

# 線形代数非入門

名古屋大学経済学部経済学科 2 年 目黒瑛暉

2021 年 10 月 5 日

## 目次

1	前書き	2
1.1	はじめに . . . . .	2
1.2	諸注意 . . . . .	2
2	行列	3
2.1	線形代数に先立って . . . . .	3
2.2	線形空間 . . . . .	5
2.3	行列の導入 . . . . .	7

# 1 前書き

## 1.1 はじめに

線形代数は大学数学の基礎的な分野である。その構築は大概、連立一次方程式を解くという観点で行われる。これはイメージが容易である一方で、数学的な厳密さがあまり見えてこない。そこで、この pdf は連立方程式への応用を念頭に線形代数を (ある程度) 厳密に作り上げる。線形代数を楽しく概観できるようなものになれば幸いである。

## 1.2 諸注意

この pdf は「やりたいこと (motivation)」を示し、それに合致した概念を「構築 (build)」するという方式で進んでいく。これらを区別できるよう以下のマークを付ける。



このマークはやりたいことを意味する。



このマークは構築を意味する。総じて長い

これらのマークは各節の冒頭或いは途中で適宜用いる。

以下を参考文献とした。

- 佐武一郎, 線形代数学 (新装版), 数学選書, 裳華房, 2017.
- N. ブルバキ, 代数 2, 数学原論, 東京図書, 1970.
- G. ストラング, 線形代数とその応用, 産業図書, 2009.

添字が付けられたものに対して  $(x_i)$  のように書くことがある。このように括弧で括って  $i$  または  $j$  の添字が付けられた場合は  $i, j$  が適当な区間を動くことを意味する。

集合論の基礎的な知識を要する。線形代数の知識は必要としないが、あるとより楽しめるだろう。

作成に当たってリアルモチ氏とよの氏による多大なる貢献があった。この場を借りて謝意を表する。

本 pdf の内容や体裁に不備があることが予測されるため、Github 上に Discussion を設けました。ご指摘などございましたらこちらへお願いします。 <https://github.com/EikiMeg/LinearAlgebra/discussions>

## 2 行列

### 2.1 線形代数に先立って

線形代数では行列というものが登場する。これはいくつかの数を含んだものであり、かつ一つの数学的対象となる。しかしながらこれはいきなり考えてすぐ腑に落ちるというものでもないから、これに似た概念でより単純な数ベクトルというものをここで扱う。最も単純な説明としては、この節で行うことは高校数学 B で登場するベクトルの一般化である。



$n$  元連立方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

の解は、

$$x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots, x_n = r_n$$

のように書き表すことができる。しかしこの書き方は少し不格好である。この解是一群の方程式から求められたものであり、これらが  $n$  個バラバラに扱われるのは勝手が悪い。従って我々がこの  $n$  個の解 (ここでは実数としておくが、複素数でも同様の議論が可能) を一つの数学的対象として扱うことを考えるのは自然だろう。

このようにいくつかの数をまとめたものを考えれば、上の方程式群及び解は

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

のように表せる。これはとても見栄えが良い。



二つの集合  $A, B$  に対し、以下のような直積  $A \times B$  を考えられる。

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

直積の元は、 $A$  と  $B$  それぞれの元を一つずつ指定することで定まる。当然、3 つ以上の集合の直積も考えられ

$$A \times B \times C \times \dots := \{(a, b, c, \dots) \mid a \in A, b \in B, c \in C, \dots\}$$

のように、それぞれの集合の元の組になる。

次に実数  $\mathbb{R}$  同士の直積を考える。 $\mathbb{R}$  という同一の集合の直積であるから、数の累乗に倣って

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

のように記述する。 $n$  個の  $\mathbb{R}$  の直積

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (x_i) \in \mathbb{R}\}$$

を  $n$  次元ユークリッド空間、または  $n$  次元数空間と呼ぶ。これは  $n$  個の実数の組の集合である。

$n$  次元ユークリッド空間の元、即ち  $n$  個実数を並べたものを  $n$  次元数ベクトルと言う。

ベクトルは複数の数を同時に含むが、これ自体は単一の数学的対象であり、一文字で表される。多くの場合、以下のようにアルファベットの太字で記述される。

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

さて、 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  について、その任意の元  $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i)$  と実数  $c \in \mathbb{R}$  に関して以下を定義する。

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_i + y_i), \quad c\mathbf{x} := (c \cdot x_i)$$

前者を和、後者をスカラー倍と言う。この定義により、以下が導ける。証明は容易い。

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3.  $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} = (0, 0, \dots))$
4.  $\forall \mathbf{x}, \exists \mathbf{y} \text{ s.t. } \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{z}$
5.  $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$
6.  $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$
7.  $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$
8.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$  及び  $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

