

## Master-Thesis

### Convolutional Neural Networks auf Graphrepräsentationen von Bildern

Matthias Fey  
13. Mai 2017

**Gutachter:**

Prof. Dr. Heinrich Müller  
M.Sc. Jan Eric Lenssen

Lehrstuhl Informatik VII  
Graphische Systeme  
TU Dortmund



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Problemstellung . . . . .   | 3         |
| 1.2      | Aufbau der Arbeit . . . . .   | 3         |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Mathematische Notationen . . . . .                                  | 5         |
| 2.2      | Graphentheorie . . . . .  | 5         |
| 2.3      | Convolutional Neural Networks . . . . .                             | 5         |
| <b>3</b> | <b>Graphrepräsentationen von Bildern</b>                            | <b>7</b>  |
| 3.1      | Gitter . . . . .  | 7         |
| 3.2      | Superpixel . . . . .  | 7         |
| 3.2.1    | Verfahren . . . . .   | 7         |
| 3.2.2    | Adjazenzmatrixbestimmung . . . . .                                  | 7         |
| 3.2.3    | Merkmalsextraktion . . . . .  | 7         |
| <b>4</b> | <b>Räumliches Lernen auf Graphen</b>                                | <b>9</b>  |
| 4.1      | Räumliche Graphentheorie . . . . .                                  | 9         |
| 4.2      | Räumliche Faltung . . . . .   | 9         |
| 4.3      | Erweiterung auf ebene Graphen . . . . .                             | 9         |
| 4.4      | Netzarchitektur . . . . .   | 9         |
| <b>5</b> | <b>Spektrales Lernen auf Graphen</b>                                | <b>11</b> |
| 5.1      | Spektrale Graphentheorie . . . . .                                  | 11        |
| 5.1.1    | Eigenwerte und Eigenvektoren reell symmetrischer Matrizen . . . . . | 11        |
| 5.1.2    | Laplace-Matrix . . . . .  | 12        |
| 5.2      | Spektraler Faltungsoperator . . . . .                               | 15        |
| 5.2.1    | Graph-Fourier-Transformation . . . . .                              | 15        |
| 5.2.2    | Spektrale Filterung . . . . .                                       | 16        |
| 5.2.3    | Polynomielle Approximation . . . . .                                | 17        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.3      | Graph Convolutional Networks . . . . .  | 17        |
| 5.3.1    | Faltungsoperator . . . . .              | 17        |
| 5.3.2    | Erweiterung auf ebene Graphen . . . . . | 17        |
| 5.4      | Pooling auf Graphen . . . . .           | 18        |
| 5.4.1    | Graphvergrößerung . . . . .             | 18        |
| 5.4.2    | Erweiterung auf ebene Graphen . . . . . | 18        |
| 5.5      | Netzarchitektur . . . . .               | 18        |
| <b>6</b> | <b>Evaluation</b>                       | <b>19</b> |
| 6.1      | Versuchsaufbau . . . . .                | 19        |
| 6.1.1    | Datensätze . . . . .                    | 19        |
| 6.1.2    | Metriken . . . . .                      | 19        |
| 6.1.3    | Parameterwahl . . . . .                 | 19        |
| 6.2      | Merkmalsselektion . . . . .             | 19        |
| 6.3      | Ergebnisse . . . . .                    | 19        |
| 6.4      | Laufzeitanalyse . . . . .               | 19        |
| 6.5      | Diskussion . . . . .                    | 19        |
| <b>7</b> | <b>Ausblick</b>                         | <b>21</b> |
| <b>A</b> | <b>Weitere Informationen</b>            | <b>23</b> |
|          | <b>Abbildungsverzeichnis</b>            | <b>25</b> |
|          | <b>Algorithmenverzeichnis</b>           | <b>27</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>             | <b>30</b> |

# Mathematische Notationen

$$\|\cdot\|_2$$



# 1 Einleitung

Homepage<sup>1</sup>

N

„wdawd“

## 1.1 Problemstellung

## 1.2 Aufbau der Arbeit

---

<sup>1</sup>[https://github.com/rusty1s/embedded\\_gcnn](https://github.com/rusty1s/embedded_gcnn)





## **2 Grundlagen**

### **2.1 Mathematische Notationen**

### **2.2 Graphentheorie**

### **2.3 Convolutional Neural Networks**



## 3 Graphrepräsentationen von Bildern

### 3.1 Gitter

### 3.2 Superpixel

#### 3.2.1 Verfahren

**SLIC** [1]

*Simple Linear Iterative Clustering* (SLIC)

