二通りのアプローチによる線形代数の構築とその $well\text{-}definedness$

名古屋大学経済学部経済学科 2 年 目黒瑛暉

2021 年 9 月 26 日

目次

1　前書き

1.1　はじめに

線形代数は大学数学の基礎的な分野であり、量子力学やコンピューター関連分野に於いて重要であるのみならず、数学の面白さを学ぶことができるきっかけの一つであると考える。線形代数は公理論的に構築する方法と連立方程式を解くという応用的な視点から構築する方法がある。これらは当然 $well\text{-}defined$ であるから、どちらからアプローチしてもいいわけである。ここでは、両方の立場から線形代数の理論の基礎的な部分を構築し、それが見事に一致することを確かめる。線形代数を楽しく概観できるようなものになれば幸いである。

1.2　諸注意

以下、純粋な数学の公理からのアプローチを「公理論的アプローチ」、連立一次方程式を解くという観点からのそれを「応用的アプローチ」と称する。この pdf では以上の二つが登場するため、これらを区別できるよう以下のマークを付ける。

公理論的

このマークは公理論的アプローチを意味する。総じて長い

応用的

このマークは応用的アプローチを意味する。

これらのマークは各節の冒頭或いは途中で適宜用いる。

以下を参考文献とした。

- 佐武一郎, 線形代数学 (新装版), 数学選書, 裳華房, 2017.
- N. ブルバキ, 代数 2, 数学原論, 東京図書, 1970.
- G. ストラング, 線形代数とその応用, 産業図書, 2009.

触れるまでもない部分が省略してある場合があるので、必然的に初学者向きでなくなってしまうだろう。~~その気になったら~~今後改善する予定である。

作成に当たってリアルモチ氏による多大なる貢献があった。この場を借りて謝意を表する。

私はまだ未熟者なので、本 pdf の内容や体裁に不備があることが予想されます。発見された場合は私の twitter アカウント (@Ei_Re_) へダイレクトメッセージにてお知らせ頂けるとありがたいです。

2　行列

2.1　線形代数に先立って

線形代数では行列というものが登場する。これはいくつかの数を含んだものであり、かつ一つの数学的対象となる。しかしながらこれはいきなり考えてすぐ腑に落ちるというものでもないから、これに似た概念でより単純な数ベクトルというものをここで扱う。最も単純な説明としては、この節で行うことは高校数学 B で登場するベクトルの一般化である。

公理論的

二つの集合 A, B に対し、以下のような直積 $A \times B$ を考えられる。

$$A \times B := \{\, (a, b) |\, a \in A, b \in B\}$$

直積の元は、A と B それぞれの元を一つずつ指定することで定まる。当然、3 つ以上の集合の直積も考えられ

$$A \times B \times C \times \cdots = \{\, (a, b, c, \cdots) |\, a \in A, b \in B, c \in C, \cdots\}$$

のように、それぞれの集合の元の組になる。

次に実数 $\mathbb{R}$ 同士の直積を考える。$\mathbb{R}$ という同一の集合の直積であるから、数の累乗に倣って

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

のように記述する。n 個の $\mathbb{R}$ の直積

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) |\, (x_i) \in \mathbb{R}\}$$

を **n 次元ユークリッド空間**、または n 次元数空間と呼ぶ。これは n 個の実数の組の集合である。
n 次元ユークリッド空間の元、即ち n 個実数を並べたものを **n 次元数ベクトル**と言う。
ベクトルは複数の数を同時に含むが、これ自体は単一の数学的対象であり、一文字で表される。多くの場合、以下のようにアルファベットの太字で記述される。

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

以上が集合論における数ベクトルである。まだ実数の組以上の解釈が与えられていないので、これを補強する意味合いも込めて応用的な数ベクトルの導入を行う。

応用的

我々は高校数学 B において、座標平面ないし空間上の有向線分としてベクトルを定義した。しかし一度視点を変えて、ベクトルの**いくつかの数を含む**という性質にのみ着目しよう。こうすることで我々は幾何学的直感に拘泥せず自然にベクトルを拡張できる。二次元ベクトルを三次元ベクトルに拡張した時と同様に、ベクトルに含まれる数を単純に増やすことができて

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

のようなものを考えられる。(これは幾何学的なイメージからは生じ得ない。なぜなら我々には 4 次元を知覚することは不可能だからである。)

問題は、応用上のどんな理由からこのようなものを考察するのかである。ここではあまり深く考えすぎず、次のような理由付けを行う:多元方程式の解を個別にで無く、その組を一つの対象として扱うためである。
鶴亀算の問題では解として鶴と亀の個体数を求める。求まった答えを

$$\text{鶴が } x \text{ 羽、亀が } y \text{ 匹}$$

ではなく

$$(\text{ 鶴 }, \text{ 亀 }) = (x, y)$$

と書く方が何となく求めた解が纏まっているように見える。この程度の認識で十分であろう。これをより拡張すれば、n 元連立方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_n \end{cases}$$

