

## Master-Thesis

### Convolutional Neural Networks auf Graphrepräsentationen von Bildern

Matthias Fey  
6. Juni 2017

**Gutachter:**

Prof. Dr. Heinrich Müller  
M.Sc. Jan Eric Lenssen

Lehrstuhl Informatik VII  
Graphische Systeme  
TU Dortmund



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	3
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Mathematische Notationen . . . . .	5
2.2	Graphentheorie . . . . .	5
2.3	Convolutional Neural Networks . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Graphrepräsentationen von Bildern</b>	<b>7</b>
3.1	Gitter . . . . .	7
3.2	Superpixel . . . . .	7
3.2.1	Verfahren . . . . .	7
3.2.2	Adjazenzmatrixbestimmung . . . . .	7
3.2.3	Merkmalsextraktion . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Räumliches Lernen auf Graphen</b>	<b>9</b>
4.1	Räumliche Graphentheorie . . . . .	9
4.2	Räumliche Faltung . . . . .	9
4.3	Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum . . . . .	9
4.4	Netzarchitektur . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Spektrales Lernen auf Graphen</b>	<b>11</b>
5.1	Spektrale Graphentheorie . . . . .	11
5.1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren reell symmetrischer Matrizen . . . . .	12
5.1.2	Laplace-Matrix . . . . .	13
5.2	Spektraler Faltungsoperator . . . . .	15
5.2.1	Graph-Fourier-Transformation . . . . .	16
5.2.2	Spektrale Filterung . . . . .	17
5.2.3	Polynomielle Approximation . . . . .	18
5.3	Graph Convolutional Networks . . . . .	20

5.4	Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum . . . . .	23
5.4.1	Partitionierung . . . . .	24
5.4.2	Polynomielle Approximation über B-Spline-Kurven . . . . .	27
5.5	Pooling auf Graphen . . . . .	31
5.5.1	Graphvergrößerung . . . . .	31
5.5.2	Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum . . . .	31
5.6	Netzarchitektur . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Evaluation</b>	<b>33</b>
6.1	Versuchsaufbau . . . . .	33
6.1.1	Datensätze . . . . .	33
6.1.2	Metriken . . . . .	33
6.1.3	Parameterwahl . . . . .	33
6.2	Merkmalsselektion . . . . .	33
6.3	Ergebnisse . . . . .	33
6.4	Laufzeitanalyse . . . . .	33
6.5	Diskussion . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Weitere Informationen</b>	<b>37</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>39</b>
	<b>Algorithmenverzeichnis</b>	<b>41</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>44</b>

# Mathematische Notationen

$\|\cdot\|_2$  Skalarprodukt Menge?  $(x_0, \dots, x_n)$  geordnete Menge



# 1 Einleitung

Homepage<sup>1</sup>

Convolutional Neural Networks (CNNs) CNN N  
„wdawd“

## 1.1 Problemstellung

## 1.2 Aufbau der Arbeit

---

<sup>1</sup>[https://github.com/rusty1s/embedded\\_gcnn](https://github.com/rusty1s/embedded_gcnn)





## 2 Grundlagen

### 2.1 Mathematische Notationen

Tensor, was bedeutet z.B.  $\mathbf{W}_i$

### 2.2 Graphentheorie

k lokalisierte nachbarschaft zusammenhängend zusammenhängende Komponenten regulärer gittergraph (konnektivität)  
was heißt  $|\mathbf{A}|$

### 2.3 Convolutional Neural Networks

conv2d CNN



## 3 Graphrepräsentationen von Bildern

### 3.1 Gitter

### 3.2 Superpixel

#### 3.2.1 Verfahren

**SLIC.** [1]

*Simple Linear Iterative Clustering* (SLIC)

**Quickshift.** [18]

**Weitere Verfahren.** [7]

#### 3.2.2 Adjazenzmatrixbestimmung

#### 3.2.3 Merkmalsextraktion



# **4 Räumliches Lernen auf Graphen**

## **4.1 Räumliche Graphentheorie**

**Färbung von Knoten.** awdawd

**Isomorphie und kanonische Ordnung.** awdawd

## **4.2 Räumliche Faltung**

**Knotenauswahl.** awdawd

**Nachbarschaftsgruppierung.** awdawd

**Normalisierung.** awdawd

## **4.3 Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum**

## **4.4 Netzarchitektur**



## 5 Spektrales Lernen auf Graphen

Das spektrale Lernen auf Graphen bzw. die Formulierung eines spektralen Faltungsoperators auf Graphen basiert auf der spektralen Graphentheorie, d.h. der Betrachtung des Spektrums eines Graphen definiert über dessen Eigenwerte. Merkmale auf den Knoten eines Graphen können über das Spektrum analog zur Fourier-Transformation in dessen Frequenzraum zerlegt und wieder retransformiert werden. Diese Transformation erlaubt damit die fundamentale Formulierung eines Faltungsoperators in der spektralen Domäne des Graphen. Da der so definierte spektrale Faltungsoperator insbesondere rotationsinvariant ist, wird dieser im Verlauf des Kapitels für den Kontext von Graphen im euklidischen Raum modifiziert.

Durch die spektrale Formulierung kann weiterhin ein effizientes Pooling auf Graphen formuliert werden, welches uns erlaubt, Netzarchitekturen auf Graphen völlig analog zu klassischen CNNs auf zweidimensionalen Bildern zu generieren.

### 5.1 Spektrale Graphentheorie

Die spektrale Graphentheorie beschäftigt sich mit der Konstruktion, Analyse und Manipulation von Graphen. Sie beweist sich dabei als besonders nützlich in Anwendungsgebieten wie der Charakterisierung von Expandergraphen, dem Graphenzeichnen oder dem spektralen Clustering (vgl. [16]). Weiterhin hat die spektrale Graphentheorie z.B. auch Anwendungsgebiete in der Chemie, bei der die Eigenwerte des Spektrums des Graphen mit der Stabilität von Molekülen assoziiert werden (vgl. [2]).

Es zeigt sich, dass die Eigenwerte des Spektrums eines Graphen eng mit den Eigenschaften eines Graphen verwandt sind. Als spektrale Graphentheorie versteht man damit insbesondere die Studie über die gemeinsamen Beziehungen dieser beiden Bereiche. Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die wichtigsten Definitionen und Intuitionen der spektralen Graphentheorie, die es uns schlussendlich erlauben, die spektrale Faltung auf Graphen zu formulieren.

### 5.1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren reell symmetrischer Matrizen

Das *Eigenwertproblem* einer Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ist definiert als  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ , wobei  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  *Eigenvektor* und  $\lambda \in \mathbb{R}$  der entsprechende *Eigenwert* zu  $\mathbf{u}$  genannt werden [10]. Ein Eigenvektor  $\mathbf{u}$  beschreibt damit einen Vektor, dessen Richtung durch die Abbildung  $\mathbf{M}\mathbf{u}$  nicht verändert, sondern lediglich um den Faktor  $\lambda$  skaliert wird. Zu einem Eigenwert  $\lambda$  gibt es unendlich viele (skalierte) Eigenvektoren  $\mathbf{u}$ . Wir definieren den Eigenvektor  $\mathbf{u}$  eines Eigenwertes  $\lambda$  daher eindeutig über die Bedingung  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . Sei  $\mathbf{M}$  weiterhin symmetrisch, d.h.  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$  [10]. Dann gilt für zwei unterschiedliche Eigenvektoren  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$ , dass diese orthogonal zueinander stehen, d.h.  $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ , und  $\mathbf{M}$  genau  $N$  reelle Eigenwerte mit  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  hat [10]. Wir definieren demnach zu  $\mathbf{M}$  die orthogonale *Eigenvektormatrix*  $\mathbf{U} := [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , d.h.  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I}$ , und dessen Eigenwertdiagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda} := \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_N]^\top)$ , d.h.  $\mathbf{\Lambda}_{ii} = \lambda_i$  [4]. Dann gilt  $\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$  und insbesondere ist  $\mathbf{M}$  diagonalisierbar über [10]

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}\mathbf{U})\mathbf{U}^\top = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^\top.$$

Weiterhin gilt für die  $k$ -te Potenz von  $\mathbf{M}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , [12]

$$\mathbf{M}^k = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top)^k = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}^\top. \quad (5.1)$$

auf Grund der Induktion ( $k - 1 \rightarrow k$ )

$$(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top)^k = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top)^{k-1}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{k-1}\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}^\top.$$

Falls  $\mathbf{M}$  weiterhin *schwach diagonaldominant* ist, d.h.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\mathbf{M}_{ij}| \leq |\mathbf{M}_{ii}|, \quad (5.2)$$

und weiterhin  $\mathbf{M}_{ii} \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dann ist  $\mathbf{M}$  *positiv semidefinit*, d.h.  $\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  [10]. Eigenwerte symmetrischer positiv semidefiniter Matrizen  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$  sind positiv reell und es lässt sich folglich auf diesen eine Ordnung definieren mit  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N := \lambda_{\max}$  [10].



### 5.1.2 Laplace-Matrix

Die Laplace-Matrix ist in der spektralen Graphentheorie eine Matrix, die die Beziehungen der Knoten und Kanten eines beliebigen Graphen  $\mathcal{G}$  in einer generalisierten und normalisierten Form beschreibt. Viele der Eigenschaften von  $\mathcal{G}$  können durch die Eigenwerte ihrer Laplace-Matrix beschrieben werden, wohingegen dies z.B. für die Eigenwerte der Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}$  von  $\mathcal{G}$  nur bedingt zutrifft und insbesondere nicht verallgemeinbar für beliebige Graphen ist [2]. Dies ist vor allem dem Fakt geschuldet, dass die Eigenwerte der Laplace-Matrix konsistent sind mit den Eigenwerten des Laplace-Beltrami Operators  $\nabla^2$  in der spektralen Geometrie [2]. Die Laplace-Matrix ist damit ein geeignetes Mittel zur Betrachtung und Analyse eines Graphen.