**Quickshift** [13]

**Weitere Verfahren** [5]

#### 3.2.2 Adjazenzmatrixbestimmung

#### 3.2.3 Merkmalsextraktion



# **4 Räumliches Lernen auf Graphen**

## **4.1 Räumliche Graphentheorie**

**Färbung von Knoten** awdawd

**Isomorphie und kanonische Ordnung** awdawd

## **4.2 Räumliche Faltung**

**Knotenauswahl** awdawd

**Nachbarschaftsgruppierung** awdawd

**Normalisierung** awdawd

## **4.3 Erweiterung auf ebene Graphen**

## **4.4 Netzarchitektur**



# 5 Spektrales Lernen auf Graphen

## 5.1 Spektrale Graphentheorie

Es gibt 2 große Quellen hier:

- Spectral Graph Theory by Chung
- Discrete Laplace-Beltrami Operator

+ 5 zum Lernen:

- Semi Supervised Classification
- Fast Localized Spectral Filterung
- Wavelets on Graphs via Spectral Graph Theory
- The Emerging Field of Signal Processing on Graphs
- How powerful are Graph Convolutions? (Review)

### 5.1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren reell symmetrischer Matrizen

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ .  $\lambda \in \mathbb{R}$ . *Eigenwertproblem*  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . Zu einem *Eigenwert*  $\lambda$  gibt es unendlich viele (skalierte) *Eigenvektoren*  $\mathbf{u}$ . Wir definieren den Eigenvektor  $\mathbf{u}$  eines Eigenwertes  $\lambda$  daher eindeutig über die Bedingung  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . Sei  $\mathbf{M}$  weiterhin symmetrisch, d.h.  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$ . Dann gilt für zwei unterschiedliche Eigenvektoren  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$ , dass  $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ . Weiterhin hat  $\mathbf{M}$  genau  $N$  reelle Eigenwerte mit  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ .

Wir definieren zu  $\mathbf{M}$  die orthogonale *Eigenvektormatrix*  $\mathbf{U} := [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , wobei  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}$ , und dessen korrespondierende Eigenwertdiagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda} :=$

$\text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_N]^\top)$ , d.h.  $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ . Dann gilt  $\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda$  und insbesondere ist  $\mathbf{M}$  diagonalisierbar über

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top. \quad (5.1)$$

Weiterhin gilt für die  $k$ te Potenz von  $\mathbf{M}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{M}^k = (\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top)^k = \mathbf{U}\Lambda^k\mathbf{U}^\top. \quad (5.2)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich verdeutlichen, wenn man die Potenz ausschreibt:

$$(\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top)^k = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top \prod_{i=1}^{k-2} \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\Lambda^2\mathbf{U}^\top \prod_{i=1}^{k-2} \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\Lambda^k\mathbf{U}^\top.$$

Falls  $\mathbf{M}$  weiterhin *schwach diagonaldominant* ist, d.h.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\mathbf{M}_{ij}| \leq |\mathbf{M}_{ii}|, \quad (5.3)$$

und  $\mathbf{M}_{ii} \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ , ist  $\mathbf{M}$  *positiv semidefinit*, d.h.  $\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ . Eigenwerte symmetrischer positiv semidefiniter Matrizen  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  sind positiv reell und es lässt sich folglich auf diesen eine Ordnung definieren mit  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N := \lambda_{\max}$ .

elle

## 5.1.2 Laplace-Matrix

Our eigenvalues relate well to other graph invariants for general graphs in a way that other definitions (such as the eigenvalues of adjacency matrices) often fail to do. The advantages of this definition are perhaps due to the fact that it is consistent with the eigenvalues in spectral geometry and in stochastic processes. Many results which were only known for regular graphs can be generalized to all graphs [2].

