Integrieren und Ableiten

Funktionen haben zwei Eigenschaften, die Sie in der Physik sehr häufig benötigen:

1.) einen Anstieg

2.) eine Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse

Bei einer linearen Funktion lässt sich der Anstieg m durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmen. Für die Fläche A unter dem Graphen gilt: $A = y_1 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot m \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{2} = \Delta x \cdot \left(y_1 + \frac{\Delta x \cdot m}{2}\right)$. In der Physik begegnen Ihnen allerdings nicht nur lineare Funktionen.

Die Ableitungsfunktion

Der Anstieg des Graphen einer Funktion f an einer Stelle s entspricht dem Anstieg der Tangente des Graphen an dieser Stelle. Zur Bestimmung dieses Anstiegs kann eine Sekante an den Graphen von f angelegt werden. Die x-Werte der Schnittpunkte der Sekante des Graphen werden links und rechts gegen s laufen gelassen. Der Anstieg m_s der Sekante ergibt sich nun aus:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{s_2} - y_{s_1}}{x_{s_2} - x_{s_1}}$$

Diese sogenannte „Ableitung von f an der Stelle s“ kann unter der Annahme, dass ein Schnittpunkt der Sekante mit f an einer Stelle x liegt und der andere Schnittpunkt an der Stelle $x + h$, auch wie folgt dargestellt werden:

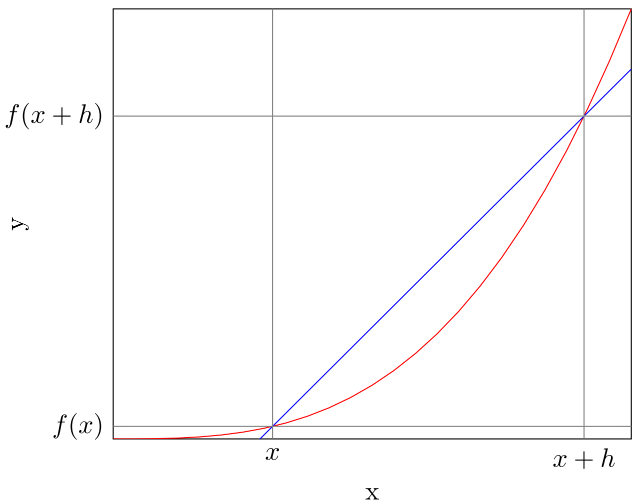
$$m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Da x nun beliebig gewählt werden kann, wird m_s als „Ableitungsfunktion f' von f“ dargestellt. Zum Beispiel ist die Ableitungsfunktion f' der Funktion $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2 \cdot x$$

Der Anstieg von f kann damit an jeder Stelle x ermittelt werden. Es ist sehr aufwändig für jede Funktion individuell den Grenzwert zu bilden. Gleichzeitig gibt es Regelmäßigkeiten beim Ableiten, weshalb in der Praxis nicht die Grenzwertmethode angewandt wird, sondern die in der Tabelle gelisteten Ableitungsregeln verwendet werden.

Sekante(blau) an der Funktion $f(x) = x^3$ (rot)



Auswahl wichtiger Ableitungsregeln:

Name	**f**	**f’**
	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
	$sin(x)$	$cos(x)$
	$cos(x)$	$-sin(x)$
	$-sin(x)$	$-cos(x)$
	$-cos(x)$	$sin(x)$
	e^x	e^x
	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Summenregel	$u + v$	$u' + v'$
Produktregel	$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

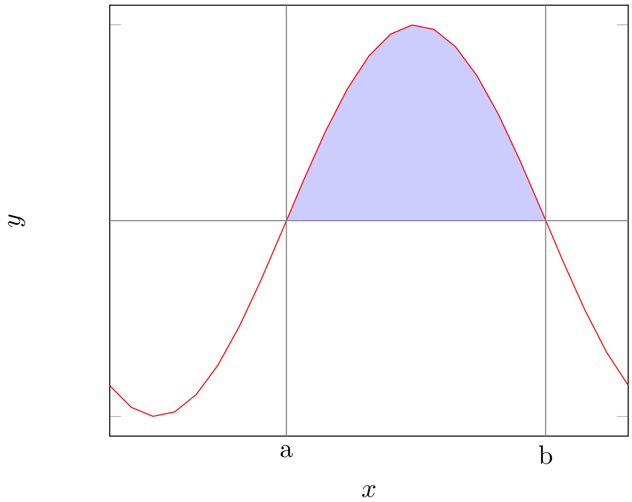
Das Integral

Das Integrieren ist die Gegenoperation zum Ableiten, sozusagen das *„Aufleiten"*. Man nennt das **unbestimmte Integral** der Funktion f „Stammfunktion von f". Die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x) = 2 \cdot x$ lautet beispielsweise:

$F(x) = \int 2 \cdot x \; dx = x^2 + c$

Im Beispiel wird nach der Variable x integriert, was durch das dx gekennzeichnet ist. Der Summand c im Ergebnis kommt dadurch zustande, dass beim Ableiten einer Funktion Summanden mit dem Faktor x^0 verloren gehen und deshalb beim integrieren wieder addiert werden müssen.

Fläche(blau) im Intevall [a; b] unter einer Sinusfunktion(rot)



Neben dem unbestimmten Integral gibt es das **bestimmte Integral**. Mit dem bestimmten Integral lässt sich die eingeschlossene Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse in einem bestimmten abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ berechnen. Ein Beispiel für ein bestimmtes Integral wäre:

$\int_a^b 2 \cdot x \; dx$

Um diese Fläche auszurechnen benötigt man zunächst das unbestimmte Integral, also $x^2 + c$. Das bestimmte Integral kann nun durch das Einsetzen der Grenzen a und b berechnet werden:

$\int_a^b 2 \cdot x \; dx = (b^2 + c) - (a^2 + c) = b^2 - a^2$

Hierbei wird zuerst die obere Grenze in das unbestimmte Integral eingesetzt, wovon die Lösung des unbestimmten Integrals mit der unteren Grenze subtrahiert wird. Da sich der Summand c in jedem Fall wegsummiert, kann nun das bestimmte Integral ausgerechnet werden.

In der Physik sind Ihnen sicherlich schoneinmal Integrale begegnet, zum Beispiel in der Formel $W = F \cdot s$. Hierbei kann F als eine von der Strecke abhängige Kraft $F(s)$ gesehen werden. Ist $F(s)$ konstant, so ist die Fläche, die $F(s)$ mit der s-Achse einschließt gleich $F \cdot s$, was der entlang der Strecke verrichteten Arbeit entspricht. Mit dem bestimmten Integral können Sie die verrichtete Arbeit W berechnen, wenn $F(s)$ nicht konstant ist, Sie aber die Funktionsgleichung dieser Funktion kennen.