

Capítulo 1

Introducción a ciencia de datos

1.1. -

1.2. -

1.3. Análisis predictivo

Un problema común en ciencia de datos es identificar el grupo (clase) al cual pertenece una observación, utilizando un conjunto de atributos de dicha observación. Por ejemplo, muchos clientes de email envían los mensajes recibidos a diferentes carpetas, tales como *entrada*, *promociones*, etc. En ocasiones los mensajes contienen *links* a sitios web con malware, en otras son mensajes enviados masivamente, es decir a gran cantidad de personas; resulta deseable que el cliente pueda enviar este tipo de mensajes a la carpeta de *spam* o ponerlos en cuarentena. Sin embargo, es raro que un mensaje entrante contenga todos los atributos para clasificarlo como peligroso, por tanto debe usarse una función predictiva.

Un algoritmo para clasificar mensajes de correo debe extraer datos de los mensajes, tales como la presencia de palabras específica o el número de letras mayúsculas utilizadas; con esta información se genera un vector de atributos predictores y se procesa con la función de predicción; esta función se encargará de devolver la clase a la que pertenece el mensaje recibido. Antes de utilizar una función para predecir, se debe revisar a detalle para buscar que tenga alta precisión; el tópico de la predicción y el aseguramiento de la precisión se conoce como *análisis predictivo*¹.

1.3.1. La tarea de predicción

El propósito de este tipo de algoritmos es obtener el valor de una variable objetivo a partir de un vector predictor; generalmente el objetivo es una variable categórica: una etiqueta que indica el grupo al que pertenece la observación. El analista no posee datos de la etiqueta pero, en cambio, tiene información codificada en los atributos de su vector.

¹Este es el término usado en ciencia de datos; en estadística se conoce como aprendizaje estadístico y *machine learning* (aprendizaje automático) en computación.

1.3.2. Funciones de predicción k -vecinos

Una función de predicción de este tipo utiliza un conjunto de de observaciones en pares $D = \{(y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n)\}$ para los cuales se conocen todos los y_i valores objetivo; una observación objetivo es un par (y_0, \mathbf{x}_0) para el que se desea calcular el valor de su variable objetivo y_0 . La versión más sencilla de esta función de predicción para problemas de clasificación opera determinando las k observaciones más cercanas (similares) a (y_0, \mathbf{x}_0) , basada en las distancias entre \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_i ; el valor de la predicción será la etiqueta más entre las observaciones más cercanas: sus k -vecinos. En el caso de variables cuantitativas, la predicción del algoritmo básico es la media de sus k -vecinos.

1.3.2.1. Notación

Una observación con valor objetivo y_0 desconocido, se denota como $\mathbf{z}_0 = (y_0, \mathbf{x}_0)$, en donde el vector predictor \mathbf{x}_0 de longitud p ha sido observado y se utilizará para predecir el valor de y_0 . La función de predicción $f(\cdot|D)$ se construye a partir del conjunto de datos $D = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$; la notación condicional de $f(\cdot|D)$ enfatiza el papel del conjunto de entrenamiento D . La predicción de y_0 se denota como $\hat{y}_0 = f(\mathbf{x}_0|D)$. Por ejemplo, si el objetivo es un valor **cuantitativo**, se puede utilizar una regresión lineal como función predictiva: $f(\mathbf{x}_0|D) = \mathbf{x}_0^T \hat{\beta}$.

En general, la función de predicción no tiene una forma simple y se trata de un algoritmo de varios pasos que toma como entrada \mathbf{x}_0 y devuelve la predicción y_0 . Si la variable es **cualitativa**, se asume que la variable objetivo es una etiqueta que identifica la pertenencia a algún grupo; si el número de grupos es g , entonces por convención el conjunto de etiquetas es $\{0, 1, \dots, g-1\}$.

Además, es recomendable contar con funciones indicadoras que identifiquen la pertenencia a los grupos; el indicador de pertenencia al grupo j se define como:

$$I_j(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = j \\ 0, & \text{si } y \neq j \end{cases}$$

donde y es una etiqueta de grupo.