ro

Für einen schleifenlosen, ungerichteten, gewichtet oder ungewichteten Graphen  $G$  und dessen Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}$  mit Gradmatrix  $\mathbf{D}$  ist die *kombinatorische Laplace-Matrix*  $\mathbf{L}$  definiert als  $\mathbf{L} := \mathbf{D} - \mathbf{A}$  [2]. Die *normalisierte Laplace-Matrix*  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist



definiert als  $\tilde{\mathbf{L}} := \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$  mit der Konvention, dass  $\mathbf{D}_{ii}^{-\frac{1}{2}} = 0$  für isolierte Knoten  $v_i \in \mathcal{V}$  in  $G$ , d.h.  $\mathbf{D}_{ii} = 0$  [2]. Daraus ergibt sich die elementweise Definition

$$\tilde{\mathbf{L}}_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ -\frac{w(v_i, v_j)}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}, & \text{wenn } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für verbundene Graphen kann  $\tilde{\mathbf{L}}$  vereinfacht werden zu  $\tilde{\mathbf{L}} := \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$  [2]. Jeder Eintrag auf der Diagonalen der normalisierten Laplace-Matrix ist folglich Eins.  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist damit normalisiert auf den (gewichteten) Grad zweier adjazenter Knoten  $v_i$  und  $v_j$ . Es ist anzumerken, dass  $\mathbf{L}$  und insbesondere  $\tilde{\mathbf{L}}$  symmetrisch sind, wohingegen eine Normalisierung der Form  $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$  dies in der Regel nicht wäre [11].

$\mathbf{L}$  und  $\tilde{\mathbf{L}}$  sind keine ähnlichen Matrizen. Insbesondere sind ihre Eigenvektoren unterschiedlich. Die Nutzung von  $\mathbf{L}$  oder  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist damit abhängig von dem Problem, welches man betrachtet [6]. Wir schreiben  $\mathcal{L}$  wenn die Wahl der Laplace-Matrix, ob  $\mathbf{L}$  oder  $\tilde{\mathbf{L}}$ , für die weitere Berechnung zwar fest, aber irrelevant ist.

### Interpretation

Sei  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  eine Funktion bzw. ein Signal auf den Knoten eines Graphen  $G$ . Dann kann für die kombinatorische Laplace-Matrix  $\mathbf{L}$  verifiziert werden, dass  $\mathbf{L}$  die Gleichung

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_i = \sum_{i \sim j} w(v_i, v_j) (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)$$

erfüllt [6]. Sei  $G$  nun ein Graph, der aus einem (unendlichen) zweidimensionalen regulärem Gitter entstanden ist, d.h. jeder Knoten  $v_i$  besitzt genau 4 Nachbarn mit gleichen Kantengewichten  $\frac{1}{\delta^2}$ , wobei  $\delta \in \mathbb{R}$  beliebige Konstante. Zur einfacheren Veranschaulichung benutzen wir dabei für die Signalstärke  $\mathbf{f}_i$  eines Knoten  $v_i$  an Position  $(x, y)$  die Indexnotation  $\mathbf{f}_{x,y}$ . Dann beschreibt

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_{x,y} = \frac{4\mathbf{f}_{x,y} - \mathbf{f}_{x+1,y} - \mathbf{f}_{x-1,y} - \mathbf{f}_{x,y+1} - \mathbf{f}_{x,y-1}}{h^2}$$

die *5-Punkte-Stern* Approximation  $-\nabla^2 f$  (bei umgekehrtem Vorzeichen) definiert auf den Punkten  $\{(x, y), (x + \delta, y), (x - \delta, y), (x, \delta + h), (x, y - \delta)\}$  [6]. Ähnlich zu einem regulären Gitter lässt sich ein Graph  $G$  auch über beliebig viele Abtastpunkte einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit konstruieren. Es zeigt sich, dass mit steigender Abtastdichte und geeigneter Wahl der Kantengewichte die normalisierte Laplace-

kurz laplac  
beltrami

grafik

Matrix  $\tilde{\mathbf{L}}$  zu dem kontinuierlichem Laplace-Beltrami Operator konvergiert [6]. Damit kann  $\tilde{\mathbf{L}}$  als die diskrete Analogie des  $\nabla^2$  Operators auf Graphen verstanden werden. Der Laplace-Beltrami Operator misst dabei, in wie weit sich eine Funktion  $f$  an einem Punkt  $x$  von dem Durchschnitt aller Funktionspunkte um einen kleinen Bereich um  $x$  unterscheidet. Die Laplace-Matrix operiert dabei völlig analog, in dem sie misst, wie sehr sich eine (diskrete) Funktion um einen Knoten im Vergleich zu seinen Nachbarknoten unterscheidet.

Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathcal{L}$  helfen uns dabei, die lineare Transformation einer Funktion  $\mathbf{f}$  (mehrfach) angewendet auf  $\mathcal{L}$  besser zu verstehen. Wir können dafür  $\mathbf{f}$  als Linearkombination der Eigenbasis  $\sum_i c_i \mathbf{u}_i$  schreiben und erhalten

$$\mathcal{L}^k \mathbf{f} = \sum_i c_i \mathcal{L}^k \mathbf{u}_i = \sum_i c_i \lambda_i^k \mathbf{u}_i.$$

Somit können Eigenschaften von  $\mathcal{L}$  und damit des Graphen selber durch dessen Eigenwerte und Eigenvektoren beschrieben werden.

