SHOCKLEY-JAMES 悖论

BY 刘成锴 518030910425

一、前言

为了解决牛顿力学和麦克斯韦电磁理论之间的矛盾，爱因斯坦提出了狭义相对论。基于对狭义相对论的正确理解，使许多表面上的悖论得到解决。那时候，讨论主要集中在电磁波的传播上。

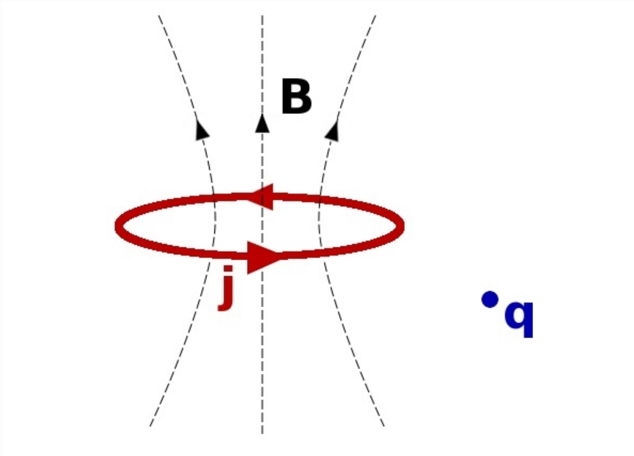
现在，来解决一个不同类型的悖论。W. Schockley（物理诺奖得主、晶体管的发明人之一威廉·肖克利） 和 R. P. James于20世纪60年代末提出的一个简单的电荷系统。要理解这个系统中线动量的守恒性，需要作仔细的相对论分析。 如果一个点电荷处在一个磁环强度变化的磁体附近，这个电荷会感应电力的作用，但这个磁体不会受到表观的反作用力。 （假设这个过程非常慢，忽略任何电磁辐射以及任何由电磁波带走的动量）这样的话，我们似乎可以得到一个发射炮弹没有反冲（后坐力）的大炮。

在这个问题中，我们将对这个系统进行分析，并且通过探究发现，在相对论力学中，一个复合体系可以具有非零的机械动量，而仍然可以保持静止。

二、SHOCKLEY-JAMES 悖论介绍

我们通过这样一个模型来理解Shockley-James悖论中的基本问题。

如图所示：



一个点电荷在一个静止的磁体（图中是一个电流环）的外部静止。电流环中的电流为 j 。电荷的质量为m，电量为q，电荷的位置$x(t)$满足如下动力学方程：

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = q[\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{0}$$

因为磁体不产生电场且电荷静止，磁体质心的位置$X(t)$满足如下方程

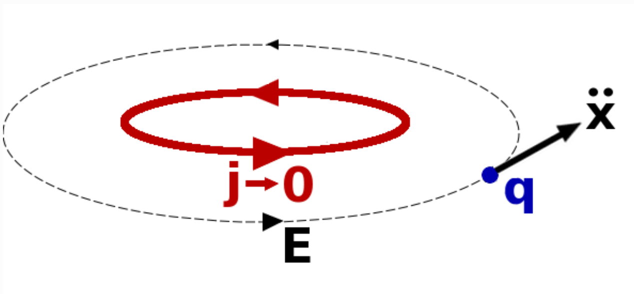
$$M\ddot{\mathbf{X}} = \int [\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}] d^3\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

其中，ρ是电荷密度，M是磁体的总质量。因为$\rho = 0$，且静止电荷q不产生磁场，所以以上等式成立。

以上便是系统的初态，电荷和磁体都处于静止状态。现在我们让 j 逐渐减小至0（实际可行方法有很多，在此不具体阐述），该过程可能花费任意长的时间，并且忽略电流变化所产生的的任何辐射。由此会产生磁通量Φ的变化。

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

产生的感生电场会导致点电荷加速，如图所示：



然而，磁体并没有受到等大反向的力。有人可能会认为，由于电荷开始运动，会产生一个磁场，该磁场会推动磁体。确实有这样一个力，但是它是$\dot{\boldsymbol{x}}/c$ 小于电荷上的力的因数 ，并且取决于m 。为了简化问题，我们考虑一个重电荷，它受到相同的力，但是与光速相比，其移动速度很小，因此产生的磁场可以忽略不计。