上によれば、 $\mathbb{R}^n$  は和と実数倍について閉じているから

$$c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$$

のようなものも  $\mathbb{R}^n$  となる。これを一般化したもの

$$\sum_i c_i \mathbf{x}_i \quad ((c_i) \in \mathbb{R}, (\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^n)$$

を線形結合と呼ぶ。ここで、線形結合が  $\mathbf{0}$  になるという線形関係

$$\sum_i c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

が、 $(c_i) = 0$  のときのみ成立するとき、数ベクトルの組  $(\mathbf{x}_i)$  は一次独立であるという。一次独立でないことを一次従属であるといい、この場合ある数ベクトルが他の線形結合で表される。

一次独立な数ベクトルの組の内、それらの線形結合で  $\mathbb{R}^n$  の全ての元が表せるようなものを  $\mathbb{R}^n$  の基底という。この時、基底は  $\mathbb{R}^n$  の生成系、または  $\mathbb{R}^n$  を生成するという。例えば全ての  $n$  次元数ベクトルは  $n$  個の基本ベクトル  $(e_i)$  の線形結合で表されるから、 $(e_i)$  は  $\mathbb{R}^n$  の基底となる。これを標準基底という。基底は特別に  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  のように書かれることもある。

基底の線形結合として数ベクトルを表した時の係数の部分を成分と呼ぶ。基底を一つ固定すれば、任意の数ベクトルの成分は一意に定まる。我々が「座標」と呼ぶものは標準基底に関する成分である。

ここで述べた事項がベクトルの自然な拡張であること、また冒頭に述べたモチベに応えるものになっていることを確認して欲しい。このようにしてやりたいことが定式化されていくのを感じられると楽しめるだろう。

## 2.2 線形空間

行列の導入に向けて、ユークリッド空間をさらに拡張した概念である線形空間を定義し、その性質に迫る。代数学の基礎的な部分から始める。



$n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  について、その任意の元の線形結合はまた  $\mathbb{R}^n$  の元であるのだった。幾何学的直観に頼ればこれは直線や平面といった扱いやすいものが持つ性質である。同様の性質を持った概念の探求を、より抽象的に代数学という観点から行う。



数学では、集合に演算が定義されたもの考える。空でない集合  $R$  と二項演算  $*$  :  $R \times R \rightarrow R$  の組  $(R, *)$  で、以下を満たすものを**アーベル群**と呼ぶ。

1.  $\forall a, b, c \in R, (a * b) * c = a * (b * c)$
2.  $\exists e \in R, \forall a \in R, a * e = e * a = a$
3.  $\forall a \in R, \exists b \in R \text{ s.t. } a * b = b * a = e$
4.  $\forall a, b \in R, a * b = b * a$

二項演算  $*$  が和  $+$  であるとき、これを**加法群**と呼ぶ。 $e$  は単位元と呼ばれるものである。

上記の 1~4 で  $*$  を  $+$  としたものに更に条件を課したものを考える。空でない集合  $R$  と和  $+$ 、積  $\cdot$  の組  $(R, +, \cdot)$  で、以下を満たすものを**環**と呼ぶ。ただし  $+, \cdot$  はいずれも  $R \times R \rightarrow R$  である。

5.  $\forall a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6.  $\exists u \in R, \forall a \in R, u \cdot a = a \cdot u = a$
7.  $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

以上に加えて以下を満たす  $(R, +, \cdot)$  は**体**と呼ばれる。

8.  $\forall a, b \in R, a \cdot b = b \cdot a$
9.  $\forall a \in R \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in R, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

体の最も簡単な例は実数体  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  である。体の具体的イメージが湧かない場合は常に実数体  $\mathbb{R}$  または複素数体  $\mathbb{C}$  を考えて問題ない。

さて我々はこれまで同一の集合内の二項演算を考えて来たが、ここで異なる集合、特に加法群  $(E, +)$  と体  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  の元の間の演算を考える。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, a, b \in \mathbb{K}$  として、演算  $\top : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  が与えられていて、以下を満たす加法群  $E$  を、体  $\mathbb{K}$  上の左加群と言う。

1.  $a \top (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \top \mathbf{x}) + (a \top \mathbf{y})$
2.  $(a + b) \top \mathbf{x} = (a \top \mathbf{x}) + (b \top \mathbf{x})$
3.  $a \top (b \top \mathbf{x}) = (ab) \top \mathbf{x}$
4.  $1 \top \mathbf{x} = \mathbf{x}$

体  $\mathbb{K}$  上の左加群は  $\mathbb{K}$  上の**左線形空間**とも呼ばれる。厳密には「左」という言葉が付随するが、ひとまずこれを無視して単に**線形空間**と呼ぼう。線形空間の元を**ベクトル**と呼ぶ。

