quindi comparire più di una volta.

Le combinazioni con ripetizione di n elementi su k posti sono:

$$C_r(n,k) = C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Esercizio 5

Un negozio ha in vetrina lo spazio per esporre solo tre manichini ed un campionario di 7 modelli di giacca.

- Quante vetrine potrebbe comporre, se ritenesse accettabile avere più copie della stessa giacca in vetrina?
  - In questo caso, si tratta di calcolare le combinazioni con ripetizione di 7 elementi su 3 posti: $C_r(7,3) = C(9,3) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$
- Quanti bit servono per codificare tale composizione?
  - Sono necessari $\lceil \log_2 84 \rceil = 7$ bit.

Riassumendo

Le permutazioni dicono in quanti modi possiamo scrivere la sequenza degli elementi di un insieme dato.

Le disposizioni e le combinazioni dicono in quanti modi si possono scrivere sequenze di sottoinsiemi di cardinalità data.

La differenza tra combinazioni e disposizioni è che queste ultime tengono in considerazione anche l’ordine degli elementi.

Il calcolo combinatorio ("l'arte di contare")

premessa

il calcolo combinatorio studia i *raggruppamenti* che si possono ottenere con un dato numero $\boldsymbol{n}$ di oggetti disposti su un dato numero $\boldsymbol{k}$ di posti.

I raggruppamenti si possono formare *senza* ripetizioni o *con* ripetizioni degli n oggetti.

Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli n oggetti sono i 7 alunni, il numero k di posti sono le 5 sedie e non c'è ripetizione di oggetti poiché gli alunni sono tutti diversi.

Ancora, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi si possono collocare 10 palline di cui 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi, in 3 scatole, gli n oggetti sono le 10 palline, il numero k di posti sono le 3 scatole e c'è ripetizione di oggetti poiché di palline ce ne sono 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi.

Esistono tre raggruppamenti possibili.

- **PERMUTAZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **uguale** al numero di posti e **conta l'ordine** con cui si dispongono. Le permutazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

- **DISPOSIZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **conta l'ordine** con cui si dispongono. Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

- **COMBINAZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **non conta l'ordine** con cui si dispongono. Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Vediamo le formule risolutive di ogni caso nella seguente tabella

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione $\boldsymbol{r}$ di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{P_n = n!}$	$\boldsymbol{P^r_n = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}}$
Disposizioni • $n \neq k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ $\quad n > k$	$\boldsymbol{D^r_{n,k} = n^k}$
Combinazioni • $n \neq k$ • $non\ conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$ $\quad n > k$	$\boldsymbol{C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}}$

esempi

permutazioni senza ripetizione di oggetti	
Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola LIBRO?	
$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola LIBRO
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola LIBRO
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
senza ripetizione	le 5 lettere sono tutte distinte quindi non c'è ripetizione di oggetti
$P_n = n!$	si applica la formula delle permutazioni senza ripetizioni di oggetti
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	ci sono 120 parole che si possono formare con le lettere della parola LIBRO

permutazioni con ripetizione di oggetti	
Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola MAMMA?	
$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola MAMMA
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola MAMMA
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
$r_1 = 3 \;\; e \; r_2 = 2$	le 5 lettere non sono tutte distinte: M si ripete 3 volte ed A si ripete 2 volte
$P_n^r = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$	si applica la formula delle permutazioni con ripetizioni di oggetti
$P_5^r = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{120}{6 \cdot 2} = 10$	ci sono 10 parole che si possono formare con le lettere della parola MAMMA

disposizioni senza ripetizioni	
In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?	
$n = 5$	gli oggetti sono i 5 alunni
$k = 3$	i posti sono le 3 sedie
conta l'ordine	le sedie sono numerate, quindi conta l'ordine con cui gli alunni si siedono
senza ripetizione	i 5 alunni sono persone tutte distinte, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	si applica la formula delle disposizioni senza ripetizioni di oggetti
$D_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{120}{2} = 60$	ci sono 60 modi diversi in cui gli alunni si possono sedere

disposizioni con ripetizioni	
Utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare?	
$n = 3$	gli oggetti sono le 3 cifre
$k = 4$	i posti sono le 4 cifre
conta l'ordine	le cifre hanno posizioni ben precise, quindi conta l'ordine con cui i numeri 1,2,3 si dispongono
$r = 4$	ciascuna cifra (1,2,3) può ripetersi fino a 4 volte per formare il numero a 4 cifre, quindi c'è ripetizione di oggetti
$D^r_{n,k} = n^k$	si applica la formula delle disposizioni con ripetizioni di oggetti
$D^r_{3,4} = 3^4 = 81$	si possono formare 81 numeri di 4 cifre usando le cifre 1, 2, 3

combinazioni senza ripetizioni	
Un negoziante vuole esporre in una piccola vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?	
$n = 10$	gli oggetti sono i 10 modelli di scarpe
$k = 4$	i posti sono le 4 paia di scarpe da esporre
non conta l'ordine	per l'esposizione non conta l'ordine
senza ripetizione	i modelli sono tutti distinti, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	si applica la formula delle combinazioni senza ripetizioni di oggetti
$C_{10,4} = \dfrac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$	ci sono 210 modi diversi per esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi

combinazioni con ripetizioni	
Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco ed il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?	
$n = 2$	gli oggetti sono i 2 colori
$k = 5$	i posti sono le 5 gocce che vanno prese di volta in volta
non conta l'ordine	per la composizione del nuovo colore non conta l'ordine
con ripetizione	per ogni colore si hanno a disposizione 5 gocce
$C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$	si applica la formula delle combinazioni con ripetizioni di oggetti
$C^r_{2,5} = \dfrac{(2+5-1)!}{5!\cdot(2-1)!} = \dfrac{6!}{5!\cdot 1!} = 6$	si possono formare solo 6 colori diversi: uno è il bianco (5 gocce bianche), uno è il nero (5 gocce nere) e poi ci sono 4 sfumature di grigio
Nelle combinazioni con ripetizione bisogna stare attenti ad individuare correttamente quali sono gli oggetti e quali sono i posti.	