**Eigenschaften**  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ist eine reell symmetrisch, positiv semidefinite Matrix [2]. Folglich besitzt  $\mathcal{L}$  nach Kapitel 5.1.1 genau  $N$  positiv reelle Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  mit Ordnung  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$  und  $N$  korrespondierende orthogonale Eigenvektoren  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^N$ .

Die kombinatorische Laplace-Matrix  $\mathbf{L}$  ist nach (5.3) weiterhin schwach diagonal-dominant. Insbesondere summiert sich jede Reihen- und Spaltensumme von  $\mathbf{L}$  zu Null auf, d.h.  $\sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ji} = 0$ . Daraus folgt unmittelbar, dass  $\lambda_1 = 0$ , da  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}[1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^N$  Eigenvektor von  $\mathbf{L}$  mit  $\mathbf{L}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ .  $\tilde{\mathbf{L}}$  hingegen ist nicht zwingend schwach diagonal-dominant. Es lässt sich jedoch zeigen, dass auch für  $\tilde{\mathbf{L}}$  gilt, dass  $\lambda_1 = 0$  [2].

Eine der interessantesten Eigenschaften eines Graphs ist dessen Konnektivität. Die Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  bzw. dessen Eigenwerte stellen ein geeignetes Mittel zur Untersuchung dieser Eigenschaft dar. So gilt z.B. für einen verbundenen Graphen  $G$ , dass  $\lambda_2 > 0$ . Falls  $\lambda_i = 0$  und  $\lambda_{i+1} \neq 0$ , dann besitzt  $G$  genau  $i$  verbundene Komponenten [2]. Damit ist die Anzahl der Null-Eigenwerte äquivalent zu der Anzahl an Komponenten, die ein Graph besitzt. Für  $\tilde{\mathbf{L}}$  lässt sich weiterhin zeigen, dass  $\lambda_{\max} \leq 2$  eine obere Schranke ihrer Eigenwerte ist [2].

Aus der Laplace-Matrix können ebenso Rückschlüsse über die kürzeste Pfaddistanz zweier Knoten gewonnen werden. So gilt für  $\mathcal{L}^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $\mathcal{L}_{ij}^k = 0$  genau dann, wenn  $s(v_i, v_j) > k$  [6]. Damit beschreibt  $\mathcal{L}_i^k$  bildlich gesprochen die Menge an Knoten, die maximal  $k$  Kanten von  $i$  entfernt liegen.

## 5.2 Spektraler Faltungsoperator

Sei  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  ein Signal auf den Knoten eines Graphen  $G$ , welches abhängig von der Struktur des Graphen weiter verarbeitet werden soll. Es ist jedoch in erster Linie nicht selbstverständlich, wie recht einfache, dennoch fundamentale Signalverarbeitungsprozesse wie Translation oder Filterung in der Domäne des Graphen definiert werden können [12]. ohne translation keine faltung Die spektrale Graphentheorie bietet einen Ausweg, in dem Eingabesignale in das Spektrum des Graphen zerlegt bzw. abgebildet und wieder retransformiert werden können.

das mit der  
translation

### 5.2.1 Graph-Fourier-Transformation

Das Spektrum eines Graphen  $G$  bilden die Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  der Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  von  $G$ . Diese werden deshalb auch oft als die *Frequenzen* von  $G$  betitelt. In der spektralen Domäne können wir ein Eingabesignal  $\mathbf{f}$  über  $G$  dann analog wie ein zeitdiskretes Abtastsignal in der Fourier-Domäne behandeln.

**Klassische Fourier-Transformation** Die Fourier-Transformation  $\hat{f}$  einer Funktion  $f(t)$  ist definiert als [12]

$$\hat{f}(\omega) := \langle f, e^{2\pi i \omega t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Die komplexen Exponentiale  $e^{2\pi i \omega t}$  beschreiben dabei die Eigenfunktionen des eindimensionalen Laplace-Beltrami Operators [12]

$$-\nabla^2 e^{2\pi i \omega t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{2\pi i \omega t} = (2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega t}. \quad (5.4)$$

$\hat{f}$  kann damit als die Ausdehnung von  $f$  in Bezug auf die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators  $\nabla^2$  verstanden werden [6].

