第三回：行列のあれこれ

線 形 代 数 ゼ ミ

目 黒 瑛 暉

本日のお品書き

- 行列の和とスカラー倍
- 行列の種類
- 行列の階数
- 回転行列

行列の和、スカラー倍

行列はその形や性質によって、さまざまな分類が為される。
分類するのに先だって、行列の和とスカラー倍 (定数倍) を定義する。

まずは前回の復習。

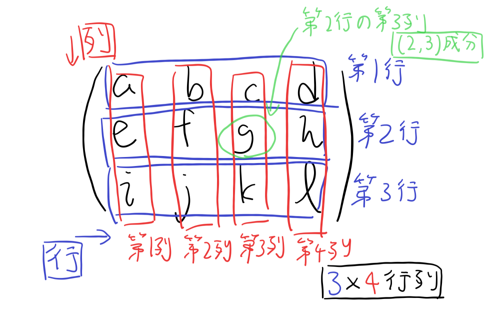


図 1　行、列、成分

行列の和、スカラー倍

行列の和を以下のように定義する。

行列の和

大きさが等しい二つの行列に関して

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

和をとる行列同士の大きさは等しくなければならない！

行列の和、スカラー倍

行列のスカラー倍を以下のように定義する。

行列の和

行列と定数 k の積に関して

$$k \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

行列の種類

行列を分類する。
(ここで登場する種類はごく一部であり、今後さらに出てくる)

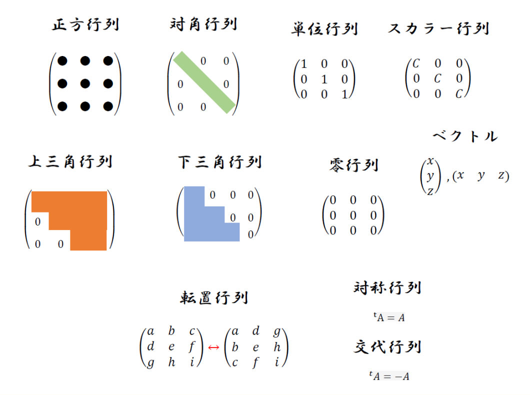
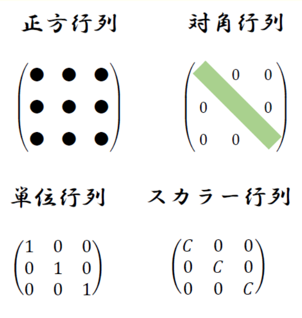


図 2　いろいろな行列

行列の種類

正方行列とそれに関するもの

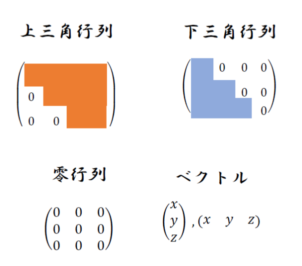
- **正方行列**
  行と列の数が等しい行列
- **対角行列**
  対角成分以外が 0 の正方行列
- **単位行列**
  対角成分がすべて 1 の対角行列
  n 次単位行列を E_n で表す
- **スカラー行列**
  単位行列をスカラー倍したもの



行列の種類

一風変わった行列

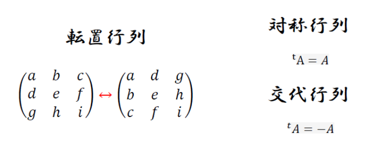
- 上三角行列、下三角行列
  重要。詳細は後ほど
- 零行列
  成分がすべて 0 の行列
- ベクトル
  行、または列が一つだけの行列



行列の種類

転置に関する行列
行列の行と列を入れ替えることを「転置」といい
${}^tA$ のように書く

- 転置行列
  行と列をそれぞれ入れ替えた行列
- 対称行列
  転置を取っても変わらない行列
- 交代行列
  転置を取ると -1 倍になる行列



行列の種類

上三角行列、下三角行列についての説明

上 (下) 三角行列とは
対角成分より下 (上) の成分がすべて 0 の行列である。
(行列の対角成分 (a_{ii}) は正方行列以外にも定義できる)