Für einen schleifenlosen, ungerichteten, gewichtet oder ungewichteten Graphen  $\mathcal{G}$  und dessen Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}$  mit Gradmatrix  $\mathbf{D}$  ist die *kombinatorische Laplace-Matrix*  $\mathbf{L}$  definiert als  $\mathbf{L} := \mathbf{D} - \mathbf{A}$  [2]. Die *normalisierte Laplace-Matrix*  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist definiert als  $\tilde{\mathbf{L}} := \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{D}^{-1/2}$  mit der Konvention, dass  $\mathbf{D}_{ii}^{-1/2} = 0$  für isolierte Knoten  $v_i \in \mathcal{V}$  in  $\mathcal{G}$ , d.h.  $\mathbf{D}_{ii} = 0$  [2]. Daraus ergibt sich die elementweise Definition

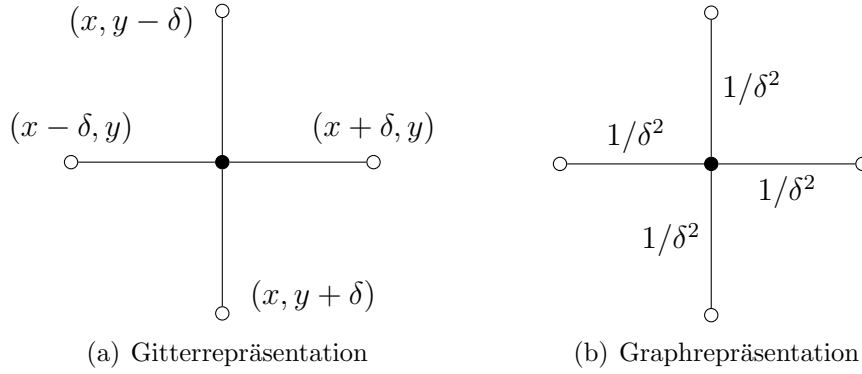
$$\tilde{\mathbf{L}}_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ -\frac{w(v_i, v_j)}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}, & \text{wenn } v_j \in \mathcal{N}(v_i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für zusammenhängende Graphen kann  $\tilde{\mathbf{L}}$  vereinfacht werden zu [2]

$$\tilde{\mathbf{L}} := \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1/2}. \quad (5.3)$$

Jeder Eintrag auf der Diagonalen der normalisierten Laplace-Matrix ist folglich Eins.  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist damit normalisiert auf den (gewichteten) Grad zweier adjazenter Knoten  $v_i$  und  $v_j$ . Es ist anzumerken, dass  $\mathbf{L}$  und insbesondere  $\tilde{\mathbf{L}}$  symmetrisch sind, wohingegen eine Normalisierung der Form  $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$  dies in der Regel nicht wäre [15].  $\mathbf{L}$  und  $\tilde{\mathbf{L}}$  sind desweiteren keine ähnlichen Matrizen, insbesondere sind ihre Eigenvektoren verschieden. Die Nutzung von  $\mathbf{L}$  oder  $\tilde{\mathbf{L}}$  ist damit abhängig von dem Problem, welches man betrachtet [8]. Wir schreiben  $\mathcal{L}$  wenn die Wahl der Laplace-Matrix, ob  $\mathbf{L}$  oder  $\tilde{\mathbf{L}}$ , für die weitere Berechnung irrelevant ist.

**Interpretation.** Sei  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  mit  $f(v_i) = \mathbf{f}_i$  eine Funktion bzw. ein Signal auf den Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$ . Dann kann für die kombinatorische



**Abbildung 5.1:** Illustration des 5-Punkte-Sterns in zwei Dimensionen mit gleicher Approximation des  $\nabla^2$  Operators (bei umgekehrtem Vorzeichen), einmal mit der 5-Punkte-Stern Approximation auf regulären Gittern (a) und einmal mit der kombinatorischen Laplace-Matrix  $\mathbf{L}$  auf Graphen (b).

Laplace-Matrix  $\mathbf{L}$  verifiziert werden, dass sie die Gleichung

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_i = \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} w(v_i, v_j)(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)$$

erfüllt [8]. Sei  $\mathcal{G}$  nun ein Graph, der aus einem (unendlichen) zweidimensionalen regulärem Gitter entstanden ist, d.h. jeder Knoten  $v_i$  besitzt genau vier achsenparallele rechtwinklige Nachbarn mit gleichen Kantengewichten  $1/\delta^2$ , wobei  $\delta \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante. Zur einfacheren Veranschaulichung benutzen wir dabei für die Signalstärke  $\mathbf{f}_i$  eines Knoten  $v_i$  an Position  $(x, y)$  die Indexnotation  $\mathbf{f}_{x,y}$ . Dann beschreibt

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_{x,y} = \frac{4\mathbf{f}_{x,y} - \mathbf{f}_{x+1,y} - \mathbf{f}_{x-1,y} - \mathbf{f}_{x,y+1} - \mathbf{f}_{x,y-1}}{h^2}$$

die *5-Punkte-Stern* Approximation  $\nabla^2 f$  (bei umgekehrtem Vorzeichen) definiert auf den Punkten  $\{(x, y), (x + \delta, y), (x - \delta, y), (x, y + \delta), (x, y - \delta)\}$  [8] (vgl. Abbildung 5.1). Ähnlich zu einem regulären Gitter lässt sich ein Graph  $\mathcal{G}$  auch über beliebig viele Abtastpunkte einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit konstruieren. Es zeigt sich, dass mit steigender Abtastdichte und geeigneter Wahl der Kantengewichte die normalisierte Laplace-Matrix  $\tilde{\mathbf{L}}$  zu dem kontinuierlichem Laplace-Beltrami Operator  $\nabla^2$  konvergiert [8]. Damit kann  $\tilde{\mathbf{L}}$  als die diskrete Analogie des  $\nabla^2$  Operators auf Graphen verstanden werden. Der Laplace-Beltrami Operator  $\nabla^2 f(p)$  misst dabei, in wie weit sich eine Funktion  $f$  an einem Punkt  $p$  von dem Durchschnitt aller Funktionspunkte um einen kleinen Bereich um  $p$  unterscheidet. Die Laplace-Matrix operiert dabei völlig analog, in dem sie misst, wie sehr sich eine (diskrete) Funktion um einen Knoten im Vergleich zu seinen Nachbarknoten unterscheidet.

Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathcal{L}$  helfen uns dabei, die lineare Transformation einer Funktion  $\mathbf{f}$  (mehrfach) angewendet auf  $\mathcal{L}$  besser zu verstehen. Wir können dafür  $\mathbf{f}$  als Linearkombination der Eigenbasis  $\sum_i c_i \mathbf{u}_i$  schreiben und erhalten

$$\mathcal{L}^k \mathbf{f} = \sum_i c_i \mathcal{L}^k \mathbf{u}_i = \sum_i c_i \lambda_i^k \mathbf{u}_i.$$

Somit können Eigenschaften von  $\mathcal{L}$  und damit des Graphen selber durch dessen Eigenwerte und Eigenvektoren beschrieben werden.

**Eigenschaften.**  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ist eine reell symmetrische, positiv semidefinite Matrix [2]. Folglich besitzt  $\mathcal{L}$  nach Kapitel 5.1.1 genau  $N$  positiv reelle Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  mit Ordnung  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$  und  $N$  korrespondierenden orthogonalen Eigenvektoren  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^N$ .

Die kombinatorische Laplace-Matrix  $\mathbf{L}$  ist nach (5.2) weiterhin schwach diagonal-dominant. Insbesondere summiert sich jede Reihen- und Spaltensumme von  $\mathbf{L}$  zu Null auf, d.h.  $\sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ji} = 0$ . Daraus folgt unmittelbar, dass  $\lambda_1 = 0$ , da  $\mathbf{u}_1 = 1/\sqrt{N}[1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^N$  Eigenvektor von  $\mathbf{L}$  mit  $\mathbf{L}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$  [16].  $\tilde{\mathbf{L}}$  hingegen ist nicht zwingend schwach diagonal-dominant. Es lässt sich jedoch zeigen, dass auch für  $\tilde{\mathbf{L}}$  gilt, dass  $\lambda_1 = 0$  [2].

Eine der interessantesten Eigenschaften eines Graphen ist dessen Konnektivität. Die Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  bzw. deren Eigenwerte stellen ein geeignetes Mittel zur Untersuchung dieser Eigenschaft dar. So gilt z.B. für einen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$ , dass  $\lambda_2 > 0$ . Falls  $\lambda_i = 0$  und  $\lambda_{i+1} \neq 0$ , dann besitzt  $\mathcal{G}$  genau  $i$  zusammenhängende Komponenten [2]. Damit ist die Anzahl der Null-Eigenwerte äquivalent zu der Anzahl an Komponenten, die ein Graph besitzt. Für  $\tilde{\mathbf{L}}$  lässt sich weiterhin zeigen, dass  $\lambda_{\max} \leq 2$  eine obere Schranke ihrer Eigenwerte ist [2].

Aus der Laplace-Matrix können ebenso Rückschlüsse über die kürzeste Pfaddistanz zweier Knoten gewonnen werden. So gilt für  $\mathcal{L}^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $\mathcal{L}_{ij}^k = 0$  genau dann, wenn  $s(v_i, v_j) > k$  [8]. Damit beschreibt  $\mathcal{L}_i^k$  bildlich gesprochen die Menge an Knoten, die maximal  $k$  Kanten von  $i$  entfernt liegen.

