Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Appunti del corso "Fisica moderna"

di

Leonardo Pacciani Mori

Anno accademico 2013-2014

Febbraio 2015

Introduzione

Questo documento contiene la trascrizione dei miei appunti di parte del programma del corso *Fisica moderna* del secondo anno del Corso di Laurea in Fisica, tenuto presso il dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei" dell'Università degli Studi di Padova durante l'anno accademico 2013-2014.
In particolare contiene gli appunti della parte del corso tenuta dal prof. Pieralberto Marchetti, che concerne la relatività speciale. L'unica parte veramente mancante del programma è il metodo variazionale.

Questo documento nasce come "accorpamento" di vari file che avevo scritto, ognuno relativo ad un dato argomento. Mi rendo conto, quindi, che il risultato finale potrà mancare di completezza e organicità, e mi scuso per questo.

Ho comunque deciso di rilasciare questi appunti insieme al loro codice sorgente LaTeXdi modo che chiunque possa eventualmente modificarli a seconda delle proprie esigenze, visto anche che già a partire da quest'anno accademico il corso subirà qualche modifica.
Il materiale (compresi gli appunti di altri corsi) si trova tutto su leonardo.pm/teaching.

Non è escluso che ci possano essere degli errori, qua e là. In caso, mi scuso anticipatamente.

Padova, Febbraio 2015
Leonardo Pacciani Mori

Indice

La non invarianza delle equazioni di Maxwell

Attenzione: questa parte in realtà non è la trascrizione dei miei appunti. Si tratta di un ragionamento che ho buttato giù per iscritto perché la spiegazione che il professore aveva dato è stata un po' troppo sbrigativa per i miei gusti, e quindi volevo darne un'impostazione un po' più rigorosa.

Equazioni di Maxwell in sistemi di riferimento inerziali, secondo Galileo

Supponiamo di essere in un sistema di riferimento S inerziale, e di avere un'onda elettromagnetica che si propaga solo lungo l'asse x. Avremo dunque

$$\Box g(x,t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g(x,t) = 0$$

ove g è una generica funzione a valori reali che "descrive qualcosa" dell'onda (ad esempio, può essere il potenziale elettrico, oppure una delle tre componenti del campo elettrico o magnetico).

Detto S' un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme con velocità v parallela a x rispetto a S, scriviamo le trasformazioni galileiane fra i due sistemi in questa forma:

$$\begin{cases} x' = x - \beta ct \\ ct' = ct \end{cases}$$

e questo sistema può a sua volta essere espresso in forma più compatta come un'unica funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$f(x,ct) = \begin{pmatrix} x'(x,ct) \\ ct'(x,ct) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \beta ct \\ ct \end{pmatrix}$$

Dunque f è la funzione che "trasporta" da S a S'.

Ora, vogliamo vedere come cambia l'espressione dell'operatore d'Alambertiano $\Box$ in S' tramite le trasformazioni di Galileo. In pratica, vogliamo vedere quanto vale

$$\Box g(f(x,ct)) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g(f(x,ct)) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g(x'(x,t), ct'(x,t))$$

e se le equazioni di Maxwell fossero invarianti per trasformazioni galileiane ci aspetteremmo che

$$\Box g(f(x,ct)) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) g(f(x,ct))$$

Poiché g è una funzione di due variabili ($x'(x,ct)$ e $ct'(x,ct)$) a valori reali, ci aspettiamo che la sua matrice jacobiana sia una matrice 1×2, mentre poiché f è una funzione di due variabili che ha due componenti, la sua jacobiana sarà una matrice 2×2. Dette J_g e J_f queste matrici, si avrà

$$J_g = \frac{dg}{d(x'(x,ct), ct'(x,ct))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x'} & \frac{\partial g}{\partial ct'} \end{pmatrix}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial ct} \\ \frac{\partial ct'}{\partial x} & \frac{\partial ct'}{\partial ct} \end{pmatrix}$$

e, per la regola della catena,

$$\frac{dg(f(x,ct))}{d(x,ct)} = J_g J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial g}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial ct} \end{pmatrix}$$

Ma poiché per definizione

$$\frac{dg(f(x,ct))}{d(x,ct)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(f(x,ct))}{\partial x} & \frac{\partial g(f(x,ct))}{\partial ct} \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \frac{\partial g(f(x,ct))}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial g(f(x,ct))}{\partial ct} = \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial g}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial ct} \end{cases}$$

Infine, poiché

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial ct'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial x'}{\partial ct} = -\beta \qquad \frac{\partial ct'}{\partial ct} = 1$$

allora

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x'} \qquad \frac{\partial g}{\partial ct} = -\beta\frac{\partial g}{\partial x'} + \frac{\partial g}{\partial ct'} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}g = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}g \qquad \frac{\partial^2}{\partial ct^2}g = \left(-\beta\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial ct'}\right)^2 g$$

Dunque

$$\Box g(f(x,ct)) = \left[\left(-\beta\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial ct'}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right] g(f(x,ct)) \neq \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) g(f(x,ct))$$

Pertanto le equazioni di Maxwell **non** sono invarianti per trasformazioni galileiane.

Capitolo 1

Formalismo covariante

1.1 “Introduzione”: il teorema di Poincaré

La nostra esigenza fondamentale è quella di definire un nuovo formalismo che renda le equazioni covarianti a vista, ossia invarianti in forma per trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali.

Innanzitutto, in relatività speciale ci troviamo ad avere a che fare con trasformazioni che coinvolgono contemporaneamente lo spazio e il tempo, che quindi non risultano più entità scindibili, e anzi del tutto indipendenti, come in meccanica newtoniana. Dobbiamo quindi lavorare in uno spazio a 4 dimensioni, o meglio a 1+3 dimensioni (per tenere mentalmente distinte, comunque, la parte spaziale da quella temporale) detto *spazio di Minkowski* (talvolta anche *spaziotempo di Minkowski*).

Perciò, indichiamo le “coordinate spaziotemporali” di un punto x, che chiameremo *evento*, in questo spazio con x^μ, e μ (come tutti gli indici greci che useremo) che varia da 0 a 3; x^0 è la coordinata temporale dell'evento scalata con c, mentre x^1, x^2, x^3 sono le sue coordinate spaziali. In altre parole, se siamo in un sistema di riferimento trirettangolo:

$$x^0 = ct \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

Gli indici latini, invece, avranno valori variabili da 1 a 3.

Le ipotesi a partire dalle quali facciamo le mosse sono:

1. lo spazio e il tempo sono omogenei, ossia non esistono né punti dello spazio né istanti del tempo privilegiati in alcun modo rispetto ad altri

2. lo spazio è isotropo, ossia non esistono direzioni privilegiate

3. la velocità della luce c nel vuoto è, in modulo, costante per tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Una conseguenza importante della seconda ipotesi che useremo è che, non esistendo direzioni dello spazio privilegiate, ogni ragionamento fatto considerando moti lungo una direzione può essere ripetuto analogamente per una qualsiasi altra direzione, ottenendo gli stessi risultati.

Siano dunque S e S' due sistemi di riferimento inerziali in moto l'uno rispetto all'altro, e per semplicità supponiamo che gli assi dei due sistemi siano fra loro paralleli. Indichiamo con x^μ e x'^μ, rispettivamente, le coordinate di uno stesso evento in S e in S'. Nel caso più generale possibile, x^μ e x'^μ saranno legati da una relazione funzionale generica. Perciò:

$$x'^\mu = f^\mu(x) \tag{1.1}$$

ove f è la funzione che esprime la trasformazione fra i sistemi di riferimento S e S'. Da notare che $f^\mu(x)$ significa $f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$: non avendo fatto ancora alcuna ipotesi sul tipo di trasformazione, ogni coordinata x'^μ dell'evento x in S può dipendere da <u>tutte</u> le coordinate dell'evento in S'.

Ora, differenziando:

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{1.2}$$

ossia:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^3}dx^3$$

Dal fatto che lo spazio e il tempo sono omogenei, segue che $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ dev'essere una quantità costante, altrimenti si potrebbe arbitrariamente discernere punti diversi dello spazio o del tempo. Detti infatti x^{μ} e y^{μ} le coordinate di due eventi in S, in S' le loro coordinate saranno x'^{μ} e y'^{μ}. Poiché lo spazio e il tempo sono omogenei, ossia non esistono né istanti di tempo né punti dello spazio privilegiati, cambiando l'“origine spaziotemporale” (ossia l'origine sia del tempo che dello spazio) in S, la “distanza” (sia nello spazio che nel tempo) di x'^{μ} e y'^{μ} non deve variare in S'. Perciò, se si applica la “traslazione” $x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu} + b^{\mu}$, $y^{\mu} \longrightarrow y^{\mu} + b^{\mu}$ si deve avere:

$$x'^{\mu} - y'^{\mu} = f^{\mu}(x) - f^{\mu}(y) = f^{\mu}(x+b) - f^{\mu}(y+b) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} f^{\mu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} f^{\mu}(x+b)$$

ove nell'ultimo passaggio si è derivato rispetto a x^{ν}.

Ora, poiché f è una funzione di quattro variabili (dipende da x^{ν} con ν che varia da 0 a 3) a quattro componenti (ogni sua componente è x'^{μ} per definizione), $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ sarà una matrice 4×4 (è la sua jacobiana):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

Notiamo dunque che se chiamiamo dx' il vettore di componenti dx'^{μ} e dx quello di componenti dx^{μ}, la (1.2) diventa, in notazione matriciale:

$$dx' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} dx'^0 \\ dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^0} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f^3(x)}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

e ad esempio per la prima componente di dx':

$$dx'^0 = \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^3}dx^3 = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f^0(x)}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

che è proprio la (1.2).

Chiamiamo dunque $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \Lambda$ (che quindi è una matrice costante), e indichiamo con $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ l'elemento (μ, ν)-esimo di Λ, ossia quello che si trova sulla μ-esima riga e sulla ν-esima colonna. In questo modo, la (1.2) diventa:

$$dx'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}$$

Per semplificare le notazioni, adottiamo la *convenzione di Einstein*: ogniqualvolta ci sono due indici consecutivi uguali è sottintesa una sommatoria rispetto ad essi. In questo modo l'equazione precedente diventa:

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu} \tag{1.3}$$

Integrando:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{1.4}$$

ove a^{μ} è la μ-esima componente di un vettore colonna a quattro componenti che contiene le "costanti d'integrazione"; da un punto di vista fisico, sono le coordinate dell'origine spaziotemporale di S' in S. In altre parole, quando in S si ha $t = 0$ in S' è $t' = a^0$ (i tempi di S' sono traslati di a^0 rispetto a quelli di S) e in quell'istante l'origine di S' si trova in (a^1, a^2, a^3) rispetto ad S.

Notiamo dunque che l'omogeneità dello spaziotempo implica che le trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali siano lineari: infatti, da (1.4) la matrice Λ è la matrice della trasformazione fra S e S', ed essendo costante sarà la matrice associata ad un'applicazione lineare.

In dettaglio:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

e la (1.4) scritta per esteso é:

$$\begin{cases} x'^0 = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 + a^0 \\ x'^1 = \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 + a^1 \\ x'^2 = \Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 + a^2 \\ x'^3 = \Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 + a^3 \end{cases}$$

Ora, possiamo tranquillamente porre $a^{\mu} = 0$ senza ledere in generalità: si tratta semplicemente di supporre che le origini dei tempi di S e S' coincidano, e che a $t = t' = 0$ le origini spaziali dei due sistemi coincidano anch'esse.

