波形设计报告

王怡 章贤哲 刘谨鸿

（卓越计划微波感知中级班 2 组）

Waveform Design Report

Y. Wang　Xianzhe. Zhang　Jinhong. Liu

(Excellent program microwave perception intermediate class group 2)

0　引言

雷达的波形设计一直是很热门的一个话题，在考虑波形时，我们会对雷达这个波形的测速测距能力进行考虑，但是这两者是不可兼得的，测距能力好，必然导致测速能力差，脉冲压缩在保证大脉宽的前提下，将时宽压缩，提高距离分辨率，同时，信号的能量也被压缩，作用距离也变得更远。

模糊函数是波形设计的另外一个重要因素，取某点回波信号为参考中心点，另一目标回波信号的相对τ、f_d分布在模糊度图内的信号会无法分辨。相同类型的雷达信号其目标函数是相似的，因此，模糊函数仅由发射波形决定，它回答了发射什么样的波形，在采用最优信号处理的条件下系统将具有什么样的分辨力，模糊度，测量精度和杂波抑制能力。可以说，模糊函数是对雷达信号进行分析研究和波形设计的有效工具。

本报告中还简单介绍了非线性调频信号(NLFM)。非线性调频的最大优点是对所设计的波形进行调频可获得所要求的幅度频谱，故对于距离旁瓣抑制而言，非线性调频不需要时间或频率加权，匹配滤波接收和低旁瓣在设计中是一致的，因此可以消除通常采用失配技术加权所产生的信噪比损失。非线性调频的主要缺点是系统比较复杂，为了达到需要的旁瓣电平，对每个幅度频谱需要分别进行调频设计。

1　脉冲压缩

1.1　脉冲压缩的背景

雷达作为一种探测感知技术，在国防安全反面发挥着巨大的作用，如今民用雷达也逐渐兴起，在自动驾驶、交通管控检测方面逐渐占据市场。

速度、距离分辨率矛盾

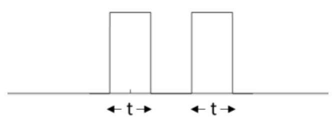

图 1 两个回波脉冲分立

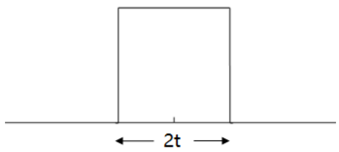

图 2 两个回波脉冲重叠

一个简单的单天线单频脉冲雷达，可以测速、测距。如图 1 所示，假设在 t1 时刻收到一个时长为 t 的脉冲，间隔时间Δt 后收到另一个时长为 t 回波，若 $\Delta t > t$ 则目标距离差为：$R = \frac{c\Delta t}{2}$。如图 2 所示，若 $\Delta t \le t$ 则雷达不能分辨两个回波信号。所以，脉冲雷达的距离分辨率：$\delta = \frac{tc}{2} = \frac{c}{2B}$，其中$B$为信号带宽，单频信号$B = \frac{1}{T}$。因此，要提升雷达的距离分辨率，则需要大带宽信号。

然而测量目标速度时是通过回波中的多普勒频偏得到：

$$v = \frac{2 * f_d}{c}$$

其中f_d表示多普勒频率。然而我们在分析回波信号频率时，需要对回波信号做 FFT 运算，如图 3 所示：

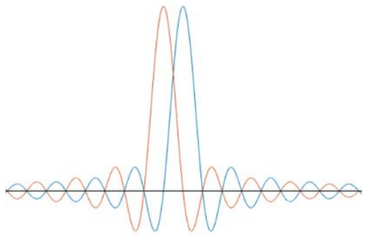

图 3 两个回波脉冲频谱

当两个回波信号的主瓣靠近，两个目标的速度将不能分辨，根据规定当两个峰的 3dB 位置重合时，表明这两个目标的速度不能分辨。因此，且主瓣越宽，越不易分辨。由信号与系统的知识：时域越长，频谱主瓣越窄。因此要获得好的速度分辨率，需要大时宽信号。这就与好的距离分辨率产生了矛盾。

脉压比

在脉冲压缩系统中，发射波形通常会在相位或者频率上被调制，使$B \gg \frac{1}{T}$，此时，脉压后的等效时宽为：

$$\tau = \frac{1}{B}$$

系统距离分辨率为：

$$\delta = \frac{\tau c}{2}$$

定义系统脉压比为：

$$D = \frac{T}{\tau} = TB$$

由上可知，系统脉压比取决于信号的时宽带宽积。

1.2 匹配滤波器推导

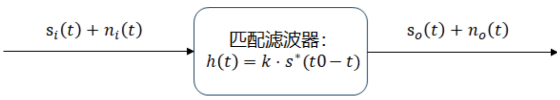

图 4 脉冲压缩系统

脉冲压缩系统是输入信号经过一个**匹配滤波器**得到输出信号的系统。匹配滤波器是一种使输入信号的**信噪比**（输出信号功率与噪声平均功率比值）取得最大值的最佳线性滤波器。

图 3 中，$s_i(t) + n_i(t)$ 表示输入信号，其中

$n_i(t)$ 表示零均值平稳高斯白噪声。

$n_i(t)$自相关函数：

$$R_n(\tau) = \frac{N}{2}\delta(\tau)$$

$n_i(t)$功率谱密度：

$$\frac{N_o}{2}$$

$s_i(t)$为确定的发射信号

$s_i(t)$频谱：

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)e^{-jwt}\,dt$$

$s_i(t)$能量：

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(j\omega)|^2\,d\omega$$

则，输出信号频谱：

$$S_o(j\omega) = S_i(j\omega)H(j\omega)$$

输出信号波形：

$$s_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}dw$$

根据帕斯瓦尔定理，输出信号瞬时功率：

$$|s_o(t_0)|^2 = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}dw\,|^2$$

输出噪声平均功率：

$$n_o^2(t) = \frac{N_o}{2}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega]$$

因此，输出信号信噪比SNR：

$$\frac{|s_o(t_0)|^2}{n_o^2(t)} = \frac{|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}dw\,|^2}{\frac{N_o}{2}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega]}$$

$$\le \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(j\omega)e^{j\omega t_0}|^2 dw \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 dw}{\frac{N_o}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$\le \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(j\omega)|^2 dw}{\frac{N_o}{2}} = \frac{E_i}{\frac{N_o}{2}} = \frac{2E_i}{N_o}$$