1.3.2.2. Métricas de distancia

Es común utilizar las distancias euclídeana y Manhattan para calcular distancias entre vectores predictores.

La **distancia euclídeana** entre los vectores p -dimensionales \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_i se obtiene como:

$$d_E(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = \left[\sum_{j=1}^p (x_{i,j} - x_{0,j})^2 \right]^{1/2}$$

Si las variables del predictor difieren mucho con respecto a la variabilidad de las variables del conjunto de entrenamiento, es muy recomendable escalar cada variable con la desviación estándar de la misma; sin este proceso, las diferencias serán muy grandes y tenderán a sesgar la predicción. El escalamiento puede calcularse al momento de obtener la distancia como:

$$d_S(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = \left[\sum_{j=1}^p \left(\frac{x_{i,j} - x_{0,j}}{s_j} \right)^2 \right]^{1/2},$$

donde s_j es la desviación estándar estimada de la j -ésima variable predictora; la varianza se calcula como:

$$s_j^2 = (n - g)^{-1} \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^n I_k(y_i) (x_{i,j} - \bar{x}_{j,k})^2,$$

donde $\bar{x}_{j,k}$ es la media del atributo j dentro del grupo k ; la presencia de $I_k(y_i)$ asegura que en la sumatoria interna sólo se consideren las observaciones del grupo correspondiente.

La **distancia Manhattan** (*city-block*) entre \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_i se calcula como:

$$d_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^p |x_{i,j} - x_{0,j}|,$$

de igual forma, puede utilizarse escalamiento para evitar sesgos en el cálculo.

En realidad en la mayoría de las aplicaciones de este algoritmo, es más imputante elegir el tamaño k del vecindario, dado que las métricas suelen devolver ordenamientos similares para los vecindarios.

Si un predictor consiste de p variables **cualitativas**, entonces la distancia más usada es la de **Hamming** para comparar \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_i ; esta métrica determina el número de atributos que son diferentes entre ambos vectores; se calcula como:

$$d_H(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = p - \sum_{j=1}^p I_{x_{i,j}}(x_{0,j}),$$

nótese que $I_{x_{i,j}}(x_{0,j})$ es 1 siempre que $x_{i,j} = x_{0,j}$ y 0 en otro caso; entonces la suma cuenta el número de atributos distintos entre ambos vectores.

1.3.2.3. La función de predicción de los k -vecinos más cercanos

La predicción de y_0 con el algoritmo de k -vecinos se obtiene determinando un vecindario de las k observaciones de entrenamiento más cercanas a \mathbf{x}_0 ; después se calcula la proporción de los k vecinos que pertenecen al grupo j y se predice el valor de y_0 como el grupo con la mayor proporción entre los vecinos. Esta regla de predicción es equivalente a predecir que \mathbf{z}_0 pertenece al grupo más común entre los k vecinos más próximos.

Formalmente, la función de predicción que estima la probabilidad de pertenencia al grupo j se define como la proporción de los miembros del grupo j entre los k vecinos más cercanos:

$$\widehat{Pr}(y_0 = j | \mathbf{x}_0) = \frac{n_j}{k}, j = 1, \dots, g,$$

donde n_j es el número de vecinos dentro de los k más próximos que pertenecen a j . Resulta útil tener una expresión para $\widehat{Pr}(y_0 = j | \mathbf{x}_0)$ en términos de variables indicadoras:

$$\widehat{Pr}(y_0 = j | \mathbf{x}_0) = k^{-1} \sum_{i=1}^k I_j(y_{[i]})$$

Los corchetes denotan el valor objetivo del i -ésimo vecino más cercano; es decir, el vecino más próximo $\mathbf{z}_{[1]}$ tiene como valor objetivo $y_{[1]}$. Las probabilidades de pertenencia estimadas se agrupan como un vector:

$$\widehat{\mathbf{p}}_0 = \left[\widehat{Pr}(y_0 = 1 | \mathbf{x}_0), \dots, \widehat{Pr}(y_0 = g | \mathbf{x}_0) \right]^T$$