Definiamo ora l'*intervallo spaziotemporale* fra due eventi in un sistema di riferimento come:

$$ds^2 := (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$$

Usando la (1.3), risulta che in S':

$$ds'^2 = dx'^0 dx'^0 - \sum_{i=1}^{3} dx'^i dx'^i = \Lambda^0{}_{\mu} dx^{\mu} \Lambda^0{}_{\nu} dx^{\nu} - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_{\mu} dx^{\mu} \Lambda^i{}_{\nu} dx^{\nu} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad ds'^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \left[\Lambda^0{}_{\mu} \Lambda^0{}_{\nu} - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_{\mu} \Lambda^i{}_{\nu} \right] dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{1.5}$$

La quantità fra parentesi quadre è una combinazione degli elementi della matrice Λ; poiché essa (la quantità fra parentesi) dipende da μ e da ν, sarà a sua volta l'elemento di una matrice. Chiamiamo questa matrice G, e il suo elemento (μ, ν)-esimo $g_{\mu\nu}$. Risulta dunque:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^0{}_{\mu} \Lambda^0{}_{\nu} - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_{\mu} \Lambda^i{}_{\nu} \tag{1.6}$$

e alla luce di questo la (1.5), con la convenzione di Einstein, diventa:

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{1.7}$$

Dato che nella definizione di $g_{\mu\nu}$ compaiono solo prodotti fra elementi di Λ (che ovviamente sono numeri reali perché Λ è costante), la matrice G è simmetrica. Infatti:

$$g_{\nu\mu} = \Lambda^0{}_{\nu} \Lambda^0{}_{\mu} - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_{\nu} \Lambda^i{}_{\mu} = \Lambda^0{}_{\mu} \Lambda^0{}_{\nu} - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_{\mu} \Lambda^i{}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

Vogliamo ora dimostrare che l'intervallo spaziotemporale da noi definito è invariante per trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali (*teorema di Poincaré*).

Per farlo, cominciamo da un caso particolare: consideriamo un raggio di luce che si propaga in S. Per esso si avrà $c^2dt^2 = (dx^0)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, e dunque $ds^2 = 0$. Poiché la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, in S' si avrà, per lo stesso raggio di luce, che $c^2dt'^2 = (dx'^0)^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2$, e dunque $ds'^2 = 0$. Perciò, se in un sistema di riferimento inerziale l'intervallo spaziotemporale fra due eventi è nullo, tale sarà in ogni altro sistema di riferimento inerziale.

Cerchiamo di vedere, ora, come questo possa farci capire qualcosa su com'è fatta G.

Consideriamo un raggio di luce che si propaga in S lungo x^1, e per il quale dunque $dx^2 = dx^3 = 0$ e $dx^0 = \pm dx^1$ (consideriamo ambo i casi in cui si propaga lungo il verso positivo e negativo di x^1). Dalla (1.7) si avrà:

$$0 = ds'^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dx^0dx^0 + g_{01}dx^0dx^1 + g_{10}dx^1dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} (g_{00}+2g_{01}+g_{11})(dx^0)^2 = 0 \\ (g_{00}-2g_{01}+g_{11})(dx^0)^2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} g_{00}+2g_{01}+g_{11} = 0 \\ g_{00}-2g_{01}+g_{11} = 0 \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le equazioni si ottiene:

$$g_{11} = -g_{00} \qquad\qquad g_{01} = 0$$

Poiché lo spazio è isotropo, non esistono direzioni privilegiate e dunque il ragionamento che abbiamo appena fatto può essere ripetuto considerando un raggio di luce propagantesi lungo x^2 o x^3. Si ottiene:

$$g_{22} = g_{33} = -g_{00} \qquad\qquad g_{02} = g_{03} = 0$$

Consideriamo ora invece un raggio propagantesi in una direzione generica. Sempre dalla (1.7) si avrà:

$$0 = ds'^2 = g_{00}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} g_{ij}dx^idx^j = g_{00}ds^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} g_{ij}dx^idx^j$$

e poiché $ds^2 = 0$, dunque, si avrà:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} g_{ij}dx^idx^j = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

Siamo dunque arrivati ad una conclusione interessante: l'aver supposto c costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali, insieme all'isotropia dello spazio, ci permette di concludere che G è diagonale. In particolare:

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{00} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dx^0dx^0 - g_{00}dx^1dx^1 - g_{00}dx^2dx^2 - g_{00}dx^3dx^3 = g_{00}\left((dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{ds'^2 = g_{00}ds^2}$$

Per l'omogeneità dello spazio e del tempo, g_{00} può essere funzione solo della velocità relativa $\vec{v}$ fra S e S'; per l'isotropia dello spazio, però, non potrà dipendere dalla sua direzione. In conclusione, g_{00} dev'essere funzione del modulo della velocità relativa fra S e S', e pertanto:

$$ds'^2 = g_{00}(|\vec{v}|)ds^2 \tag{1.8}$$

Ora, poiché S e S' sono due qualunque sistemi di riferimento nessuno dei due è privilegiato rispetto all'altro: per reciprocità se S vede S' muoversi con velocità $\vec{v}$ allora S' vede S muoversi con velocità $-\vec{v}$. "Scambiando i ruoli" di S e S' nella (1.8), dunque, si deve sostituire[1] $\vec{v}$ con $-\vec{v}$. Dunque:

$$ds^2 = g_{00}(|-\vec{v}|)ds'^2 = g_{00}(|\vec{v}|)ds'^2 = [g_{00}(|\vec{v}|)]^2 ds^2 \qquad \Rightarrow \qquad g_{00}(|\vec{v}|) = \pm 1$$

Ma poiché per $|\vec{v}| = 0$ si deve ricadere nella trasformazione identica (S e S' coincidono), dovrà necessariamente essere $g_{00}(|\vec{v}|) = 1$ (dato che i sistemi di riferimento coincidono, l'intervallo spaziotemporale fra due eventi qualsiasi è lo stesso in entrambi i sistemi di riferimento). Perciò:

$$\boldsymbol{ds'^2 = ds^2} \qquad\qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Il gruppo di invarianza di ds^2

Abbiamo dunque capito che nel manipolare trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali si possono usare due notazioni: quella matriciale, che mostra direttamente le relazioni fra gli enti in gioco, e quella con indici, che invece focalizza l'attenzione sulle singole componenti di questi enti.

Indicheremo d'ora in poi la trasposizione matriciale con $\sim$.

Se A e B sono due generiche matrici fra le quali si può eseguire il prodotto, in generale si avrà (per definizione stessa di prodotto riga per colonna fra due matrici):

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \tag{1.9}$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \\ B_{20} & B_{21} \end{pmatrix}$$

allora:

$$(AB)_{00} = A_{00}B_{00} + A_{01}B_{10} + A_{02}B_{20} = \sum_{k=0}^{2} A_{0k}B_{k0}$$

Nella notazione con indici, dunque, se due indici consecutivi sono uguali si somma rispetto ad essi. La (1.9) quindi, con la convenzione di Einstein diventa:

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

Che cos'è invece $A_{ki}B_{kj}$? Per capirlo bisogna tenere a mente che in generale $A_{ki} = (\tilde{A})_{ik}$, ossia che l'elemento (k,i)-esimo di A è l'elemento (i,k)-esimo della sua trasposta $\tilde{A}$. Perciò:

$$A_{ki}B_{kj} = \sum_k A_{ki}B_{kj} = \sum_k (\tilde{A})_{ik}B_{kj} = (\tilde{A}B)_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad A_{ki}B_{kj} = (\tilde{A}B)_{ij}$$

Dunque, nella notazione con indici se due indici consecutivi sono diversi una delle due matrici presenti nell'espressione è trasposta; ad esempio, $A_{ik}B_{jk} = (A\tilde{B})_{ij}$.

Ora, poiché gli indici sommati (si dice anche *contratti* o *saturati*) sono muti, si può cambiare arbitrariamente il loro nome purché il simbolo introdotto non compaia in altre parti della formula. Ad esempio, per la definizione di ds'^2 e la (1.3):

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma$$

Proviamo a scrivere quest'espressione in forma matriciale. Innanzitutto, notiamo che:

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = Gdx'dx' = \widetilde{dx'}Gdx'$$

[1] Non diamo una dimostrazione rigorosa di ciò, dando per ovvia la cosa.

Infatti:

$$\widetilde{dx'}Gdx' = \begin{pmatrix} dx'^0 & dx'^1 & dx'^2 & dx'^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx'^0 \\ dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} dx'^0 & dx'^1 & dx'^2 & dx'^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx'^0 \\ -dx'^1 \\ -dx'^2 \\ -dx'^3 \end{pmatrix} = (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2 = ds'^2$$

Poiché $dx' = \Lambda dx$, dunque:

$$ds'^2 = \widetilde{\Lambda dx} G \Lambda dx = \widetilde{dx}\widetilde{\Lambda} G \Lambda dx \tag{1.10}$$

In termini di indici:

$$ds'^2 = dx^\rho \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma \tag{1.11}$$

$$(\widetilde{\Lambda} G \Lambda)_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \tag{1.12}$$

Notare che sia in (1.11) che in (1.12) ogniqualvolta due indici consecutivi non sono uguali, la matrice corrispondente all'oggetto in esame è trasposta. Ad esempio in (1.11), poiché l'indice ρ di dx^ρ non è seguito da un altro ρ, ma da un μ, la matrice di dx in (1.10) è trasposta; analogamente poiché l'indice ρ di $\Lambda^\mu{}_\rho$ non è seguito da un altro ρ, o meglio poiché il μ di $\Lambda^\mu{}_\rho$ non è "accanto" al μ di $g_{\mu\nu}$, la prima matrice di Λ in (1.10) è trasposta. Poiché invece il ν di $\Lambda^\nu{}_\sigma$ è preceduto dal ν di $g_{\mu\nu}$, la seconda matrice di Λ in (1.10) non è trasposta[2]. Gli stessi ragionamenti si possono ripetere per la (1.12).

Dunque, in ogni formula con gli indici, tutti gli indici liberi (ossia non contratti) nel primo membro devono avere i loro corrispondenti nel secondo membro e nella stessa posizione "alto/basso". Ad esempio, nel secondo membro della (1.12) gli indici saturati sono μ e ν, e quelli liberi sono ρ e σ, che si trovano in basso: perciò anche nel primo membro gli indici liberi (che in questo caso sono anche gli unici indici presenti) sono ρ e σ, e si trovano entrambi "in basso".

Gli indici "in alto" si dicono *controvarianti*, quelli "in basso" *covarianti*. Vedremo più avanti perché è importante distinguerli.

In forma matriciale, dunque, le trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali che lasciano invariante ds^2 sono del tipo:

$$x' = \Lambda x + a$$

con il vincolo che $\widetilde{\Lambda} G \Lambda = G$. Infatti:

$$\left.\begin{array}{c} ds'^2 = \widetilde{dx}\widetilde{\Lambda} G \Lambda dx \\ \\ ds^2 = \widetilde{dx} G dx \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\Lambda} G \Lambda = G$$

In indici, ciò significa che $\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$.