現状、線形空間とは群と体を組み合わせた得体の知れないものである。しかし、以下の二つの命題により段々とその姿が見えてくる。これらは前節で登場した基底に関連する。

**命題 2.1** 任意の線形空間には基底が存在する。

*Proof.*  $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の任意の線形空間とする。

$V = \{\mathbf{0}\}$  のとき (これも線形空間であり、零空間と呼ぶ)  
当然  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  であるから、 $\langle \mathbf{0} \rangle$  は零空間の基底と言える。

$V \neq \{\mathbf{0}\}$  のとき  
以下のような  $V$  の部分集合  $X$  を考える。

- $X$  は有限個の  $V$  の元からなる。即ち  $X = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) | (\mathbf{v}_i) \in V\}$
- $\forall (\mathbf{v}_i) \in X$  は一次独立である。

さらに、これを満たす  $X$  を全て含んだ集合族  $\mathcal{X}$  を用意する。この  $\mathcal{X}$  は空集合ではない。なぜなら

$$V \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

であり、 $\{\mathbf{v}\} \in \mathcal{X}$  となるからである。

次に、集合族が包含関係により順序集合になることを用いる。

$$S = \left\{ \bigcup X \mid X \in \mathcal{X} \right\}$$

とすると、明らかに  $S \in \mathcal{X}$  であり、また  $S'$  を  $\mathcal{X}$  の任意の全順序部分集合とすると  $S' \subset S$  となるから、 $S$  は  $\mathcal{X}$  の任意の全順序部分集合の上界である。よって、Zorn の補題より、 $\mathcal{X}$  は極大元  $M$  を持つ。  
(ここで、極大元  $M$  が一意に定まらないことに注意せよ。全順序部分集合としてどんなものを取るかによって極大元  $M$  が異なるものになると考えられる。)

$M = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  とする。ある  $\mathbf{v} \in V$  が存在して  $(\mathbf{b}_i)$  の線形結合で表せないと仮定する。  
線形関係  $\mu \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$  ( $\mu, (\lambda_i) \in \mathbb{K}$ ) について、 $\mu \neq 0$  と仮定すると、

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^n -\frac{\lambda_i}{\mu} \mathbf{b}_i$$

から  $\mathbf{v}$  が  $(\mathbf{b}_i)$  の線形結合で表せないことに矛盾する。従って  $\mu = 0$  であり、したがって関係  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$  が得られるが、 $M$  の定義より明らかに  $(\lambda_i) = 0$  である。

以上より  $\mu = (\lambda_i) = 0$  だから、 $\{\mathbf{v}, (\mathbf{b}_i)\}$  は一次独立である。よって  $M \subset M \cup \{\mathbf{v}\} \in \mathcal{X}$  となるが、これは  $M$  が  $\mathcal{X}$  の極大元であることに矛盾する。以上より、 $M$  は  $V$  の生成系であり、任意の線形空間  $V$  は基底  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$  を持つ。  $\square$

証明の途中で仄めかしたように、一つの線形空間の基底は一意には定まらない。しかし、以下が言える

**命題 2.2** 基底の個数は一意的である。

$V$  を線形空間とし、 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  をその基底とする。 $(b_j)$  が  $\{(a_i)\}$  の線形結合で表され、また  $(a_i)$  が  $\{(b_j)\}$  の線形結合で表されるならば  $m = n$  であることを示す。

まず、「 $(b_j)$  が  $\{(a_i)\}$  の線形結合で表され、また  $(a_i)$  が  $\{(b_j)\}$  の線形結合で表される」とき、 $\{(a_i)\} \sim \{(b_j)\}$  と表す。ここで、 $\{(a_i)\} \sim \{(b_j)\}$  かつ  $\{(b_j)\} \sim \{(c_k)\}$  ならば  $\{(a_i)\} \sim \{(c_k)\}$  である。なぜなら

$$\forall i, j, k, \exists! x_i, y_j, b_j = \sum x_i a_i, c_k = \sum y_j b_j \therefore c_k = \sum y_j x_i a_i$$

だからである。ここで、 $\{(a_i)\} \sim \{(b_j)\}$  ならば  $\{(a_i)\}$  の何れかを  $(b_j)$  のうち適当な一つで置き換え、かつそれらが一次独立であるような組  $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, b_{j_r}\}$  を作ることができる。なぜなら、 $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$  は  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  と  $\sim$  の関係にはなく、従って  $\{(b_j)\}$  の何れかはこれと一次独立であるからである。これについて  $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, b_{j_m}\} \sim \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  が成り立ち、さらにこのような操作は続けて行えるから、最終的に

$$\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_m}\} \sim \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