El último paso para calcular la predicción obtiene el valor más grande dentro de $\hat{\mathbf{p}}_0$:

$$f(\mathbf{x}_0|D) = \arg \max (\hat{\mathbf{p}}_0)$$

La función $\arg \max$ devuelve el índice del elemento más grande de un vector, en este caso, de $\hat{\mathbf{p}}_0$; en el caso de existir empate entre varios valores, devolverá el primero de ellos. Sin embargo, es mejor idea romper los empates de otra forma, por ejemplo incrementando el valor de k en uno y recalculando $\hat{\mathbf{p}}_0$.

Un algoritmo computacional eficiente para la predicción con k vecinos consiste de dos funciones principales:

- ◇ obtener el arreglo ordenado $\mathbf{y}^o = (y_{[1]}, \dots, y_{[n]})$ para las entradas $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$
- ◇ calcular los elementos de $\hat{\mathbf{p}}$ y utilizar los primeros k elementos de \mathbf{y}^o

Las funciones de predicción k -vecinos más cercanos son conceptualmente simples y rivalizan con otras más sofisticadas en cuanto a la precisión de sus predicciones; el problema principal es que este tipo de algoritmos pueden ser computacionalmente muy costosos.

1.3.2.4. k -vecinos más próximos ponderados exponencialmente

El algoritmo convencional puede mejorarse en precisión; la idea es utilizar todos los vecinos y no solamente k de ellos. A cada vecino se le asigna una medida de importancia (peso) para determinar $f(\mathbf{x}_0|D)$ de acuerdo a su distancia relativa con \mathbf{x}_0 ; de esta forma, el vecino más próximo recibe el mayor peso y los demás decaen a cero conforme nos movemos a vecinos más distantes. Además, esta forma del algoritmo evita el problema de los empates en la predicción.

Primero, se debe obtener la suma de los pesos para todos los n vecinos; los pesos son:

$$w_i = \begin{cases} 1/i, & \text{si } i \leq k \\ 0, & \text{si } i > k \end{cases},$$

para $i = 1, \dots, n$; con esto el estimador alternativo de la probabilidad de pertenencia

$$\widehat{Pr}(y_0 = j|\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^k w_i I_j(y_{[i]})$$

Este estimador indica que los pesos son iguales a $1/k$ para los primeros k vecinos y se vuelven 0 para el resto; es difícil justificar esta caída tan abrupta en los valores; una forma más plausible es que el contenido de la información decaiga con cada vecino más lejano, es decir, que tengan una caída suavizada.

El algoritmo de k -vecinos más próximos ponderados exponencialmente estima la probabilidad de pertenencia utilizando un conjunto de pesos diferentes. En la función convencional, la influencia de los vecinos está determinada por el tamaño k del vecindario; en cambio, con el algoritmo de pesos ponderados, la influencia de los vecinos depende de una constante α , un valor entre 0 y 1 que sirve para afinar la predicción; los pesos se definen como:

$$w_i = \alpha (1 - \alpha)^{i-1}, i = 1, \dots, n,$$

para $0 < \alpha < 1$; la suma de los pesos será aproximadamente 1, dado que n es grande.

Tarea: _____

◇ Demuestra que para $0 < \alpha < 1$, se cumple que $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^{i-1}$

*

La parte izquierda de la figura 1.1 muestra los pesos correspondientes al algoritmo convencional de k -vecinos para valores de 3, 5, 10, y 20; mientras que el derecho presenta los pesos similares en el algoritmo ponderado exponencialmente para diferentes valores de α . Es importante notar que los pesos en 0.333, 0.2, 0.1 y 0.05 son iguales a los pesos correspondientes a los valores recíprocos de k .