とその解を、ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

のように書ける。何だか小綺麗である。これがベクトルを一般化したものであり、数ベクトルと呼ぶ。

■補遺 2.1

ここでは上で定義された数ベクトルの持つ性質について述べる。一応公理論的アプローチとしているが、応用的な立場から見ても自然な事項ばかりだろう。

公理論的

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える。その任意の元 $\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i)$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ に関して以下を定義する。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_i + y_i),\ c\boldsymbol{x} := (c \cdot \boldsymbol{x}_i)$$

前者を和、後者をスカラー倍と言う。この定義により、以下が導ける。証明は容易い。

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3. $\exists \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots))$
4. $\forall \boldsymbol{x}, \exists y\ s.t.\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$
5. $c(d\boldsymbol{x}) = (cd)\boldsymbol{x}$
6. $(c + d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$
7. $c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ 及び $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

上によれば、$\mathbb{R}^n$ は和と実数倍について閉じているから

$$c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}$$

のようなものも $\mathbb{R}^n$ となる。これを一般化したもの

$$\sum_i c_i \boldsymbol{x}_i \ ((c_i) \in \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}_i) \in \mathbb{R}^n)$$

を**線形結合**と呼ぶ。ここで、線形結合が $\mathbf{0}$ になるという線形関係

$$\sum_i c_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

が、$(c_i) = 0$ のときのみ成立するとき、数ベクトルの組 $(\boldsymbol{x}_i)$ は**一次独立**であるという。一次独立でないことを**一次従属**であるといい、この場合ある数ベクトルが他の線形結合で表される。

一次独立な数ベクトルの組の内、それらの線形結合で $\mathbb{R}^n$ の全ての元が表せるようなものを $\mathbb{R}^n$ の**基底**という。この時、基底は $\mathbb{R}^n$ の生成系、または $\mathbb{R}^n$ を**生成する**という。例えば全ての n 次元数ベクトルは n 個の基本ベクトル (e_i) の線形結合で表されるから、(e_i) は $\mathbb{R}^n$ の基底となる。これを標準基底という。基底は特別に $\langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$ のように書かれることもある。

基底の線形結合として数ベクトルを表した時の係数の部分を**成分**と呼ぶ。基底を一つ固定すれば、任意の数ベクトルの成分は一意に定まる。我々が「座標」と呼ぶものは標準基底に関する成分である。

ここで述べた事項は次節で登場する線形空間に於いても成立する普遍的なものである。

2.2 公理論的線形空間

行列の公理論的な導入にあたって、ユークリッド空間をさらに拡張した概念である線形空間を定義し、その性質に迫る。代数学の基礎的な部分から始める。

公理論的

数学では、集合に構造を加えたものを考える。集合 R と二項演算 $*$ の組で

1. $\forall a, b, c \in R, (a * b) * c = a * (b * c)$
2. $\exists e \in R, \forall a \in R, a * e = e * a = a$
3. $\forall a \in R, \exists b \in R \ s.t. \ a * b = b * a = e$
4. $\forall a, b \in R, a * b = b * a$

を満たすような $(R, *)$ を**アーベル群**と呼ぶ。特に、二項演算 $*$ が和 $+$ であるとき、これを**加群**と呼ぶ。
e は単位元と呼ばれるものである。

上記の 1〜4 で $*$ を $+$ としたものに更に条件を課したものを考える。集合 R と和 $+$、積 $\cdot$ について

5. $\forall a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. $\exists u \in R, \forall a \in R, u \cdot a = a \cdot u = a$
7. $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (b \cdot c), \ (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

を満たすような $(R, +, \cdot)$ を**環**と呼ぶ。

以上に加えて

$$\forall a \in R \backslash \{0\}, \exists a^{-1} \in R, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

が成立するような $(R, +, \cdot)$ を**体**と呼ぶ。体の最も簡単な例は実数体 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ である。体の具体的イメージが湧かない場合は常に実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ を考えて問題ない。

さて我々はこれまで同一の集合内の二項演算を考えて来たが、ここで異なる集合、特に加群 $(E, +)$ と体 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ の元の間の演算を考える。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \ c, d \in \mathbb{K}$ として、演算 $\top$ を

1. $a\top(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (a\top\boldsymbol{x}) + (a\top\boldsymbol{y})$
2. $(a+b)\top\boldsymbol{x} = (a\top\boldsymbol{x}) + (b\top\boldsymbol{x})$
3. $a\top(b\top\boldsymbol{x}) = (ab)\top\boldsymbol{x}$
4. $1\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