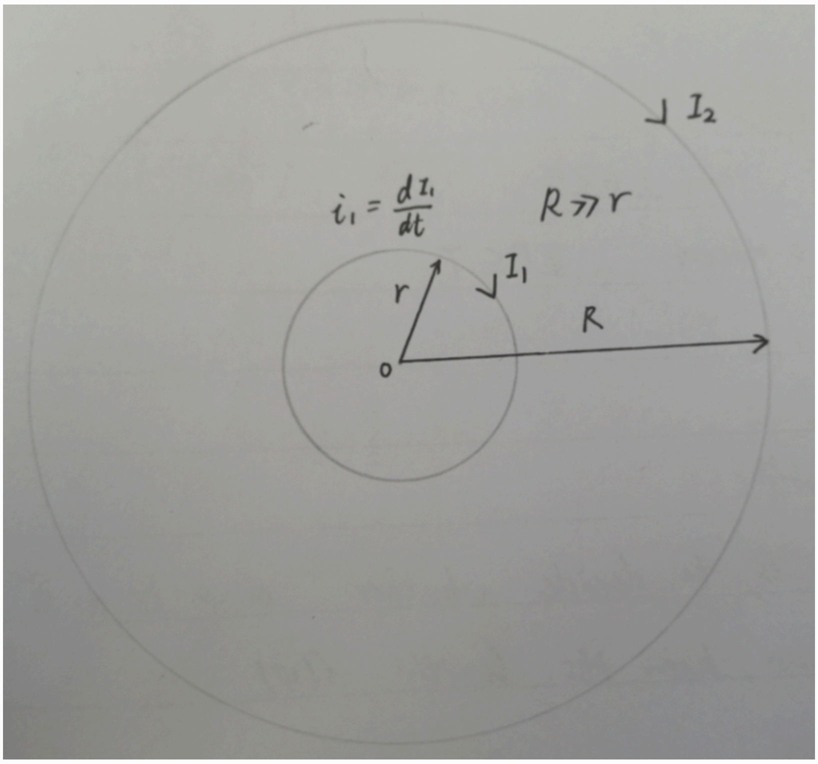
于是我们有一个悖论：在此之后，j 减小到零，整个系统的质心从静止状态开始运动。在牛顿力学中，由于牛顿第三定律，封闭系统的质心以恒定速度运动。那么，电荷和磁体的相互作用不遵守牛顿第三定律了吗?

（以上为本人翻译，具体可以参考原版英文叙述 http://people.exeter.ac.uk/sh481/shockley-james.html）

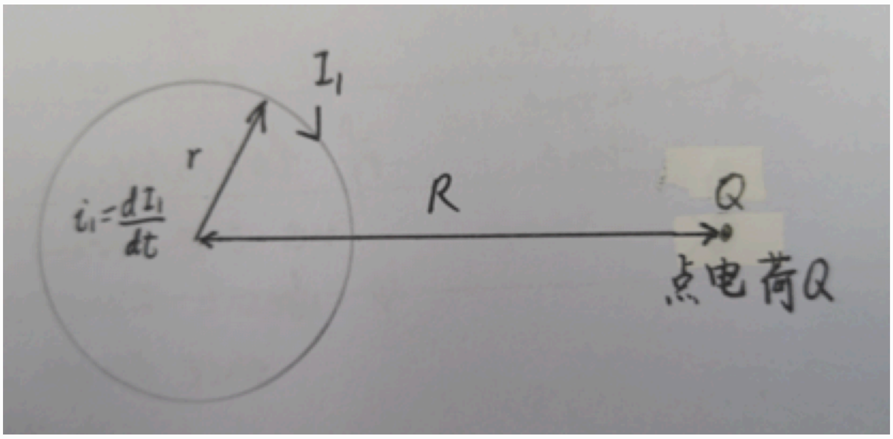
三、构造模型进行分析

（一）作用在点电荷上的冲量

为了方便计算，考虑一个半径为r，电流为I_1的圆形电流环，以及另一个更大的，半径$R \gg r$的圆形电流环，两个环共圆心，并且在同一平面上。并且，小电流环中的电流变化$i_1 = dI_1/dt$。如图所示：



现在拿走大电流环，代之以在半径R处放一个带电质点Q，可以假设，在所关心的时间段内，该点电荷几乎不怎么动。如图所示：



现在，我们可以尝试求出小电流环内电流从初值$I_1 = I$变化到终值$I_1 = 0$过程中，点电荷受到的总的切向冲量的大小 J 。

具体求解过程如下：

首先，我们可以求出两电流环的互感系数 $M = M_{12} = M_{21}$。
设大电流环中的电流 I_2 在环小电流环中产生的磁通量为 Φ_{B1}。

大电流环在中心处产生的磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I_2}{2R}$，

因此，由于 $r << R$，可以将~~小环~~大电流环在小电流环内产生的磁感应强度均为 $B = \dfrac{\mu_0 I_2}{2R}$。

$$\Rightarrow \quad \Phi_{B1} = \pi r^2 B = \frac{\mu_0 \pi r^2 I_2}{2R}$$

互感系数 $M_{21} = \Phi_{B1}/I_2 = \dfrac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$