Soffermiamoci un attimo su questa relazione. Non si tratta di una generica relazione, ma di una condizione dal preciso significato fisico e matematico. Per comprenderlo meglio, conviene un attimo pensare al caso dello spazio tridimensionale della fisica newtoniana. In esso abbiamo definito la distanza fra due punti separati da un vettore $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ come

$$d\vec{x}^2 = dx_i dx_i = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \tag{1.13}$$

Questa è, appunto, la *metrica* dello spazio tridimensionale, così come ds^2 è la metrica dello spaziotempo di Minkowski.
Ora, espressa in termini della delta di Kronecker δ_{ij}, la (1.13) diventa:

$$d\vec{x}^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

[2]Attenzione: $g_{\mu\nu}$ è simmetrico, e dunque anche scrivendo $g_{\nu\mu}\Lambda^\nu{}_\sigma$ il prodotto fra G e Λ è semplice, perché l'espressione è equivalente a $g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma$.

Notiamo dunque subito una "strana" corrispondenza: δ_{ij} svolge nella (1.13) lo stesso ruolo che $g_{\mu\nu}$ svolge nella (1.7). Ciò non è assolutamente casuale: lo spazio tridimensionale e lo spaziotempo di Minkowski sono infatti entrambi degli *spazi di Riemann*, ossia spazi su cui è definita una metrica come forma quadratica. Il *tensore*[3] (nel nostro caso la matrice) associato a questa forma è detto *tensore metrico*. Nel caso dello spazio tridimensionale, poiché l'elemento (i,j)-esimo del tensore metrico, che chiamiamo Δ, è δ_{ij}, si avrà:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

ossia, il tensore metrico dello spazio tridimensionale è la matrice identità.

Ora, nello spazio tridimensionale le trasformazioni fra sistemi di riferimento che lasciano invariante $d\vec{x}^2$ sono le rotazioni, rappresentate da quelle matrici R tali che $\widetilde{R}R = \mathbb{1}$ (e con $\det R = 1$) e dette *ortogonali*. Quest'ultima relazione, riscritta come:

$$\widetilde{R}\mathbb{1}R = \mathbb{1}$$

è formalmente identica alla $\widetilde{\Lambda}G\Lambda = G$. Notiamo dunque che questa relazione ha un senso più profondo di quanto potesse sembrare all'inizio: è la condizione da porre sulle matrici di trasformazione Λ affinché lascino effettivamente invariante la metrica definita dal tensore metrico G. Ora, poiché la metrica ds^2 non è definita positiva, come quella dello spazio tridimensionale, lo spaziotempo di Minkowksi è anche detto *spazio pseudo-euclideo*, e le matrici Λ che soddisfano alla condizione $\widetilde{\Lambda}G\Lambda = G$ sono dette *pseudo-ortogonali*.

Una trasformazione fra sistemi di riferimento inerziali è dunque caratterizzata dalla coppia $\{\Lambda, a\}$. Quest'insieme di trasformazioni costituisce un *gruppo*.

Definizione: un insieme Y si dice *gruppo* se su di esso è definita una legge di composizione, che denotiamo con $\cdot$, tale che:

1. $\forall\, y_1, y_2 \in Y\ \exists\, y := y_1 \cdot y_2 \in Y$
2. $(y_1 \cdot y_2) \cdot y_3 = y_1 \cdot (y_2 \cdot y_3)\ \forall\, y_1, y_2, y_3 \in Y$, ossia la composizione è associativa
3. $\exists\,!\, e \in Y \mid e \cdot y = y \cdot e = y\ \forall\, y \in Y$
4. $\forall\, y \in Y\ \exists\,!\, y^{-1} \in Y \mid y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot y = e$

ove e è detto *elemento neutro* di Y, e y^{-1} *inverso* di y.

Ad esempio, $\mathbb{R}$ con $\cdot = +$ è un gruppo con 0 come elemento neutro, e l'inverso di un $r \in \mathbb{R}$ è $-r$.

L'idea di "gruppo" è la formalizzazione matematica di un *insieme di trasformazioni che lasciano invariata una qualche proprietà*.

Teorema: L'insieme delle coppie $\{\Lambda, a\}$ con $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}^4$ che soddisfano $\widetilde{\Lambda}G\Lambda = G$ è un gruppo, detto *gruppo di Poincaré* e denotato con $\mathscr{P}$, con la legge di composizione

$$\{\Lambda_1, a_1\} \cdot \{\Lambda_2, a_2\} = \{\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1\}$$

Inoltre, il suo elemento neutro è $\{\mathbb{1}, 0\}$ e l'inverso di $\{\Lambda, a\}$ è $\{\Lambda, a\}^{-1} = \{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\}$

Dimostrazione: Verifichiamo semplicemente che tutto ciò è vero.

Per la legge di composizione:

$$\begin{array}{l} \{\Lambda_2, a_2\} : x \longmapsto x' = \Lambda_2 x + a_2 \\ \{\Lambda_1, a_1\} : x' \longmapsto x'' = \Lambda_1 x' + a_1 \end{array} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \{\Lambda_1, a_1\} \cdot \{\Lambda_2, a_2\} : x \longmapsto x'' = \Lambda_1(\Lambda_2 x + a_2) + a_1 = \Lambda_1\Lambda_2 x + \Lambda_1 a_2 + a_1$$

[3] Vedremo nella prossima sezione cos'è un tensore.

Verifichiamo, poi, che se Λ_1 e Λ_2 soddisfano $\widetilde{\Lambda_\alpha} G \Lambda_\alpha = G$ con $\alpha = 1,2$, allora anche $\Lambda_1\Lambda_2$ lo fa:

$$\widetilde{(\Lambda_1\Lambda_2)} G \Lambda_1\Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_2}\underbrace{\widetilde{\Lambda_1} G \Lambda_1}_{G}\Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_2} G \Lambda_2 = G$$

Dunque se $\{\Lambda_1, a_1\}, \{\Lambda_2, a_2\} \in \mathscr{P}$ allora $\{\Lambda_1, a_1\} \cdot \{\Lambda_2, a_2\} \in \mathscr{P}$.

Dalla legge di composizione segue che:

$$\{\Lambda, a\} \cdot \{\mathbb{1}, 0\} = \{\Lambda\mathbb{1}, \Lambda 0 + a\} = \{\Lambda, a\}$$

$$\{\Lambda, a\} \cdot \{\Lambda, a\}^{-1} = \{\Lambda, a\} \cdot \{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a\} = \{\Lambda\Lambda^{-1}, \Lambda(-\Lambda^{-1} a) + a\} = \{\mathbb{1}, -a + a\} = \{\mathbb{1}, 0\}$$

e questo conclude la dimostrazione.

Definizione un sottoinsieme $H \subset Y$ con Y gruppo è detto *sottogruppo* di Y se H è un gruppo rispetto alla legge di composizione di Y.

Ad esempio, $\{\mathbb{1}, a\}$ è un sottogruppo di $\mathscr{P}$ che corrisponde alle traslazioni spaziotemporali, mentre $\{\Lambda, 0\}$ è un sottogruppo di $\mathscr{P}$ detto *gruppo di Lorentz* e denotato con $\mathscr{L}$.

Si verifica che $\mathscr{L}$ ha quattro componenti (ossia sottoinsiemi) connesse. Infatti:

$$\widetilde{\Lambda} G \Lambda = G \quad \Rightarrow \quad \det\left(\widetilde{\Lambda} G \Lambda\right) = \det G \quad \Rightarrow \quad \det\widetilde{\Lambda}\det G \det\Lambda = \det G \quad \Rightarrow \quad \det\widetilde{\Lambda}\det\Lambda = (\det\Lambda)^2 = 1$$

Si presentano dunque due casi:

$\det\Lambda = 1$**:** questo sottoinsieme di $\mathscr{L}$ è detto *gruppo di Lorentz speciale* o *gruppo di Lorentz proprio*, ed è denotato con $\mathscr{L}_+$

$\det\Lambda = -1$**:** questo sottoinsieme di $\mathscr{L}$ è detto *insieme delle trasformazioni improprie*, denotato con $\mathscr{L}_-$, e non è un gruppo. Se infatti si compongono due trasformazioni $\{\Lambda_1, a_1\}$ e $\{\Lambda_2, a_2\}$ di questo insieme, la matrice della composizione delle due è $\Lambda_1\Lambda_2$, e si ha che $\det(\Lambda_1\Lambda_2) = \det\Lambda_1 \det\Lambda_2 = (-1)(-1) = 1$. Pertanto, poiché $\det(\Lambda_1\Lambda_2) \neq -1$, la composizione delle due trasformazioni non appartiene più a $\mathscr{L}_-$.

Esistono altri due sottoinsiemi di $\mathscr{L}$. Infatti:

$$1 = g_{00} = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$$

Dunque:

$\Lambda^0{}_0 \geq 1$**:** questo sottoinsieme di $\mathscr{L}$ è detto *gruppo di Lorentz ortocrono*, e si indica con $\mathscr{L}^\uparrow$

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$**:** questo sottoinsieme di $\mathscr{L}$ è detto *insieme delle trasformazioni anticrone*, e denotato con $\mathscr{L}^\downarrow$, ma non è un gruppo. Analogamente a quanto visto per $\mathscr{L}_-$, infatti, se si compongono due trasformazioni che invertono l'ordine temporale, il risultato sarà una trasformazione nella quale il tempo non è invertito.

Poniamo infine $\mathscr{L}^\uparrow \cap \mathscr{L}_+ := \mathscr{L}_+^\uparrow$, e analogamente per gli altri sottoinsiemi. Poiché questi sono sconnessi fra loro (le loro intersezioni sono vuote[4]), risulta:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_+^\uparrow \cup \mathscr{L}_-^\uparrow \cup \mathscr{L}_+^\downarrow \cup \mathscr{L}_-^\downarrow$$

Infine, $\mathscr{L}_+^\uparrow$ è detto *gruppo di Lorentz ristretto* oppure *proprio*.

Un esempio di elemento di $\mathscr{L}_-^\uparrow$ è la parità:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[4]Necessariamente, se una trasformazione è ortocrona non può essere anticrona, e se è propria non può essere impropria.

che inverte gli assi spaziali ma non il tempo, e ha $\det P = -1$.

Un esempio di elemento di $\mathscr{L}_-^\downarrow$ è:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha $\det T = -1$, ed è un'inversione temporale.

Un esempio di elemento di $\mathscr{L}_+^\downarrow$, invece, è:

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si dimostra che, in generale:

$$\mathscr{L}_-^\uparrow = P\mathscr{L}_+^\uparrow \qquad \mathscr{L}_-^\downarrow = T\mathscr{L}_+^\uparrow \qquad \mathscr{L}_+^\downarrow = PT\mathscr{L}_+^\uparrow$$

Fino al 1957 si credeva che tutto $\mathscr{P}$ fosse il gruppo di simmetria delle leggi fisiche come conseguenza del principio di relatività, ossia si pensava che le leggi fisiche fossero invarianti per parità (ossia per inversione dell'orientazione degli assi spaziali) o per inversione temporale. In quell'anno, però, un esperimento mostrò che la parità P veniva violata da alcuni fenomeni, e quindi non è una simmetria universale.
L'esperimento consisteva nell'osservazione del decadimento beta in nuclei di ^{60}Co. In pratica, i neutroni dei nuclei di cobalto decadono secondo la reazione $n^0 \longrightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}$: il protone prodotto dalla reazione resta all'interno del nucleo, mentre l'elettrone e l'antineutrino vengono espulsi. Gli atomi erano immersi in un campo magnetico, di modo che avessero tutti momento angolare parallelo fra loro; sperimentalmente si osservò che gli elettroni erano emessi principalmente nella stessa direzione del momento angolare atomico. Se la parità fosse una simmetria universale, ci aspetteremmo che, invertendo il verso del momento angolare atomico il fenomeno resti invariato (pittoricamente, possiamo immaginare di porre uno specchio davanti a un atomo: nell'immagine riflessa l'atomo girerà in verso opposto, ma gli elettroni vengono emessi sempre nella stessa direzione). Sperimentalmente, però, è stato osservato che ciò non avviene.