## 5.2 Spektraler Faltungsoperator

Sei  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  ein Signal auf den Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$ , welches abhängig von der Struktur des Graphen weiter verarbeitet werden soll. Es ist jedoch nicht selbstverständlich, wie recht einfache, dennoch fundamentale Signalverarbeitungsprozesse wie

Translation oder Filterung und die daraus entstehende Faltung in der Domäne des Graphen definiert werden können [16]. So kann z.B. ein analoges Signal  $f(t)$  mittels  $f(t - 3)$  um 3 nach rechts verschoben werden. Es ist hingegen völlig unklar, was es bedeutet, ein Graphsignal auf den Knoten um 3 nach rechts zu bewegen (vgl. [16]). Die spektrale Graphentheorie bietet uns dafür einen geeigneten Weg, indem Eingabesignale in das Spektrum des Graphen zerlegt bzw. abgebildet, modifiziert und wieder retransformiert werden können.

### 5.2.1 Graph-Fourier-Transformation

Das Spektrum eines Graphen  $\mathcal{G}$  bilden die Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  der Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{G}$ . Diese werden deshalb auch oft als die *Frequenzen* von  $\mathcal{G}$  betitelt. In der spektralen Domäne können wir ein Eingabeignal  $\mathbf{f}$  über  $\mathcal{G}$  dann analog wie ein zeitdiskretes Abtastsignal in der Fourier-Domäne behandeln.

**Klassische Fourier-Transformation.** Die Fourier-Transformation  $\hat{f}$  einer Funktion  $f(t)$  ist definiert als [16]

$$\hat{f}(\omega) := \langle f, e^{2\pi i \omega t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Die komplexen Exponentiale  $e^{2\pi i \omega t}$  beschreiben dabei die Eigenfunktionen des eindimensionalen Laplace-Beltrami Operators [16]:

$$-\nabla^2 e^{2\pi i \omega t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{2\pi i \omega t} = (2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega t}. \quad (5.4)$$

$\hat{f}$  kann damit als die Ausdehnung von  $f$  in Bezug auf die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators  $\nabla^2$  verstanden werden [8].

Analog lässt sich die *Graph-Fourier-Transformation* einer Funktion  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  auf den Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$  als Ausdehnung von  $f$  in Bezug auf die Eigenvektoren  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^N$  der Laplace-Matrix  $\mathcal{L}$  definieren [16]:

$$\hat{f}(\lambda_i) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{f}} := \mathbf{U}^\top \mathbf{f}. \quad (5.5)$$

Die inverse Graph-Fourier-Transformation ergibt sich dann als [16]

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^N \hat{f}(\lambda_j) (\mathbf{u}_j)_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{f}}. \quad (5.6)$$

In der klassischen Fourier-Analyse sind für die Eigenwerte  $\{(2\pi\omega)^2\}_{\omega \in \mathbb{R}}$  in (5.4) nahe bei Null die korrespondierenden Eigenfunktionen kleine, weich schwingende Funktionen, wohingegen für größere Eigenwerte bzw. Frequenzen die Eigenfunktionen sehr schnell und zügig anfangen zu oszillieren. Bei der Graph-Fourier-Transformation ist dies ähnlich. So ist für  $\mathbf{L}$  der erste Eigenvektor  $\mathbf{u}_1 = 1/\sqrt{N}[1, \dots, 1]^\top$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  konstant und an jedem Knoten gleich. Generell zeigt sich, dass die Eigenvektoren geringer Frequenzen nur geringfügig im Graph variieren, wohingegen Eigenvektoren größerer Eigenwerte immer unähnlicher werden (vgl. [16]).

Die Graph-Fourier-Transformation (5.5) und ihre Inverse (5.6) bieten uns eine Möglichkeit ein Signal in zwei unterschiedlichen Domänen zu repräsentieren, nämlich der Knotendomäne, d.h. das unveränderte Signal auf der Knotenmenge  $f(v_i)$ , und der spektralen Domäne, d.h. das transformierte Signal in das Spektrum des Graphen  $\hat{f}(\lambda_i)$ . Diese Transformation erlaubt uns die Formulierung fundamentaler Signalverarbeitungsoperationen.

### 5.2.2 Spektrale Filterung

In der Signalverarbeitung versteht man unter der Frequenzfilterung die Transformation eines Eingabesignals in die Fourier-Domäne und der verstärkenden oder dämpfenden Veränderung der Amplituden der Frequenzkomponenten. Formal betrachtet ergibt dies

$$\hat{f}_{\text{out}}(\omega) := \hat{f}_{\text{in}}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (5.7)$$

mit dem Filter  $\hat{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Shuman u. a. zeigen, dass die Filterung in der Fourier-Domäne äquivalent zu einer Faltung in der Zeitdomäne ist, d.h.

$$(f_{\text{in}} \star g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f_{\text{in}}(\tau)g(t - \tau) d\tau = f_{\text{out}}(t). \quad (5.8)$$

Wir können die Filterung der Frequenzen in der Fourier-Domäne analog zu (5.7) für die spektrale Domäne auf Graphen über

$$\hat{f}_{\text{out}}(\lambda_i) := \hat{f}_{\text{in}}(\lambda_i)\hat{g}(\lambda_i) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{f}}_{\text{out}} := \hat{\mathbf{f}}_{\text{in}} \odot \hat{\mathbf{g}}$$

beschreiben, wobei  $\odot$  das elementweise Hadamard-Produkt ist [16].  $\hat{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^N$  ist damit ein *nicht-parametrischer* Filter, d.h. ein Filter, dessen Werte für alle Frequenzen  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  frei wählbar sind [4]. Daraus ergibt sich analog zu (5.8) der *spektrale Faltungsoperator* auf Graphen in der Knotendomäne mit Hilfe der Graph-Fourier-

Transformation (5.5) und ihrer Inversen (5.6) als [4, 16]

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} := \mathbf{U} \left( (\mathbf{U}^\top \mathbf{f}_{\text{in}}) \odot \hat{\mathbf{g}} \right) = \mathbf{f}_{\text{out}}. \quad (5.9)$$

### 5.2.3 Polynomielle Approximation

Es zeigt sich, dass die Benutzung des spektralen Faltungsoperators in (5.9) im Kontext eines CNNs auf Graphen mehrere Schwächen aufweist. So ist z.B. die Auswertung von  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  extrem berechnungsintensiv ist, denn die Multiplikation mit der dichtbesetzten Eigenvektormatrix  $\mathbf{U}$  liegt in  $\mathcal{O}(N^2)$  [4]. Zudem muss  $\mathbf{U}$  zuerst bestimmt werden — ein kostspieliger Aufwand für Graphen mit möglicherweise weit mehr als hundert Knoten [12]. Desweiteren führt ein Filter  $\hat{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^N$  der Größe  $N$  zu einem Lernaufwand in  $\mathcal{O}(N)$ , d.h. der Dimensionalität der Eingabedaten [4]. Ebenso kann  $\hat{\mathbf{g}}$  so nicht für das Lernen auf Graphen mit variierendem  $N$  verwendet werden. Um die oben genannten Schwächen zu umgehen kann  $\hat{g}(\lambda_i)$  über ein Polynom

$$\hat{g}(\lambda_i) \approx \sum_{k=0}^K c_k \lambda_i^k \quad (5.10)$$

vom Grad  $K$  mit Koeffizienten  $[c_0, \dots, c_K]^\top \in \mathbb{R}^{K+1}$  approximiert werden [4, 8]. Die Filtergröße sinkt somit auf einen konstanten Faktor  $K$  mit Lernaufwand  $\mathcal{O}(K)$ , dem gleichen Aufwand klassischer zweidimensionaler CNNs [4].  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  ergibt dann nach (5.1), (5.9) und (5.10) approximiert durch [4]

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx \sum_{k=0}^K c_k \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{U}^\top \mathbf{f}_{\text{in}} = \sum_{k=0}^K c_k \mathcal{L}^k \mathbf{f}_{\text{in}}. \quad (5.11)$$

Insbesondere ist die spektrale Faltung damit nicht mehr abhängig von der Berechnung der Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von  $\mathcal{L}$ . Mittels Kapitel 5.1.2 kann  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  in der Knotendomäne nun als eine *lokalisierte lineare Transformation* interpretiert werden. So sammelt ein Summand  $\mathcal{L}^k \mathbf{f}_{\text{in}}$  des spektralen Filters an einem Knoten  $v$  genau die Signale von Knoten auf, die maximal  $k$  Kanten von  $v$  entfernt liegen [8]. Eine Faltung über  $f_{\text{in}}(v_i)$  wird damit als Linearkombination

$$f_{\text{out}}(v_i) \approx b_{ii} f_{\text{in}}(v_i) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_K(v_i)} b_{ij} f_{\text{in}}(v_j)$$

über dessen  $k$ -lokalisierte Nachbarschaft  $\mathcal{N}_K(v_i)$  mit den Koeffizienten  $b_{ij} := \sum_{k=0}^K c_k \mathcal{L}_{ij}^k$  beschrieben [16].