由施瓦西不等式，使上式成立的条件是：

$$H(j\omega) = kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t}$$

2 模糊函数

对于雷达相同视角的邻近目标点，需要从距离和径向速度两个维度对其进行分辨，为此引入模糊函数作为辅助工具。

2.1　模糊函数推导

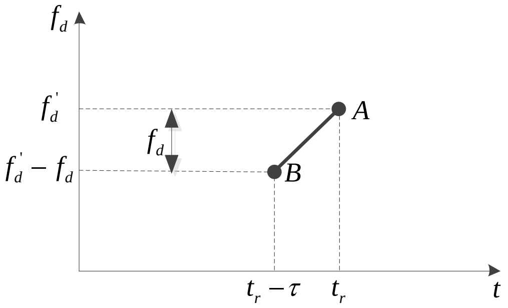

图 5 脉冲压缩系统

假设有对雷达相同视角的两个邻近目标点 A，B，以 A 目标的回波为参考。

A 回波的复包络为：$u(t)$

B 回波的复包络为：$u(t+\tau)e^{-j2\pi f_d t}$

其中，τ为两个目标距离差导致的时间间隔，f_d为两个目标相对径向速度对应的多普勒频移。

用两信号之间的均方误差分辨它们：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)-u(t+\tau)e^{-j2\pi f_d t}|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t)-u(t+\tau)e^{-j2\pi f_d t}][u(t)-u(t+\tau)e^{-j2\pi f_d t}]^* dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t+\tau)|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi f_d t} + u^*(t)u(t+\tau)e^{-j2\pi f_d t}] dt \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt - 2\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi f_d t} dt]
\end{aligned}
$$

误差表达式中第一项表示信号能量，信号能量是固定的，因此均方误差主要由第二项决定，将模糊函数定义为：

$$|\chi(\tau，f_d)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi f_d t} dt$$

它表示信号复包络的时间-频率复合自相关函数，也可看作所有的多普勒频移情况下对信号做脉压。由上可知：

$\chi(\tau，f_d)\uparrow ---\rightarrow \varepsilon_{\tau,f_d}\downarrow ---\rightarrow$目标易分辨

$\chi(\tau，f_d)\downarrow ---\rightarrow \varepsilon_{\tau,f_d}\uparrow ---\rightarrow$目标难分辨

2.2　目标距离分辨问题

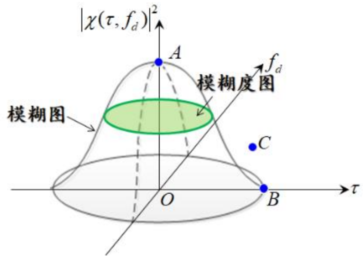

图 6 高斯函数模糊函数图

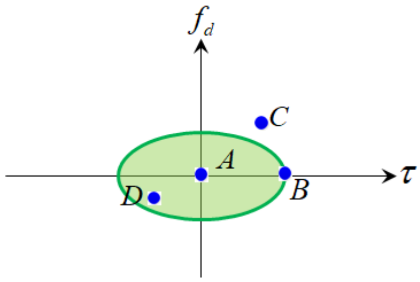

图 7 高斯函数模糊度图

判断两个目标点是否能分辨，需要预先设定一个阈值(一般取信号功率降为原来 0.707 倍的值为阈值，即信号下降 3dB)，以该阈值取模糊图的等高线，该等高线为边界的平面称为模糊度图。以一个目标回波信号为参考点，即其位于原点（A 点），另一目标回波信号的相对τ、f_d分布在模糊度图内可以分辨(B、C 点)；分布在模糊度图外不可分辨（D 点）。

3　线性调频信号

3.1　LFMW 介绍

线性调频信号（LFM）通过对信号的频率进行调制增加信号带宽以实现大时宽带宽积。

线性调频信号，顾名思义，LFM 信号的频率是时间的线性函数：

$$\frac{df(t)}{dt} = k = \frac{B}{T}$$

其中，$f(t)$为 LFM 信号的瞬时频率，k表示调频斜率。因此，LFM 信号频率函数、相位函数分别如下：

$$f(t) = kt + c$$

$$\theta(t) = 2\pi\int_0^t f(t)dt = 2\pi(f_0 t + \frac{1}{2}kt^2)$$

仿真过程中假设为基带信号，即中心频率$f_0 = 0$，所以信号表达式为：

$$s(t)=\begin{cases} e^{j\pi k t^2}, -\dfrac{T}{2}\le t\le \dfrac{T}{2} \\ 0, \quad\quad else \end{cases}$$