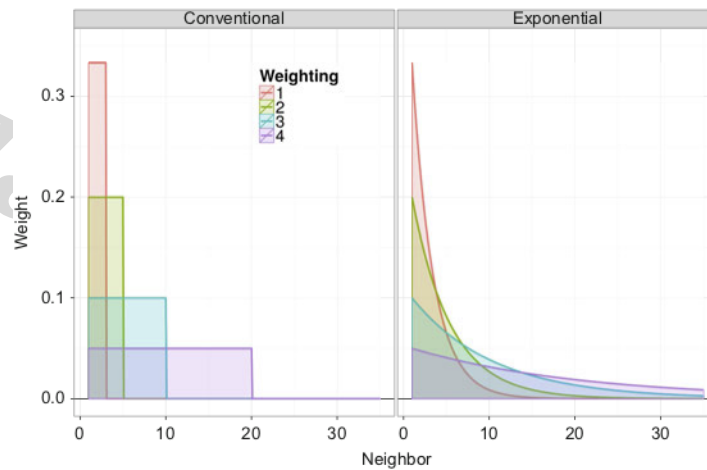


Figura 1.1: k -vecinos más próximos ponderados exponencialmente

La elección de α , generalmente es simple si se toma en cuenta que el vecino más próximo recibe el peso α ; por ejemplo, $\alpha = 0.2$ implica que el vecino más cercano recibirá el mismo peso que corresponde a la función de predicción convencional de 5-vecinos más cercanos.

1.3.2.5. Ejemplo

Construcción de un sistema de recomendación de *anime* basado en similitudes.

```
# bibliotecas
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# datos
anime = pd.read_csv("https://bit.ly/2kiJkrW")
anime.head()
```

```
# verificando nulos
anime.isnull().sum()
```

Preprocesamiento

episodes

Muchos animes tienen un número desconocido de episodios e incluso algunos que siguen al momento, se especifican como “*unknown*”, en la fuente de los datos se especifica que algunos fueron llenados manualmente (*known_animes*)

Para otros se toman decisiones fundamentadas:

- ◇ Animes agrupados en la categoría *Hentai* generalmente tienen sólo 1 episodio
- ◇ Animes agrupados en *OVA* (*Original Video Animation*) generalmente tienen 1 ó 2 capítulos (los más populares 2 ó 3); se decidió por en valor 1
- ◇ Animes agrupados como *Movies* se consideran de 1 episodio
- ◇ Para todos los demás que tienen valor “*unknown*”, se llenan con la mediana (2)

```
known_animes = {"Naruto Shippuuden":500,"One Piece":784,"Detective Conan":854,
                "Dragon Ball Super":86,"Crayon Shin chan":942,
                "Yu Gi Oh Arc V":148,"Shingeki no Kyojin Season 2":25,
                "Boku no Hero Academia 2nd Season":25,
                "Little Witch Academia TV":25}

#known_animes
for k,v in known_animes.items():
    anime.loc[anime["name"]==k,"episodes"] = v

anime.loc[(anime["genre"]=="Hentai") & (anime["episodes"]=="Unknown"),
          "episodes"] = "1"
anime.loc[(anime["type"]=="OVA") & (anime["episodes"]=="Unknown"),
          "episodes"] = "1"
anime.loc[(anime["type"] == "Movie") & (anime["episodes"] == "Unknown")] = "1"

anime["episodes"]=anime["episodes"].map(lambda x:np.nan if x=="Unknown" else x)
anime["episodes"].fillna(anime["episodes"].median(),inplace = True)
```

type: se puede usar *get_dummies*

```
pd.get_dummies(anime[["type"]]).head()
```

members: sólo se convierte a *float*

rating: los valores faltantes se sustituyen por la mediana

genre: se usan *dummies*

```
anime["members"] = anime["members"].astype(float)
anime["rating"] = anime["rating"].astype(float)
anime["rating"].fillna(anime["rating"].median(), inplace = True)
```

```
# Concatenando todas las características
anime_features = pd.concat([anime["genre"].str.get_dummies(sep=","),
                           pd.get_dummies(anime[["type"]]),
                           anime[["rating"]], anime[["members"]],
                           anime["episodes"]], axis=1)

# eliminar los símbolos 'raros' de los nombres
import re
anime["name"] = anime["name"].map(lambda name: re.sub('[^A-Za-z0-9]+', " ", name))
anime_features.head()
```

