1 Potens- og logaritmeregler

$$a^0 = 1$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{x^y} = a^{xy}$$
$$a^{x^y} = a^{xy}$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$
$$log_a 1 = 0$$
$$log_a(x^y) = y \cdot log_a x$$
$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_b y$$
$$log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$$
$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$
$$log_e x = lnx$$

2 Trigonometri

Sin,Cos,Tan definisjon

$$\sin\theta = \frac{a}{h}$$
$$\cos\theta = \frac{b}{h}$$
$$\tan\theta = \frac{a}{b} \quad eller \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{h}{a} \quad eller \quad \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{h}{b} \quad eller \quad \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{b}{a} \quad eller \quad \frac{1}{\tan\theta}$$

Trigonometriske Identiteter

$$sin(s \pm t) = sin(s) \cdot cos(t) \pm cos(s) \cdot sin(t)$$
$$cos(s \pm t) = cos(s) \cdot cos(t) \mp sin(s) \cdot sin(t)$$
$$sin^2(t) + cos^2(t) = 1$$

Sinussetningen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

eller

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cosinussetningen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

hvor a er motstaende side i trekanten.

Arealsetningen

v er vinkel mellom sidene b og c.

$$Areal = \frac{1}{2}bc\sin v$$

Likning for en sirkel

En sirkel med sentrum (h,k) og radius $a > 0$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

En sirkel sentrum i (0,0) har likning

$$x^2 + y^2 = a^2$$

3 Funksjoner

Intervaller

Apent intervall

$$(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$$

Lukket intervall

$$[a, b] \Leftrightarrow a < x < b$$

Halvapent intervall

$$[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

$$(a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$$

Definisjon - Definisjonsmengde og verdimengde

Definisjonsmengde = D(f) = Domain = alle mulige x-verdier.
Verdimengde = R(f) = Range = verdier funksjoner kan oppna.

Definisjon - Like og oddefunksjoner

En likefunksjon(even)
f(-x)=f(x) for hver x i definisjonsmenden til f.
Grafen er symertrisk om y-aksen.
En oddefunksjon
f(-x)=-f(x) for hver x i definisjonsmenden til f
Grafen er symetrisk om origo.

Definisjon - one-to-one

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Krav: $x_1 og x_2$ ma tilhore verdimengden til f

Definisjon Den inverse funksjonen

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$
Funksjoner som opphever" hverandre
$f(f^{-1}(x)) = x$

$f(f^{-1}(y)) = y$
Krav: f ma vre one-to-one"

Egenskaper til inverse funksjoner

Grafen til f^{-1} er refleksjonen av grafen til f om linja x=y
The domain of f^{-1} is the range of f
The range of f^{-1} is the domain of f

Definisjon Den begrensede sinus funksjonen

$$Sinx = \sin x, hvis - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Definisjon Den begrensede tangens funksjonen

$$Sinx = \sin x, hvis - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Definisjon Sinus invers

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y, hvis - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(\sin x) = \arcsin(\sin x) = x, for - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(sin^{-1}) = \sin(\arcsin x) = x, for - 1 \leq x \leq 1$$

Definisjon Tangens invers

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, hvis - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}(\sin x) = \arctan(\sin x) = x, for - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(sin^{-1}) = \tan(\arctan x) = x, for - \infty < x < \infty$$

Hyperboliske funksjoner

cosh x = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
sinh x = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
cosh x = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
tanh x = $\frac{sinh}{cosh} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
sech x = $\frac{1}{cosh} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$
csch x = $\frac{1}{sinh} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$
coth x = $\frac{cosh}{sinh} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Funksjon-Invers funksjon

$$y = e^x \Leftrightarrow x = ln(y), y > 0$$

4 Grenseverdier

Definisjon Limit

Vi sier at f(x) nrmer seg grenseverdien L mens x nrmer seg a, og vi skriver:
$\lim_{x\to 0} f(x) = L$

Definisjon left og right limit

x narmer seg a fra venstre
$\lim_{x\to a-} f(x) = L$
x narmer seg a fra hoyre
$\lim_{x\to a-} f(x) = L$
Sammenheng:
$\lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$

