Ampliación de Programación

Práctica 2

Divide y vencerás

Sergio García Mondaray

Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

1 Enunciado

Dadas dos secuencias ordenadas de n y m enteros, respectivamente. Diseñe un algoritmo **Divide y Vencerás**, eficiente, que calcule la mediana de la mezcla resultante de las dos secuencias dadas. Calcule la complejidad del algoritmo desarrollado.

2 Algunos planteamientos

2.1 Mediana de un vector

Partiendo de un vector ordenado, nuestro concepto de *mediana* dependerá de la paridad del mismo: en caso de tratarse de un vector impar, la mediana será el elemento central; si se trata de un vector impar, la mediana será la media aritmética de los 2 elementos centrales del vector.

2.2 Mediana de la mezcla de dos vectores

Sean dos vectores ordenados, v_1 y v_2, de manera muy sencilla podríamos obtener la mediana de la mezcla sin más que mezclar los vectores en uno único, v, y proceder de la manera que muestra el apartado 2.1.

Hemos utilizado este planteamiento a la hora de comprobar si nuestro programa encuentra resultados correctos, puesto que nosotros encontraremos la mediana de la mezcla de otra forma: por un método *divide y vencerás*, que explicaré a continuación. Es por ello que al ejecutar el código de la práctica se muestran dos secciones: i) El proceso y solución según la técnica divide y vencerás y ii) algunos resultados intermedios y la solución calculada mezclando el vector, únicamente para comprobar la corrección del problema de manera sencilla.

3 Resolución del problema

3.1 Método divide y vencerás para la mediana

En nuestro programa no mezclaremos los vectores, sino que trabajaremos con los 2 vectores objetivo por separado. La recursividad nos permitirá tener una serie de casos base (véase apartado 3.2) para los que definiremos una forma de proceder determinada, y un caso genérico para el que volveremos a aplicar el mismo método, reduciendo cada vez más los vectores.

Para explicar nuestro sistema, considerense un vector $A = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\}$ y otro vector $B = \{\blacktriangledown, \blacktriangledown, \blacktriangledown, \blacktriangledown, \blacktriangledown\}$. Una vez ordenados los vectores, podremos averiguar de manera sencilla cuál es la mediana de cada uno (por simplicidad, A y B son impares en este ejemplo, recordemos que la mediana de un vector par es la media aritmética de los 2 elementos centrales):

$$A = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \triangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\} \qquad (\triangle \text{ es la mediana de } A)$$

$$B = \{\blacktriangledown, \blacktriangledown, \triangledown, \blacktriangledown, \blacktriangledown\} \qquad (\triangledown \text{ es la mediana de } B)$$

Ahora, podremos comparar las medianas $\triangle$ y $\triangledown$. Si nos fijamos, en el caso en que la mediana de A, $\triangle$, fuese mayor que la mediana de B, $\triangledown$, podremos asegurar que la mediana de la mezcla, justamente el valor que nosotros queremos encontrar, estará contenida en la primera mitad del vector A y en la segunda mitad del vector B (ya que los vectores están ordenados). En caso contrario, si la mediana de B es mayor, sabremos que la mediana de la mezcla estará contenida entre la segunda mitad del vector A y la primera mitad de B. Después, podremos aplicar el mismo procedimiento con 2 nuevos vectores: las mitades correspondientes de A y B. (Nota:

estas "mitades" deben contener siempre a la mediana del vector, por lo que si un vector es par, su "mitad" contendrá un elemento más, para no perder su mediana)

La única precaución que debemos tomar es no quedarnos con demasiados elementos en un vector y pocos en otro, ya que así la mediana de la mezcla podría perderse. Para que esto no ocurra, debemos fijarnos siempre en cuantos elementos tiene el vector más pequeño (en caso de que A y B tengan distinto tamaño), para ver cuantos descartaremos y quitar el mismo número de elementos de A (aunque no llegue a ser la mitad). De esta manera la mediana se conservará y evitaremos llegar a soluciones erróneas.

