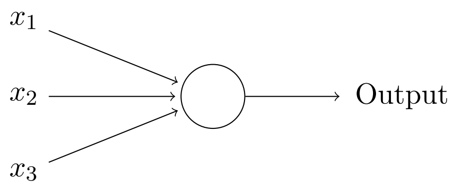
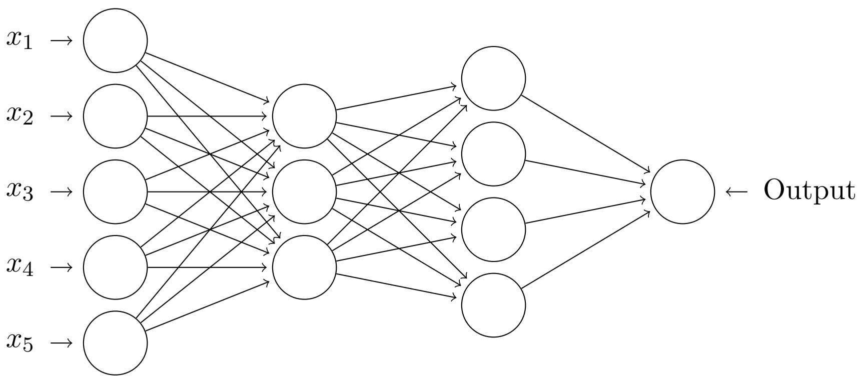
1 Perceptrons

- Modell eines künstlichen Neurons
- Vorgänger der *Sigmoid Neurons*, die in heutigen modernen neuronalen Netzen benutzt werden



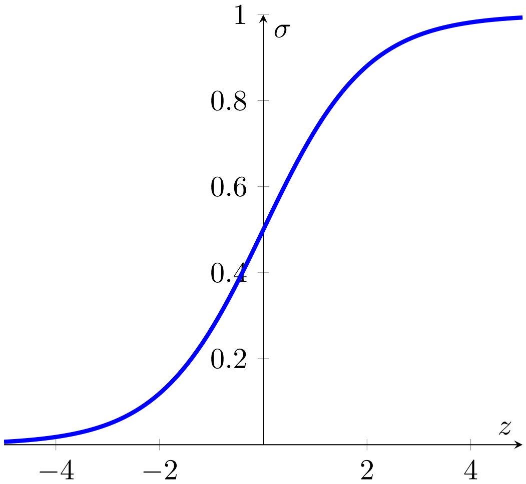
- <u>Eingaben:</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$
- <u>*Weights*:</u> $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ für jede Eingabe x_1, der die jeweilige Eingabe gewichtet
- Output $= \begin{cases} 0, & \text{wenn } \sum_j w_j x_j \leq \text{Treshold, wobei Treshold} \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- **vereinfachte Schreibweise:**
  - $\sum_j w_j x_j = w \cdot x$, wobei w und x nun Vektoren beschreiben, dessen Komponenten die Gewichte und Eingaben sind
  - ziehe den Treshold auf die andere Seite der Ungleichung (*Bias*: $b = -$Treshold)
  - $\Rightarrow$ Bias beschreibt, wie einfach es ist ein Perceptron auf 1 zu bringen
  - Output $= \begin{cases} 0, & \text{wenn } w \cdot x + b \leq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- Mit Hilfe eines *neuronalen Netzes* aus Perceptons können kompliziertere Entscheidungen getroffen werden:



- neuronales Netz besteht aus drei Schichten: *Input-Layer*, *Hidden-Layer* und *Output-Layer*
- <u>Ziel:</u> bringe das Netz dazu zu lernen, d.h. ihre Weights und Bias-Werte anzupassen, sodass für jede Eingabe das erwartete Ergebnis erzielt wird

2 Sigmoid Neurons

- Anforderung: Eine kleine Änderung in den Weights/Bias-Werten führt nur zu einer kleinen Änderung in der Ausgabe
- $\Rightarrow$ Perceptrons sind dafür nicht geeignet, da sie nur flippen können
- *Sigmoid Neurons*:
  - Eingaben: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$
  - Ausgabe: $\sigma(w \cdot x + b) = \sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$
  - Ähnlichkeit: $z \to \infty \Rightarrow \sigma(z) \approx 1$ und $z \to -\infty \Rightarrow \sigma(z) \approx 0$



- **Beispiel:** Schrifterkennung
  - Eingabe: 28 Pixel $\times$ 28 Pixel = 784 Neuronen mit Intensität $\in [0, 1]$
  - Ausgabe: 10 Neuronen, die die Wahrscheinlichkeiten beschreiben, dass das Bild die entsprechende Zahl zeigt, d.h. Output > 0.5
  - Ziel: approximiere die Funktion $y(x)$, die die Trainingsdaten beschreibt, d.h. $y(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ für ein Bild x mit einer Null, usw.
  - Methode: minimiere Kostenfunktion $C(w, b) = \frac{1}{2n} \sum_x ||y(x) - a(x)||^2$, wobei $a(x)$ der Output des neuronalen Netzes bei Input x ist