Analog lässt sich die *Graph-Fourier-Transformation* einer Funktion  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  auf den Knoten eines Graphen  $G$  als Ausdehnung von  $f$  in Bezug auf die Eigenvektoren  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^N$  der Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  definieren [12]:

$$\hat{f}(\lambda_i) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle \text{ bzw. } \hat{\mathbf{f}} := \mathbf{U}^\top \mathbf{f}. \quad (5.5)$$

Die inverse Graph-Fourier-Transformation ergibt sich dann als [12]

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^N \hat{f}(\lambda_j)(\mathbf{u}_j)_i \text{ bzw. } \mathbf{f} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{f}}. \quad (5.6)$$

In der klassischen Fourier-Analyse sind für die Eigenwerte  $\{(2\pi\omega)^2\}_{\omega \in \mathbb{R}}$  in (5.4) nahe bei Null die korrespondierenden Eigenfunktionen kleine, weich schwingende Funktionen, wohingegen für größere Eigenwerte bzw. Frequenzen die Eigenfunktionen sehr schnell und zügig anfangen zu oszillieren. Bei der Graph-Fourier-Transformation ist dies ähnlich. So ist für  $\mathbf{L}$  der erste Eigenvektor  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}[1, \dots, 1]^\top$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  konstant und an jedem Knoten gleich. Generell zeigt sich, dass die Eigenvektoren geringer Frequenzen nur geringfügig im Graph variieren, wohingegen Eigenvektoren größerer Eigenwerte immer unähnlicher werden (vgl. [12]).

Die Graph-Fourier-Transformation (5.5) und ihre Inverse (5.6) bieten uns eine Möglichkeit ein Signal in zwei unterschiedlichen Domänen zu repräsentieren, nämlich der Knotendomäne, d.h. das unveränderte Signal auf der Knotenmenge  $f(v_i)$ , und der spektralen Domäne, d.h. das transformierte Signal in das Spektrum des Graphen  $\hat{f}(\lambda_i)$ . Diese Transformation erlaubt uns die Formulierung fundamentaler Signalverarbeitungsoperationen.

### 5.2.2 Spektrale Filterung

In der Signalverarbeitung versteht man unter der Frequenzfilterung die Transformation eines Eingangssignals in die Fourier-Domäne und der verstärkenden oder dämpfenden Veränderung der Amplituden der Frequenzkomponenten. Formal betrachtet ergibt dies

$$\hat{f}_{\text{out}}(\omega) := \hat{f}_{\text{in}}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (5.7)$$

mit Übertragungsfunktion  $\hat{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Shuman u. a. zeigen, dass die Filterung in der Fourier-Domäne äquivalent ist zu einer Faltung in der Zeitdomäne, d.h.

$$(f_{\text{in}} \star g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f_{\text{in}}(\tau)g(t - \tau) \, d\tau = f_{\text{out}}(t) \quad (5.8)$$

Wir können die Filterung der Frequenzen in der Fourier-Domäne analog zu (5.7) für die spektrale Domäne auf Graphen über

$$\hat{f}_{\text{out}}(\lambda_i) := \hat{f}_{\text{in}}(\lambda_i)\hat{g}(\lambda_i) \text{ bzw. } \hat{\mathbf{f}}_{\text{out}} := \hat{\mathbf{f}}_{\text{in}} \odot \hat{\mathbf{g}}$$

beschreiben, wobei  $\odot$  das elementweise Hadamard-Produkt [12].  $\hat{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^N$  ist damit eine Übertragungsfunktion parametrisiert über die Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  der Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$ . Daraus ergibt sich analog zu (5.8) der *spektrale Faltungsoperator* auf Graphen in der Knotendomäne mit Hilfe der Graph-Fourier-Transformation (5.5) und ihrer Inversen (5.6) als [3, 12]

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} := \mathbf{U}(\mathbf{U}^\top \mathbf{f}_{\text{in}} \odot \hat{\mathbf{g}}) = \mathbf{U} \hat{g}(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{U}^\top \mathbf{f}_{\text{in}} = \mathbf{f}_{\text{out}}, \quad (5.9)$$

mit  $\hat{g}(\mathbf{\Lambda}) = \text{diag}([\hat{g}(\lambda_1), \dots, \hat{g}(\lambda_N)]^\top)$ .

