TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Definizione

Sia $f(x)$una funzione continua in $[a, b]$ allora $\exists\ z \in [a, b]\ t.c.\ f(z) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, cioè $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$

Dimostrazione

Poiché per ipotesi, f è continua in $[a, b]$, per il teorema di weirstrass essa assume max M e min m $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a, b]$

Se considero le funzioni $y = m$, $y = f(x)$, $y = M$, per proprietà 4 dei integrali definiti:

$$\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b\ Mdx$$

Applicando la proprietà 5 dei integrali definiti si ottiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividendo tutti i membri per (b-a) si ottiene:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi, $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra m e M => $\exists\ z\ \in [a, b]\ t.c.$

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$