然后，我们再来求由于小环中电流变化为 $i_1 = dI_1/dt$ 而引起的大环中的总感应电动势 ε_2。

互感系数 $M_{12} = \Phi_{B2}/I_1$，且 $M_{12} = M_{21} = \dfrac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$

$$\Phi_{B2} = M_{12} I_1 = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R} I_1,$$

此为小电流环在对大电流环产生的磁通量

$$\varepsilon_2 = \left| -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \right| = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R} \left| \frac{dI_1}{dt} \right| = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R} |i_1|$$

由于感应电动势是由感生电场的切向分量引起的，利用对称性，在半径 R 处切向电场 E 的大小为

$$E = \frac{\varepsilon_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 r^2}{4R^2} |i_1|$$

当我们拿走大电流环，代之以点电荷 Q 后，切向电场 E 不变。
此时，点电荷 Q 受电场力 $F = EQ = \dfrac{\mu_0 r^2}{4R^2} Q |i_1|$

由于冲量 $\cancel{\int dt = F}$，$dJ = F\,dt$。

总的切向冲量 $J = \int dJ = \int F\,dt = \dfrac{\mu_0 r^2}{4R^2} Q \left| \int_I^0 dI \right|$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{\mu_0 r^2 Q I}{4R^2}$$

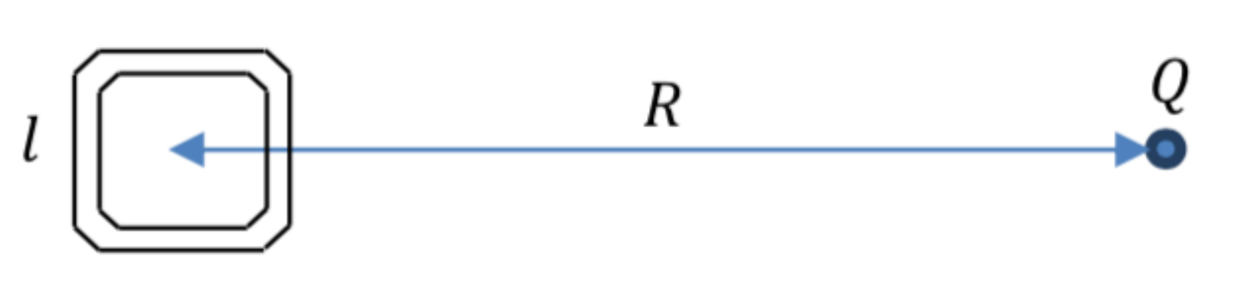
此为作用在点电荷 Q 上的冲量

得到结果

$$J = \frac{\mu_0 r^2 QI}{4R^2}$$

（二）电流环受到的反冲

为了方便计算，我们考虑一个与之前形状不同的电流环，来理解电流环受到的反冲力的来源。

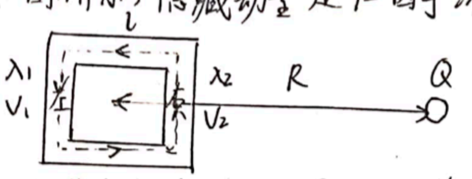


如上图所示，我们考虑一个边长为l 的正方形电流环。在此环距离为$R \gg l$ 处有一个点电荷Q。此环中有电流强度为I 的电流流过（我们采用的电流环模型是一个不带电的绝缘空心管）。载流子可以沿着环自由运动。在环的转角处，载流子与管壁发生弹性碰撞而作直角转向。忽略载流子之间所有的相互作用。并且假设管子上同一横截面内所有载流子运动速度相同。假设环很重，其运动可以忽略。

现在我们来计算环内载流子的总的线动量大小 p_{hid} ，这个动量被称为"隐藏动量"（Reference：**Hidden Momentum** On Wikipedia）。

具体求解过程如下：

如图所示，隐藏动量是归因于环路中左边两边的载流子。



设 m 为单个载流子的质量，q 为单个载流子所带有的电荷量。

左边每个载流子的电势能可视为 $U_1 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 (R+\frac{l}{2})}$，（由于 $R \gg l$，纵向距离忽略，只考虑横向）

右边每个载流子的电势能可视为 $U_2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 (R-\frac{l}{2})}$