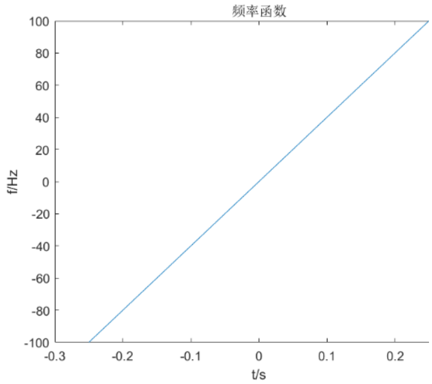

图 8 LFMW 频率函数

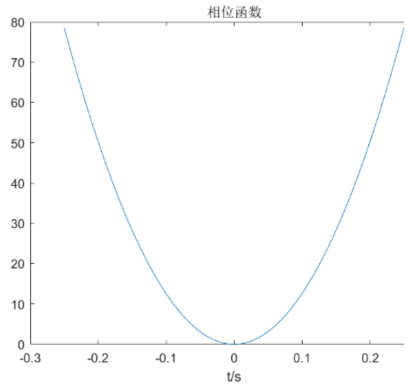

图 8 LFMW 相位函数

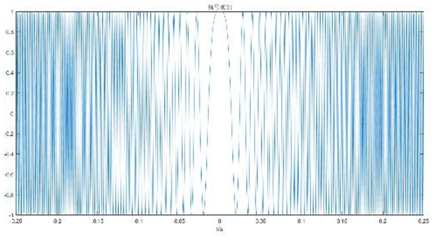

图 9 LFMW 实部

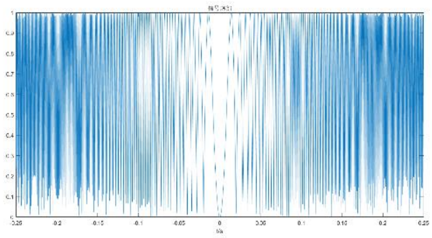

图 10 LFMW 虚部

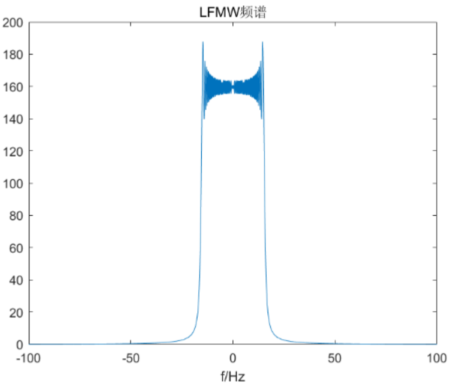

图 11 LFMW 频谱

3.2 LFMW 脉压仿真

对带宽$B=100Hz, k=400Hz/s$的 LFM 信号做脉压，脉压结果如下：

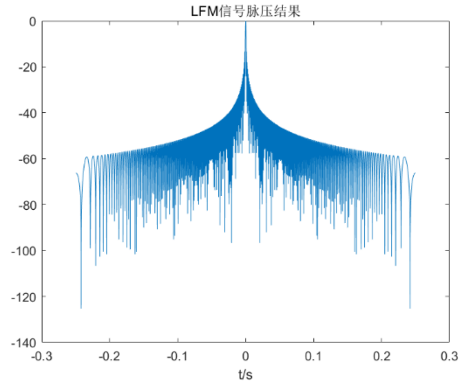

图 12 LFMW 脉压结果

3.3 LFMW 模糊函数仿真

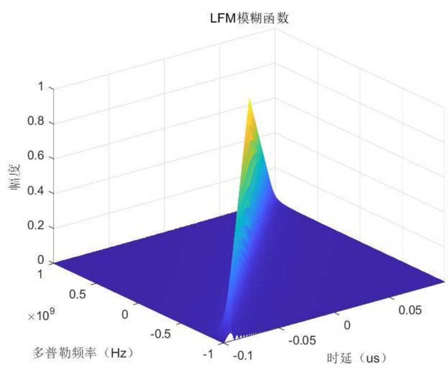

图 13 LFMW 三维模糊函数

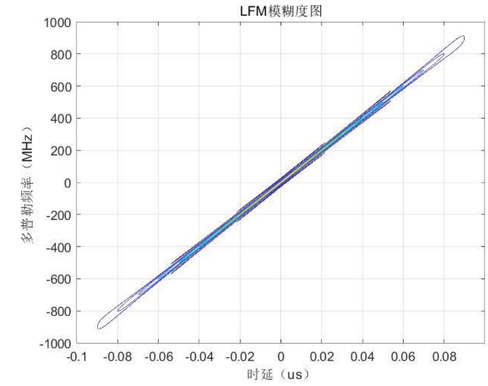

图 14 LFMW 模糊度图

4 相位编码信号

相位编码信号简介及分类

相位编码信号在时宽带宽积较小的情况下, 主副比大, 但由于信号波形的"随机性"易于实现"捷变", 对于提高雷达系统的抗截获能力有利。相移取值数即码所取的值的数目。如码值仅取 1、+1, 则为二相编码, 当多于两个时, 则为多相编码。其中具有较强的实用意义的二相编码信号主要包括巴克码、m 序列、MAC 码等。

4.1 巴克码

巴克码序列是相位编码信号的一种, 具有理想的自相关特性。巴克码的自相关函数的主峰和旁瓣均为底边宽度为 2T 的等腰三角形 , 主瓣峰值是 旁瓣峰值 的 13 倍。能够找到的巴克码只有 7 种, 子脉冲长度分别为 : 2, 3 , 4 , 5 , 7 , 11 , 13 。已经证明巴克码的最大长度为 13 位。

下面是关于 13 位巴克码一些仿真

正弦调制:

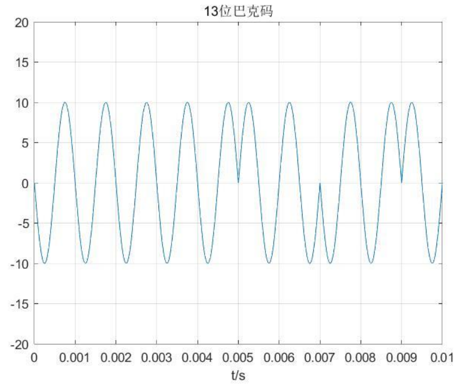

图 15 13 位巴克码的正弦调制

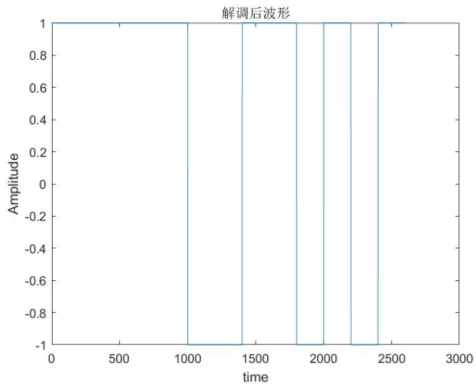

图 16 13 位巴克码的解调波形

脉冲压缩:

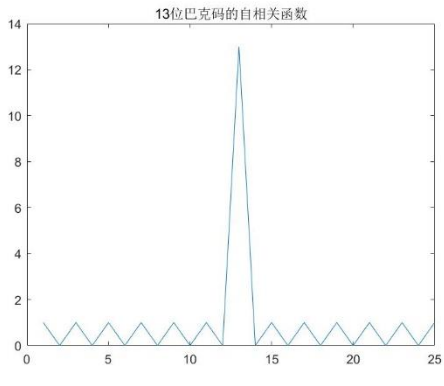

图 17 13 位巴克码的脉冲压缩

模糊函数:

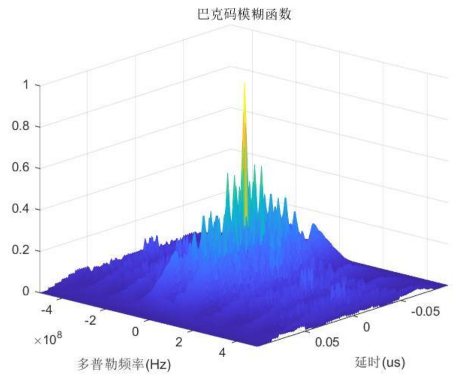

图 18 13 位巴克码的模糊函数

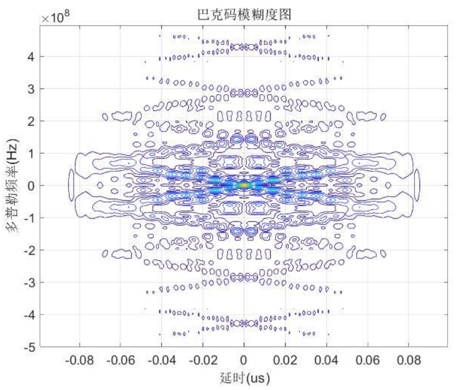

图 19 13 位巴克码的模糊度图

4.2 M序列

m 序列是最长线性反馈移位寄存器序列的简称。它是由带线性反馈的移存器产生的周期最长的序列。一般来说，一个 n 级线性反馈移存器可能产生的最长周期等于(2^n -1)。

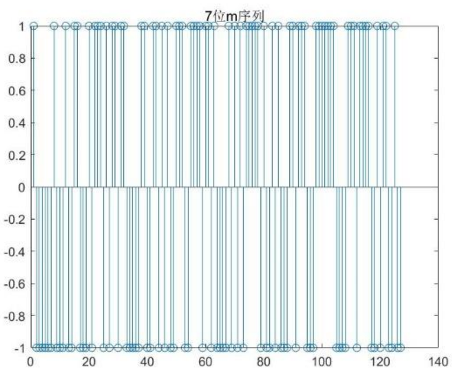

图 20 7 位 m 序列

脉冲压缩：

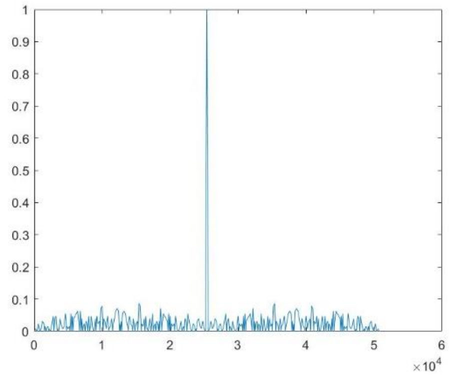

图 21 m 序列的脉冲压缩

模糊函数：

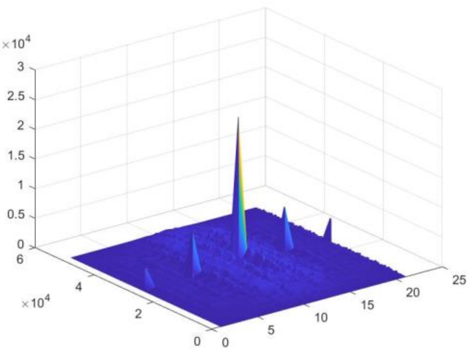

图 22 m 序列的模糊函数

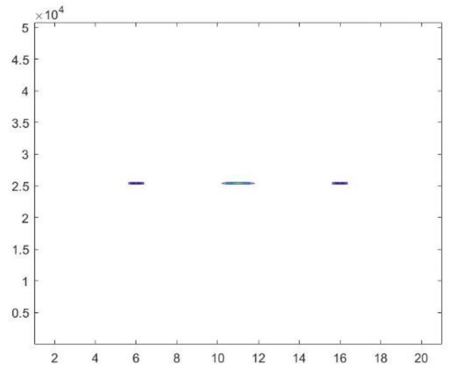

图 23 m 序列的模糊度图

4.3 弗兰克码

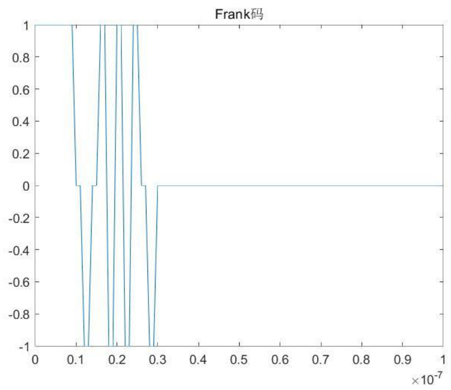

图 24 Frank 码

模糊函数：

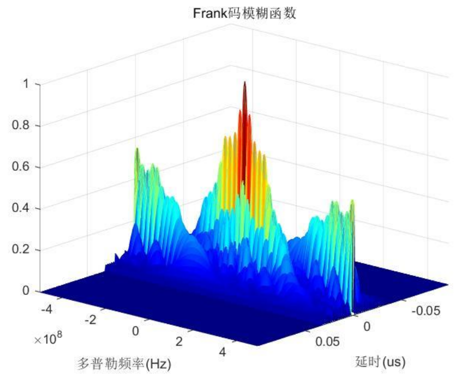

图 25 Frank 码模糊函数

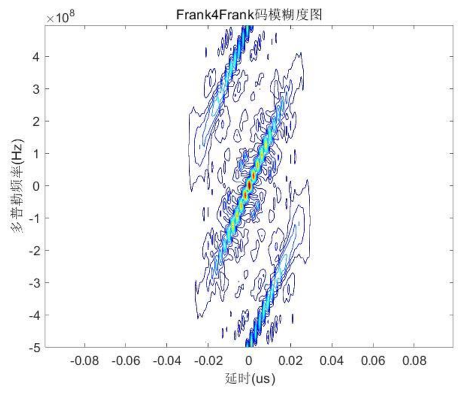

图 26 Frank 码模糊度图

4.3 P 相编码

Lewis 和 Kretschmer 研究了 P1、P2、P3 和 P4 多相位编码 。这些编码是 LFM 脉冲压缩波形的阶跃近似 ，其距离副瓣低，且具有与 LFM 编码一样的多普勒容忍性。P1 和 P2 编码是 Frank 码的修正版本，其 DC 频率再脉冲中心而不是起始处。对于数字雷达系统中遇到的在脉冲压缩前的接收机带宽限制，他们能够更加容忍。