“episodes”, “members” y “rating” tienen valores muy distintos a las variables categóricas para evitar sesgos se utiliza *MinMaxScaler*:

```
# Escalando
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler
min_max_scaler = MinMaxScaler()
anime_features = min_max_scaler.fit_transform(anime_features)
# resultado del escalamiento
np.round(anime_features, 2)
```

```
# modelo KNN
from sklearn.neighbors import NearestNeighbors
```

```
# BallTree for fast generalized N-point problems
#https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.neighbors.BallTree.
nbrs = NearestNeighbors(n_neighbors=6, algorithm='ball_tree')
nbrs.fit(anime_features)

distances, indices = nbrs.kneighbors(anime_features)
```

Ejemplos de consultas:

A veces los nombres de los animes en japonés e inglés no son exactamente iguales, por eso se requieren algunas funciones auxiliares.

```
all_anime_names = list(anime.name.values)
# funciones auxiliares
def get_index_from_name(name):
    return anime[anime["name"]==name].index.tolist()[0]
def get_id_from_partial_name(partial):
    for name in all_anime_names:
        if partial in name:
            print(name, all_anime_names.index(name))
```

```
# uso de get_id_from_partial_name
get_id_from_partial_name("Naruto")
```

```
# busca animes similares, puede ser por id o por nombre
def print_similar_animes(query=None, id=None):
    if id:
        for id in indices[id][1:]:
            print(anime.iloc[id]["name"])
    if query:
        found_id = get_index_from_name(query)
        for id in indices[found_id][1:]:
            print(anime.iloc[id]["name"])
```

```
# uso de print_similar_animes
print_similar_animes(id=719)

print_similar_animes(query="Naruto")

print_similar_animes("Noragami")

print_similar_animes("Gintama")

print_similar_animes("Fairy Tail")
```

Original:

<https://gist.github.com/Tahsin-Mayeesha/81dcdafc61b774768b64ba5201e31e0a>

1.3.2.6. Regresión k -vecinos

Las funciones de predicción k -vecinos pueden adaptarse para ser usadas con variables objetivo cuantitativas: para predecir variables cuantitativas, las funciones k -vecinos son alternativas a funciones de predicción basadas en regresión.

El objetivo es predecir la variable objetivo y_0 , usando un vector predictor \mathbf{x}_0 y una función entrenada con un conjunto de pares de variables objetivo y predictoras $D = \{(y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n)\}$. La predicción es un promedio ponderado del conjunto ordenado de objetivos $y_{[1]}, \dots, y_{[n]}$ dado por:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^n w_j y_{[j]}$$

donde el orden $y_{[1]}, \dots, y_{[n]}$ se determina con las distancias desde \mathbf{x}_0 hasta $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$; los w_i pueden ser tanto los pesos usados función k -vecinos convencional como los usados en la función k -vecinos exponencialmente ponderados.

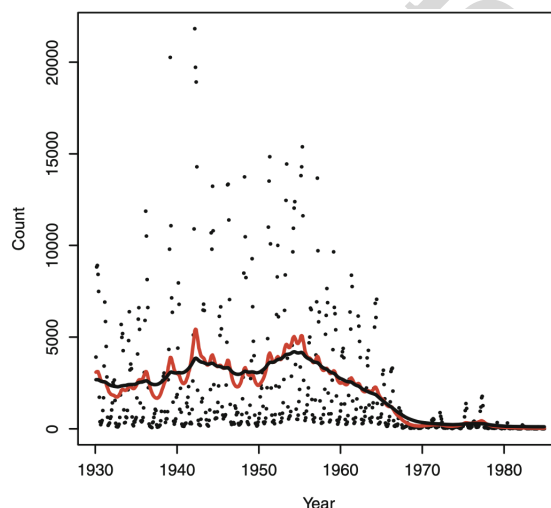


Figura 1.2: k -vecinos más próximos usado para regresión

La figura 1.2 muestra el número de casos reportados de **sarampión** por mes en California entre 1930 y 1985; adicionalmente, muestra el número de casos predicho por la función de regresión k -vecinos ponderados exponencialmente para dos valores de la constante de suavizado α : Las predicciones para el valor $\alpha = 0.05$ (rojo) es mucho menos suave que las predicciones obtenidas con $\alpha = 0.02$ (negro). Estas líneas, que muestran ciertas *tendencias* al eliminar variaciones de corto plazo, se conocen comúnmente como *suavizados*.