が成り立つように定めた加群 E を、体 $\mathbb{K}$ 上の左加群、或いは $\mathbb{K}$ 上の**左線形空間**と言う。厳密には「左」という言葉が付随するが、ひとまずこれを無視して単に**線形空間**と呼ぼう。線形空間の元を**ベクトル**と呼ぶ。

現状、線形空間とは群と体を組み合わせた得体の知れないものである。しかし、以下の二つの命題により段々とその姿が見えてくる。これらは補遺 2.1 で登場した基底に関連する。

***命題** 2.1* 任意の線形空間には基底が存在する。

Proof. V を体 $\mathbb{K}$ 上の任意の線形空間とする。

$V=\{\mathbf{0}\}$ のとき (これも線形空間であり、零空間と呼ぶ)
当然 $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ であるから、$\langle\mathbf{0}\rangle$ は零空間の基底と言える。

$V\neq\{\mathbf{0}\}$ のとき
以下のような V の部分集合 X を考える。

- X は有限個の V の元からなる。即ち $X=\{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n) | (\boldsymbol{v}_i)\in V\}$
- $\forall(\boldsymbol{v}_i)\in X$ は一次独立である。

さらに、これを満たす X を全て含んだ集合族 $\mathscr{X}$ を用意する。この $\mathscr{X}$ は空集合ではない。なぜなら

$$V\neq\mathbf{0}\Rightarrow\exists v\in V\backslash\{\mathbf{0}\}$$

であり、$\{\boldsymbol{v}\}\in\mathscr{X}$ となるからである。

次に、集合族が包含関係により順序集合になることを用いる。

$$S=\left\{\bigcup X \,\middle|\, X\in\mathscr{X}\right\}$$

とすると、明らかに $S\in\mathscr{X}$ であり、また S' を $\mathscr{X}$ の任意の全順序部分集合とすると $S'\subset S$ となるから、S は $\mathscr{X}$ の任意の全順序部分集合の上界である。よって、$Zorn$ の補題より、$\mathscr{X}$ は極大元 M を持つ。
(ここで、極大元 M が一意に定まらないことに注意せよ。全順序部分集合としてどんなものを取るかによって極大元 M が異なるものになると考えられる。)

$M=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$ とする。ある $\boldsymbol{v}\in V$ が存在して $(\boldsymbol{b}_i)$ の線形結合で表せないと仮定する。
(この仮定の上では、M の生成する線形空間は V に一致しない。矛盾を導くことができれば M が V の生成系であることが言え、従って M は基底であると結論付けられる。)
線形関係 $\mu\boldsymbol{v}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{b}_i=\mathbf{0}$ $(\mu,(\lambda_i)\in\mathbb{K})$ について、$\mu\neq 0$ と仮定すると、

$$\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{b}_i=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\lambda_i}{\mu}\boldsymbol{b}_i$$

から $\boldsymbol{v}$ が $(\boldsymbol{b}_i)$ の線形結合で表せないことに矛盾する。従って $\mu=0$ であり、したがって関係 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{b}_i=\mathbf{0}$ が得られるが、M の定義より明らかに $(\lambda_i)=0$ である。

以上より $\mu = (\lambda_i) = 0$ だから、$\{\boldsymbol{v}, (\boldsymbol{b}_i)\}$ は一次独立である。よって $M \subset M \cup \{\boldsymbol{v}\} \in \mathscr{X}$ となるが、これは M が $\mathscr{X}$ の極大元であることに矛盾する。以上より、M は V の生成系であり、任意の線形空間 V は基底 $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ を持つ。 □

証明の途中で仄めかしたように、一つの線形空間の基底は一意には定まらない。しかし、以下が言える

***命題** 2.2* 基底の個数は一意的である。

これの証明だけがどうしてもわからない。理解した時に書き上げる。

さて基底の個数が一意的であるということは、これを線形空間を特徴づける値として用いることができる。

***定義** 2.1* 線形空間の一つの基底を $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots\}$ とするとき、V の**次元**を

$$\mathrm{dim}V := \mathrm{card}B$$

と定義する。**次元は基底の取り方に依らず一意に定まる。**

2.3 行列の導入

ここでは行列というものを導入するが、行列のイメージをつかみやすいように、先に応用的アプローチを取る。後に公理論的に行列を定義し、両者の行列の諸性質を導き、二つが同一ものであることを確認する。

応用的

以下の n 元連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

これを「解く」とは、(x_i) を求めることである。しかしどうにもこの式は見栄えが悪い。そこで、例えば

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

即ち

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

という形になれば求めるべき解が顕わになってわかりやすい。そこで然るような A を考えたい。

元の式の左辺と見比べると、この式が等価であるためには連立方程式の係数が欠如している。ここで、この A には係数に関する情報が詰め込まれていると考えるのは自然である。元の式に於いて係数は縦横に合計