P1 码：与法兰克码一样，P1 编码包含 M 平方个码元，但是第i个码元与第j个组之间的关系表示为

$$\Phi_{ij}=-\frac{\pi}{M}[M-(2j-1)][(j-1)M+(i-1)]$$

式中， i和j 是 1 到 M 间的整数。

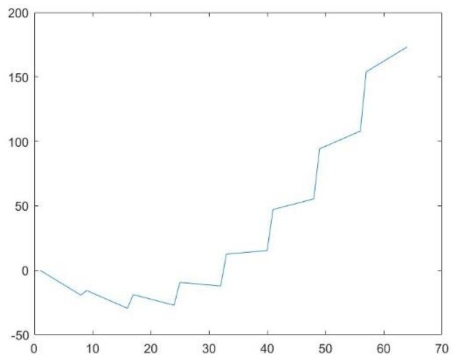

图 26 P1 码时相图

P1 码模糊函数：

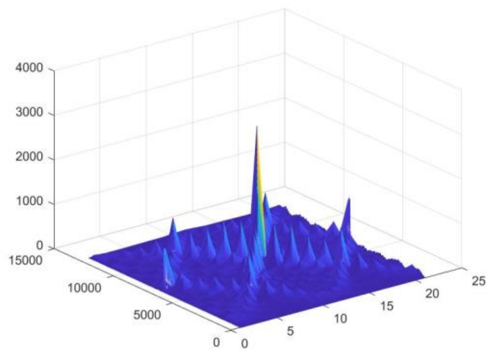

图 27 P1 码模糊函数

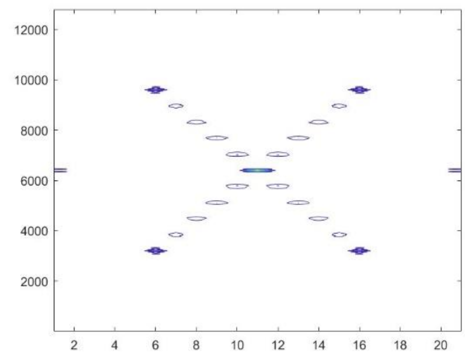

图 28 P1 码模糊度图

P1 码脉冲压缩：

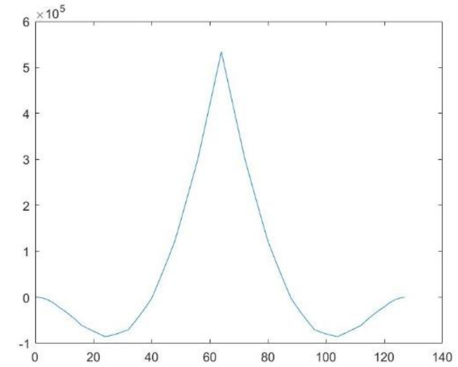

图 29 P1 码脉冲压缩

P2 码：其第i个码元与第j个组之间的关系表示为：

$$\Phi_{i,j}=[\frac{\pi}{2}\frac{M-1}{M}-\frac{\pi}{M}(i-j)](M+1-2j)$$

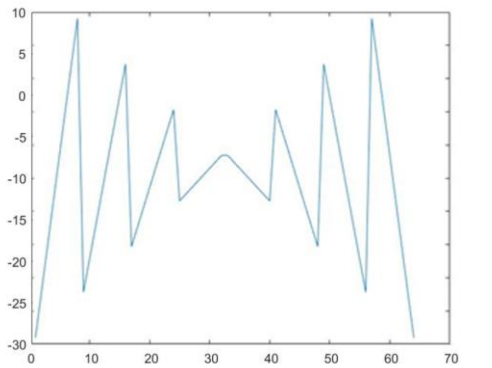

图 30 P2 码时相图

脉冲压缩：

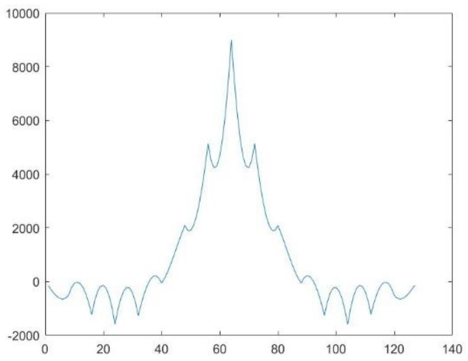

图 31 P2 码脉冲压缩

模糊函数：

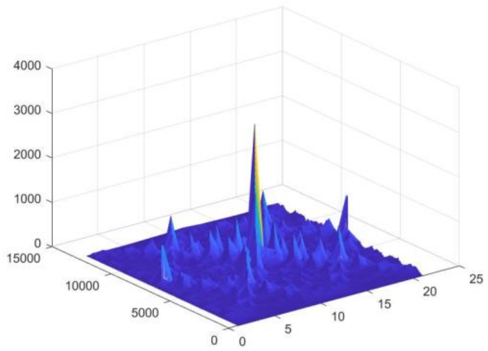

图 32 P2 码模糊函数

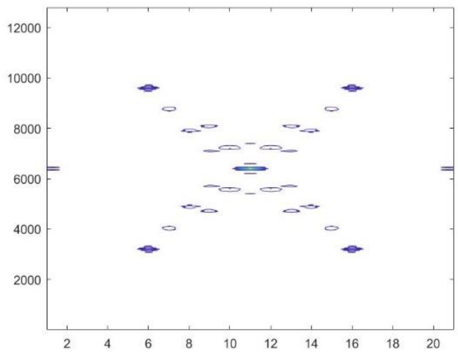

图 33 P2 码模糊度图

P3 码：

$$\varphi_i^{P3}=2\pi\int_0^{(i-1)\tau}[(f_0+k*t)-f_0]dt$$

$$=\pi(i-1)^2/N,$$

$$i=1,2,\dots\dots,N$$

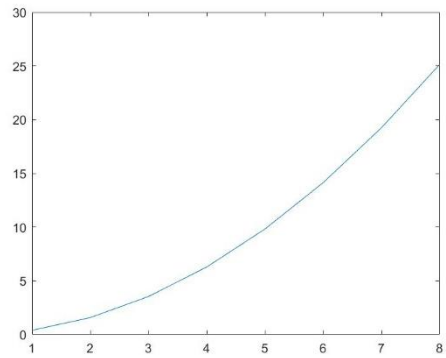

图 34 P3 码时相图

脉冲压缩：

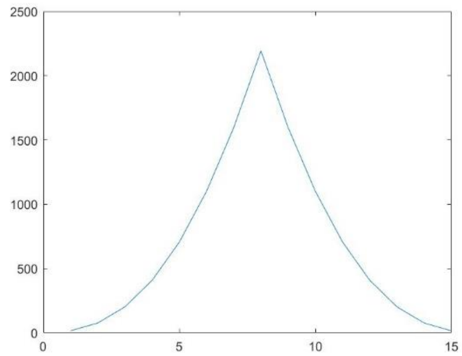

图 35 P3 码脉冲压缩

模糊函数：

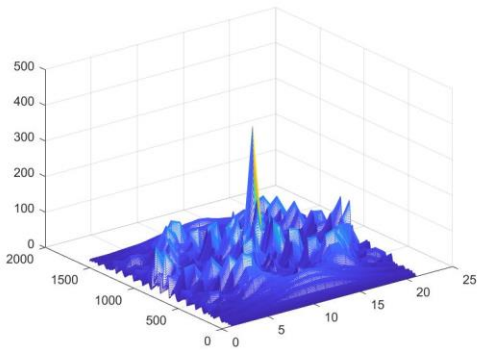

图 36 P3 码模糊函数

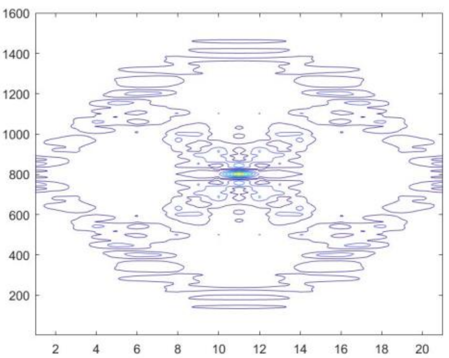

图 37 P3 码模糊度图

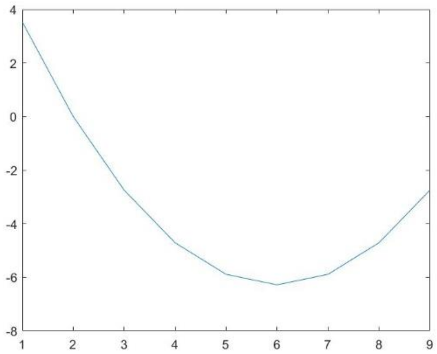

图 38 P4 码时相图

脉冲压缩：

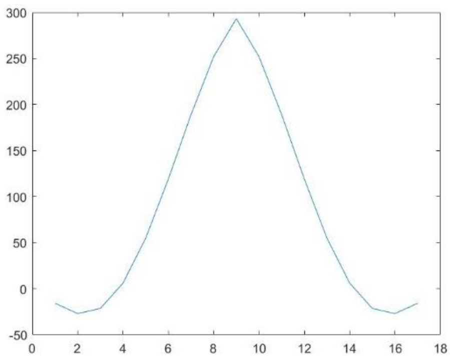

图 39 P4 码脉冲压缩

模糊函数：

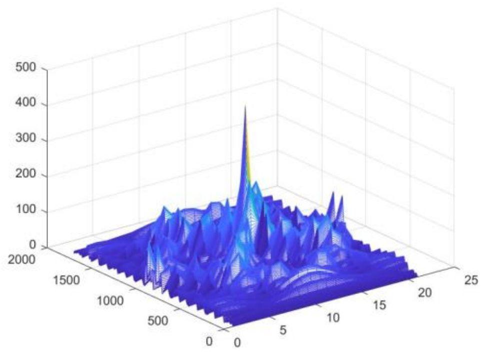

图 40 P4 码模糊函数

P4 码：相位关系如下

$$\varphi_n = \frac{\pi}{N} n^2 - \pi k, 0 \le n \le N$$

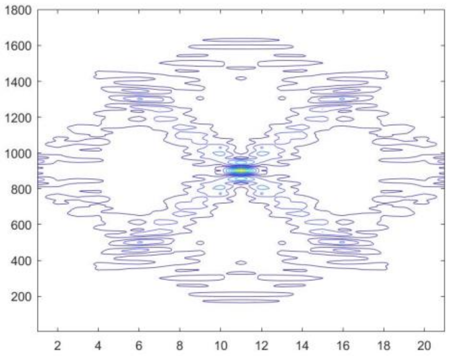

图 41 P4 码模糊度图

5　非线性调频信号