**Tschebyschow-Polynome.** Obwohl der Aufwand zur Bestimmung von  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  durch die polynomielle Approximation und insbesondere durch den Wegfall der Berechnung der Eigenvektormatrix  $\mathbf{U}$  deutlich reduziert wurde, ist diese immer noch recht teuer aufgrund der Berechnung der  $K$ -ten Potenz von  $\mathcal{L}$ . So ist  $\mathcal{L}$  zwar eine dünnbesetzte Matrix mit  $|\mathcal{E}| + N \ll N^2$ ,  $N \leq |\mathcal{E}|$ , Einträgen,  $\mathcal{L}^K$  ist dies jedoch zwangsläufig nicht. Eine Lösung zu diesem Problem ist die Benutzung eines Polynoms mit einer rekursiven Formulierung. Ein rekursives Polynom, dass dafür üblicherweise genutzt wird, ist das *Tschebyschow-Polynom*, da sich dieses zusätzlich durch einen sehr günstigen Fehlerverlauf auszeichnet (vgl. [8]). Tschebyschow-Polynome bezeichnen eine Menge von Polynomen  $T_k(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem rekursiven Zusammenhang

$$T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

mit  $T_0(x) = 1$  und  $T_1(x) = x$  [8]. Ein Tschebyschow-Polynom  $T_k$  ist ein Polynom  $k$ -ten Grades und liegt im Intervall  $[-1, 1]$  für  $x \in [-1, 1]$  [8]. Wir können diese Tatsache nutzen und anstatt  $T_k$  auf  $\mathbf{\Lambda} \in [0, \lambda_{\max}]^{N \times N}$  auf die skalierten und verschobenen Eigenwerte  $\tilde{\mathbf{\Lambda}} := 2\mathbf{\Lambda}/\lambda_{\max} - \mathbf{I} \in [-1, 1]^{N \times N}$  anwenden [4]. Die spektrale Faltung mittels Tschebyschow-Polynomen ergibt sich dann nach (5.11) als

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx \sum_{k=0}^K c_k \mathbf{U} T_k(\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \mathbf{U}^\top \mathbf{f}_{\text{in}}, \quad (5.12)$$

wobei die Werte  $[c_0, \dots, c_K]^\top \in \mathbb{R}^{K+1}$  nun die Koeffizienten der Tschebyschow-Polynome  $T_k(\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  bilden [4].  $\mathbf{U} T_k(\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \mathbf{U}^\top$  kann aufgrund der polynomiellen Form von  $T_k$  und (5.1) ebenso auf  $T_k(\tilde{\mathcal{L}})$  mit  $\tilde{\mathcal{L}} := \mathbf{U} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{U}^\top = \frac{2}{\lambda_{\max}} \mathcal{L} - \mathbf{I}$  angewendet werden [4]. Damit kann (5.12) weiter vereinfacht werden zu

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx \sum_{k=0}^K c_k T_k(\tilde{\mathcal{L}}) \mathbf{f}_{\text{in}}. \quad (5.13)$$

und ist nun ein rekursiv formulierter Faltungsoperator, der weiterhin ohne die explizite Berechnung von  $\mathbf{U}$  auskommt [4]. Für  $\mathcal{L}$  kann  $\lambda_{\max} \leq 2$  auf dessen obere Schranke, d.h.  $\lambda_{\max} := 2$ , gesetzt werden sodass die Berechnung von  $\lambda_{\max}$  vermieden werden kann ohne die Schranken von  $\tilde{\mathbf{\Lambda}} \in [-1, 1]^{N \times N}$  zu verletzen.

Der rekursive Zusammenhang von  $T_k$  hilft uns dabei,  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  effizient zu bestimmen. Berechne dafür  $\bar{\mathbf{f}}_k := T_k(\tilde{\mathcal{L}}) \mathbf{f}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^N$  für alle  $k \in \{0, \dots, K\}$  rekursiv mit  $\bar{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{f}_{\text{in}}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_1 = \tilde{\mathcal{L}} \mathbf{f}_{\text{in}}$  und  $\bar{\mathbf{f}}_k = 2\tilde{\mathcal{L}} \bar{\mathbf{f}}_{k-1} - \bar{\mathbf{f}}_{k-2}$ . Dann ergibt sich  $\mathbf{f}_{\text{out}} = [\bar{\mathbf{f}}_0, \bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \bar{\mathbf{f}}_K] \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$  mit  $\mathbf{c} := [c_0, c_1, \dots, c_K]^\top \in \mathbb{R}^{K+1}$  (vgl. [8]).  $\mathbf{f}_{\text{out}}$  lässt sich damit über  $K+1$  Multi-

plikationen einer dünnbesetzten Matrix mit einem Vektor und einer abschließenden Vektormultiplikation beschreiben. Mit  $N \leq |\mathcal{E}|$  ergibt dies eine finale Laufzeit der spektralen Faltung von  $\mathcal{O}(K|\mathcal{E}|)$  [4].

**Implementierung.** Für gewöhnlich besteht eine CNN-Schicht nicht nur aus einem, sondern aus  $M_{\text{in}}$  vielen Signalen bzw. Merkmalen pro Knoten mit jeweils unterschiedlichen Filtern bzw. Gewichten pro Ein- und Ausgabekarte. In klassischen zweidimensionalen CNNs werden diese Merkmale auf  $M_{\text{out}}$  viele Merkmale abgebildet, in dem für jede Ausgabekarte über jede Eingabekarte gefaltet und dessen Ergebnisse sukzessive aufsummiert werden (vgl. Kapitel 2.3). Modellieren wir diesen Fall für den spektralen Faltungsoperator, dann erhalten wir rekursiv für eine Merkmalsmatrix  $\mathbf{F}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{in}}}$  gefaltet auf eine Merkmalsmatrix  $\mathbf{F}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{out}}}$  über den  $N$  Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$  mittels des Filtertensors  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{K+1 \times M_{\text{in}} \times M_{\text{out}}}$

$$\mathbf{F}_{\text{out}} := \sum_{k=0}^K \bar{\mathbf{F}}_k,$$

wobei  $\bar{\mathbf{F}}_k = (2\tilde{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{F}}_{k-1} - \bar{\mathbf{F}}_{k-2})\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{out}}}$  mit  $\bar{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{F}_{\text{in}}\mathbf{W}_0$  und  $\bar{\mathbf{F}}_1 = \tilde{\mathcal{L}}\mathbf{F}_{\text{in}}\mathbf{W}_1$ .

### 5.3 Graph Convolutional Networks

Kipf und Welling motivieren einen weiteren Ansatz zur Faltung auf Graphen, genannt *Graph Convolutional Network (GCN)*, der auf der Methodik des spektralen Faltungsoperators aus Kapitel 5.2 aufbaut und dabei wie eine „differenzierbare und parametrisierte Generalisierung des eindimensionalen Weisfeiler-Lehman Algorithmus auf Graphen“ fungiert [12].

**Faltungsoperator.** Sei  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx \sum_{k=0}^K c_k T_k(\tilde{\mathcal{L}})\mathbf{f}_{\text{in}}$  der in (5.13) definierte spektrale Faltungsoperator mit  $K = 1$ . Dann ist  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  eine lineare Funktion bzgl.  $\mathcal{L}$  und damit eine lineare Funktion auf dem Spektrum des Graphen [12]. Mit  $K = 1$  betrachtet der spektrale Faltungsoperator nur noch die lokale Nachbarschaft eines jeden Knotens (vgl. 5.2.3). Es ist anzumerken, dass dies in der Regel keinen Nachteil darstellt. So hat es sich bei gegenwärtigen „State-of-the-Art“-CNNs auf Bildern ebenfalls eingebürgert, nur noch über minimale  $3 \times 3$  Filtergrößen zu falten und stattdessen Merkmale weit entfernter Knoten über die mehrfache Aneinanderreihung der Faltungsschichten mittels tieferer Netze zu gewinnen (vgl. [9, 12, 17]). Unter dieser



Restriktion vereinfacht sich  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  zu

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx c_0 \mathbf{f}_{\text{in}} + c_1 \left( \frac{2}{\lambda_{\max}} \mathcal{L} - \mathbf{I} \right) \mathbf{f}_{\text{in}} \quad (5.14)$$

mit zwei freien Parametern  $c_0$  und  $c_1$  [12]. Für  $\tilde{\mathbf{L}}$  auf einem zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  gilt dann nach (5.3) und (5.14) weiter

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx c_0 \mathbf{f}_{\text{in}} + c_1 (\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{I}) \mathbf{f}_{\text{in}} = c_0 \mathbf{f}_{\text{in}} - c_1 \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{f}_{\text{in}}, \quad (5.15)$$

wobei  $\lambda_{\max} := 2$  auf dessen obere Schranke gesetzt wird [12]. Um die Gefahr des Overfittings und die Anzahl an Berechnungen pro Schicht weiter zu beschränken, reduziert sich (5.15) mit einem einzigen Parameter  $c := c_0$  mit  $c = -c_1$  zu [12]

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx c (\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{f}_{\text{in}}.$$

Die skalierten Eigenwerte von  $\tilde{\mathbf{A}}$  liegen auf Grund der Addition mit  $\mathbf{I}$  nun im Intervall  $[0, 2]$  (vgl. [12]). Demnach können wiederholte Anwendungen des Faltungsoperators zu „numerischen Instabilitäten und folglich zu explodierenden oder verschwindenden Gradienten“ führen [12]. Kipf und Welling führen zur Behebung dieses Problems die folgende Renormalisierung durch:  $\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1/2} \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{D}}^{-1/2}$  mit  $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} + \mathbf{I}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_{ii} := \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ . Der entgültige Faltungsoperator des GCNs ergibt sich dann als

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx c \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{f}_{\text{in}} \quad (5.16)$$

auf einem einzigen freien Parameter  $c \in \mathbb{R}$ .