Siguendo con nuestro ejemplo, vamos a suponer que la mediana de A, $\triangle$, es mayor que la mediana de B, $\triangledown$. Teniendo en cuenta que en el vector B descartamos 2 elementos, en A quitaremos también 2 elementos. Como antes hemos explicado, nos quedaremos con la primera mitad de A, cuyos elementos tenemos la certeza serán menores o iguales a $\triangle$, y con la segunda mitad de B, cuyos elementos serán mayores o iguales que $\triangledown$. Por tanto, nuestros nuevos vectores serán:

$$A' = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle, \triangle, \blacktriangle, \}$$
$$B' = \{\triangledown, \blacktriangledown, \blacktriangledown\}$$

Ahora podremos hallar la mediana de A', $\triangle'$, y la mediana de B', $\triangledown'$. Y de nuevo aplicaríamos el mismo proceso una y otra vez siempre que no lleguemos a un caso base. Si nos topamos con uno de los casos base terminaríamos la recursividad, y procederíamos de manera diferente.

3.2 Casos base

Aplicando el método explicado en el apartado anterior, siempre llegaremos a uno de los casos base planteados a continuación; y deberemos proceder como aquí se indica. Representaremos los vectores de manera diferente a como hemos hecho en 3.1: con $\bullet$ representaremos los elementos del primer vector (en caso de diferentes longitudes, el primer vector será el mayor), mientras que con $\circ$ los elementos del segundo.

1. Ambos vectores tienen un sólo elemento:
   $A : \bullet$
   $B : \circ$
   En este caso la solución será la media aritmética entre los dos elementos.

2. En B hay un sólo elemento:
   $A : \bullet\bullet\bullet\bullet$
   $B : \circ$
   En este caso, deberemos estudiar la posición relativa de $\circ$ respecto a los elementos de A:

   (a) A tiene un número par de elementos:
      i. El elemento $\circ$ se sitúa en el centro:
         $\bullet\bullet\circ\bullet\bullet$
         En este caso la mediana es $\circ$.
      ii. El elemento $\circ$ se sitúa antes del elemento anterior a la mediana de A:
         $\bullet\circ\bullet\bullet\bullet$, $\circ\bullet\bullet\bullet\bullet$ ...
         En este caso la mediana es el elemento anterior a la mediana de A.
      iii. El elemento $\circ$ se sitúa después del elemento posterior a la mediana de A:
         $\bullet\bullet\bullet\circ\bullet$, $\bullet\bullet\bullet\bullet\circ$ ...
         En este caso la mediana es el elemento posterior a la mediana de A.

   (b) A tiene un número impar de elementos:

i. El elemento $\circ$ se sitúa entre la mediana de A y su elemento anterior:
$\bullet \bullet \circ \bullet \bullet \bullet$
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\circ$ y el elemento anterior a la mediana de A.

ii. El elemento $\circ$ se sitúa entre la mediana de A y su elemento posterior:
$\bullet \bullet \bullet \circ \bullet \bullet$
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\circ$ y el elemento posterior a la mediana de A.

iii. El elemento $\circ$ se sitúa antes del elemento anterior a la mediana de A:
$\bullet \circ \bullet \bullet \bullet \bullet$, $\circ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$ ...
En este caso la mediana es la media aritmética entre la mediana de A y el elemento anterior.

iv. El elemento $\circ$ se sitúa después del elemento posterior a la mediana de A:
$\bullet \bullet \bullet \bullet \circ \bullet$, $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ$ ...
En este caso la mediana es la media aritmética entre la mediana de A y el elemento posterior.

3. En B hay dos elementos y A tiene más de dos elementos:
$A : \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$
$B : \circ \bar{\circ}$
En este caso, deberemos estudiar la posición relativa de $\circ$ y $\bar{\circ}$ en A:

(a) A tiene un número par de elementos:

i. Los elementos $\circ$ y $\bar{\circ}$ van en el centro de A:
$\bullet \bullet \circ \bar{\circ} \bullet \bullet$
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\circ$ y $\bar{\circ}$.

ii. El elemento $\circ$ es anterior al elemento anterior a la mediana de A y $\bar{\circ}$ es posterior al elemento posterior a la mediana de A:
$\bullet \circ \bullet \bullet \bar{\circ} \bullet$, $\circ \bullet \bullet \bullet \bullet \bar{\circ}$ ...
En este caso la mediana es la misma mediana de A.

iii. El elemento $\bar{\circ}$ va a la izquierda del elemento anterior a la mediana de A:
$\bullet \circ \bar{\circ} \bullet \bullet \bullet$, $\circ \bullet \bar{\circ} \bullet \bullet \bullet$ ...
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\bar{\circ}$ y el elemento anterior a la mediana de A.

