

Карантин-2020
ФИИТ практическое занятие № 2

Интегралы вида $\int \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

$$\text{а) } \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad \longrightarrow \quad A \int \frac{t}{\sqrt{at^2 + \alpha}} dt + B' \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + \alpha}}$$

$$\text{б) } \int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad \longrightarrow \quad A \int t \sqrt{at^2 + \alpha} dt + B' \int \sqrt{at^2 + \alpha} dt$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \longrightarrow \quad \left[t = \frac{1}{x-a} \right] \quad \longrightarrow \quad \pm \int \frac{dt}{\sqrt{a + b't + c't^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{A}{(x-a)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad \longrightarrow \quad \left[t = \frac{1}{x-a} \right] \quad \longrightarrow \quad \pm \int \frac{t^{m-1} dt}{\sqrt{a + b't + c't^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Пример а.

$$1. \int \frac{7 - 3x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx =$$

$$2. \int \frac{4x - 11}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx =$$

Пример б.

$$\int (2x + 3) \sqrt{x^2 + x + 3} dx =$$

Пример в.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2 - 10x + 5}} =$$

Пример д.

$$I = \int \frac{(x^3 - 2) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} =$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

1. Универсальная подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$2. \quad R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad \Rightarrow \quad t = \cos x$$

$$3. \quad R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad \Rightarrow \quad t = \sin x$$

$$4. \quad R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{tg} x$$

Упражнение 2.

$$1. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} =$$

$$2. \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} =$$

$$4. \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx =$$

Домашнее задание:

№№ 1846–1860,

$$\int (x + 2) \sqrt{x^2 + x + 1} dx$$

$$\int (1 - 3x) \sqrt{1 + x - x^2} dx$$

1937–1950, 1952–1960, 1991-2007 (нечётн.), 2013, 2020, 2023, 2027, 2030, 2032