**Implementierung.** Die Faltung des GCNs auf Merkmalsmatrizen lässt sich analog zur Tensorimplementierung des spektralen Faltungsoperators in Kapitel 5.2.3 beschreiben, mit dem Unterschied, dass wir aufgrund der Festlegung von  $K = 1$  keinen Filtertensor, sondern lediglich eine Filtermatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M_{\text{in}} \times M_{\text{out}}}$  nutzen. Die Faltung einer Eingabemerkmalssmatrix  $\mathbf{F}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{in}}}$  auf eine Ausgabemerkmalssmatrix  $\mathbf{F}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{out}}}$  ergibt sich dann als

$$\mathbf{F}_{\text{out}} := \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_{\text{in}} \mathbf{W} \quad (5.17)$$

mit Faltungsaufwand  $\mathcal{O}(M_{\text{in}} M_{\text{out}} |\mathcal{E}|)$ , weil  $\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{F}_{\text{in}}$  effizient mit der Multiplikation einer dünnbesetzten mit einer dichtbesetzten Matrix implementiert werden kann [12].

*Eingabe:* Initiale Knotenfärbung  $\mathbf{h}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$   
*Ausgabe:* Finale Knotenfärbung  $\mathbf{h}^{(T)} \in \mathbb{R}^N$  nach  $T$  Durchläufen  
 $t \leftarrow 0$   
**repeat**  
  **for**  $v_i \in \mathcal{V}$  **do**  
     $\mathbf{h}_i^{(t+1)} \leftarrow \text{hash}\left(\sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \mathbf{h}_j^{(t)}\right)$   
  **end for**  
   $t \leftarrow t + 1$   
**until** Konvergenz

**Algorithmus 5.1:** Eindimensionaler Weisfeiler-Lehman Algorithmus auf einer initialen Knotenfärbung  $\mathbf{h}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  mit  $v_i \in \mathcal{N}(v_i)$  [19]. Der Prozess der Verfärbung eines Knotens  $v_i$  auf Basis der Farben seiner lokalen Nachbarsknoten wird solange wiederholt, bis sie konvergiert.

**Beziehung zum Weisfeiler-Lehman Algorithmus.** Der *eindimensionale Weisfeiler-Lehman Algorithmus* beschreibt eine weit-untersuchte Methode zur Knotenklassifizierung eines Graphen basierend auf einer initialen Färbung bzw. Merkmalsverteilung auf den Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$ , die unter anderem zur Bestimmung von Graphisomorphismen genutzt wird [5]. Basierend auf einer initialen Knotenfärbung  $\mathbf{h}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$  wird die Farbe eines jeden Knotens  $v_i \in \mathcal{V}$  sukzessive mit Hilfe einer Hashfunktion  $\text{hash}(\cdot)$  so angepasst, dass sie die vorangegangene Farbe des Knotens zusammen mit den Farben seiner lokalen Nachbarschaft repräsentiert. Dieser Prozess wiederholt sich solange, bis eine stabile Knotenfärbung gefunden wurde, d.h. die gefundene Färbung des Graphen konvergiert (vgl. Algorithmus 5.1).

Sei die Hashfunktion nun gegeben als eine differenzierbare, nicht-lineare Aktivierungsfunktion  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eines neuronalen Netzes wie z.B.  $\text{ReLU}(\cdot) := \max(\cdot, 0)$ . Dann ergibt sich eine Faltungsschicht des GCNs durch Komposition des Faltungsoperators bei anschließender Aktivierung als

$$\mathbf{h}_i^{(t+1)} = \sigma\left(\sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \mathbf{h}_j^{(t)} \mathbf{W}^{(t)}\right),$$

wobei  $1/\sqrt{d_i d_j} \in \mathbb{R}$  die Normalisierungskonstante für die Kante  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  entsprechend der Normalisierung  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{D}}^{-1/2}$  aus (5.16) und  $\mathbf{W}^{(t)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die Filtermatrix der  $t$ -en Faltungsschicht beschreibt [12]. Folglich kann die Faltung des GCNs als „differenzierbare und parametrisierte Generalisierung des eindimensionalen Weisfeiler-Lehman Algorithmus auf Graphen“ verstanden werden [12].

## 5.4 Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum

Die Ansätze von Defferrard u. a. aus Kapitel 5.2 und Kipf und Welling aus Kapitel 5.3 zeigen konkurrenzfähige Resultate auf einer Reihe von Datensätzen auf Graphen (vgl. [4, 12]). So erreicht das GCN z.B. in der teilweise-überwachten Knotenklassifizierung von *Referenzgraphen*, d.h. einer Menge von Knoten, die Dokumente über eine Reihe von Bag-of-Words-Merkmalen repräsentieren und (ungerichtet) über dessen Referenzierungen miteinander verbunden sind, beachtliche Ergebnisse und schneidet in diesen sogar knapp besser ab als über die Tschebyschow-Approximation mit  $K = 2$  und  $K = 3$  [12].

Die spektrale Faltung auf Graphen entspricht einer Generalisierung der Faltung klassischer CNNs auf zweidimensionalen Bildern [11]. Es ist jedoch anzumerken, dass die spektrale Faltung im Gegensatz zur klassischen Faltung auf einem regulären Gitter insbesondere rotationsinvariant ist. Das ist in der Regel für generelle Graphen keine Schwäche, schließlich kann den Knoten bzw. Kanten eines Graphen, kodiert als Adjazenzmatrix, keine Örtlichkeit bzw. Richtung (wie links, rechts, oben oder unten) zugeordnet werden. Die Rotationsinvarianz kann folglich sowohl als Einschränkung als auch als Vorteil interpretiert werden, abhängig von dem Problem, welches man betrachtet [4].

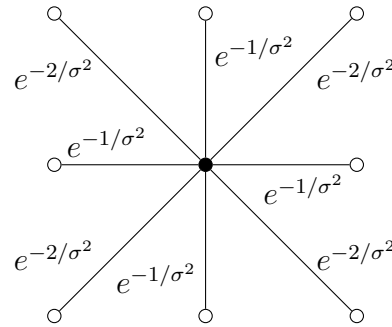
Im Kontext dieser Arbeit, dem Lernen auf Graphen im zweidimensionalen euklidischen Raum, bei denen Graphknoten eine eindeutige Position besitzen, ist die Rotationsinvarianz weitestgehend unerwünscht. Das kann leicht verifiziert werden, indem wir den Filter des GCNs auf einer Graphrepräsentation eines Gitters mit Abstand  $\|1\|_2$  visualisieren (vgl. Abbildung 5.2). Diese Repräsentation entspricht damit genau dem Problem der zweidimensionalen Faltung auf Bildern mit einer Filtergröße von  $3 \times 3$ . Hier zeigt sich jedoch besonders deutlich die Limitierung des Netzes durch die Rotationsinvarianz. Wohingegen wir bei klassischen CNNs  $3 \times 3$  unterschiedliche Parameter mit eindeutiger Örtlichkeit auf den benachbarten Bildpixeln trainieren, reduziert sich der Filter des GCNs (vereinfacht ohne Normalisierung mit  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1/2}$ ) effektiv zu einer Filtermatrix der Form

$$\begin{bmatrix} ce^{-2/\sigma^2} & ce^{-1/\sigma^2} & ce^{-2/\sigma^2} \\ ce^{-1/\sigma^2} & c & ce^{-1/\sigma^2} \\ ce^{-2/\sigma^2} & ce^{-1/\sigma^2} & ce^{-2/\sigma^2} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} e^{-2/\sigma^2} & e^{-1/\sigma^2} & e^{-2/\sigma^2} \\ e^{-1/\sigma^2} & 1 & e^{-1/\sigma^2} \\ e^{-2/\sigma^2} & e^{-1/\sigma^2} & e^{-2/\sigma^2} \end{bmatrix}$$

mit einem einzigen trainierbaren Parameter  $c \in \mathbb{R}$  bei horizontalen bzw. vertikalen

$(-1, -1)$	$(0, -1)$	$(1, -1)$
$(-1, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$
$(-1, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$

(a) Reguläres Gitter



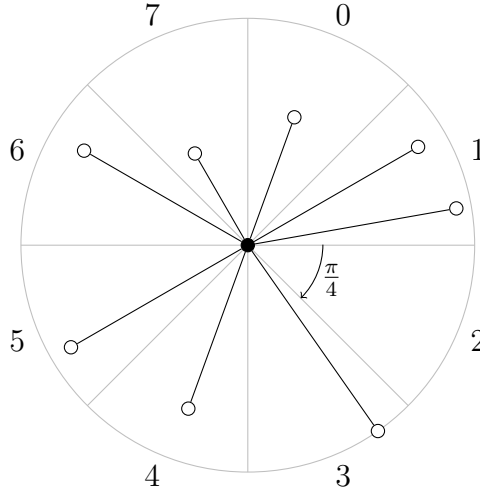
(b) Graphrepräsentation

**Abbildung 5.2:** Illustration (a) eines  $3 \times 3$  großen regulären Gitters zentriert um den Punkt  $(0,0)$  und (b) dessen lokale Nachbarschaft der entsprechenden Graphrepräsentation mit einer Konnektivität von 8 bei horizontalen bzw. vertikalen Kantengewichten  $\exp(-1/\sigma^2) \in \mathbb{R}$  bzw.  $\exp(-2/\sigma^2) \in \mathbb{R}$  bei den Diagonalen.

Kantengewichten  $\exp(-1/\sigma^2) \in \mathbb{R}$  bzw.  $\exp(-2/\sigma^2) \in \mathbb{R}$  bei den Diagonalen. Damit reduziert sich das Training einer Faltungsschicht eines solchen GCNs letztendlich auf eine Skalarmultiplikation. Es scheint schwer vorstellbar mit diesem Ansatz komplexe Probleme wie z.B. das Segmentieren eines Bildes zu lösen (vgl. [11]). Ein Vergleich zwischen der spektralen Faltung auf regulären Gittergraphen und der klassischen zweidimensionalen Faltung auf Bildern wird der spektralen Faltung aber nicht gerecht, schließlich wurden die klassischen CNNs speziell für die Anwendung auf Gittern entwickelt. So ist es zu erwarten, dass durch die Formulierung einer Faltung für generelle Graphen gewisse Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen. Im Folgenden lässt sich der Faltungsoperator der GCNs aber insofern modifizieren, dass sich dieser für beliebige Graphen in einem zweidimensionalen euklidischen Raum äquivalent zu der klassischen Formulierung auf regulären Gittern verhält.