iv. El elemento $\circ$ va a la derecha del elemento posterior a la mediana de A:
$\bullet \bullet \bullet \circ \bar{\circ} \bullet$, $\bullet \bullet \bullet \circ \bullet \bar{\circ}$ ...
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\circ$ y el elemento posterior a la mediana de A.

v. Los elementos $\circ$ y $\bar{\circ}$ van a la izquierda del elemento anterior al anterior de la mediana de A:
$\circ \bar{\circ} \bullet \bullet \bullet \; \bullet$
En este caso la mediana es la media aritmética entre el elemento anterior a la mediana de A y el anterior a éste.

vi. Los elementos $\circ$ y $\bar{\circ}$ van a la derecha del elemento posterior al posterior de la mediana de A:
$\bullet \bullet \bullet \bullet \circ \bar{\circ}$
En este caso la mediana es la media aritmética entre el elemento posterior a la mediana de A y el posterior a éste.

(b) A tiene un número impar de elementos:

i. El elemento ∘ es anterior a la mediana de A y $\bar{\circ}$ es posterior a la mediana de A:
∙ ∙ ∘ ∙ $\bar{\circ}$ ∙ ∙, ∙ ∘ ∙ ∙ ∙ $\bar{\circ}$ ∙, ∘ ∙ ∙ ∙ ∙ ∙ $\bar{\circ}$ ...
En este caso la mediana es la misma mediana de A.
ii. El elemento $\bar{\circ}$ va a la izquierda de la mediana de A:
∙ ∙ ∘ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙, ∙ ∘ ∙ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙, ∘ ∙ ∙ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙, ...
En este caso la mediana $\bar{\circ}$.
iii. El elemento ∘ va a la derecha de la mediana de A:
∙ ∙ ∙ ∘ $\bar{\circ}$ ∙ ∙, ∙ ∙ ∙ ∘ ∙ $\bar{\circ}$ ∙, ∙ ∙ ∙ ∘ ∙ ∙ $\bar{\circ}$ ...
En este caso la mediana ∘.
iv. El elemento $\bar{\circ}$ va a la izquierda del elemento anterior a la mediana de A:
∙ ∘ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙ ∙, ∘ ∙ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙ ∙, ∘ $\bar{\circ}$ ∙ ∙ ∙ ∙ ∙ ...
En este caso la mediana es el elemento anterior a la mediana de A.
v. El elemento ∘ va a la derecha del elemento posterior a la mediana de A:
∙ ∙ ∙ ∙ ∘ $\bar{\circ}$ ∙, ∙ ∙ ∙ ∙ ∘ ∙ $\bar{\circ}$, ∙ ∙ ∙ ∙ ∙ ∘ $\bar{\circ}$...
En este caso la mediana es el elemento posterior a la mediana de A.

4. Ambos vectores tienen 2 elementos:
A : ∙∙
B : ∘$\bar{\circ}$
En este caso, deberemos estudiar la posición relativa de ∘ y $\bar{\circ}$ en A:

(a) Los elementos ∘ y $\bar{\circ}$ van en el centro de A:
∙ ∘ $\bar{\circ}$ ∙
En este caso la mediana es la media aritmética entre ∘ y $\bar{\circ}$.
(b) El elemento ∘ es anterior al primer elemento de A y $\bar{\circ}$ es posterior al segundo:
∘ ∙ ∙ $\bar{\circ}$
En este caso la mediana es la misma mediana de A.
(c) El elemento ∘ va a la izquierda del primer elemento de A, y $\bar{\circ}$ en el centro de A:
∘ ∙ $\bar{\circ}$ ∙
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\bar{\circ}$ y el primer elemento de A.
(d) El elemento ∘ va en el centro de A, y $\bar{\circ}$ a la derecha del segundo elemento:
∙ ∘ ∙ $\bar{\circ}$
En este caso la mediana es la media aritmética entre ∘ y el segundo elemento de A.
(e) El elemento ∘ va a la derecha del segundo elemento de A:
∙ ∙ ∘ $\bar{\circ}$
En este caso la mediana es la media aritmética entre ∘ y el segundo elemento de A.
(f) El elemento $\bar{\circ}$ va a la izquierda del primer elemento de A:
∘ $\bar{\circ}$ ∙ ∙
En este caso la mediana es la media aritmética entre $\bar{\circ}$ y el primer elemento de A.