The Squeeze Theorem

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$
$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$

Definisjon Continuity

f er continuous p et punkt c hvis
$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
Left continuous
$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$
Right continuous
$\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$

Noen grenseverdier

$$\lim_{x\to\infty} lnx = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+} lnx = -\infty$$

L'Hopitals Regel

5 Derivasjon

Ulik notasjon

$$D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = D_x f(x) = Df(x)$$

Tangentlinjer og deres stigningstall

Hvis funksjonen er continuous pa $x = x_0$ og grenseverdien eksisterer.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Tangentlinja er gitt ved:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

og vil passere gjennom punktet$P = (x_0, f(x_0))$
hvor $f(x_0) = y_0$

Definisjon - Gjennomsnittlig vekst fra x til (x+h)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Definisjon - Den deriverte(momentan vekst i x)

Den deriverte til en funksjon er en annen funsjon definert.
Punkter der funksjonen ikke er deriverbar kaller vi singulare punkter.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Theorem - Sum,differanse og konstanter

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(Cf)'(x) = Cf'(x)$$

Derivasjon av Sinus

$$(\sin x)' = \cos x$$

For bevise dette ma vi bevise at $\lim_{\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Derivasjon av Cosinus

$$(\cos x)' = -\sin x$$

For bevise dette ma vi bevise at $\lim_{\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$

Derivasjon av Tangens

Potensregelen

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Produktregelen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Brokregelen

Krav: g(x) $\neq$ 0

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Kjerneregelen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

Eksempel:

$$y = ln(2x + 2)$$

$$u = 2x + 2$$

$$y = ln(u)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 2}$$

Related rates - eksempel

Vi har et rektangel: Sidene x=10 og y=8.

$$\frac{dx}{dt} = 2$$
$$\frac{dy}{dt} = -3$$
$$A = xy$$

Vi deriverer med produktregel

$$\frac{dA}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

Newton-Raphton metode

En metode for finne f(x)=0
Tangentlinjen i punktet$(x_0, f(x_0))$er:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Punktet$(x_1, 0)$ ligger p linjen slik at:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Loser med hensyn pa x_1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Krav:$f'(x) \neq 0$
Eksempel:
Velger $x_0 = 2$

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 2 - \frac{2}{4} = 1.5$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.41667$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 1.41667 - \frac{0 - 00694}{2.8333} = 1.4142$$

Derivasjonsregler

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}$$

6 Partiell derivasjon

7 Integrasjon

Potens

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, r \neq -1$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

Delbrokoppspaltning

$\int \frac{10}{t^2-t-6} dt = \int \frac{10}{(t-3)(t+2)} dt = \int \frac{A}{(t-3)} + \frac{B}{t+2} dt$
Bestemmer A og B
$10 = (t+2)A + (t-3)B$
$t = 3 \Rightarrow 10 = (3+2)A + (3-3)B \Rightarrow A = 2$
$t = -2 \Rightarrow 10 = (-2+2)A + (-2-3)B \Rightarrow B = -2$
Fullforer integrasjonen
$\int \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t+2} dt = \int \frac{2}{t-3} dt - \int \frac{2}{t-3} dt = 2ln \mid t-3 \mid -2ln \mid t+2 \mid +C$

Volum ved hjelp av integrasjon

Volum av en gitt sylinder er:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta x$$

Ved summere sylindrene fra a til b og la hoydenΔx ga mot 0 fr vi volumet av omdreiningslegemet.
Dette tilsvarer definisjonen pa det bestemte integralet fra a til b.
Derfor er volumet av omdreningslegemet gitt ved:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Noen integraler

Ved delbroksoppspaltning
$\int \frac{1}{b+x} dx = ln \mid b + x \mid +C$
$\int \frac{1}{b-x} dx = -ln \mid b - x \mid +C$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln[x] + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln[x] + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln[x] + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln[x] + C$$

8 Tallfolger og Rekker

Definisjon folge:
En folge er en uendelig samling av tall i en bestemt rekkeflge
Definisjon rekke:
En rekke er en uendelig sum av tall
Vi skriver dette som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 ....$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$

Egenskaper til rekker

- $a_1, a_2, ...$ er ledd nr.n i folgen.
- L er nedre grense for a_n dersom $a_n \geq L$
- L er ovre grense for a_n dersom $a_n \leq L$
- Rekka er positiv dersom $a_n > 0$ for n = 1,2,3,4....
- Rekka er okende dersom $a_{n+1} > a_n$
- Rekka er avtagende dersom $a_{n+1} < a_n$
- Rekka er alternerende dersom annenhvert ledd er positivt og negativt.