左右两边单个载流子电势能之差 $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R-\frac{l}{2}} - \frac{1}{R+\frac{l}{2}}\right)$

$$= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{l}{2}-1+\frac{l}{2}\right)$$

$$= \frac{Qql}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

设左边单位长度载流子数密度为 λ_1，速度为 v_1，

右边单位长度载流子数密度为 λ_2，速度为 v_2。

由于电流大小恒为 I，则有 $q\lambda_1 v_1 = q\lambda_2 v_2 = I$

再考虑狭义相对论效应，有关于两边载流子的能量差的等式：

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\cdot mc^2 = \Delta U$$

其中 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$，$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$。

得到隐藏动量

$$p_{hid} = p_2 - p_1 = ml(\gamma_2\lambda_2 v_2 - \gamma_1\lambda_1 v_1) = \frac{mIl}{q}(\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$= \frac{Il\Delta U}{qc^2} = \frac{QIl^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2 c^2}$$

得到结果

$$p_{hid} = \frac{QIl^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2 c^2}$$

（*）解释

当电流停止时，此线动量将转移到环上，环获得一个冲量，该冲量与点电荷 Q 受到的冲量大小相等，方向相反。这个冲量就是我们所要寻找的消失的反冲。（注意在初始状态下，电磁场中也有动量，这保证了整个系统的动量守恒）

（三）验证计算结果

接下来我们引入磁矩$\mu = IS$来研究电流环，其中I 为电流， S 为环的面积。于是，我们将磁矩μ代入（一）和（二）求得的结果J 和 p_{hid}中。

（一）中J的结果

由于（一）中电流环的磁矩$\mu = \pi r^2 I$，因此将μ代入J后有

$$J = \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R^2}$$

（二）中p_{hid}的结果

由于（二）中电流环的磁矩$\mu = l^2 I$，因此将μ代入p_{hid}后有

$$p_{hid} = \frac{Q\mu}{4\pi\varepsilon_0 R^2 c^2} = \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R^2}$$

通过对比J 和 p_{hid}，我们发现：

$$J = p_{hid}$$

即点电荷受到的冲量大小 J 等于电流环内载流子的总线动量 p_{hid} 的大小。（二）中的解释得到验证。

四、总结

本文介绍了Shockley-James悖论。

本问题采用了一个简单的模型，探究了Shockley-James悖论中关于〝如果一个点电荷处在一个磁环强度变化的磁体附近，这个电荷会感应电力的作用，但这个磁体不会受到表观的反作用力〞的问题。最终发现〝在相对论力学中，一个复合体系可以具有非零的机械动量，而仍然可以保持静止〞，并且得到一下具体结果：

> 点电荷受到的冲量大小 J 等于电流环内载流子的总线动量 p_{hid} 的大小。
>
> 当电流停止时，此线动量将转移到环上，环获得一个冲量，该冲量与点电荷 Q 受到的冲量大小相等，方向相反。这个冲量就是我们所要寻找的消失的反冲。

由于本问题采用了一个简单的方便计算的模型，此模型或多或少存在一些疏漏之处，不能代表普遍情况。因此，我还通过查阅参考资料，了解到了更普遍的情况，经过我个人的理解，概括具体如下：

> **在更真实的模型中，电流环是一条导体电线，而点电荷 Q 所产生的电场不能穿越进入于导体内。**
> 假设电流仍然是由电线中的载流子传导的。
>
> 考虑本问题中的情况，有以下性质：
>
> - 电流环的线性动量为0。
>
> 我个人对此理解如下：
>
> 由于点电荷 Q 所产生的电场不能穿越进入导体内。因此不能像（二）中模型计算左边与右边的电势能之差ΔU，这种 ΔU 为 0，因此电流环的线性动量为0。
>
> - 随着电流从 I 变为0，由外部电荷在导线上感应出的表面电荷，将受到一个电场力。这样，电流环获得的冲量大小将与（二）中模型计算出来的一样。

由于本人水平有限，对Shockley-James悖论可能尚处于一知半解的状态，不能很好地阐述自己的问题和想法。并且由于本文参考资料主要为英语，在一些翻译上存在不恰当之处。烦请同学们对本文中的问题进行批评指正。

最后,欢迎大家讨论我的问题，提出一些意见和建议。

谢谢！

参考资料

1. Shockley-James Paradox

http://people.exeter.ac.uk/sh481/shockley-james.html

2. APHO Israel 2011 Theoretical Questions

http://mpec.sc.mahidol.ac.th/apho10/sites/default/files/(1)%20shockley%20question.pdf

3. Hidden momentum

https://en.wikipedia.org/wiki/Hidden_momentum