3.2.1 Nota sobre los casos base

Es importante fijarnos en que resulta relevante, cuando trabajamos con vectores de diferente tamaño, cuál de los dos es de mayor tamaño. Si no planteamos bien esta situación nos encontraremos con prácticamente el doble de casos base (para cada caso habría dos posibilidades, excepto para el caso en que ambos vectores tengan un sólo elemento). Es por ello que en la función main de mi código fuente analizo cuál de los vectores es de mayor tamaño y llamo a la función que calcula la mediana pasándole los vectores en un orden concreto: en primer lugar el vector de mayor tamaño y en segundo lugar el menor.

Cuando ambos vectores tienen el mismo número de elementos no existe ningún problema en el orden, y tras realizar el proceso divide y vencerás llegaremos siempre al caso base 4 (ambos vectores con 2 elementos). Por otro lado, la única posibilidad de llegar a los casos base 1 y 2 (donde alguno de los vectores, o ambos, tiene un único elemento) es que los propios vectores tengan un único elemento desde el principio, en cuyo caso nunca se realizará el proceso divide y vencerás, puesto que desde el inicio será un caso base.

4 Algoritmo propuesto y complejidad

El algoritmo que he ideado, tal como ha sido explicado en la sección 3.1, es el mostrado a continuación como pseudocódigo.

4.1 Algoritmo

```
1  INICIO (v1, long_v1, v2, long_v2)
2      Si es un caso base
3          m <- Solucion correspondiente al caso base
4      Si no
5          m1 <- Mediana(v1)
6          m2 <- Mediana(v2)
7  
8          Si v2 es par
9              quitados <- (long_v2)/2 - 1
10         Si no
11             quitados <- (long_v2)/2
12         Fin si
13 
14         Si m1 > m2
15             m <- Llamada_recursiva(v1,long_v1-quitados,v2+
                   quitados,long_v2-quitados)
16         Si no
17             Si m1 = m2
18                 m <- m1
19             Si no
20                 m <- Llamada_recursiva(v1+quitados,long_v1-
                       quitados,v2,long_v2-quitados)
21             Fin si
22         Fin si
23     Fin si
24 
25     Devolver m
26 
27 FIN
```

Notas: en las líneas 2 y 3 se hace referencia a los casos base explicados en la sección 3.2. En las líneas 5, 6 se hace referencia a una función Mediana, que calcula la mediana de un único vector (como se explica en la sección 2.1). No incluyo el pseudocódigo correspondiente a lo anterior debido a su simplicidad y/o extensión.

4.2 Complejidad

Analíticamente, la complejidad del anterior algoritmo, para el peor caso (cuando ambos vectores tienen la misma longitud), es $t_n = t_{n/2+1} + c$, que tiene el mismo orden de complejidad que $t_n = t_{n/2} + c$, por lo que estudiaremos esta última:

$$t_n + t_n/2 = c$$

Realizando el cambio de variable $n = 2^i$:

$$t_{2^i} + t_{\frac{2^i}{2}} = c \Longleftrightarrow t_{2^i} + t_{2^{i-1}} = c$$

$$(x-1)(x-1)^{0+1} = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$t_{2^i} = c_{11} i^0 1^i + c_{12} i^1 1^i$$

Deshaciendo el cambio de variable:
$(n = 2^i \Rightarrow i = \log_2(n))$

$$t_n = c_{11} + c_{12} \cdot \log_2(n) \in O(\log_2 n)$$

$$\boxed{O(\log_2 n)}$$

5 Tiempo de trabajo y valoración de dificultad

El tiempo aproximado que he empleado en la resolución de esta práctica ha sido de unas 10 horas. La causa principal de que haya tardado tanto tiempo ha sido la dificultad que tuve en encontrar el método apropiado de cálculo de la mediana. La implementación, por otro lado, ha resultado bastante sencilla, destacando la gran cantidad de casos base como culpable de la lenta producción de código.

En cuanto a la dificultad, le pondría a la práctica un nivel de 8, ya que, aunque en un principio la idea parecía sencilla, encontrar un método completamente válido para resolverla me ha resultado complicado, tal y como he mencionado.