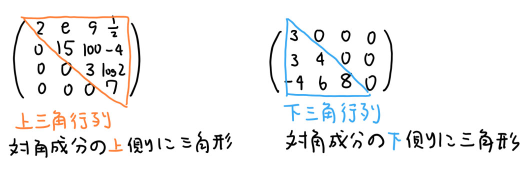


図 3　こうやって覚えよう

行列の種類

上三角行列、下三角行列についての説明

これらは重要である。なぜか

$Gauss$ の消去法で登場するから

しれっと

どこに出てくるのか

行列の種類

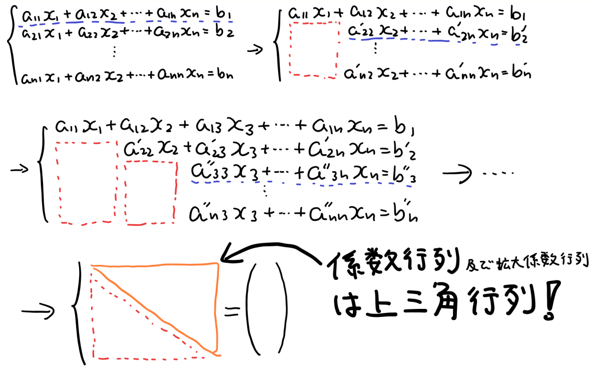


図 4　消去が完了した段階で上三角行列が出てくる

行列の階数

ここで、行基本変形を適切に施すことで、
任意の係数行列を「階段行列」にできると言える。

$$\begin{cases} p+q+r+s=1 \\ 2p+2q-\ \ r+4s=4 \\ 3p+4q+2r-\ \ s=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p+q+r+s=1 \\ 0p+0q-3r+2s=2 \\ 0p+q-r-3s=4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} p+q+r+s=1 \\ 0p+q-r-3s=4 \\ 0p+0q-3r+2s=2 \end{cases}$$

このように、適宜行の入れ替えを行えば
うまいこと階段行列に変形できる
この階段の段の数を**階数**という

行列の階数

行列の階数

行列に行基本変形を施し、階段行列にした時の段の数を階数といい

$$rank A$$

と表す。階数は行の数を超えない。

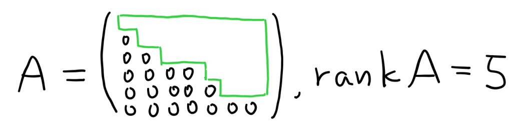


図 5　階数の例

行列の階数

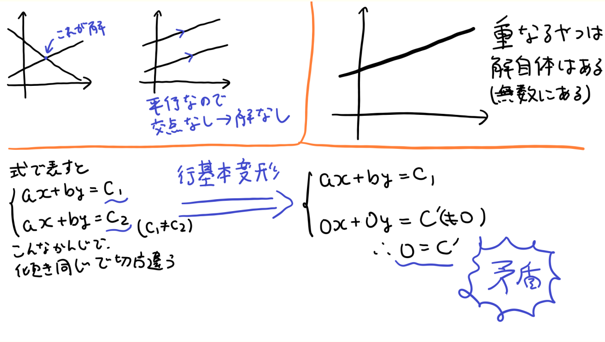
実は行列の階数は、連立方程式の解の個数と関係がある
階数を求めることでその連立方程式の解について

- 唯一解を持つ
- 無限に解を持つ
- 解なし

のどれなのかが判別できる

解がない場合

連立方程式において、解が存在しないときには...



このように $0=$(0 じゃない数) という矛盾する式が現れる
これを階数を用いてうまく表すことができる

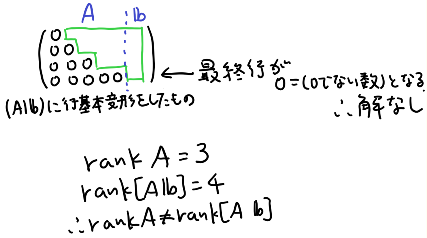
解がない場合

解の存在、不存在の条件

ある連立方程式が解を持たない必要十分条件は

$$rank A \neq rank[A\ \boldsymbol{b}]$$

である。言い換えれば、$rank A = rank[A\ \boldsymbol{b}]$ ならばその連立方程式は少なくとも一つの解を持つ



解が無数にある場合

n 元連立方程式は、n 個の自明でない式があれば解が定まる
自明・自明でないってなんやねん

自明な式とは
$\longrightarrow\ 0 = 0$ などの、文字通り自明な式
(自明な式は一切の情報を持たない)

いくつか式があっても、それらすべてが情報を持つとは限らない
しかし、自明な式は行基本変形の過程でわかる
具体的に見ていく

解が無数にある場合

以下の連立方程式を考える

$$
\begin{cases}
2x + 6y + 3z = 5 \\
-x + 3y - 2z = 7 \\
3x + 3y + 5z = -2
\end{cases}
$$

3 つの変数に対し、3 つの式がある。一見うまく解が求まりそうだが...