È stato poi dimostrato che anche l'inversione temporale T non è una simmetria universale.

Dunque, le trasformazioni fra sistemi di riferimento che dobbiamo considerare dovranno essere quelle del gruppo di Poincaré ristretto $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Da quanti parametri dipende il gruppo di Lorentz, ossia quanti gradi di libertà hanno le trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali?

Gli elementi di Λ sono 16, ma abbiamo il vincolo che $\widetilde{\Lambda} G \Lambda = G$, o in componenti:

$$\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{1.14}$$

Poiché G è simmetrica, ossia $g_{\rho\sigma} = g_{\sigma\rho}$, la (1.14) impone 10 condizioni indipendenti (4 per gli elementi sulla diagonale di G e 6 fuori da essa). In totale, dunque, i parametri liberi di Λ sono 16-10=6.

Tre di questi costituiscono le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani, mentre gli altri tre sono i boost[5] lungo gli assi. In realtà, anche i boost possono essere visti come delle particolari "rotazioni". Vediamo di capire meglio questa cosa.
L'espressione del ds^2

$$ds^2 = (dx^0)^2 - d\vec{x}^2$$

è formalmente simile a quella del modulo di un vettore tridimensionale, solo che la parte temporale ha il segno "sbagliato", nel senso che ha segno opposto rispetto a quello della parte temporale. Il problema può essere "aggirato" se introduciamo la coordinata immaginaria pura

$$x^4 := ix^0 = ict$$

[5] Per *boost* si intende una trasformazione di Lorentz lungo una direzione.

In questo modo, infatti:

$$ds^2 = -\sum_{\mu=1}^{4} (dx^\mu)^2$$

e il ds^2 sarà invariante per "rotazioni" di assi $x^1, \dots, x^4$. Per esempio, consideriamo una "rotazione" che coinvolge gli assi x^1 e x^4, ossia una trasformazione *formalmente* identica ad una rotazione nel piano di assi x^1, x^4:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x'^1 = \cos\xi x^1 - \sin\xi x^4 \\ x'^4 = \sin\xi x^1 + \cos\xi x^4 \end{cases} \tag{1.15}$$

ma poiché x^1 è reale e x^4 immaginario puro, ξ non potrà essere una quantità reale, ma immaginaria pura. Posto infatti $\xi = i\eta$ con $\eta \in \mathbb{R}$, si ha $\cos\xi = \cos(i\eta) = \cosh\eta$ e $\sin\xi = \sin(i\eta) = i\sinh\eta$, e la (1.15) diventa:

$$\begin{cases} x'^1 = \cosh\eta x^1 - i^2 \sinh\eta x^0 \\ ix'^0 = i\sinh\eta x^1 + i\cosh\eta x^0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x'^1 = \cosh\eta x^1 + \sinh\eta x^0 \\ x'^0 = \sinh\eta x^1 + \cosh\eta x^0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Ma che significato ha η?
In S' l'origine del sistema S ($x^1 = 0$) si muove con velocità $-v$ lungo x'^1. Dalla (1.16) si avrà che per essa:

$$\frac{x'^1}{x'^0} = \frac{x^0 \sinh\eta}{x^0 \cosh\eta} = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} = \tanh\eta$$

ma si ha anche:

$$\frac{x'^1}{x'^0} = \frac{x'^1}{ct'} = \frac{-v}{c} = -\beta$$

e dunque $\tanh\eta = -\beta$.

Ora, poiché in generale

$$\sinh\eta = \frac{\tanh\eta}{\sqrt{1-(\tanh\eta)^2}} \qquad \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-(\tanh\eta)^2}}$$

si avrà:

$$\sinh\eta = \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e sostituendo in (1.16):

$$\begin{cases} x'^1 = \frac{x^1-(v/c)x^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \\ x'^0 = \frac{x^0-(v/c)x^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x'^1 = \gamma(x^1 - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x^1) \end{cases}$$

che è proprio un boost lungo l'asse x^1.

Il "trucco" di sostituire ct con ict, dunque, è potente (anche se ne coglieremo la vera utilità quando studieremo relatività generale).

1.3 Tensori

Il concetto di tensore è, detto rozzamente, una generalizzazione a un numero qualunque di dimensioni del concetto di vettore, inteso come ente che "cambia" opportunamente sotto determinate trasformazioni.

Per poter capire meglio come si arrivi al concetto di tensore, conviene ripetere un attimo un ragionamento compiuto in meccanica classica.

Gli enti con cui si ha a che fare nello studio della fisica newtoniana sono principalmente scalari e vettori, che sono caratterizzati dalle proprietà di trasformazione sotto roto-traslazioni. In meccanica classica, infatti, lo spazio in cui si lavora è $\mathbb{E}^3$, e le più generali trasformazioni fra sistemi di riferimento inerziali in esso si possono esprimere come:

$$x'_i = R_{ij} x_j + a_j$$

con R matrice reale 3×3 che soddisfa $\widetilde{R}R = \mathbb{1}$ e $\det R = 1$ (cioè R è ortogonale speciale), con quest'ultima condizione necessaria affinché le lunghezze siano conservate (cioè affinché $|R\Delta\vec{x}|^2 = |\Delta\vec{x}|^2$).

Nello studio della meccanica classica, abbiamo definito *scalari* quelle grandezze che restano invariate sotto roto-traslazioni, come ad esempio la massa di un corpo. Abbiamo invece definito *vettori* quegli enti a tre componenti v_i tali che sotto roto-traslazioni trasformano come

$$v'_i = R_{ij} v_j \tag{1.17}$$

come ad esempio la posizione, la velocità o l'accelerazione di un corpo[6].

Possiamo però definire un'operazione fra vettori, detta *prodotto tensoriale*, che genera un nuovo tipo di ente. Ad esempio, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori, possiamo definire il nuovo ente

$$T_{ij} = v_i w_j$$

che altro non è che una matrice che ha per componenti i prodotti dei vari componenti dei due vettori di partenza, ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix}$$

Poiché $\vec{v}$ e $\vec{w}$ trasformano singolarmente come la (1.17), le componenti di T trasformeranno sotto roto-traslazioni come:

$$T'_{ij} = R_{ik} R_{j\ell} v_k w_\ell$$

Questo concetto può essere compreso meglio pensando ad un esempio reale di tensore "classico": il tensore d'inerzia. Come abbiamo visto in Fisica 1, la relazione fra il momento angolare $\vec{L}$ e la velocità angolare $\vec{\omega}$ di un sistema di punti in coordinate cartesiane è:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} := I\vec{\omega}$$

Il tensore d'inerzia I, dunque, è una combinazione lineare di prodotti tensori (i vari m_i e r_i^2 e x_i^2, y_i^2, z_i^2 non creano problemi perché sono tutti scalari). In generale, un tensore *non* è un prodotto tensore fra vettori, ma può essere espresso come una loro combinazione lineare, ossia ad esempio:

$$T_{ij} = \sum_r c_r v_i^{(r)} w_j^{(r)}$$

e, al limite, la somma può essere sostituita con un integrale.

Dunque, il tensore d'inerzia trasformerà sotto roto-traslazioni come:

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{j\ell} I_{k\ell} \tag{1.18}$$

Possiamo a questo punto generalizzare la relazione (1.18). Definiamo dunque *tensore* (siamo sempre in ambito classico) un ente $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ tale che sotto roto-traslazioni trasforma come:

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} I_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Ora, perché si introduce il calcolo vettoriale in meccanica classica? Perché le leggi della fisica in un sistema inerziale, con questo tipo di formalismo, sono invarianti per roto-traslazioni come conseguenza dell'invarianza dello spazio stesso sotto roto-traslazioni (omogeneità e isotropia). Ad esempio, se in un sistema di riferimento inerziale S vale $F_i = ma_i$, in un altro sistema S' si avrà:

$$F'_i = R_{ij} F_j = R_{ij} m a_j = m R_{ij} a_j = m a'_i$$

e dunque l'equazione è invariante in forma, o *covariante*.

[6]Nota: le singole componenti di un vettore non trasformano come vettori, ma la differenza fra le componenti di due vettori sì.

Adesso vogliamo effettuare un percorso analogo in relatività ristretta, per arrivare a trovare un nuovo formalismo che renda covarianti, ossia invarianti in forma, le relazioni che legano grandezze in sistemi di riferimento inerziali legati fra loro da trasformazioni di Lorentz.

Come sappiamo, la fisica relativistica "vive" in uno spazio diverso da quella classica, lo spaziotempo di Minkowski, nel quale la metrica è definita dalla forma quadratica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

data dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il fatto che le parti temporale e spaziale di G abbiano segno diverso si riflette sull'esistenza di due tipi di enti diversi. Poniamo infatti per definizione:

$$A_\mu := g_{\mu\nu} A^\nu$$

(dunque $A_0 = A^0$ e $A_i = -A^i$). A questo punto, definiamo i vari enti dello spaziotempo di Minkowski a seconda di come trasformano sotto il gruppo di Poincaré[7]:

quadriscalare: $A' = A$

quadrivettore controvariante: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

quadrivettore covariante: $A'_\mu = g_{\mu\nu} A'^\nu$

Vediamo meglio come trasformano i quadrivettori covarianti:

$$A'_\mu = g_{\mu\nu} A'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma A^\sigma$$

Se ora definiamo $g^{\mu\nu}$ l'elemento (μ, ν)-esimo della matrice G^{-1}, si ha $A^\sigma = g^{\sigma\rho} A_\rho$, e dunque:

$$A'_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\rho} A_\rho$$

Definiamo ora $g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\rho} := \Lambda_\mu{}^\rho$. Perciò:

$$\boldsymbol{A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\rho A_\rho}$$

Vediamo però ora cos'è $\Lambda_\mu{}^\rho$. Se denotiamo con $\hat{\Lambda}$ la matrice di elemento (μ, ρ)-esimo $\Lambda_\mu{}^\rho$, dalla definizione di $\Lambda_\mu{}^\rho$ si ha:

$$\Lambda_\mu{}^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\rho} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Lambda} = G \Lambda G^{-1} \qquad \widetilde{\Lambda} G \Lambda = G \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\Lambda} = G \Lambda^{-1} G^{-1} = \left(G \Lambda G^{-1} \right)^{-1} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\hat{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^{-1}}$$

Verifichiamo componente per componente che $\widetilde{\Lambda}\hat{\Lambda} = \mathbb{1}$:

$$\left(\widetilde{\Lambda} \hat{\Lambda} \right)_\nu{}^\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\sigma = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\tau}_{g_{\nu\tau}} g^{\tau\sigma} = g_{\nu\tau} g^{\tau\sigma} = \delta_\nu{}^\sigma$$

Dunque, riassumendo: presa una trasformazione del gruppo di Poincaré, si chiama *scalare* una grandezza che non cambia sotto questo gruppo, ossia che trasforma come $A' = A$; si chiamano invece *quadrivettori* quegli enti che trasformano con la matrice della trasformazione di Lorentz, e si dividono in:

controvarianti: trasformano direttamente con la matrice associata alla trasformazione di Lorentz, ossia $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

[7] Nota: anche stavolta le singole componenti non trasformano come quadrivettori, mentre le differenze delle componenti di due quadrivettori sì.

covarianti: trasformano con la matrice inversa della trasposta di Λ, ossia $A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$

In base a questo possiamo definire i tensori di ordine due (l'ordine di un tensore è pari al numero dei suoi indici). In particolare, in base a come trasformano, definiamo i tensori di ordine due:

controvarianti: trasformano come $T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}$

covarianti: trasformano come $T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T_{\rho\sigma}$

misti: trasformano come $T'_\mu{}^\nu = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T_\rho{}^\sigma$

A questo punto, possiamo generalizzare la definizione di tensore ad un ordine arbitrario: un tensore q-controvariante p-covariante, con $p,q \in \mathbb{N}$ è definito come un ente che trasforma come

$$T'^{\nu_1\ldots\nu_q}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \Lambda_{\mu_1}{}^{\rho_1} \cdots \Lambda_{\mu_p}{}^{\rho_p} \Lambda^{\nu_1}{}_{\sigma_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}{}_{\sigma_q} T^{\sigma_1\ldots\sigma_q}_{\rho_1\ldots\rho_p}$$

Un esempio di tensore controvariante di ordine 2 è $g^{\mu\nu}$; infatti:

$$g'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho g^{\rho\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma = g^{\mu\nu}$$

Nota: i quadrivettori sono tensori di ordine 1, mentre gli scalari di ordine zero.