### 5.4.1 Partitionierung

Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph im zweidimensionalen euklidischen Raum, eindeutig definiert über dessen Adjazenzmatrizen  $\mathbf{A}_{\text{dist}} \in [0, 1)^{N \times N}$  und  $\mathbf{A}_{\text{rad}} \in [0, 2\pi]^{N \times N}$ . Dann lässt sich



**Abbildung 5.3:** Partitionierung eines Graphknotens im Uhrzeigersinn in  $P = 8$  Bereiche mit gleichmäßigen Innenwinkeln der Größe  $\pi/4$ .

$\mathcal{G}$  in  $P \in \mathbb{N}$  Bereiche  $\{\mathbf{A}_p\}_{p=0}^{P-1}$  partitionieren, sodass

$$(\mathbf{A}_p)_{ij} := \begin{cases} (\mathbf{A}_{\text{dist}})_{ij}, & \text{wenn } (\mathbf{A}_{\text{rad}})_{ij} \in (2\pi p/P, 2\pi(p+1)/P] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit beschreiben die Matrizen  $\{\mathbf{A}_p\}_{p=0}^{P-1}$  disjunkte Partitionen der Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$  abhängig von ihren Ausrichtungen im Raum mit  $\mathbf{A}_{\text{dist}} = \sum_{p=0}^{P-1} \mathbf{A}_p$ .  $\mathbf{A}_p$  ist insbesondere nicht symmetrisch, da  $(\mathbf{A}_{\text{rad}})_{ij} \neq (\mathbf{A}_{\text{rad}})_{ji}$  für alle  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$  mit  $v_j \in \mathcal{N}(v_i)$ . Abbildung 5.3 veranschaulicht den Prozess der Partitionierung. Mit  $P = 8$  erhalten die jeweiligen Bereiche z.B. einen gleichmäßigen Innenwinkel der Größe  $\pi/4$ .

**Faltungsoperator.** Es lässt sich analog zu Kapitel 5.3 ein Faltungsoperator definieren, bei dem nun jeder Partition ein eigener frei trainierbarer Parameter zugeordnet wird. Der Parameter einer Partition hat damit folglich eine eindeutige Örtlichkeitszuweisung über das Intervall bzw. den Bereich der Richtungen seiner Kanten. Analog zu (5.16) muss dafür zuerst die (Re-)normalisierung der Form

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1} + \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_p \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}}$$

mit  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} := \mathbf{A}_{\text{dist}} + \mathbf{I}$  und  $(\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}})_{ii} := \sum_{j=1}^N (\tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}})_{ij}$  durchgeführt werden. Dies lässt sich mit Hilfe von  $\mathbf{A}_{\text{dist}} = \sum_{p=0}^{P-1} \mathbf{A}_p$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2} = \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1}$  verifizieren. Im

Folgenden sei  $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2} \mathbf{A}_p \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2}$  für  $p \in \{0, \dots, P-1\}$  und  $\tilde{\mathbf{A}}_P := \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1}$ . Dann folgt für den Faltungsoperator  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  auf Graphen im zweidimensionalen euklidischen Raum, dass dieser über

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx \sum_{p=0}^P c_p \tilde{\mathbf{A}}_p \mathbf{f}_{\text{in}} \quad (5.18)$$

mit den freien Parametern  $[c_0, \dots, c_P]^\top \in \mathbb{R}^{P+1}$  beschrieben werden kann.

Es stellt sich heraus, dass die Faltung in (5.18) auf den Partitionen eines regulären Gittergraphen mit  $P = 8$  äquivalent zu der klassischen Faltung auf einem regulären Gitter mit Filtergröße  $3 \times 3$  ist. Sei dafür  $\mathcal{G}$  ein (unendlicher) regulärer Gittergraph bei einer Konnektivität von 8 und  $\mathbf{f}_{\text{in}}$  Merkmalsvektor auf dem Graphen mit Koordinatenindexnotation  $(\mathbf{f}_{\text{in}})_{x,y}$ . Die klassische Faltung  $\text{conv2d}$  an einem Gitterpunkt  $(x, y)$  ist damit gegeben als

$$\text{conv2d}(\mathbf{f}_{\text{in}})_{x,y} = \sum_{i,j \in \{1,2,3\}} (\mathbf{f}_{\text{in}})_{x+i-2,y+j-2} \mathbf{W}_{i,j},$$

wobei  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine Filtermatrix der Größe  $3 \times 3$  ist. Da  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}}$  ein reguläres Gitter beschreibt sind die Einträge ihrer Matrixreihen äquivalent unter unterschiedlicher Permutation und folglich sind die Einträge auf der Diagonalen von  $\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}$  identisch (o.B.d.A. entfällt hier die Randknotenbetrachtung). Aufgrund der Partitionierung von  $\mathbf{A}_{\text{dist}}$  in 8 disjunkte Bereiche  $\{\tilde{\mathbf{A}}_p\}_{p=0}^7$  enthält  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  genau einen Eintrag pro Matrixreihe korrespondierend zu einer Kante des regulären Gitters. Für  $p \in \{1, 3, 5, 7\}$  beschreibt  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  die horizontalen und vertikalen Kanten des Graphen mit jeweils gleichen Einträgen  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Analog verweist  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  für  $p \in \{0, 2, 4, 6\}$  auf die diagonalen Kanten des Graphen mit den festen Einträgen  $\theta_1 \in \mathbb{R}$ . Sei weiterhin o.B.d.A.  $\theta_2 := (\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1})_{ii}$  für beliebiges  $i \in \{0, \dots, N\}$ . Mit der Zuordnung

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} c_6 \theta_1 & c_7 \theta_0 & c_0 \theta_1 \\ c_5 \theta_0 & c_8 \theta_2 & c_1 \theta_0 \\ c_4 \theta_1 & c_3 \theta_0 & c_2 \theta_1 \end{bmatrix}$$

für den Faltungsoperator  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  aus (5.18) mit den Parametern  $[c_0, \dots, c_8]^\top \in \mathbb{R}^9$  folgt damit sofort die Äquivalenz zu  $\text{conv2d}(\mathbf{f}_{\text{in}})$  auf regulären Gittern.

**Implementierung.** Analog zu (5.17) lässt sich die Faltung für Merkmalsmatrizen  $\mathbf{F}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{in}}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{out}}}$  über einem Filtertensor  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{P+1 \times M_{\text{in}} \times M_{\text{out}}}$  als

$$\mathbf{F}_{\text{out}} := \sum_{p=0}^P \tilde{\mathbf{A}}_p \mathbf{F}_{\text{in}} \mathbf{W}_{p+1}$$

beschreiben. Es ist anzumerken, dass die Multiplikation mit den dünnbesetzten partitionierten Adjazenzmatrizen  $\{\tilde{\mathbf{A}}_p\}_{p=0}^P$  extrem effizient ist, da  $|\mathcal{E}_p| \ll |\mathcal{E}|$  und insbesondere  $\sum_{p=0}^P |\mathcal{E}_p| = |\mathcal{E}| + N$  gilt, wobei  $\mathcal{E}_p \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  die Kantenmenge der Adjazenzmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  beschreibt. Die Laufzeit erhöht sich jedoch im Vergleich zu (5.17) durch die  $P$ -fache Multiplikation mit der Filtermatrix  $\mathbf{W}_p$  zu  $\mathcal{O}(PM_{\text{in}}M_{\text{out}}|\mathcal{E}|)$ .

Obwohl die Faltung auf den Partitionen eines Graphen insbesondere durch die Äquivalenz zur klassischen Faltung auf regulären Gittern vielversprechend erscheint, gehen dabei dennoch Informationen über die Ausrichtung der Kanten im Raum verloren. Kanten mit verschiedenen Richtungen im Intervall  $(2\pi p/P, 2\pi(p+1)/P]$  landen jeweils in der gleichen Partition  $p$ , auch wenn sich diese evtl. extrem unterscheiden. Eine Lösung zu diesem Problem ist sicherlich,  $P$  insoweit zu erhöhen, dass die Innenwinkel der einzelnen Partitionen entsprechend klein werden. Dies erscheint jedoch für beliebige, unbekannte Graphstrukturen nicht zwangsläufig sinnvoll. Neben dem erhöhten Aufwand der Faltung erhalten wir im schlimmsten Fall viele Partitionsmatrizen  $\mathbf{A}_p$ , die eine Nullmatrix  $\mathbf{0}$  darstellen oder nur extrem wenige Kanten beinhalten. Kleinste Veränderungen in den Ausrichtungen der Kanten sorgen dann schließlich dafür, dass eine komplett andere Filtermatrix angesprochen wird. Ein dazu alternativ entwickelter Ansatz ist die Approximation des Filters über stückweise stetiger Polynome zwischen den Partitions Grenzen des Graphen mit Hilfe von B-Spline-Kurven.

