EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Definizione:

Un equazione differenziale è un qualcosa che ha per incognita $\underline{y = f(x)}$ e che contiene almeno una delle sue derivate.

$$y^{'} = 5x \ (I\ oridine)$$

L'ordine di un equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che ċompaiono ṅell'equazione.

Soluzione generale o integrale generale: Soluzione di un 'equazione generale

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI I ORDINE

Forma generale:

$$y^{'} = f(x)$$

Esempio 1

$y^{'} - x^2 + x - 2 = 0$
$y^{'} = x^2 - x + 2$
$y = \int x^2 - x + 2dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + c$

Esempio 2:

$$\begin{cases} \frac{y^{'} - x}{x^2+1} = \frac{3}{x} \\ f(1) = 0 \ (condizione\ iniziale) \end{cases}$$

$\frac{y^{'} - x}{x^2+1} = \frac{3}{x} \to y^{'} - x = 3\frac{x^2+1}{x} \to y^{'} = \frac{3(x^2+1)+x^2}{x} \to y^{'} = \frac{4x^2+3}{x}$

$y = \int \frac{4x^2+3}{x}dx \ = \int 4xdx + \int \frac{3}{x}dx \ = 2x^2 + 3\ln|x| + c$

Cerchiamo integrale particolare applicando la condizione iniziale $f(1) = 0$

$y = 2x^2 + 3\ln|x| + c \to 0 = 2 + c$

Soluzione particolare finale:

$$y = 2x^2 + 3\ln|x| - 2$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

Forma generale:

$$y^{'} = g(x)\ h(y)$$
$$\frac{dy}{dx} \ = \ g(x)\ h(y)$$
$$\int \frac{1}{h(y)} dy \ = \ \int g(x) dx$$

$g(x) \rightarrow$ funzione di x
$f(x) \rightarrow$ funzione di y

Definizione:
A first order differential equation can be solved by separation of variables when it can be written as $y^{'} = g(x)\ h(y)$, where g and h are continous functions.

Esempio:

$y^{'} \ = 2x(y-1)^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} \ = \ 2x(y-1)^2 \rightarrow \frac{1}{(y-1)^2} dy \ = \ 2x\ dx$
$\int \frac{1}{(y-1)^2} dy \ = \ \int 2x\ dx \rightarrow -\frac{1}{y-1} = x^2 + c$

$$y \ = \ \frac{1}{-x^2+c} + 1$$

EQUAZIONI LINEARI DI PRIMO ORDINE

Forma generale:

$$y^{'} \ = \ a(x)y + b(x)$$

I CASO: b(x) = 0 LINEARE OMOGENEA

$$y^{'} = a(x)y \rightarrow a\ variabili\ separabili$$

II CASO: b(x) != 0 LINEARE NON OMOGENEA

$y^{'} = -\frac{y}{x} + x$

1) Risolvo l'omogenea associata

$y^{'} = -\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} y \rightarrow \int \frac{1}{y} dy \ = \ \int -\frac{1}{y} dx \rightarrow \ln|y| \ = \ -\ln|x| + c$

2) $y = k(x)\ \frac{1}{x} \rightarrow k(x)\ \frac{1}{x} \ + \ k(x)(-\frac{1}{x^2}) \ = \frac{-k(x)\frac{1}{x}}{x}$