Esistono anche enti che trasformano come tensori per il gruppo $\mathscr{P}_+^\uparrow$ ma che nella trasformazione contengono ulteriori fattori, se $\Lambda \notin \mathscr{L}_+^\uparrow$, e si chiamano *pseudotensori*. Si dividono in:

pseudotensori di prima specie: contengono $\det\Lambda$ nell'espressione della loro trasformazione

pseudotensori di seconda specie: contengono $\operatorname{sgn}\Lambda^0{}_0$ nell'espressione della loro trasformazione

Un esempio importante di pseudotensore, in particolare del quarto ordine e di prima specie, è il *tensore di Levi-Civita*, definito da:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mu,\nu,\rho\sigma) \text{ è ottenuto da } (0,1,2,3) \text{ con un numero pari di permutazioni} \\ -1 & \text{se } (\mu,\nu,\rho\sigma) \text{ è ottenuto da } (0,1,2,3) \text{ con un numero dispari di permutazioni} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti (non lo dimostriamo):

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = (\det\Lambda)\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

1.3.1 Algebra tensoriale

In questa sezione vediamo un po' che cosa possiamo fare, da un punto di vista algebrico, con i tensori.

Cominciamo con un fatto importantissimo, che verrà utilizzato frequentemente in futuro: dati un quadrivettore controvariante A^μ e uno covariante B_μ, contraendo gli indici si ottiene un quadriscalare. Infatti:

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \Lambda_\mu{}^\sigma B_\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma A^\rho B_\sigma = \delta_\rho{}^\sigma A^\rho B_\sigma = A^\sigma B_\sigma = A^\mu B_\mu$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che gli indici saturati sono muti, e quindi si può arbitrariamente cambiare il loro nome.

La contrazione di due quadrivettori è simile al prodotto scalare tra vettori nello spazio euclideo, ma non è semidefinito positivo. A rigore, quindi, non sarebbe un prodotto scalare in senso matematico, ma comunque ci si riferisce talvolta ad esso come "prodotto scalare nello spaziotempo", e si denota col simbolo $\cdot$ di prodotto scalare:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Definiamo ora il modulo di un quadrivettore come la sua contrazione con sé stesso (in analogia al caso euclideo, dove $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$):

$$A^2 = A \cdot A = A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

In base al segno di A^2, i quadrivettori si dividono in:

di tipo tempo: se $A^\mu A_\mu > 0$

di tipo luce: se $A^\mu A_\mu = 0$

di tipo spazio: se $A^\mu A_\mu < 0$

Vediamo in maniera un po' più generale come si comporta la contrazione di tensori. Sia dunque A un tensore p-covariante q-controvariante, mentre B un tensore r-covariante s-controvariante. Allora A e B si possono scrivere come:

$$A^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_p} \qquad\qquad B^{\gamma_1\dots\gamma_s}_{\delta_1\dots\delta_s}$$

Supponiamo ora che, nella contrazione fra A e B, il numero di indici contratti controvarianti rispetto ad A sia ℓ, mentre quello degli indici covarianti (sempre rispetto ad A) k. Allora la contrazione fra A e B si può scrivere come:

$$A^{\alpha_1\dots\alpha_{q-\ell}\xi_1\dots\xi_\ell}_{\beta_1\dots\beta_{p-k}\eta_1\dots\eta_k} B^{\eta_1\dots\eta_k\gamma_1\dots\gamma_{s-k}}_{\xi_1\dots\xi_\ell\delta_1\dots\delta_{r-\ell}} = T^{\alpha_1\dots\alpha_{q-\ell}\gamma_1\dots\gamma_{s-k}}_{\beta_1\dots\beta_{p-k}\delta_1\dots\delta_{r-l}}$$

La contrazione fra A e B, dunque, è un tensore T che ha $q-\ell+s-k$ indici controvarianti e $p-k+r-\ell$ covarianti. Dunque, T è un tensore $(q+s-\ell-k)$-controvariante $(p+r-\ell-k)$-covariante.

Un tensore si dice *simmetrico* rispetto a degli indici se è invariante per uno scambio di quegli stessi indici. Ad esempio, dire che il tensore $T^{\mu\nu}$ è simmetrico in μ e ν significa dire che $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Un tensore si dice invece *antisimmetrico* rispetto a degli indici se il suo valore cambia di segno per uno scambio di quegli stessi indici; ricalcando il solito esempio, dire che $T^{\mu\nu}$ è antisimmetrico in μ e ν significa che $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$. Caratteristica dei tensori antisimmetrici è che hanno tutti gli elementi sulla "diagonale" nulli, ossia $T^{\mu\mu} = 0$. Per evidenziare la simmetria o l'antisimmetria di un tensore rispetto a degli indici, si usa la notazione:

$$T^{[\mu\nu]} \text{ per gli indici antisimmetrici} \qquad\qquad T^{\{\mu\nu\}} \text{ per gli indici simmetrici}$$

Dimostriamo ora un piccolo fatto: la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico è sempre nulla. Sia dunque $A_{\mu\nu}$ un tensore antisimmetrico e $S^{\mu\nu}$ uno simmetrico. Allora:

$$A_{[\mu\nu]}S^{\{\mu\nu\}} = A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\nu\mu}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato gli indici. Cambiamo ora il loro nome, rinominando μ con ν e ν con μ:

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\nu\mu} = -A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad 2A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$$

Infine, dati due tensori A^ρ e B^ν, si definisce l'*antisimmetrizzazione* di $A^\rho B^\nu$ come

$$A^{[\rho}B^{\nu]} := A^\rho B^\nu - A^\nu B^\rho$$

che è un nuovo tensore antisimmetrico costruito a partire da A^ρ e B^ν.

1.3.2 Campi tensoriali

Fin'ora abbiamo descritto enti che *non* dipendono dal punto dello spazio-tempo in cui vengono valutati, così come i vettori in generale non dipendono dal punto dello spazio euclideo in cui li si considera. Esistono però enti tensoriali che dipendono da esso: sono i *campi tensoriali*, così come i campi vettoriali sono enti vettoriali che dipendono dal punto in cui vengono valutati.

Diciamo che $\varphi(x)$ è un *campo scalare*[8] se, sotto la trasformazione $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, si ha:

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

ossia se il "nuovo campo" nel "nuovo punto" è uguale al "vecchio campo" nel "vecchio punto". Poiché $x' = \Lambda x + a$, la condizione si può riscrivere come $\varphi'(x') = \varphi\left(\Lambda^{-1}(x'-a)\right)$, che rinominando x' con x diventa $\varphi'(x) = \varphi\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right)$.

[8] Sarebbe più preciso dire *campo quadriscalare*.

Chiamiamo invece $A^\mu(x)$ *campo vettoriale controvariante* se sotto la stessa trasformazione si ha:

$$A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

che seguendo lo stesso procedimento di prima può essere anche scritta come $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right)$.

$A_\mu(x)$ è invece detto *campo vettoriale covariante* se:

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$

che è equivalente a $A'_\mu(x) = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right)$

Un esempio di campo vettoriale covariante "operatoriale"[9] è:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0};\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0};\nabla\right)$$

Infatti:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Poiché $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, allora $x^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu\left(x'^\mu - a^\mu\right)$ e dunque:

$$x^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu\left(x'^\mu - a^\mu\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}}$$

1.4 Conclusioni

Perché abbiamo fatto tutto questo? A cosa è servito?

Una formula costituita da un'uguaglianza fra tensori o campi tensoriali è detta *covariante a vista*, e per le proprietà delle trasformazioni dei tensori sarà invariante in forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali (ovviamente in teoria relativistica).

Il formalismo covariante, dunque, è il formalismo che esprime in modo naturale il principio di relatività nella fisica relativistica, così come il formalismo vettoriale è quello che esprime naturalmente il principio di relatività in fisica classica.

[9] Nel senso che non rappresenta dei veri e propri quadrivettori, ma degli operatori quadrivettoriali.

Capitolo 2

Meccanica relativistica

2.1 Riformulazione relativistica della meccanica

Vogliamo riformulare i princìpi della meccanica in ambito relativistico, ossia nello spaziotempo di Minkowski. Vorremmo dunque che le relazioni che troviamo siano covarianti a vista, e che si riducano a quelle classiche nel limite $c \to \infty$.

Dovendo trattare di meccanica, abbiamo bisogno di parlare di “punti che si muovono”, ossia dobbiamo trattare moti in uno spazio 3+1-dimensionale.

Ora, i punti dello spaziotempo di Minkowski sono individuati, come già sappiamo, dal quadrivettore x^μ. Sappiamo già che:

- x^μ è detto *quadrivettore di tipo tempo* se $x^\mu x_\mu > 0$
- x^μ è detto *quadrivettore di tipo luce* se $x^\mu x_\mu = 0$
- x^μ è detto *quadrivettore di tipo spazio* se $x^\mu x_\mu < 0$

Questo quadrivettore x^μ, però, non sarà in generale costante, ma sarà parametrizzato opportunamente, ossia varierà in funzione di una certa grandezza. In meccanica classica questa grandezza è il tempo, poiché è un'invariante; ora, però, questo non è più vero.

Poiché vogliamo trattare il moto di particelle, ossia di corpi materiali, avremo sempre a che fare con quadrivettori di tipo tempo, o al più di tipo luce nel caso di particelle prive di massa. In questo modo è sempre ben definito il parametro

$$s := \sqrt{x^\mu x_\mu} = c\tau = \frac{c}{\gamma(t)} t \tag{2.1}$$

e dunque possiamo parametrizzare x^μ col tempo proprio τ o con l'intervallo spaziotemporale s. Scegliamo quest'ultimo: i moti che tratteremo saranno dunque funzioni del tipo $x^\mu(s)$[1].

2.1.1 Cinematica

Quadrivelocità

In maniera analoga a quanto fatto in meccanica classica, definiamo la *quadrivelocità* di un moto come:

$$\boldsymbol{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}}$$

che è ovviamente un quadrivettore. Notare che è una grandezza adimensionale.

Scritto esplicitamente nelle sue componenti:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{dt(c/\gamma(t))} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\gamma(t)}{c} = \left(\frac{dx^0}{dt}\frac{\gamma(t)}{c} \;\; ; \;\; \frac{dx^i}{dt}\frac{\gamma(t)}{c}\right) \qquad \Rightarrow$$

[1] Nel caso di una particella priva di massa, la parametrizzazione non può essere effettuata né con s né con τ; per farla occorre scegliere un qualunque parametro reale monotòno crescente.