解が無数にある場合

拡大係数行列に対し、行基本変形を施す

$$
\begin{aligned}
(A|\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & -6 & \frac{1}{2} & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

第三行が 0 になってしまった…

解が無数にある場合

結局、元の方程式は

$$\begin{cases} 2x+6y+3z=5 \\ 0x+6y-\frac{1}{2}z=\frac{19}{2} \\ 0x+0y+0z=0\,(\ \therefore 0=0) \end{cases}$$

ということになる。三つ目の式は自明な式であり、情報を持たない
これでは、解は一つには定まらない

勘違いしないで頂きたいのは、解自身は存在するということである。ただ、それが一つに絞れない
だけである。つまり「解が無数にある」のである

解が無数にある場合

この場合の解は

$$(x, y, z) = (-21C + 31, C, 12C - 19)$$

である。
ただし C は任意定数であり、C を一つ定めると解の組が一つ定まる
C の選び方は無数にあるから、解の個数は無数である

このように、解が存在するにしてもそれが一つに定まるのか、無数に存在するのかという二通りある。これを階数を使ってうまく表現できる。

解が無数にある場合

唯一解の存在条件

n 変数の連立方程式において

$$rank A = rank[A\,\boldsymbol{b}] = n$$

となることが、唯一解が存在することの必要十分条件である
逆に

$$rank A = rank[A\,\boldsymbol{b}] < n$$

ならば無数に解をもつ

解が無数にある場合

階数を求める過程で行基本変形を行うから、自明な式が含まれる場合は変形の過程で現れる。
この視点で考えると、階数とは情報を持った式の数とみなすことができる。
情報の数が変数より少なければ解が一つに定まらないことは先ほど見た通りである。
n 個の変数に対し、n 個の非自明な情報が揃った場合のみ唯一解が定まる。

余談

行列の階数を求めることでその連立方程式の解の個数を判断できるということを学んだ。

でもこれ、ぶっちゃけ不便じゃね？

だってさ、階数求める過程で行基本変形してるじゃん。じゃあそのまま解を求めることができるわけじゃん。

これ要る？

もっと手っ取り早く知れる方法はないのですか？という話になる。
そこから、**行列式**というものを導入する。おそらく第 6 回で。

正直、行列式の方が扱いやすいので、階数の出る幕はほぼない。今回やったような、階数と解の個数についての条件を学んだらそれ以降ほぼ使わないイメージ。

回転行列

次回に向けて、一つ特別な行列についての話をする
まず、行列とベクトルの積は以下のように定義されるのであった

行列とベクトルの積 (再掲)

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a_2} \cdot \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

ということは、行列は一定の規則に従ってベクトルを変形させるのである

なにか我々にとって好ましい変形をする行列を考えよう

回転行列

そこで、以下を満たす行列 $R[\theta]$ を考える

- $R[\theta]$ は二次の正方行列
- $R[\theta]\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ を θ だけ回転させたものである
  ただし $\boldsymbol{x}$ は二次のベクトルである

このような行列を**回転行列**という
$R[\theta]$ の成分はどのように表せるだろうか

回転行列

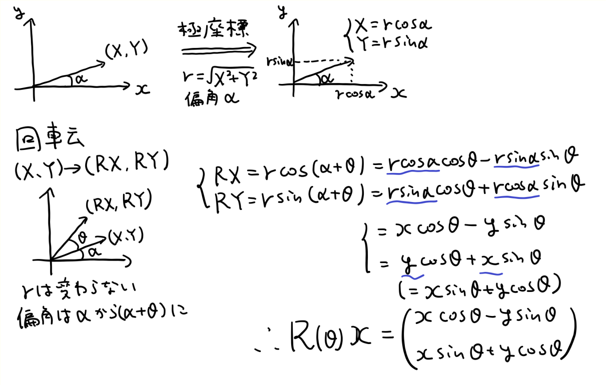


図 6　回転行列の導出

回転行列

つまるところ

$$R[\theta]\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの積を逆に用いれば

$$R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とわかる。これが回転行列の成分表示である。

次回予告

ここで、回転行列を二回用いた

$$R[\theta_1]R[\theta_2]\boldsymbol{x}$$

を考える。これは、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を θ_1 だけ回転させた後 θ_2 だけ回転させたものだから、結果としては $\theta_1 + \theta_2$ 度回転させる。よって

$$R[\theta_1]R[\theta_2]\boldsymbol{x} = R[\theta_1 + \theta_2]\boldsymbol{x}$$

がわかる。次回はこれを使って**行列の積**を定義する。