### 5.4.2 Polynomielle Approximation über B-Spline-Kurven

Eine *offene B-Spline-Kurve*  $b(t)$  beschreibt die stückweise polynomielle Approximation einer Kurve vom Grad  $K$  über  $m+1$  Kontrollpunkten  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m \in \mathbb{R}^d$  auf dem Intervall  $t \in [t_0, t_{m+1})$  mit

$$b(t) := \sum_{i=0}^m \mathbf{d}_i N_i^K(t), \quad (5.19)$$

wobei  $\{N_i^K\}_{i=0}^m$  die *Basisfunktionen* zu einem *Knotenvektor*  $\tau \in \mathbb{R}^{m+K+2}$  mit  $\tau := [t_0, \dots, t_{m+K+1}]^\top$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$  [3]. Eine Basisfunktion  $N_i^K: [t_0, t_{m+1}] \rightarrow [0, 1]$  ist dabei

rekursiv über  $K$  definiert mit der Initialisierung ( $k = 0$ )

$$N_i^0(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.20)$$

und dem Rekursionsschritt ( $k - 1 \rightarrow k$ )

$$N_i^k(t) := \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad (5.21)$$

für  $i \in \{0, \dots, m\}$  und  $k \in \{1, \dots, K\}$  [3]. Ein Kontrollpunkt  $\mathbf{d}_i$  beeinflusst die Kurve damit lediglich im Intervall  $t_i \leq t < t_{i+k}$ . Die Größe von  $K$  wird deshalb auch oft *lokale Kontrollierbarkeit* genannt. Weiterhin gilt für die Aufsummierung der Basisfunktionen für  $t \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $\sum_{i=0}^m N_i^K(t) = 1$  [3].

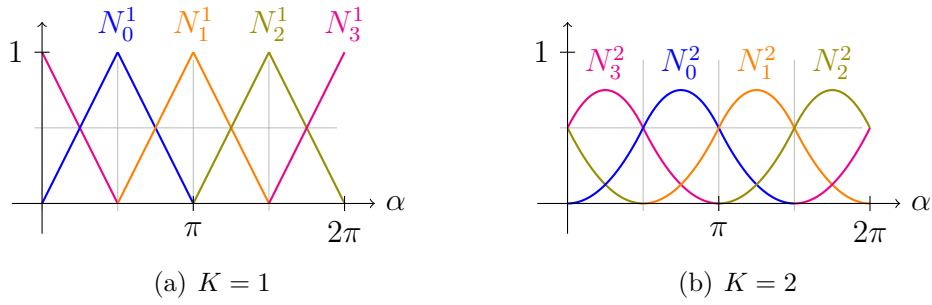
Wir können die Definition der B-Spline-Kurve  $b(t)$  aus (5.19) nutzen, um sie aufbauend auf Kapitel 5.4.1 auf das Anwendungsgebiet eines stückweisen polynomiellen Filters  $b(\alpha)$  auf die Richtungen bzw. Winkel eines Graphen  $\mathcal{G}$ , beschrieben durch  $\mathbf{A}_{\text{dist}}$  und  $\mathbf{A}_{\text{rad}}$ , zu übertragen. Sei dafür  $b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  eine B-Spline-Kurve auf den Winkeln der Graphkanten mit

$$b(\alpha) := \sum_{p=0}^{P-1} c_p N_p^K(\alpha), \quad (5.22)$$

wobei die freien Parameter  $[c_0, \dots, c_{P-1}]^\top \in \mathbb{R}^P$  aus (5.18) nun die Koeffizienten der Basisfunktionen  $\{N_p^K\}_{p=0}^{P-1}$  bilden. Insbesondere definieren wir  $b(0) := 0$  um nicht mit der Bedeutung von 0 in Adjazenzmatrizen in die Quere zu kommen. Wir können uns  $b(\alpha)$  damit weiterhin als eine  $P$ -fache Partitionierung von  $\mathcal{G}$  auf Basis seiner Kantenausrichtungen vorstellen, mit dem Unterschied, dass  $b(\alpha)$  nun eine lokale Kontrollierbarkeit inne hält. Kanten, die vorher zwar in einer gleichen Partition lagen, sich jedoch evtl. stark in ihrer Ausrichtung unterschieden, sind nun „eindeutig“ differenzierbar über ihre abweichenden Auswertungen von  $\{N_p^K\}_{p=0}^{P-1}$  bzw. ihrer Anteile von  $[c_0, \dots, c_{P-1}]^\top$  an  $b(\alpha)$  entsprechend ihrer unterschiedlichen Winkel.

Die Definitionen (5.20) und (5.21) der Basisfunktionen sind lediglich für offene B-Spline-Kurven konzipiert. Im Kontext von Winkeln müssen wir die Basisfunktionen  $N_p^K(\alpha)$  aber insofern modifizieren, dass diese eine geschlossene Kurve beschreiben können. Abbildung 5.4 soll dabei das Konzept geschlossener Basisfunktionen auf Winkeln veranschaulichen. Mit der expliziten Forderung gleichmäßig verteilter Knoten im Intervallbereich ergibt sich dann der Knotenvektor  $\tau := [\alpha_0, \dots, \alpha_{P+K}]^\top \in$





**Abbildung 5.4:** Illustration geschlossener Basisfunktionen  $N_p^K: (0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$  für  $P = 4$  gleichmäßig verteilter Kontrollpunkte, einmal mit lokaler Kontrollierbarkeit  $K = 1$  (a) und einmal mit  $K = 2$  (b).

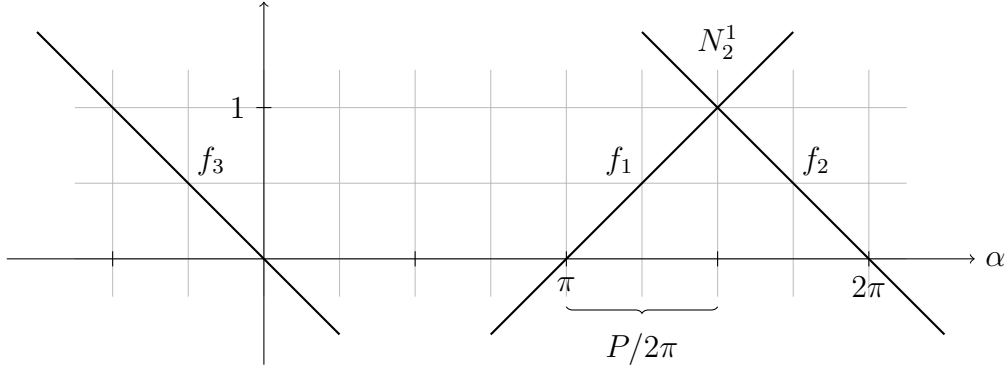
$\mathbb{R}_+^{P+K+1}$  mit  $\alpha_p := 2\pi p/P$ . Damit kann  $N_p^K(\alpha)$  modifiziert werden zu

$$\begin{aligned}
 N_p^0(\alpha) &:= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \alpha \in (\alpha_p, \alpha_{p+1}], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 N_p^k(\alpha) &:= \frac{\alpha - \alpha_p}{\alpha_{p+k} - \alpha_p} N_p^{k-1}(\alpha) + \frac{\text{mod}(\alpha_{p+k+1}, 2\pi) - \alpha}{\alpha_{p+k+1} - \alpha_{p+1}} N_{\text{mod}(p+1, P)}^{k-1}(\alpha),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

indem die Indexierungen des Knotenvektors und der Basisfunktion im rechten Summanden im Vergleich zu (5.21) über den Modulo-Operator  $\text{mod}(a, b) := a - qb$  mit  $\text{mod}(a, b) < b$  für  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $q \in \mathbb{N}$  angepasst werden.  $N_p^K$  setzt sich dabei analog aus den Basisfunktionen  $N_p^K$  und  $N_{p+1}^K$  zusammen, d.h. den Basisfunktionen der betrachteten Partition und der rechts darauf folgenden. Für die aktuelle Partition  $p$  im linken Summanden muss keine Veränderung vorgenommen werden und kann analog zu (5.21) übernommen werden. Lediglich im rechten Summanden muss darauf geachtet werden, „nicht über die Grenzen hinaus zu laufen“. Für den Grenzfall  $p = P - 1$  wird daher im zweiten Summanden die Basisfunktion  $N_0^{k-1}(\alpha)$  adressiert. Analog muss der Zähler des Koeffizienten auf den korrekten Winkel von  $\alpha_{p+k+1}$  verweisen. Für die Nenner muss aufgrund der streng monotonen Definition des Knotenvektors  $\tau$  keine Änderung vorgenommen werden.

**Faltungsoperator.** Es kann folglich analog zu (5.18) der Faltungsoperator  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  auf Basis eines stückweisen polynomiellen Filters beschrieben werden. Mit  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ergibt sich  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  dann als

$$\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}} \approx c_P \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1} \mathbf{f}_{\text{in}} + \sum_{p=0}^{P-1} \left( \left( c_p N_p^K(\mathbf{A}_{\text{rad}}) \right) \odot \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \mathbf{f}_{\text{in}}$$



**Abbildung 5.5:** Beweisidee zur kreisförmigen Dreiecksfunktion für B-Spline-Basisfunktionen mit  $K = 1$  als Darstellung über eine Minimum-Maximumfunktion auf drei Geraden, hier illustriert am Beispiel  $N_2^1$ .

mit den freien Parametern  $[c_0, \dots, c_P]^\top \in \mathbb{R}^{P+1}$ , wobei  $N_p^K$  elementweise auf die Matrix  $\mathbf{A}_{\text{rad}}$  angewendet wird.  $\mathbf{f}_{\text{in}} \star \hat{\mathbf{g}}$  sammelt dabei die aktuellen Merkmale an den einzelnen Knoten über  $c_P \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1} \mathbf{f}_{\text{in}}$  und aggregiert diese mit den Merkmalen der lokalen Nachbarschaft über den polynomiellen Filter  $(c_P N_p^K(\mathbf{A}_{\text{rad}})) \odot (\tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1/2})$ , der so die Länge und Richtungen der Kanten berücksichtigt. Für  $K = 0$  ist die Faltung über den B-Splines äquivalent zu der Faltung über den Partitionen des Graphen aus (5.18) aufgrund der Rechteckfunktionen  $\{N_p^0(\alpha)\}_{p=0}^{P-1}$ .