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{u^\mu = \left(\gamma(t)\ ;\ \frac{\gamma(t)}{c}\vec{v}\right)}$$

Il quadrivettore u^μ ha un'importante proprietà. Contraendolo con sé stesso si ha infatti:

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{ds^2}(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Per un corpo materiale, dunque, la quadrivelocità è un quadrivettore di modulo 1 nello spaziotempo di Minkowski.

Quadriaccelerazione

Definiamo poi, sempre secondo lo schema della meccanica classica, la *quadriaccelerazione* come:

$$\boldsymbol{w^\mu := \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}}$$

Scritta esplicitamente nelle sue componenti:

$$w^\mu = \left(\frac{du^0}{ds};\frac{du^i}{ds}\right) = \left(\frac{\gamma(t)}{c}\frac{d\gamma}{dt}\ ;\ \frac{\gamma(t)}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma(t)}{c}v^i\right)\right)$$

Poiché

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)}{c^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2}{c^2}\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\gamma^3$$

allora:

$$\boldsymbol{w^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c^3}\vec{v}\cdot\vec{a}\ ;\ \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{a}+\frac{\gamma^4}{c^4}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}\right)}$$

Il fatto, poi, che u^μ abbia modulo 1 ha un'importante conseguenza su w^μ:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = \tfrac{d}{ds}1 = 0\\ &\tfrac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = \tfrac{du^\mu}{ds}u_\mu + u^\mu\tfrac{du_\mu}{ds} = 2w^\mu u_\mu\end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{w^\mu u_\mu = 0}$$

ossia, quadrivelocità e quadriaccelerazione sono fra loro ortogonali nello spaziotempo di Minkowski.

Quadriimpulso

Volendo ora definire un analogo relativistico dell'impulso, che chiamiamo *quadriimpulso*, poniamo:

$$\boldsymbol{p^\mu := mcu^\mu}$$

ove la c è necessaria per fare in modo che p^μ abbia effettivamente le dimensioni di un impulso.

In componenti:

$$\boldsymbol{p^\mu = (mc\gamma\ ;\ m\gamma\vec{v})}$$

Spesso, si definisce *impulso relativistico* il vettore

$$\vec{p}_{\text{rel}} = m\gamma\vec{v}$$

(che è la componente spaziale di p^μ); nel limite newtoniano si ha:

$$\vec{p}_{\text{rel}} \overset{c\to\infty}{\sim} m\vec{v} = \vec{p}_{\text{newt}}$$

che è proprio quello che volevamo.

Contraendo p^μ con sé stesso:

$$p^\mu p_\mu = mcu^\mu mcu_\mu = m^2c^2u^\mu u_\mu = m^2c^2$$

Notiamo che $p^0 = mc\gamma$ ha le dimensioni di un'energia fratto una velocità, e dunque p^0c ha le dimensioni di un'energia. Definiamo l'*energia totale* del corpo come:

$$\boldsymbol{E := p^0c = mc^2\gamma} \tag{2.2}$$

Notiamo che, poiché per $v = 0$ si ha $\gamma = 1$, se il corpo è fermo si ha $E = mc^2$, e dunque un corpo possiede energia per il solo fatto di possedere massa (è ciò di cui Einstein si era già reso conto nel 1905, con l'esempio delle masse nella scatola). Chiamiamo mc^2 *energia a riposo* del corpo.

Abbiamo appena visto che $p^\mu p_\mu = m^2c^2$, ma vale anche:

$$p^\mu p_\mu = p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$$

(ove $\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \vec{p}_{\text{rel}}$) e dunque, considerando anche la (2.2):

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \qquad p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

e poiché $p^\mu p_\mu$ è uno scalare[2]:

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}}$$

che è detta anche *condizione di mass shell*.

Ora, per definizione di p^μ, per un generico corpo si avrà:

$$\begin{cases} E = mc^2\gamma \\ \vec{p} = m\gamma\vec{v} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} m\gamma = \frac{E}{c^2} \\ \vec{p} = \vec{v}m\gamma \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}$$

In relatività una particella *può* avere massa nulla. Ponendo infatti $m = 0$ nella condizione di mass shell:

$$E = \sqrt{0 + c^2\vec{p}^2} \qquad \Rightarrow \qquad E = c|\vec{p}|$$

che è assolutamente lecita, al contrario di quanto accadeva in meccanica classica (ove $E = |\vec{p}|^2/2m$, e quindi se $m = 0$ l'energia diverge). Dunque:

$$\vec{v} = \frac{c^2}{c|\vec{p}|}\vec{p} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = c\hat{p}$$

ossia, se una particella ha massa nulla *deve* muoversi alla velocità della luce.

Energia cinetica

Abbiamo visto che l'energia totale di un corpo è $E = mc^2\gamma$. Sviluppando in serie di Taylor rispetto alla velocità del corpo:

$$E = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots\right] = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

Notiamo dunque che, sottraendo mc^2 si ottiene un termine che, nel limite newtoniano $c \to \infty$ si riduce all'energia cinetica del corpo:

$$E - mc^2 \overset{c\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}mv^2$$

Definiamo pertanto l'*energia cinetica* di un corpo come la differenza fra la sua energia totale e la sua energia a riposo:

$$\boldsymbol{T = mc^2(\gamma - 1)}$$

[2] È la contrazione di un tensore di ordine uno con un altro tensore di ordine uno: il risultato è un tensore di ordine zero, ossia uno scalare

2.2 Dinamica

Ora che abbiamo introdotto le principali grandezze cinematiche, possiamo cominciare a parlare di dinamica. In particolare, vogliamo "relativizzare" l'equazione di Newton. Pensandola nella forma

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

viene naturale porre

$$\boldsymbol{\frac{dp^\mu}{ds} = \mathscr{F}^\mu}$$

Questa equazione è detta *equazione di Minkowski*, e il quadrivettore $\mathscr{F}^\mu$ è detto *quadriforza*.

Se definiamo la "forza relativistica" come $\vec{F}_{\text{rel}} = d\vec{p}_{\text{rel}}/dt$, allora:

$$\mathscr{F}^i = \frac{dp^i}{ds} = \frac{\gamma}{c}\frac{dp^i}{dt} = \frac{\gamma}{c}F^i_{\text{rel}}$$

e quindi la componente spaziale della quadriforza è $(\gamma/c)\vec{F}_{\text{rel}}$.

Volendo invece esplicitare la componente temporale dell'equazione di Minkowski, notiamo che:

$$\mathscr{F}^\mu u_\mu = mcw^\mu u_\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{F}^0 u_0 + \mathscr{F}^i u_i = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \mathscr{F}^0 u_0 = \mathscr{F}^0 \gamma = -\mathscr{F}^i u_i = \mathscr{F}^i u^i = \frac{\gamma}{c}F^i_{\text{rel}} \cdot \frac{\gamma}{c}v^i = \frac{\gamma^2}{c^2}F^i_{\text{rel}}v^i \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{F}^0 = \frac{\gamma}{c^2}\vec{F}_{\text{rel}} \cdot \vec{v}$$

Dunque:

$$\boldsymbol{\mathscr{F}^\mu = \left(\frac{\gamma}{c^2}\vec{F}_{\text{rel}} \cdot \vec{v} \ ; \ \frac{\gamma}{c}\vec{F}_{\text{rel}}\right)}$$

Facciamo ora qualche osservazione:

1. Considerando la componente temporale dell'equazione di Minkowski:

$$\frac{dp^0}{ds} = \mathscr{F}^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c^2}\vec{F}_{\text{rel}} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F}_{\text{rel}} \cdot \vec{v}$$

   che è la legge della potenza, che dunque continua a valere anche se $E \neq \frac{1}{2}mv^2$.

2. Dall'equazione di Minkowski si ricava anche che se una particella è isolata allora il suo quadrimpulso si conserva:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \mathscr{F}^\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p^\mu = \text{cost}$$

   Questa "dimostrazione", però, non è più valida se si considera un sistema composto da più di una particella. Ad esempio, in meccanica classica per dimostrare che l'impulso di un sistema composto da due particelle si conserva avevamo visto che

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

   Un'espressione del genere, però, non può in alcun modo essere "relativizzata", in quanto si basa sulla validità del principio di azione e reazione, il quale a sua volta ammette implicitamente che la reazione ad una forza sia istantanea, cosa che però ora perde totalmente di senso.

   La conservazione del quadrimpulso, però, continua a valere perché come vedremo discende *solo* dall'omogeneità dello spaziotempo.

3. In relatività non è più vero che forza e accelerazione sono parallele. Dall'equazione di Minkowski, infatti:

$$\vec{F}_{\text{rel}} = \frac{d\vec{p}_{\text{rel}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma\vec{p}_{\text{newt}}) = \frac{d\gamma}{dt}\vec{p}_{\text{newt}} + \gamma\frac{d\vec{p}_{\text{newt}}}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})m\vec{v} + \gamma m\vec{a}$$

   e quindi la forza ha una componente sia lungo l'accelerazione che lungo la velocità.

La principale applicazione di quanto abbiamo appena visto sono i decadimenti e gli urti relativistici.

2.3 Una precisazione introduttiva

Prima di procedere nello studio dei decadimenti e degli urti, è utile una precisazione.

2.3.1 Trasformazione di quadrivettori

Se A^μ è un generico quadrivettore controvariante e $\Lambda^\mu{}_\nu$ è la matrice di una trasformazione di Lorentz che porta da un sistema di riferimento S a S', per definizione stessa di quadrivettore controvariante:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

e se ad esempio $\Lambda^\mu{}_\nu$ è un boost lungo l'asse x:

$$A = \begin{pmatrix} A^0 \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad A' = \Lambda A = \begin{pmatrix} \gamma A^0 - \beta\gamma A_x \\ \gamma A_x - \beta\gamma A^0 \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A_x) \\ A'_x = \gamma(A_x - \beta A^0) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \end{cases}$$

Vediamo un esempio pratico di questa relazione. Supponiamo S fermo e S' in moto con velocità v lungo x rispetto a S; il quadriimpulso di un generico corpo in S è:

$$p^\mu = (mc\gamma \;\; ; \;\; \vec{p}) = (p^0 \;\; ; \;\; p_x \;\; ; \;\; p_y \;\; ; \;\; p_z)$$

e dunque, applicando un boost lungo x con velocità v, per portarci in S':

$$p'^\mu = (\gamma(p^0 - \beta p_x) \;\; ; \;\; \gamma(p_x - \beta p^0) \;\; ; \;\; p_y \;\; ; \;\; p_z)$$

In particolare:

$$\boldsymbol{p'_x = \gamma(p_x - \beta p^0)}$$

$$p'^0 = \gamma(p^0 - \beta p_x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E' = \gamma(E - \beta c p_x)}$$

2.4 I decadimenti

In generale, un decadimento è un processo fisico nel quale una particella di massa M, per processi quantistici, si "scinde" in più particelle di masse $m_1, \ldots, m_N$.

Noi considereremo solo decadimenti a due corpi, ossia decadimenti in cui una particella M dà luogo a due particelle m_1 e m_2.

Nota: poniamo $c = 1$ nei conti, quindi le unità di misura di masse, impulsi ecc dovranno essere espresse di conseguenza (le masse in eV/c^2, i momenti in eV/c).