由于 LFM 信号脉压之后旁瓣太高，容易淹没其他微弱的目标信号，一般采用加窗的方法抑制其高旁瓣，但是加窗之后的匹配滤波器相当于滤波器失配，导致主瓣展宽，距离分辨率下降。为了解决这个问题，提出了基于相位逗留原理的非线性调频信号（NLFM），使得脉压后的结果，频谱直接相当于一个窗函数。

4.1　相位逗留原理

假设有如下积分表达式：

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\cos[P\varphi(t)]\,dt$$

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\sin[P\varphi(t)]\,dt$$

相位函数 $\varphi(t)$ 和幅度函数 $a(t)$ 都关于时间 t 缓慢变化，由于P是一个很大的数，因此 $P\varphi(t)$ 的取值范围会超出 2π，此时 $\cos[P\varphi(t)]$ 的值就会在正负区间快速震荡. 并且除了在 $\varphi'(t)=0$的附近之外，其他

其他区间的正负两半周的面积几乎可以互相抵消，因此该积分值将主要取决于相位函数的导数为零的附近区域的积分值，由于在相位函数的导数为零的区域$\cos[P\varphi(t)]$的相位变化率很小，震荡的频率趋近于零，所以将该点称为相位逗留点，该定理就是所谓的相位逗留原理。

将上述I、Q两路信号合并, 可以得到如下表达式：

$$Y = I + jQ = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{j\varphi(t)}dt$$

假设此函数只有一个相位逗留点，设为t_0, 则 $\varphi'(t_0)=0$，将$\varphi(t)$在t_0点用泰勒级数展开，为了简化计算，取前三项：

$$\varphi(t) \approx \varphi(t_0) + \frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2$$

则有：

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{j\varphi(t)}dt$$

$$\approx a(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left[\varphi(t_0)+\frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2\right]}dt$$

$$\approx a(t_0)e^{j\varphi(t_0)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2}dt$$

由泊松定理可知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ju^2}du = \sqrt{\pi}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

由此：

$$Y = \sqrt{2\pi}\frac{a(t_0)}{\sqrt{|\varphi''(t_0)|}}e^{j(\varphi(t_0)\pm\frac{\pi}{4})}$$