を得る。これより明らかに  $m = n$  である。 □

さて基底の個数が一意であるということは、これを線形空間を特徴づける値として用いることができる。

**定義 2.1** 線形空間の一つの基底を  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$  とするとき、 $V$  の次元を

$$\dim V := \text{card} B$$

と定義する。次元は基底の取り方に依らず一意に定まる。

実は、有限個の基底が取れない場合があり、この場合については別な取り扱いが必要である。

**定義 2.1'**  $\text{card} B = \aleph_0$  であるとき

$$\dim V = \infty$$

と書き、このとき  $V$  は無限次元であるという。

ここでは無限次元については深入りしない。

## 2.3 行列の導入

ここでは行列というものを導入する。モチベは至って単純だが、その構築に当たっては遠回りを強いられることになる。ただ、この遠回りには十分な価値があることが後にわかるだろう。



以下の  $n$  元連立一次方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

これを「解く」とは、 $(x_i)$ を求めることである。しかしどうにもこの式は見栄えが悪い。そこで、例えば

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

即ち

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

という形になれば求めるべき解が顕わになってわかりやすい。そこで然るような  $A$  を考えたい。



$V, W$  を、それぞれ  $\dim V = m, \dim W = n$  なる実数体  $\mathbb{R}$  上の線形空間とする。写像  $\mu : V \rightarrow W$  を考えていくが、先立って以下が成り立つことを確認する。

**命題 2.3** 任意の線形空間から次元が等しいユークリッド空間への同型写像が存在する。

まず、2.2 で述べたように線形空間とはユークリッド空間を拡張した概念であり、同じ数学的構造を持つ。ここで、 $V$  の基底を一つ固定し、 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$  とすると

$$\forall \mathbf{v} \in V, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_m), \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i$$

ここで、写像  $f_V$  を

$$f_V : V \rightarrow \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

とすれば、これは明らかに数学的構造を保つ逆像  $f_V^{-1}$  が考えられる。よって  $f_V$  は同型写像である。

同様に、同型写像  $f_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  も考えられる。ここで、ユークリッド空間の間の変換  $\varphi$  を考えることにより、考察対象である  $\mu$  は

$$\mu = f_W^{-1} \circ \varphi \circ f_V$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & W \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

と表せる (右の可換図式を見よ) から、この  $\varphi$  の素性を探っていく。まず、定義より

$$\varphi : V \rightarrow W : \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{pmatrix}$$

であるから、これを成分表示すると

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) &= \mathbf{w}_1 \\ \varphi_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) &= \mathbf{w}_2 \\ &\vdots \\ \varphi_n(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) &= \mathbf{w}_n \end{aligned}$$



特に、 $(v_i)$  の一つ一つが変換されていることを強調すると

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(v_1) & \varphi_{12}(v_2) & \cdots & \varphi_{1m}(v_m) \\ \varphi_{21}(v_1) & \varphi_{22}(v_2) & & \varphi_{2m}(v_m) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(v_1) & \varphi_{n2}(v_2) & \cdots & \varphi_{nm}(v_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

何やら縦横に式が並んだものが現れた。これを扱いやすい形にするため、作用素  $f_{nm}$  を

$$f_{nm}v_m = \varphi_{nm}(v_m)$$

となるようにし、さらにこの長方形形状のものとベクトルとの積を

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{11}v_1 + f_{12}v_2 + \cdots + f_{1m}v_m \\ f_{21}v_1 + f_{22}v_2 + \cdots + f_{2m}v_m \\ \vdots \\ f_{n1}v_1 + f_{n2}v_2 + \cdots + f_{nm}v_m \end{pmatrix}$$

となるように定義すると、上式の右辺は  $(\varphi_i(v))$  即ち  $w$  それ自身であるから

$$(f_{ij})v = w$$

ここで、 $V, W$  の体を  $\mathbb{R}$  としているから、 $(f_{ij}) \in \mathbb{R}$  と考えて問題ないだろう。

このように数字を長方形形状に並べたものを**行列**という。特にここでは  $(f_{ij})$  を  $\varphi$  の**表現行列**、または  $V$  から  $W$  への**基底変換行列**ともいう。ここでは行列を実数体上で構築したが、同様にして任意の体上で定義できる。

さて上記の定義式は便利である。なぜなら、右辺のような線形結合の形を行列とベクトルの積に分解することができるからである。2.1 節で述べたことを思い出せば、 $n$  元連立方程式は

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

とベクトルの形で表せるのであった。ここで  $f_i$  が線形である場合は

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \cdots + f_{1n}x_n \\ f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \cdots + f_{2n}x_n \\ \vdots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

であるから、 $(x_i)$  をベクトルとみなすことで行列とベクトルの積の形

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

で連立一次方程式を表すことができる。ここで登場する行列は見ての通り連立方程式から係数だけをそのまま抜き出して並べたものであり、**係数行列**と呼ばれる。