En la gráfica se puede observar que existió gran cantidad de variaciones en el número de casos entre 1930 y 1960; en 1963 se obtuvo una vacuna eficiente para el sarampión y los casos comenzaron a bajar hasta ser casi nulos para 1980. El suavizado rojo varios ciclos anuales en el número de casos mientras el suavizado negro captura la tendencia de largo plazo.

Programa:

- ◇ Implementar *desde cero* el algoritmo k -vecinos más próximos convencional con la medida de distancia euclideana y *city-block*

*

1.3.3. Función de predicción: clasificador bayesiano multinomial

La función de predicción bayesiana (*inocente*, *naive*) es un algoritmo conceptual y computacionalmente simple; se dice que es *inocente* debido a que se presupone que las características son independientes una de la otra. En general su rendimiento no es el mejor cuando se trata de variables predictoras cuantitativas; se comporta aceptablemente bien cuando se tienen variables categóricas y es bastante bueno cuando se tienen variables categóricas con gran cantidad de categorías.

1.3.3.1. Introducción

Considerando problemas de predicción en los que las variables predictoras son categóricas; por ejemplo, los clientes que realizan sus compras en una tienda departamental se pueden clasificar en uno de múltiples grupos según sus hábitos de compra; los datos de entrenamiento pueden consistir de una enorme lista de productos adquiridos, cada uno puede ser identificado por una categoría, tales como perecederos, electrónica, *hardware*, etc. Fácilmente el número de grupos puede exceder los cientos, incluso miles; esto imposibilita el uso del algoritmo de k -vecinos; existen varios algoritmos alternativos para atacar este tipo de problemas, pero la *función de predicción multinomial bayesiana (inocente)* sobresale por la simplicidad de su algoritmo. Antes de los ejemplos de uso, se muestra el desarrollo de su fundamento matemático.

1.3.3.2. La función de predicción multinomial bayesiana

El problema se establece de la siguiente manera: la clase a la que pertenece la observación $\mathbf{z}_0 = (y_0, \mathbf{x}_0)$, es y_0 y \mathbf{x}_0 es su vector predictor; una función predictora $f(\cdot|D)$ se construye a partir de D , el conjunto de observaciones de entrenamiento. La predicción de y_0 es $\hat{y}_0 = f(\mathbf{x}_0|D)$; la diferencia es que \mathbf{x}_0 es un vector de contadores: cada elemento de \mathbf{x}_0 almacena el número de veces en que un tipo particular (categoría) o nivel de una variable cualitativa fue observada.

Sea $x_{0,j}$ el número de veces en que un tipo t_j aparece en el *documento* F_0 ; por ejemplo, si un cliente compró tres productos en el departamento de electrónica, en su nota se puede contabilizar esa cantidad (la nota es el *documento* del que se extrae el dato). Entonces, $\mathbf{x}_0 = [x_{0,1}, \dots, x_{0,n}]^T$ contiene las frecuencias de los tipos para el documento F_0 y existen n tipos diferentes dentro del conjunto de tipos T .

El *propietario* (clase) de F_0 se denota como y_0 y pertenece al conjunto de propietarios: $y_0 \in \{P_1, \dots, P_m\}$; la probabilidad de que el tipo t_j se encuentre en F_0 está dada por:

$$\pi_{k,j} = \Pr(t_j \in F_0 | y_0 = P_k)$$

La probabilidad $\pi_{k,j}$ es específica para cada clase, pero no varía entre documentos del mismo propietario. Como t_j pertenece necesariamente a T , entonces $\sum_{j=1}^n \pi_{k,j} = 1$. La probabilidad de ocurrencia del tipo t_j puede variar entre diferentes propietarios; si las diferencias son substanciales, entonces se puede utilizar una función de predicción para discriminar entre los propietarios dado un vector de frecuencias \mathbf{x}_0 .