由傅里叶变换的性质可知：

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j\theta(f)}e^{j2\pi ft}df$$

则信号$s(t)$的相位函数为：

$$\varphi(f) = \theta(f) + 2\pi ft$$

对相位函数求导，可得：

$$\frac{d\varphi(f)}{df} = \theta'(f) + 2\pi t$$

根据相位逗留原理

$$\theta'(f_0) = -2\pi t$$

对相位函数在相位逗留点展开：

$$\varphi(f) \approx \varphi(f_0) + \frac{1}{2}\varphi''(f_0)(f-f_0)^2$$

将上式代入信号表达式, 并利用泊松定理，可得到如下近似表达式：

$$s(t) = \sqrt{2\pi}\frac{S(f_0)}{\sqrt{|\theta''(f_0)|}}e^{j[\theta(f_0)+2\pi f_0 t\pm\frac{\pi}{4}]}$$

相位函数为：

$$\varphi(t) = \theta(f_0) + 2\pi f_0 t \pm \frac{\pi}{4}$$

为了保证发射机的功率，一般发射信号具有矩形包络，即$|s(t)| = 1$，所以

$$\theta''(f_0) = K\, S^2(f_0)$$

其中 K 为常数，所以可求出$\theta(f)$:

$$\theta(f) = K \int_{-\infty}^{f} \int_{-\infty}^{x} S^2(u)\, dudx$$

所以，群时延为：

$$T(f) = -\frac{\theta'(f)}{2\pi} = K_a \int_{-\infty}^{f} S^2(u)\, du$$

相位函数$\varphi(t)$对t求导可得：

$$\varphi'(t) = 2\pi f_0 + 2\pi t \frac{df_0}{dt} + \frac{d\theta(f_0)}{df_0}\frac{df_0}{dt}$$

$$= 2\pi f_0 + (2\pi t + \frac{d\theta(f_0)}{df_0})\frac{df_0}{dt}$$

由于

$$\theta'(f_0) = -2\pi t$$

所以

$$\varphi'(t) = 2\pi f_0$$

$$f(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\pi} = f_0$$

可以看出，某时刻的频率等于相位逗留点频率，且该时刻为：

$$t = -\frac{\theta'(f_0)}{2\pi}$$

又群时延$T(f) = -\frac{\theta'(f)}{2\pi}$，所以

$$t = T(f_0)$$

又$f(t) = f_0$，所以

$$T(f_0) = f^{-1}(f_0)$$

所以对群时延求反函数就可以得到频率函数。

4.2 基于相位逗留原理的 NLFM 信号设计

由相位逗留原理可知，满足相位逗留的信号的群时延满足如下表达式：

$$T(f) = -\frac{\theta'(f)}{2\pi} = K_a \int_{-\infty}^{f} S^2(u)\, du$$

$$-B/2 \le f \le B/2$$

其中，

$$K_a = \frac{T}{\int_{-B/2}^{B/2} S^2(f) df}$$

求得信号群时延后，再对群时延求反函数得到信号频率函数

$$f(t) = T^{-1}(t)$$

再对频率函数积分得到信号相位函数：

$$\varphi(t) = 2\pi \int f(t)\, dt$$

又由于脉压结果为：

$$Y(f) = S(f) \cdot H(f) = S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2$$