**Implementierung.** Für Merkmalsmatrizen  $\mathbf{F}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{in}}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N \times M_{\text{out}}}$  kann die Faltung über einem Filtertensor  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{P+1 \times M_{\text{in}} \times M_{\text{out}}}$  als

$$\mathbf{F}_{\text{out}} := \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-1} \mathbf{F}_{\text{in}} \mathbf{W}_{P+1} + \sum_{p=0}^{P-1} \left( N_p^K(\mathbf{A}_{\text{rad}}) \odot \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{dist}} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{dist}}^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \mathbf{F}_{\text{in}} \mathbf{W}_{p+1}$$

beschrieben werden. Im Vergleich zu Kapitel (5.4.1) erhöht sich der Aufwand der Faltung zu  $\mathcal{O}(KPM_{\text{in}}M_{\text{out}})$ , da die Partitionen der Adjazenzmatrizen nicht mehr disjunkt, sondern  $(K+1)$ -mal betrachtet werden.

Für  $K = 1$  lässt sich weiterhin die „kreisförmige“ Dreiecksfunktion  $N_p^1(\alpha)$  anstatt rekursiv aus einer Reihe von Minimum- und Maximumfunktionen effizient implementieren. So gilt, dass  $N_p^1(\alpha)$  zu

$$N_p^1(\alpha) = \max \left( \min \left( \max \left( \frac{P}{2\pi} \alpha - p, 0 \right), \max \left( -\frac{P}{2\pi} \alpha + p + 2, 0 \right) \right), \max \left( -\frac{P}{2\pi} \alpha + p + 2 - P, 0 \right) \right)$$

vereinfacht werden kann. Dies lässt sich verifizieren, in dem die kreisförmige Drei-

ecksfunktion im Intervall  $(0, 2\pi]$  als Verknüpfung dreier Geraden verstanden wird — zwei Geraden, die das Dreieck im Intervall  $(2\pi p/P, 2\pi(p+2)/P]$  aufspannen, und einer absteigenden Geraden, die um  $2\pi$  nach links verschoben wurde und dafür sorgt, die Basisfunktion für  $p = P - 1$  kreisförmig abzuschließen und in allen anderen Fällen keinen Anteil im Gültigkeitsbereich der Funktion  $N_p^1: (0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$  besitzt (vgl. Abbildung 5.5). Den Geraden kann die Steigung  $P/2\pi$  bzw.  $-P/2\pi$  zugeordnet werden und sie können damit folglich über

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &:= \frac{P}{2\pi} \left( \alpha - 2\pi \frac{p}{P} \right) = \frac{P}{2\pi} \alpha - p \\ f_2(\alpha) &:= -\frac{P}{2\pi} \left( \alpha - 2\pi \frac{p+2}{P} \right) = -\frac{P}{2\pi} \alpha + p + 2 \\ f_3(\alpha) &:= -\frac{P}{2\pi} \left( \alpha - 2\pi \frac{p+2}{P} + 2\pi \right) = -\frac{P}{2\pi} \alpha + p + 2 - P \end{aligned}$$

beschrieben werden. Mittels  $\max(f_i(\alpha), 0) \in \mathbb{R}_+$  können diese auf den positiven reellen Raum eingegrenzt werden.  $f_\Delta := \min(\max(f_1, 0), \max(f_2, 0))$  beschreibt damit die Dreiecksfunktion, indem sie sich stets für das Minimum von  $\max(f_1, 0)$  bzw.  $\max(f_2, 0)$  entscheidet. Folglich beschreibt  $\max(\max(f_3, 0), f_\Delta)$  die Basisfunktion  $N_p^1$  im Intervall  $(0, 2\pi]$  für alle  $p \in \{0, \dots, P-1\}$ .

## 5.5 Pooling auf Graphen

### 5.5.1 Graphvergrößerung

**Clustering von Knoten.**

### 5.5.2 Erweiterung auf Graphen im zweidimensionalen Raum

## 5.6 Netzarchitektur



# **6 Evaluation**

## **6.1 Versuchsaufbau**

### **6.1.1 Datensätze**

MNIST. [14]

Cifar-10. [13]

Pascal VOC. [6]

### **6.1.2 Metriken**

### **6.1.3 Parameterwahl**

Vorstellung aller Parameter Superpixelalgorithmen Parameterwahl

## **6.2 Merkmalsselektion**

## **6.3 Ergebnisse**

Vergleich mit anderen Implementierungen.

## **6.4 Laufzeitanalyse**

Vergleich mit anderen Implementierungen.

## **6.5 Diskussion**



# 7 Ausblick

**Weitere Anwendungsgebiete.**

**Entfernung irrelevanter Knoten.** nicht nur bei MNIST auch bei pascal voc slic?  
(z.B. Regelmäßigkeiten erkennen)

**Augmentierung von Graphen.**

**Spatial-Pyramid-Pooling.**

**Attention-Algorithmus.**





## **A Weitere Informationen**



# Abbildungsverzeichnis

5.1	5-Punkte-Stern . . . . .	14
5.2	Graphrepräsentation eines regulären Gitters . . . . .	24
5.3	Partitionierung eines Graphknotens . . . . .	25
5.4	Geschlossene B-Spline-Basisfunktionen . . . . .	29
5.5	B-Spline-Basisfunktion über Minimum-Maximumfunktionen . . . . .	30



# Algorithmenverzeichnis

5.1	Weisfeiler-Lehman Algorithmus . . . . .	22
-----	---	----



# Literaturverzeichnis

- [1] ACHANTA, Radhakrishna; SHAJI, Appu; SMITH, Kevin; LUCCHI, Aurelien; FUA, Pascal; SUSSTRUNK, Sabine: SLIC Superpixels Compared to State-of-the-Art Superpixel Methods. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (2012), S. 2274–2282
- [2] CHUNG, Fan .R.K.: *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, 1997
- [3] DE BOOR, Carl: *A Practical Guide to Splines*. Springer Verlag, 1978
- [4] DEFFERRARD, Michaël; BRESSON, Xavier; VANDERGHEYNST, Pierre: Convolutional Neural Networks on Graphs with Fast Localized Spectral Filtering. In: *Advances in Neural Information Processing Systems 29*. Curran Associates, Inc., 2016, S. 3844–3852
- [5] DOUGLAS, Brendan L.: The Weisfeiler-Lehman Method and Graph Isomorphism Testing. In: *arXiv preprint arXiv:1101.5211* (2011)
- [6] EVERINGHAM, Mark; ESLAMI, S.M. Ali; VAN GOOL, Luc; WILLIAMS, Christopher K. I.; WINN, John; ZISSERMAN, Andrew: The Pascal Visual Object Classes Challenge: A Retrospective. In: *International Journal of Computer Vision* (2015), S. 98–136
- [7] FELZENSZWALB, Pedro F.; HUTTENLOCHER, Daniel P.: Efficient Graph-Based Image Segmentation. In: *International Journal of Computer Vision* (2004), S. 167–181
- [8] HAMMOND, David K.; VANDERGHEYNST, Pierre; GRIBONVAL, Réne: Wavelets on Graphs via Spectral Graph Theory. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* (2011), S. 129–150
- [9] HE, Kaiming; ZHANG, Xiangyu; REN, Shaoqing; SUN, Jian: Deep Residual Learning for Image Recognition. In: *Computer Vision and Pattern Recognition* (2016), S. 83–98

- 
- [10] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray Alden: *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971
  - [11] HUSZÁR, Ferenc: *How Powerful are Graph Convolutions?* <http://www.inference.vc/how-powerful-are-graph-convolutions-review-of-kipf-welling-2016-2/>. 2016
  - [12] KIPF, Thomas N.; WELLING, Max: Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. In: *Computing Research Repository* (2016)
  - [13] KRIZHEVSKY, Alex: *Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images*, Department of Computer Science, University of Toronto, Diplomarbeit, 2009
  - [14] LECUN, Yann; CORTES, Corinna; BURGESS, Christopher J.C.: The MNIST Database of Handwritten Digits. (2010)
  - [15] REUTER, Martin; BIASOTTI, Silvia; GIORGI, Daniela; PATANÈ, Guiseppe; SPAGNUOLO, Michela: Discrete Laplace-Beltrami Operators for Shape Analysis and Segmentation. In: *Computers & Graphics* (2009), S. 381–390
  - [16] SHUMAN, David I.; NARANG, Sunil. K.; FROSSARD, Pascal; ORTEGA, Antonio; VANDERGHEYNST, Pierre: The Emerging Field of Signal Processing on Graphs: Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains. In: *IEEE Signal Processing Magazine* (2013), S. 83–98
  - [17] SIMONYAN, Karen; ZISSERMAN, Andrew: Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition. In: *Computing Research Repository* (2014)
  - [18] VEDALDI, Andrea; SOATTO, Stefano: Quick Shift and Kernel Methods for Mode Seeking. In: *European Conference on Computer Vision*, 2008, S. 705–718
  - [19] WEISFEILER, Boris; LEHMAN, A. A.: A Reduction of a Graph to a Canonical Form and an Algebra Arising During this Reduction. In: *Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsia* (1968), S. 12–16



# Eidesstattliche Versicherung

---

Name, Vorname

---

Matr.-Nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit/Masterarbeit\* mit dem Titel

---

---

---

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

\*Nichtzutreffendes bitte streichen

## Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG - )

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfls. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

---

Ort, Datum

---

Unterschrift