Por ejemplo, si sólo existen dos tipos, dos propietarios y sus apariciones entre documentos son independientes, entonces la probabilidad de observar un vector particular, digamos $\mathbf{x}_0 = [27, 35]^T$, se puede calcular usando la distribución binomial:

$$\Pr(\mathbf{x}_0 | y_0 = P_k) = \frac{(27 + 35)!}{27! \times 35!} \pi_{k,1}^{27} \pi_{k,2}^{35}$$

Recordando que la variable aleatoria binomial calcula la probabilidad de observar x éxitos entre n intentos; la probabilidad de x éxitos y $n - x$ fallas se obtiene como:

$$\Pr(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x},$$

para $x \in \{0, 1, \dots, n\}$; la expresión anterior toma en cuenta el hecho que $\pi_2 = 1 - \pi_1$.

Los valores de cada $\pi_{k,i}$ son estimaciones basadas en conjuntos de datos previos y se sustituyen sus valores al momento del cálculo.

Con esto, la definición de la función de predicción es:

$$\hat{y}_0 = f(\mathbf{x}_0|D) = \arg \max \{\Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_1), \dots, \Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_m)\}$$

En general, el número de categorías es sustancialmente mayor que dos y el cálculo de la probabilidad requiere una extensión al de la distribución binomial. Al igual que en la distribución binomial, la versión multinomial supone que el número de ocurrencias de cierto tipo son eventos independientes, entonces la probabilidad de observar al vector de frecuencias \mathbf{x}_0 está dada por la función de probabilidad multinomial:

$$\Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_k) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_{0,i})!}{\prod_{i=1}^n x_{0,i}!} \pi_{k,1}^{x_{0,1}} \times \dots \times \pi_{k,n}^{x_{0,n}}$$

El término que incluye factoriales se conoce como *coeficiente multinomial*, tal como el coeficiente binomial $n!/x!(n-x)!$. Al ser computacionalmente costoso, se busca evitar su cálculo y puede realizarse para determinar la función de predicción.

Tarea: _____

◇ Con $\mathbf{x}_0 = [27, 35]^T$, suponiendo que existen tres propietarios y que $\pi_{1,1} = 0.5$, $\pi_{1,2} = 0.3$, $\pi_{2,1} = 0.3$, $\pi_{2,2} = 0.4$, $\pi_{3,1} = 0.4$ y $\pi_{3,2} = 0.5$:

- Calcula $\Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_k)$ para $k = 1, 2, 3$ y determina la predicción:

$$\hat{y}_0 = \arg \max \{\Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_1), \Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_2), \Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_3)\}$$

*

1.3.3.2.1. Probabilidad posterior La función predictora de Bayes puede mejorarse al tomar en cuenta información previa. Por ejemplo, al tratar de asignar un documento a algún propietario se puede tomar en cuenta cierto conocimiento histórico sobre documentos ya clasificados para obtener el valor de las *probabilidades previas*. Incluso en ausencia de más evidencias (p.e. el vector de frecuencias), al buscar determinar al propietario de algún documento, se debería elegir a aquel que tenga la mayor cantidad hasta el momento.