2.1 Gradient descent

- Ziel: Lösung des Minimierungsproblems $C(v) = C(v_1, v_2, \ldots, v_n)$
- Lösung:
  - definiere den Gradienten $\nabla C = (\frac{\partial C}{\partial v_1}, \frac{\partial C}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial C}{\partial v_n})^T$ von C aus den partiellen Ableitungen $\frac{\partial C}{\partial v_i}$ von C
  - $\Rightarrow \Delta C \approx \nabla C \cdot \Delta v$
  - wähle $\Delta v = -\eta \nabla C$, dann gilt $\Delta C \approx -\eta \nabla C \cdot \nabla C = -\eta ||\nabla C||^2$ warum noch mal?

    * η wird das *Lerntempo* (engl. *learning rate*) genannt
    * da $||\nabla C||^2 \geq 0$ folgt, dass $\Delta C \leq 0$ für alle $\eta \in \mathbb{R}^+$
    * wähle η so, dass wir nicht zu langsam lernen, aber dennoch eine gute Approximation erhalten

2.1.1 Gradient descent in neuronalen Netzen

- ∇C besteht aus partiellen Ableitungen der Komponenten w_k und b_l
- Problem: ∇C wird berechnet aus dem Mittelwert der Gradienten $\nabla C_x = \frac{1}{2}||y(x) - a(x)||^2$ für alle Trainingsdaten $x \Rightarrow$ berechnungsintensiv
- Lösung: *Stochastic gradient descent*
  - Idee: berechne ∇C aus einer kleinen Anzahl m zufällig gewählter Trainingsdaten $X_1, X_2, \ldots, X_m$
  - vorausgesetzt m ist groß genug, dann gilt $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \nabla C_{X_i} \approx \frac{1}{n}\sum_x \nabla C_x = \nabla C$

3 Backpropagation

- berechnet den Gradienten ∇C_x der Kostenfunktion C_x

3.1 Notation

- w_{jk}^l beschreibt das Gewicht des $k$ten Neurons im $(l-1)$ten Layer zu dem $j$ten Neuron im $l$ten Layer
- b_j^l beschreibt den Bias des $j$ten Neurons im $l$ten Layer
- a_j^l beschreibt die Ausgabe (*Aktivierung*) des $j$ten Neurons im $l$ten Layer
- $\Rightarrow a_j^l = \sigma((\sum_k w_{jk}^l a_k^{l-1}) + b_j^l)$
- Intuition: lässt uns die Aktivierung und den Bias als Vektor schreiben, die Gewichte zwischen zwei Layern als Matrix
  - Beispiel:
    * Layer 1 besitzt 4 Neuronen, Layer 2 besitzt 3 Neuronen
    * $a^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ a_4^1 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \end{pmatrix}, w^2 = \begin{pmatrix} w_{11}^2 & w_{12}^2 & w_{13}^2 & w_{14}^2 \\ w_{21}^2 & w_{22}^2 & w_{23}^2 & w_{24}^2 \\ w_{31}^2 & w_{32}^2 & w_{33}^2 & w_{34}^2 \end{pmatrix}$
    * $a^2 = \sigma(w^2 \cdot a^1 + b^2)$, wobei σ auf jeder Komponente einzeln angewendet wird
- $z^l \equiv w^l a^{l-1} + b^l$ wird als *gewichtete Eingabe* bezeichnet
- $\Rightarrow C_x = \frac{1}{2}||y(x) - a^L(x)||^2$, wobei $a^L(x)$ der Vektor des letzten Layers bei Eingabe x beschreibt

3.1.1 Hadamard Produkt $s \odot t$

- elementweise Multiplikation zweier Vektoren
- Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 3\\2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

3.2 Die vier fundamentalen Gleichungen der Backpropagation

- $\delta_j^l \equiv \frac{\partial C_x}{\partial z_j^l}$ bezeichnet den *Fehler* im $j$ten Neuron im $l$ten Layer
  - Veranschaulichung:
    1. an dem $j$ten Neuron im $l$ten Layer kommt eine Eingabe z_j^l an
    2. es wird eine kleine Veränderung Δz_j^l vorgenommen, sodass die Kosten minimiert werden
       * wenn $\frac{\partial C_x}{\partial z_j^l}$ einen großen (negativen) Wert hat, dann können die Kosten reduziert werden, wenn Δz_j^l entgegengesetzt zur Steigung gewählt wird
       * wenn $\frac{\partial C_x}{\partial z_j^l}$ nahe an Null, dann ist auch Δz_j^l nahe bei Null
    3. anstatt $\sigma(z_j^l)$ wird $\sigma(z_j^l + \Delta z_j^l)$ weitergeleitet
- Backpropagation berechnet δ_j^l und projiziert den Fehler auf $\frac{\partial C_x}{\partial w_{jk}^l}$ und $\frac{\partial C_x}{\partial b_j^l}$