2.4.1 Decadimenti a due corpi

Chiamiamo S il sistema di riferimento (inerziale) del laboratorio. Se la particella M si muove con velocità $\vec{v}$ costante uniforme rispetto a S, allora è sempre possibile porsi, tramite un'opportuna trasformazione di Lorentz, in un sistema di riferimento, che chiamiamo S^*[3], nel quale la componente spaziale dell'impulso della particella è nulla, ossia nel quale M è a riposo[4] e dunque $\vec{p}^*_M = 0$.

[3] D'ora in poi le grandezze relative a S^* saranno denotate da un asterisco *.

[4] È un ragionamento del tutto analogo a quello che abbiamo usato in Fisica 1 per studiare gli urti: ci siamo posti nel sistema di riferimento del centro di massa.

Infatti, posto $\vec{p}_M$ lungo l'asse x (e pertanto $\vec{p}_M = (p_M; 0; 0)$) vorremmo effettuare quella trasformazione di Lorentz per la quale $p^*_{M,x} = \gamma(p_M - \beta p^0_M) = 0$. Ciò implica

$$\beta = \frac{p_M}{p^0_M}$$

e poiché

$$(p_M)^\mu (p_M)_\mu = (p^0_M)^2 - \vec{p}^{\,2}_M = M^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad p^0_M > p_M \qquad \Rightarrow \qquad \beta < 1$$

la trasformazione è possibile.

Perciò, disponiamo di un sistema di riferimento, S^*, in cui il problema si risolve in modo tutto sommato semplice. Una volta risolto lì il problema, ci riporteremo in S con la trasformazione di Lorentz inversa e troveremo le grandezze che ci interessano.

Poniamo l'asse x di S lungo la linea di volo di M, e l'asse y in modo tale che il decadimento avvenga nel piano xy; chiamiamo dunque x^* e y^* i relativi assi di S^* (ovviamente paralleli rispettivamente a x e y), e θ^*_α l'angolo col quale la particella α-esima ($\alpha = 1$ o $\alpha = 2$) viene emessa in S^* rispetto a x^* (non lo si può conoscere a priori in quanto per isotropia dello spazio ogni direzione di emissione è equiprobabile).

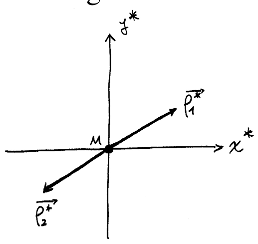
Supponiamo, infine, che M si trovi nell'origine di S^*, e che nell'istante in cui decade in S si trovi nell'origine di S.

Energia e impulso delle particelle emesse

Note M, m_1 e m_2, le energie e gli impulsi delle particelle 1 e 2 in S^* sono completamente determinati. Ciò che dobbiamo imporre per trovarli è la conservazione del quadrimpulso.

Per quello che riguarda la componente spaziale, poiché in S^* la particella M è inizialmente ferma, l'impulso iniziale è nullo e dunque tale dovrà essere la somma degli impulsi delle due particelle presenti dopo il decadimento. Detti $\vec{p}^*_1$ e $\vec{p}^*_2$ questi impulsi, si avrà allora:

Figura 2.1:



$$\vec{p}^*_1 = -\vec{p}^*_2$$

e dunque definiamo:

$$p^* := |\vec{p}^*_1| = |\vec{p}^*_2|$$

Per quello che invece riguarda la componente temporale del quadriimpulso, l'energia iniziale del sistema è M, mentre quella finale è la somma delle energie delle particelle 1 e 2, che chiamiamo E^*_1 e E^*_2. Dunque:

$$E^*_1 + E^*_2 = M \tag{2.3}$$

Ora, facendo un piccolo magheggio[5]:

$$E^*_1 - E^*_2 = (E^*_1 - E^*_2)\frac{E^*_1 + E^*_2}{E^*_1 + E^*_2} = \frac{(E^*_1)^2 - (E^*_2)^2}{E^*_1 + E^*_2}$$

ed essendo, per le condizioni di mass shell, $(E^*_1)^2 = m^2_1 + p^{*2}$ e $(E^*_2)^2 = m^2_2 + p^{*2}$:

$$E^*_1 - E^*_2 = \frac{m^2_1 + p^{*2} - m^2_2 - p^{*2}}{M} = \frac{m^2_1 - m^2_2}{M}$$

[5] Vogliamo determinare E^*_1 e E^*_2, e dunque ci farebbe molto comodo un'espressione per $E^*_1 - E^*_2$, in quanto in questo modo l'equazione messa a sistema con la (2.3) ci permette di determinarli facilmente.

Dunque:

$$\begin{cases} E_1^* + E_2^* = M \\ E_1^* - E_2^* = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}} \qquad \boldsymbol{E_2^* = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}}$$

Infine, poiché $p^* = \sqrt{(E_1^*)^2 - m_1^2} = \sqrt{(E_2^*)^2 - m_2^2}$:

$$\boldsymbol{p^* = \sqrt{\frac{M^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)M^2}{4M^2}}}$$

Ora, però, vogliamo riportare il tutto nel sistema di riferimento S del laboratorio. Effettuando la trasformazione di Lorentz inversa rispetto a quella che ci ha portato da S a S^* (ricorda: $\beta = p_M/p_M^0$) si ha:

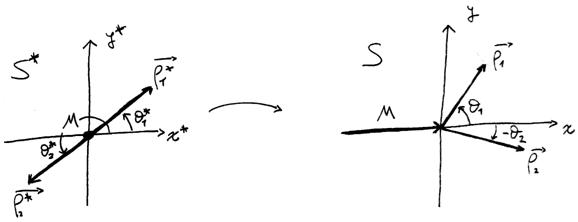
$$p_{\alpha,x} = \gamma(p_x^* + \beta E_\alpha^*) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p_{\alpha,x} = \gamma(p^* \cos\theta_\alpha^* + \beta E_\alpha^*)} \tag{2.4}$$

$$E_\alpha = \gamma(E_\alpha^* + \beta p_x^*) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E_\alpha = \gamma(E_\alpha^* + \beta p^* \cos\theta_\alpha^*)} \tag{2.5}$$

Angoli di emissione

Vogliamo ora studiare, noto θ_α^*, come varino gli angoli θ_α di emissione delle particelle 1 e 2 in S.

Figura 2.2:



Sappiamo dunque che

$$\begin{cases} p_{\alpha,x} = \gamma(p^* \cos\theta_\alpha^* + \beta E_\alpha^*) \\ p_{\alpha,y} = p_{\alpha,y}^* = p^* \sin\theta_\alpha^* \end{cases}$$

Eleviamo queste due equazioni al quadrato e riarrangiamole in modo che effettuandone la somma si raccolga un fattore $\sin^2\theta_\alpha^* + \cos^2\theta_\alpha^*$:

$$\begin{cases} \left(\frac{p_{\alpha,x}}{\gamma} - \beta E_\alpha^*\right) = p^* \cos\theta_\alpha^* \\ p_{\alpha,y} = p^* \sin\theta_\alpha^* \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\frac{p_{\alpha,x}}{\gamma} - \beta E_\alpha^*\right)^2 = p^{*2} \cos^2\theta_\alpha^* \\ p_{\alpha,y}^2 = p^{*2} \sin^2\theta_\alpha^* \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{p_{\alpha,x}}{\gamma} - \beta E_\alpha^*\right)^2 + p_{\alpha,y}^2 = p^{*2} \quad \Rightarrow$$

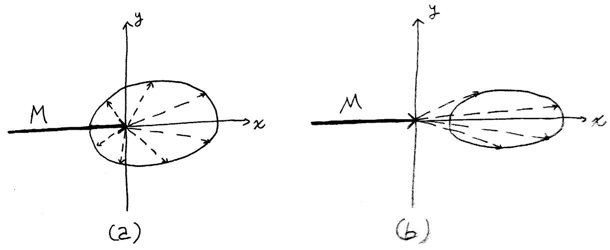
$$\Rightarrow \quad \frac{(p_{\alpha,x} - \beta\gamma E_\alpha^*)^2}{p^{*2}\gamma^2} + \frac{p_{\alpha,y}^2}{p^{*2}} = 1 \tag{2.6}$$

Posto $d_\alpha := \beta\gamma E_\alpha^*$, $s_x = p^*\gamma$, $s_y = p^*$, questa è l'equazione di un ellisse di centro $(d_\alpha, 0)$ e semiassi s_x e s_y nel piano $(p_{\alpha,x}; p_{\alpha,y})$. Ciò significa che in S nel momento in cui M decade le punte dei vettori $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ (che ovviamente partono dal punto in cui M decade, ossia dall'origine di S) devono giacere su quest'ellisse.

Ora, come possiamo intuire anche dalla figura 3, a seconda della "forma" e soprattutto della posizione dell'ellisse gli angoli di emissione di 1 e 2 in S potranno variare. In particolare:

1. se $d_\alpha < s_x$, ossia se $\boldsymbol{\beta < p^*/E_\alpha^* = \beta_\alpha^*}$ (con β_α^* velocità di α in S^*), ossia se la velocità di M in S è minore della velocità di α in S^*, allora tutti gli angoli θ_α di emissione in S sono consentiti, in quanto l'origine è interna all'ellisse (vedi fig. 3a)

Figura 2.3:



2. se $d_\alpha > s_x$, ossia se $\boldsymbol{\beta > \beta^*_\alpha}$, ossia se la velocità di M in S è maggiore della velocità di α in S^*, allora l'origine è esterna all'ellisse e pertanto esiste un angolo massimo $\theta_{\alpha,\max}$ di emissione
3. se $d_\alpha = s_x$, ossia se $\boldsymbol{\beta = \beta^*_\alpha}$, ossia se la velocità di M in S è uguale alla velocità di α in S^*, allora l'origine è tangente all'ellisse, e pertanto $\theta_{\alpha,\max} = \pi/2$

Nel caso 2, come determiniamo $\theta_{\alpha,\max}$?
Facendo riferimento alla figura 3b, si intuisce che la condizione di angolo massimo d'emissione si ha quando $\vec{p_\alpha}$ è tangente all'ellisse. Considerando dunque una generica retta nel piano $(p_{\alpha,x}; p_{\alpha,y})$ che forma un angolo θ_α con l'asse $p_{\alpha,x}$, si avrà:

$$\begin{cases} p_{\alpha,x} = q\cos\theta_\alpha \\ p_{\alpha,y} = q\sin\theta_\alpha \end{cases} \tag{2.7}$$