La fórmula de Bayes conjunta la información contenida en el vector de frecuencias y la información previa para determinar la probabilidad posterior de la propiedad de algún documento:

$$\Pr(y_0 = P_k|\mathbf{x}_0) = \frac{\Pr(\mathbf{x}_0|y_0 = P_k) \times \Pr(y_0 = P_k)}{\Pr(\mathbf{x}_0)}$$

La predicción de la propiedad será aquella con la mayor probabilidad subsecuente; la predicción se obtiene como:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= \arg \max_k \{ \Pr(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0) \} \\ &= \arg \max_k \left\{ \frac{\Pr(\mathbf{x}_0 | y_0 = P_k) \times \Pr(y_0 = P_k)}{\Pr(\mathbf{x}_0)} \right\}\end{aligned}$$

El denominador $\Pr(\mathbf{x}_0)$ escala las probabilidades subsecuentes por el mismo factor y no afecta el orden de las mismas; por tanto puede simplificarse a una expresión más práctica:

$$\hat{y}_0 = \arg \max_k \{ \Pr(\mathbf{x}_0 | y_0 = P_k) \times \Pr(y_0 = P_k) \}$$

Como el coeficiente multinomial depende solamente del vector \mathbf{x}_0 y tiene el mismo valor para cualquier P_k , puede ser ignorado en el cálculo de $\Pr(\mathbf{x}_0 | y_0 = P_k)$, dado que sólo nos interesa determinar cual de las probabilidades posteriores es mayor.

Las probabilidades multinomiales ($\pi_{k,j}$) son desconocidas, pero pueden estimarse a partir de la información previa, evitando el cálculo del coeficiente multinomial; así, la función de Bayes en términos de las probabilidades estimadas es:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= \arg \max_k \{ \widehat{\Pr}(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0) \} \\ &= \arg \max_k \left\{ \hat{\pi}_{k,1}^{x_{0,1}} \times \dots \times \hat{\pi}_{k,n}^{x_{0,n}} \times \hat{\pi}_k \right\},\end{aligned}$$

donde $x_{0,j}$ es la frecuencia de ocurrencia del tipo t_j en el documento F_0 ; la probabilidad estimada $\hat{\pi}_{k,j}$ es la frecuencia relativa de la ocurrencia de t_j entre todos los documentos pertenecientes a P_k ; finalmente, $\hat{\pi}_k = \widehat{\Pr}(y_0 = P_k)$ es la probabilidad previa estimada de que el documento pertenezca a P_k .

Una vez que se observa al vector \mathbf{x}_0 , se utiliza la información que contiene para actualizar las probabilidades posteriores. Si no se cuenta con información previa, se deben utilizar probabilidades previas *no informativas*: $\pi_1 = \dots = \pi_g = 1/g$, suponiendo que hay g propietarios.

Para utilizar la fórmula de Bayes, se necesita estimaciones de las probabilidades $\pi_{k,j}$, $j = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, g$; para obtenerlas se usan las proporciones muestrales o probabilidades empíricas:

$$\hat{\pi}_{k,j} = \frac{x_{k,j}}{n_k},$$

donde $x_{k,j}$ es el número de ocurrencias de t_j en los documentos pertenecientes a P_k y $n_k = \sum_j x_{k,j}$ es el total de todas la frecuencias de tipos para el propietario P_k . Se puede presentar un subdesbordamiento (*underflow*) si los exponentes de $\hat{\pi}_{k,j}^{x_{0,j}}$ son grandes y las bases son pequeñas; para evitarlo se busca al propietario con la mayor probabilidad *logarítmica-posterior*:

$$\arg \max_k \{ \widehat{\Pr}(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0) \} = \arg \max_k \left\{ \log \left[\widehat{\Pr}(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0) \right] \right\}$$

Con esto, la versión final de la función de predicción bayesiana multinomial es:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= \arg \max_k \left\{ \log \left[\widehat{\Pr}(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0) \right] \right\} \\ &= \arg \max_k \left\{ \log(\hat{\pi}_k) + \sum_{j=1}^n x_{0,j} \log(\hat{\pi}_{k,j}) \right\}\end{aligned}$$

Tarea: _____

- ◇ Para el mismo ejemplo, suponiendo las probabilidades previas $\pi_1 = 0.8$, $\pi_2 = \pi_3 = 0.1$, determina las probabilidades posteriores $\Pr(y_0 = P_k | \mathbf{x}_0)$ para $k = 1, 2, 3$ y determina la predicción \hat{y}_0 .

*

Eduardo Espinosa A.