为了达到脉压频谱为窗函数的目的，使

$$Y(f) = W(f)$$

$W(f)$为某一窗函数。以下是以 hanning 窗和 blackman 窗设计 NLFM 信号的过程：

窗函数：

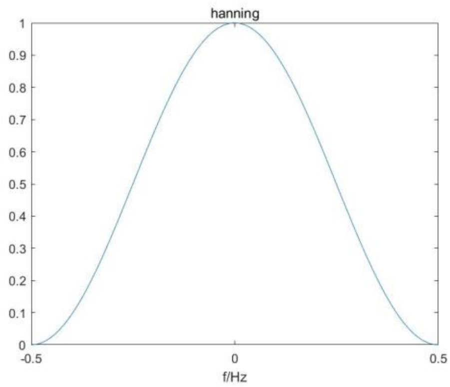

图 42 hanning window

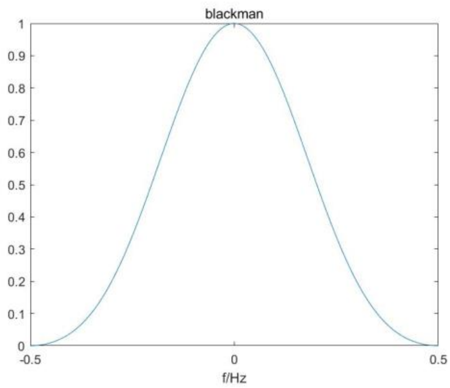

图 43 balckman window

群时延：

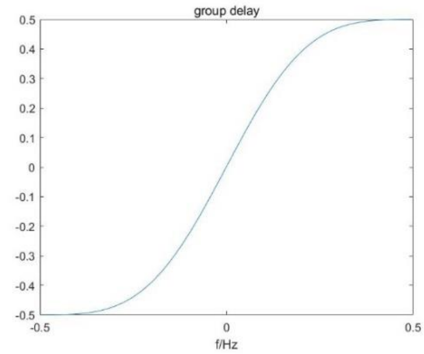

图 43　hanning group delay

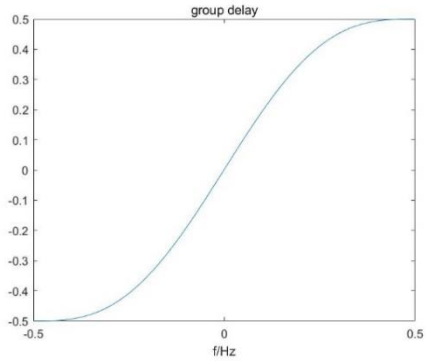

图 44　blackman group delay

频率：

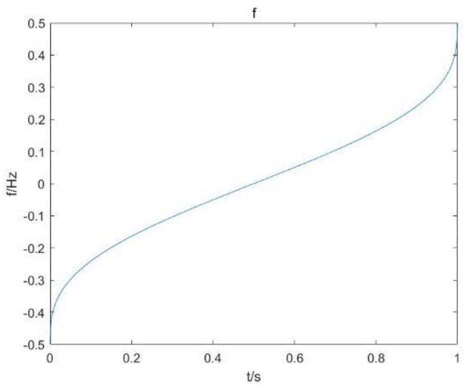

图 45　hanning

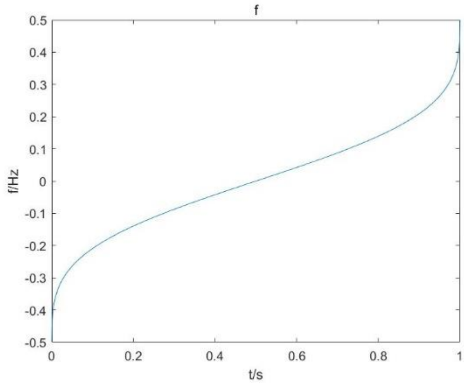

图 46　blackman

相位：

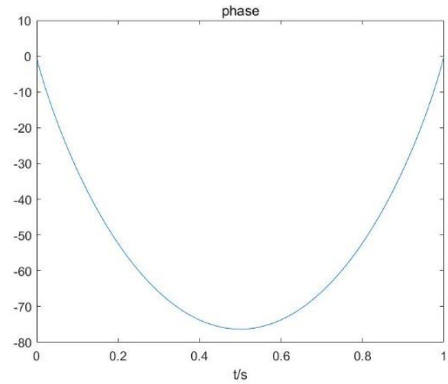

图 47　hanning

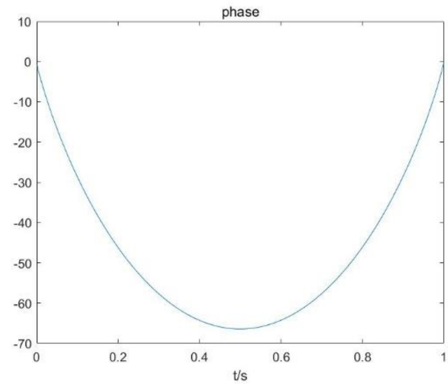

图 48　blackman

脉冲压缩：

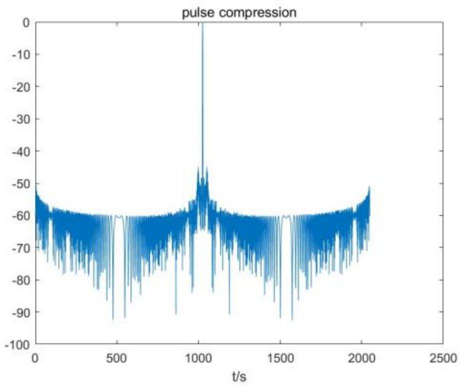

图 49　hanning

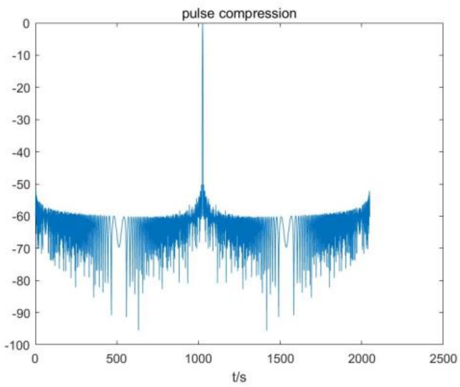

图 50　blackman

5.3　非线性调频信号模糊函数仿真

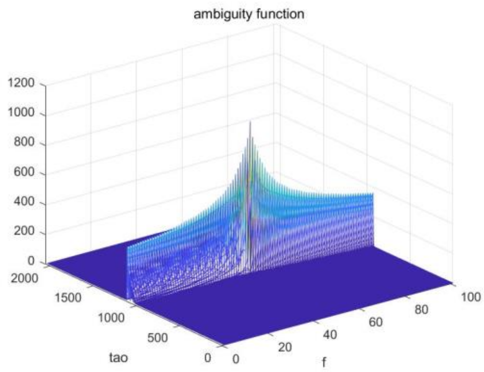

图 51　hanning 窗模糊函数

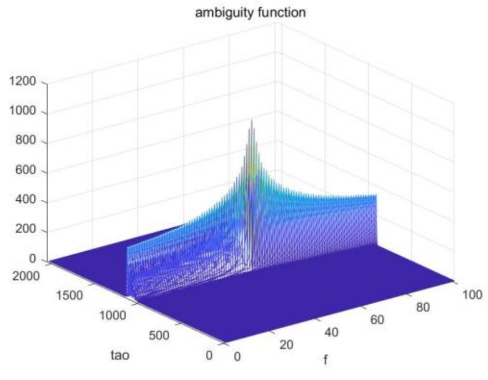

图 52　blackman 窗模糊函数

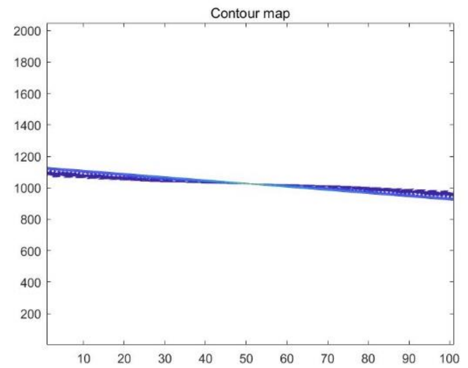

图 53　hanning 窗模糊函数

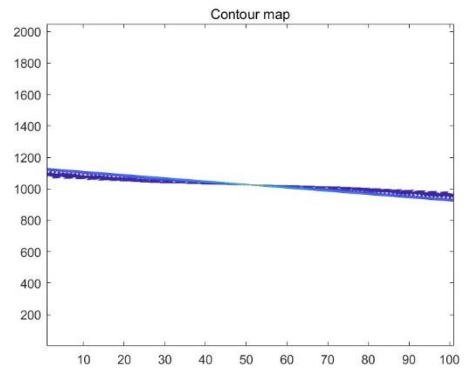

图 54　blackman 窗模糊度图

6　总结和展望

简单脉冲信号时宽积为 1，所以大带宽信号测距能力好，距离分辨率高，但测速能力弱，大时宽信号测速能力好，但是测距能力弱，且最大作用距离较小，因此脉冲压缩是提高距离分辨率和作用距离的好方式，同时，我们也可

以利用相位编码，使信号获得较大的时宽带宽积，从而解决雷达检测能力和距离分辨率之间的矛盾，达到和脉冲压缩类似的效果，且相位编码可以根据幅度增大旁瓣峰值比，使旁瓣影响最低。

衡量一个雷达信号好坏的标准就是看他的距离分辨率和速度分辨率，于是有了模糊函数，我们需要注意其中的时延和多普勒频率，在设计波形时要根据实际应用和标准设置合适的波形。