$n \times n$ 個並んでいる。並びをわざわざ変える必要もなさそうなので、そのまま係数を長方形上に並べたもの

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

が A であると考える。このように長方形状或いは正方形状に数字を並べたものを**行列**と言う。
特に、連立方程式の係数を取り出して作られた上のような行列を**係数行列**と呼ぶ。

行列 A が上のように a に二重の添え字が付いた形で表されるとき、簡易的に $A = (a_{ij})$ と表記する。見ての通り、行列は成分の他にその大きさによって特徴づけられる。行列の大きさは (縦の長さ)×(横の長さ) で表す。上の例では A は $n \times n$ 行列ということになる。これを踏まえて $A = (a_{ij})_{n\times n}$ のように書くことがある。

さて以上のことから

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

となっていると嬉しい。行列の演算についてはまだ一切が不明だが、寧ろこれを満たすように、我々にとって都合の良いように行列の演算を定義しよう。

***定義** 2.2* 行列 $A = (a_{ij})$ とベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ の積を以下のように定義する。

$$A\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i \end{pmatrix}$$

この定義が暗示するように、積 $A\boldsymbol{x}$ は A **の横に並んだ成分の数と** $\boldsymbol{x}$ **の次元が等しい時のみ意味を持つ**。
尤も、連立方程式から係数行列と解のベクトルを取り出した場合は基本的にこの条件を満たすのだが。

以上で、まずは応用的アプローチによる行列の定義が完了した。以降は行列が満たすべき性質や連立方程式との関係性に注目していくことになる。行列のイメージが掴めたところで公理論的アプローチに進む。

公理論的

V, W を、それぞれ $\mathrm{dim}V = m, \mathrm{dim}W = n$ なる実数体 $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。写像 $\mu : V \to W$ を考えていくが、先立って以下が成り立つことを確認する。

***命題** 2.3* 任意の線形空間から次元が等しいユークリッド空間への同型写像が存在する。

まず、2.2 で述べたように線形空間とはユークリッド空間を拡張した概念であり、同じ数学的構造を持つ。

ここで、V の基底を一つ固定し、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ とすると

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists!(x_1, x_2, \cdots, x_m), \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}_i$$

ここで、写像 f_V を

$$f_V : V \to \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

とすれば、これは明らかに数学的構造を保つ逆像 f_V^{-1} が考えられる。よって f_V は同型写像である。

同様にして、同型写像 $f_W : W \to \mathbb{R}^n$ も考えられる。ここで、ユークリッド空間の間の変換 φ を考えることにより、考察対象である μ は

$$\mu = f_W^{-1} \circ \varphi \circ f_V$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & W \\ \wr\!\parallel & & \wr\!\parallel \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

と表せるから、この φ の素性を探っていく。まず、定義より

$$\varphi : V \to W : \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}$$

であるから、これを成分表示すると

$$\begin{gathered} \varphi_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{w}_1 \\ \varphi_2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{w}_2 \\ \vdots \\ \varphi_n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{w}_n \end{gathered}$$

特に、$(\boldsymbol{v}_i)$ の一つ一つが変換されていることを強調すると

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(\boldsymbol{v}_1) & \varphi_{12}(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & \varphi_{1m}(\boldsymbol{v}_m) \\ \varphi_{21}(\boldsymbol{v}_1) & \varphi_{22}(\boldsymbol{v}_2) & & \varphi_{2m}(\boldsymbol{v}_m) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(\boldsymbol{v}_1) & \varphi_{n2}(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & \varphi_{nm}(\boldsymbol{v}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}$$

何やら縦横に式が並んだものが現れた。これを扱いやすい形にするため、作用素 f_{nm} を

$$f_{nm} \boldsymbol{v}_m = \varphi_{nm}(\boldsymbol{v}_m)$$

となるようにし、さらにこの長方形状のものとベクトルとの積を

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}\boldsymbol{v}_1 + f_{12}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + f_{1m}\boldsymbol{v}_m \\ f_{21}\boldsymbol{v}_1 + f_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + f_{2m}\boldsymbol{v}_m \\ \vdots \\ f_{n1}\boldsymbol{v}_1 + f_{n2}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + f_{nm}\boldsymbol{v}_m \end{pmatrix}$$

となるように定義すると、上式の右辺は $(\varphi_i(\boldsymbol{v}))$ 即ち $\boldsymbol{w}$ それ自身であるから

$$(f_{ij})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$$

ここで、V, W の体を $\mathbb{R}$ としているから、$(f_{ij}) \in \mathbb{R}$ と考えて問題ないだろう。

このように数字を長方形状に並べたものを**行列**という。特にここでは (f_{ij}) を φ の**表現行列**、または V から W への**基底変換行列**ともいう。ここでは行列を実数体上で構築したが、同様にして任意の体上で定義できる。