1. **Der Fehler δ^L im Output-Layer:**
   - die Komponenten von δ^L sind gegeben durch $\delta_j^L = \frac{\partial C_x}{\partial a_j^L}\sigma'(z_j^L)$
   - $\frac{\partial C_x}{\partial a_j^L} = (a_j - y_j)$ beschreibt, wie schnell sich die Kosten in der $j$ten Ausgabe verändern
   - $\Rightarrow$ wenn C_x unabhängig von dem Ausgabeneuron j, dann ist δ_j^l klein
   - Matrix-Schreibweise: $\delta^L = \nabla_a C_x \odot \sigma'(z^L)$
2. **Der Fehler δ^l in Abhängigkeit zu δ^{l+1}:**
   - $\delta^l = ((w^{l+1})^T \cdot \delta^{l+1}) \odot \sigma'(z^l)$
   - Angenommen, wir kennen den Fehler δ^{l+1}
   - das Transponieren der Matrix w^{l+1} kann als rückwärts durch das Netz gehen verstanden werden
3. **Abhängigkeit des Fehlers δ_j^l zur Kostenveränderung bzgl. des Bias b_j^l:**
   - $\frac{\partial C_x}{\partial b_j^l} = \delta_j^l$
4. **Abhängigkeit des Fehlers δ_j^l zur Kostenveränderung bzgl. des Gwichts w_{jk}^l:**
   - $\frac{\partial C_x}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1}\delta_j^l$

3.3 Algorithmus

1. fülle das Netz mit beliebigen Gewichten und Bias-Werten
2. setze x als Eingabe des Netzes
3. berechne z^l und $a^l = \sigma(z^l)$ für jeden Layer
4. bestimme den Output-Error δ^L über die erste Gleichung
5. bestimme den Fehler δ^l rückwärts für jeden Layer l mit $l = \{L-1, L-2, \dots, 2\}$
6. berechne die Gradienten $\frac{\partial C_x}{\partial w^l_{jk}}$ und $\frac{\partial C_x}{\partial b^l_j}$

- für eine zufällige Anzahl m an Trainingsdaten gilt dann (Stochastic gradient descent):
  1. berechne den Fehler $\delta^{x,l}$ in jeder Schicht l und für jede Eingabe x
  2. verändere die Gewichte anhand folgender Regel:
     - $w^l \to w^l - \frac{\eta}{m} \sum_x \delta^{x,l} (a^{x,l-1})^T$
     - $b^l \to b^l - \frac{\eta}{m} \sum_x \delta^{x,l}$ warum?

4 Cross-Entropy

- Netz lernt wohlmöglich ziemlich langsam (braucht viele Iterationen, um die Trainingsdaten gut zu approximieren)
- Netz lernt langsam, wenn $\frac{\partial C}{\partial w} = (a-y)\sigma'(z)x$ und $\frac{\partial C}{\partial b} = (a-y)\sigma'(z)$ klein
- $\Rightarrow \sigma'(z)$ ist klein für große/kleine z-Werte
- kann verbessert werden, in dem eine andere Kostenfunktion benutzt wird $\Rightarrow$ **Cross-Entropy**:

$$C = -\frac{1}{n} \sum_x y \ln a + (1-y) \ln(1-a)$$

4.1 Eigenschaften

- $C > 0$:
  - $y, a, (1-y), (1-a) \in [0,1]$
  - $\ln x$ ist negativ für $x \in [0,1]$
- wenn $a = \sigma(z) \approx y$, dann ist $C \approx 0$
- $\frac{\partial C}{\partial w_j} = -\frac{1}{n} \sum_x \left(\frac{y}{\sigma(z)} - \frac{1-y}{1-\sigma(z)}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial w_j} = -\frac{1}{n}\left(\frac{y}{\sigma(z)} - \frac{1-y}{1-\sigma(z)}\right)\sigma'(z) x_j = \frac{1}{n} \sum_x \frac{\sigma'(z) x_j \cdot (\sigma(z) - y)}{\sigma(z)(1-\sigma(z))}$
- mit $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ ergibt sich $\sigma'(z) = \sigma(z)(1-\sigma(z))$
- $\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial w_j} = \frac{1}{n} \sum_x x_j (\sigma(z) - y)$

- die Gechwindigkeit, mit der das Gewicht lernt, ist abhängig ist abhängig von dem Fehler in der Ausgabe $\sigma(z) - y$
- für den Bias ergibt sich $\frac{\partial C}{\partial b} = \frac{1}{n} \sum_x (\sigma(z) - y)$
- $\Rightarrow$ Lernrate ist unabhängig von $\sigma'(z)$