### 5.2.3 Polynomielle Approximation

**Tschebyschow-Polynome**

## 5.3 Graph Convolutional Networks

[8]

### 5.3.1 Faltungsoperator

**Weisfeiler-Lehman Analogie**

### 5.3.2 Erweiterung auf ebene Graphen

Warum ist der Algorithmus nicht so gut [7]?

**B-Spline-Kurven**

**Faltungsoperator**

## 5.4 Pooling auf Graphen

### 5.4.1 Graphvergrößerung

**Clustering von Knoten**

### 5.4.2 Erweiterung auf ebene Graphen

## 5.5 Netzarchitektur

# **6 Evaluation**

## **6.1 Versuchsaufbau**

### **6.1.1 Datensätze**

**MNIST** [10]

**Cifar-10** [9]

**Pascal VOC** [4]

### **6.1.2 Metriken**

### **6.1.3 Parameterwahl**

Vorstellung aller Parameter Superpixelalgorithmen Parameterwahl

## **6.2 Merkmalsselektion**

## **6.3 Ergebnisse**

Vergleich mit anderen Implementierungen

## **6.4 Laufzeitanalyse**

Vergleich mit anderen Implementierungen

## **6.5 Diskussion**





# 7 Ausblick

Weitere Anwendungsgebiete

Augmentierung von Graphen

Spatial-Pyramid-Pooling

Attention-Algorithmus



## **A Weitere Informationen**



# **Abbildungsverzeichnis**



# **Algorithmenverzeichnis**





# Literaturverzeichnis

- [1] ACHANTA, Radhakrishna; SHAJI, Appu; SMITH, Kevin; LUCCHI, Aurelien; FUA, Pascal; SUSSTRUNK, Sabine: SLIC Superpixels Compared to State-of-the-Art Superpixel Methods. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (2012), S. 2274–2282
- [2] CHUNG, Fan .R.K.: *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, 1997
- [3] DEFFERRARD, Michaël; BRESSON, Xavier; VANDERGHEYNST, Pierre: Convolutional Neural Networks on Graphs with Fast Localized Spectral Filtering. In: *Advances in Neural Information Processing Systems 29*. Curran Associates, Inc., 2016, S. 3844–3852
- [4] EVERINGHAM, Mark; ESLAMI, S.M. Ali; VAN GOOL, Luc; WILLIAMS, Christopher K. I.; WINN, John; ZISSERMAN, Andrew: The Pascal Visual Object Classes Challenge: A Retrospective. In: *International Journal of Computer Vision* (2015), S. 98–136
- [5] FELZENSZWALB, Pedro F.; HUTTENLOCHER, Daniel P.: Efficient Graph-Based Image Segmentation. In: *International Journal of Computer Vision* (2004), S. 167–181
- [6] HAMMOND, David K.; VANDERGHEYNST, Pierre; GRIBONVAL, Réne: Wavelets on Graphs via Spectral Graph Theory. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* (2011), S. 129–150
- [7] HUSZÁR, Ferenc: *How Powerful are Graph Convolutions?* <http://www.inference.vc/how-powerful-are-graph-convolutions-review-of-kipf-welling-2016-2/>. 2016
- [8] KIPF, Thomas N.; WELLING, Max: Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. In: *Computing Research Repository* (2016)

- [9] KRIZHEVSKY, Alex: *Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images*, Department of Computer Science, University of Toronto, Diplomarbeit, 2009
- [10] LECUN, Yann; CORTES, Corinna; BURGESS, Christopher J.C.: The MNIST Database of Handwritten Digits. (2010)
- [11] REUTER, Martin; BIASOTTI, Silvia; GIORGI, Daniela; PATANÈ, Guiseppe; SPAGNUOLO, Michela: Discrete Laplace-Beltrami Operators for Shape Analysis and Segmentation. In: *Computers & Graphics* (2009), S. 381–390
- [12] SHUMAN, David I.; NARANG, Sunil. K.; FROSSARD, Pascal; ORTEGA, Antonio; VANDERGHEYNST, Pierre: The Emerging Field of Signal Processing on Graphs: Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains. In: *IEEE Signal Processing Magazine* (2013), S. 83–98
- [13] VEDALDI, Andrea; SOATTO, Stefano: Quick Shift and Kernel Methods for Mode Seeking. In: *European Conference on Computer Vision*, 2008, S. 705–718

# Eidesstattliche Versicherung

---

Name, Vorname

---

Matr.-Nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit/Masterarbeit\* mit dem Titel

---

---

---

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

\*Nichtzutreffendes bitte streichen

## Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG - )

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfls. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

---

Ort, Datum

---

Unterschrift