Konvergens av rekker

- At en rekke konvergerer betyr at den har en sum.
- Hvis vi ser pa leddene i en konvergent rekke vil leddene bli mer lik en verdi jo senere leddet ligger i rekken.
  F.eks vil a_n ligge naermere denne verdien enn det a_{n-1} gjr.
  Vi sier at rekka konvergerer mot denne verdien.
- En rekke enten konvergerer eller divergerer.

Tips for rekkefolge

- Er rekka geometrisk, p-rekke eller
  (opplagt) teleskoprekke?

- Sjekk med n-te ledd test
- Hvis alle ledd er positive:
  Prv forholdstest(n! eller potense av n)
  Prv integraltest(hvis funksjon som lett kan integreres, f.eks trigonometriske funksjoner og logaritmer)
  Prv rottest.
- Hvis ikke alle ledd er positive:
  Sjekk absolutt konvergens med en av testene over.
  Alternerende? Bruk Alternerende rekkers test.

Teleskoprekker

Geometrisk rekke

$$\sum_{n=1} a \cdot k^{n-1} = a + ak + ak^2.. \quad , k \neq 1$$

Delsummen er gitt ved: $a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$
En uendelig geometrisk rekke konvergerer bare hvis $|k| < 1$
Da er summen, s $= \frac{a_1}{1-k}$

Potensrekker

Hvert ledd er i tilegg avhengig av enda en variabel x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \ = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2$$

Konvergens av potensrekker

- Konvergensradiusen er et tall
  R$\in (0, \infty)$
- De to grenseverdiene som gir $|x - a|$ ma sjekkes for konvergens.
- Konvergensintervallet blir da
  $(-R + a, R + a)$

- $|x-a| < R$
  $\Rightarrow$ innenfor konvergensintervallet.
- $|x-a| > R$
  $\Rightarrow$ utenfor konvergensintervallet.
- Konvergerer rekken for x=a, sier vi at R=0.
- Konvergerer rekken for alle x sier vi at R $= \infty$

Funksjon - Rekke

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots.$

n-te ledd test

$\sum_{n=1}^{\infty}$konvergerer dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n$ ikke eksisterer eller $\neq 0$
$\Rightarrow$ rekken divergerer

Forholdstesten

$\underline{Dersom \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \quad eksisterer}$

- $0 \leq p \leq 1 \Rightarrow Rekken \quad konvergerer$
- $p > 1 \Rightarrow Rekken \quad divergerer$
- $p = 1 \Rightarrow ingen \quad konklusjon$

9 Vektorregning

Skalarprodukt/Dot product

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gir et reelt tall

$$\vec{p} = [p_1, p_2, p_3], q = [q_1, q_2, q_3]$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot cos\theta \quad ,0 \leq \theta \leq \pi$$

<u>Koordinatformelen for skalarprodukt</u>

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p_1} \cdot \vec{q_1} + \vec{p_2} \cdot \vec{q_2} + \vec{p_3} \cdot \vec{q_3}$$

Vektorprodukt/Cross product

Vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ gir en ny vektor som star vinkelrett pa $\vec{a}og\vec{b}$

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot sin\theta \quad ,0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = -(\vec{q} \times \vec{p})$$

<u>Koordinatformelen for vektorprodukt</u>

gitt vektorene: $\vec{a} = [4, 2, -3], \vec{b} = [2, -3, 4]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \vec{4} & 2 & -3 \\ \vec{2} & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

9.1 Unit vektor

9.2 Skalar projeksjon

9.3 Vektor projeksjon