Intersechiamo ora la retta con l'ellisse, ossia inseriamo (2.7) in (2.6):

$$\frac{(q\cos\theta_\alpha - \beta\gamma E^*_\alpha)^2}{\gamma^2 p^{*2}} + \frac{(q\sin\theta_\alpha)^2}{p^{*2}} = 1$$

e ponendo per brevità $\varepsilon' = \beta E^*_\alpha$:

$$\frac{q^2\cos^2\theta^2_\alpha + \varepsilon'^2 - 2\gamma\varepsilon'\cos\theta_\alpha q}{\gamma^2} + q^2\sin^2\theta_\alpha = p^{*2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad q^2\left(\frac{\cos^2\theta_\alpha}{\gamma^2} + \sin^2\theta_\alpha\right) - \frac{2\varepsilon'}{\gamma}\cos\theta_\alpha q + \varepsilon'^2 - p^{*2} = 0$$

che è un'equazione di secondo grado in q. Ora, noi vogliamo che la retta sia tangente all'ellisse, ossia che l'intersezione della retta e dell'ellisse consti di un solo punto. Il determinante di quest'equazione dev'essere pertanto nullo (le soluzioni devono essere reali coincidenti):

$$a := \tfrac{\cos^2\theta_\alpha}{\gamma^2} + \sin^2\theta_\alpha = \cos^2\theta_\alpha(1-\beta^2) + \sin^2\theta_\alpha = \cos^2\theta_\alpha - \beta^2\cos^2\theta_\alpha + \sin^2\theta_\alpha = 1 - \beta^2\cos^2\theta_\alpha$$

$$b := -\tfrac{\varepsilon'}{\gamma}\cos\theta_\alpha$$

$$c := \varepsilon'^2 - p^{*2}$$

$$\Rightarrow \qquad b^2 - ac = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon'^2}{\gamma^2}\cos^2\theta_{\alpha,\max} - (1-\beta^2\cos^2\theta_{\alpha,\max})(\varepsilon'^2 - p^{*2}) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon'^2}{\gamma^2}\cos^2\theta_{\alpha,\max} - \varepsilon'^2 + p^{*2} + \varepsilon'^2\beta^2\cos^2\theta_{\alpha,\max} - \beta^2 p^{*2}\cos^2\theta_{\alpha,\max} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta_{\alpha,\max}\left(\frac{\varepsilon'^2}{\gamma^2} + \varepsilon'^2\beta^2 - \beta^2 p^{*2}\right) = \varepsilon'^2 - p^{*2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta_{\alpha,\max} = \frac{\varepsilon'^2 - p^{*2}}{\varepsilon'^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) - \beta^2 p^{*2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sin^2\theta_{\alpha,\max} = 1-\cos^2\theta_{\alpha,\max} = \frac{\varepsilon'^2-\beta^2p^{*2}-\varepsilon'^2+p^{*2}}{\varepsilon'^2-\beta^2p^{*2}} = \frac{p^{*2}(1-\beta^2)}{\varepsilon'^2-\beta^2p^{*2}}$$

Ricordando la definizione di ε':

$$\sin^2\theta_{\alpha,\max} = \frac{(1-\beta^2)p^{*2}}{\beta^2(E^*_\alpha)^2-\beta^2p^{*2}} = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\frac{p^{*2}}{(E^*_\alpha)^2-p^{*2}} = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\frac{p^{*2}}{m^2_\alpha} = \frac{p^{*2}}{\beta^2\gamma^2m^2_\alpha}$$

Dunque:

$$\boldsymbol{\sin\theta_{\alpha,\max} = \frac{p^*}{\beta\gamma m_\alpha}}$$

Angolo fra le particelle in S Vediamo ora, noto θ^*_α, come varia l'angolo θ fra le direzioni d'emissione delle due particelle nel sistema di riferimento S del laboratorio (vedi figura 2). Supponiamo che le due particelle prodotte dal decadimento abbiano la stessa massa, e pertanto $m_1 = m_2 := m$ e $E^*_{\text{tot}} = E^*_1 + E^*_2 = 2E^* = M \Rightarrow E^* = M/2$.

Detto θ_α l'angolo di emissione della particella α-esima in S (al solito $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$):

$$\tan\theta_\alpha = \frac{p_{\alpha,y}}{p_{\alpha,x}} = \frac{p^*_{\alpha,y}}{\gamma(p^*_{\alpha,x}+\beta E^*)} = \frac{p^*\sin\theta^*_\alpha}{\gamma(p^*\cos\theta^*_\alpha+\beta M/2)}$$

Dunque, posto $\beta^* := p^*/E^* = 2p^*/M$:

$$\tan\theta_\alpha = \frac{\sin\theta^*_\alpha}{\gamma(p^*\cos\theta^*_\alpha+(-1)^{\alpha+1}\beta/\beta^*)}$$

(il $(-1)^{\alpha+1}$ serve in quanto per $\alpha = 1$ si deve avere un +, e per $\alpha = 2$ un -). Ora, detti $\theta := \theta_1 - \theta_2$ e $\theta^* = |\theta^*_1| = |\theta^*_2|$, si avrà:

$$\tan\theta = \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{\sin\theta^*}{\gamma\left(\cos\theta^*+\frac{\beta}{\beta^*}\right)} - \frac{\sin\theta^*}{\gamma\left(\cos\theta^*-\frac{\beta}{\beta^*}\right)}}{1+\frac{\sin^2\theta^*}{\gamma^2\left(\cos\theta^*+\frac{\beta}{\beta^*}\right)\left(\cos\theta^*-\frac{\beta}{\beta^*}\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta^*(\cos\theta^*-\beta/\beta^*)-\sin\theta^*(\cos\theta^*+\beta/\beta^*)}{\gamma(\cos^2\theta^*-\beta^2/\beta^{*2})}}{\frac{\gamma^2(\cos^2\theta^*-\beta^2/\beta^{*2})+\sin^2\theta^*}{\gamma(\cos^2\theta^*-\beta^2/\beta^{*2})}} = \frac{\gamma\sin\theta^*\left(\cos\theta^*-\frac{\beta}{\beta^*}-\cos\theta^*-\frac{\beta}{\beta^*}\right)}{\gamma^2\left(1-\sin^2\theta^*-\frac{\beta^2}{\beta^{*2}}\right)} =$$

$$= \frac{-2\frac{\beta}{\beta^*}\gamma\sin\theta^*}{\gamma^2-\gamma^2\sin^2\theta^*-\gamma^2\frac{\beta^2}{\beta^{*2}}+\sin^2\theta^*} = \frac{-2\frac{\beta}{\beta^*}\gamma\sin\theta^*}{\gamma^2\beta^2\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{\sin^2\theta^*}{\beta^2}-\frac{1}{\beta^{*2}}+\frac{\sin^2\theta^*}{\gamma^2\beta^2}\right)} = \frac{-2\frac{\beta}{\beta^*}\gamma\sin\theta^*}{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\beta^{*2}}+\sin^2\theta^*\left(\frac{1}{\gamma^2\beta^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)}$$

Si può verificare che $\frac{1}{\gamma^2\beta^2}-\frac{1}{\beta^2} = -1$, e pertanto:

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{\beta\beta^*\gamma}\sin\theta^*}{\frac{1}{\beta^{*2}}-\frac{1}{\beta^2}+\sin^2\theta^*}$$

Ora, posto:

$$A = \frac{2}{\beta\beta^*\gamma} \qquad\qquad B = \frac{1}{\beta^{*2}}-\frac{1}{\beta^2}$$

si avrà che:

$$\tan\theta(\theta^*) := \boldsymbol{F(\theta^*) = \frac{A\sin\theta^*}{B+\sin^2\theta^*}}$$

Per comprendere la variabilità dell'angolo fra le particelle in S in funzione di θ^* dobbiamo dunque studiare questa funzione. Analizziamone dunque le proprietà principali:

derivate:

$$F'(\theta^*) = \frac{A\cos\theta^*(B-\sin^2\theta^*)}{(B+\sin^2\theta^*)^2}$$

$$F''(\theta^*) = -\frac{A\sin\theta^*}{(B+\sin^2\theta^*)^3}(B^2-\sin^4\theta^*+6B\cos^2\theta^+-2\sin^2\theta^*\cos^2\theta^*)$$

zeri: la funzione si azzera quando si azzera il suo numeratore, ossia quando $\theta^*=0,\pi$. Pertanto, quando nel centro di massa le particelle vengono emesse a $\theta^*=0$ o $\theta^*=\pi$, nel laboratorio l'angolo fra di esse è nullo.

asintoti verticali: la F può esplodere quando il suo denominatore si annulla, ossia quando $\sin^2\theta^*=-B \Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta^* = \arcsin(\pm\sqrt{-B})}$. Ovviamente questo può avvenire solo se $\boldsymbol{B\in[-1;0]}$. Dato che:

$$B=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{(\beta^*)^2}-\frac{1}{\beta^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \beta^*=\beta$$

$$B=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{(\beta^*)^2}-\frac{1}{\beta^2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2}-1=\beta^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta^2}{(\beta^*)^2}=1-\beta^*=\frac{1}{\gamma^2} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \beta^*=\beta\gamma$$

questo significa che la funzione può esplodere solo se $\beta^*\in[\beta;\beta\gamma]$.

In questo caso:

$$\lim_{\theta^*\to\arcsin(\pm\sqrt{-B})} F(\theta^*)=\pm\infty$$

e poiché $\theta=\arctan(F(\theta^*))$, questo significa che

$$\lim_{\theta^*\to\arcsin(\pm\sqrt{-B})} \theta(\theta^*)=\pm\frac{\pi}{2}$$

Morale: se nel centro di massa le particelle vengono emesse ad un angolo $\theta^*=\arcsin(\pm\sqrt{-B})$, nel laboratorio l'angolo fra esse è *sempre* $\pi/2$.

Nota: dato che per come abbiamo costruito noi il sistema si deve avere $\theta^*\in[0,\pi]$ e invece $\arcsin(-\sqrt{-B})<0$, quest'angolo va inteso come $\pi-\arcsin(|\sqrt{-B}|)$.

estremali: 1. un estremale si ha quando $\cos\theta^*=0$, ossia quando $\theta^*=\pi/2$. Detto $\overline{\theta}$ il relativo angolo fra le particelle nel laboratorio:

$$\tan\overline{\theta}=\frac{A}{B+1}=\frac{2/(\beta^*\beta\gamma)}{\frac{1}{(\beta^*)^2}-\frac{1}{\beta^2}+1}=\frac{2/(\beta^*\beta\gamma)}{\frac{1}{(\beta^*)^2}[1-(\beta^*)^2(\frac{1+\beta^2}{\beta^2})]}=\frac{(\beta^*)^2 2/(\beta^*\beta\gamma)}{1-\left(\frac{\beta^*}{\beta\gamma}\right)^2} \qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad \tan\overline{\theta}=\frac{2\frac{\beta^*}{\beta\gamma}}{1-\left(\frac{\beta^*}{\beta\gamma}\right)^2}$$

poiché in generale $\tan\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1-(\tan(\alpha/2))^2}$, questo significa che:

$$\tan\frac{\overline{\theta}}{2}=\frac{\beta^*}{\beta\gamma} \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{\overline{\theta}=2\arctan\left(\frac{\beta^*}{\beta\gamma}\right)}$$

Inoltre, detta $\gamma^*=1/\sqrt{1-(\beta^*)^2}$ e considerando il fatto che $\tan\overline{\theta}=\frac{A}{B+1}$ e il segno di $F''(\overline{\theta})$:

$\boldsymbol{B<-1\Rightarrow\beta^*>\beta\gamma}$**:** $\tan\overline{\theta}<0$

$\boldsymbol{B>-1\Rightarrow\beta^*<\beta\gamma}$**:** $\tan\overline{\theta}>0$

$\boldsymbol{B<1\Rightarrow\beta<\beta^*\gamma^*}$**:** $\tan\overline{\theta}$ è un minimo

$\boldsymbol{B>1\Rightarrow\beta>\beta^*\gamma^*}$**:** $\tan\overline{\theta}$ è un massimo

Morale: quando nel centro di massa le particelle vengono emesse a $\theta^* = \pi/2$, l'angolo fra esse nel laboratorio è *sempre*

$$\overline{\theta} = 2\arctan\left(\frac{\beta^*}{\beta\gamma}\right)$$

e $\tan\overline{\theta}$ ha le proprietà appena viste.

2. l'altro estremale si ha quando $\sin^2\theta^* = B \Rightarrow \boldsymbol{\theta^* = \arcsin(\pm\sqrt{B})}$. Ovviamente questo avviene solo se $\boldsymbol{B \in [0;1]}$, ossia se $\beta \in [\beta^*;\beta^*\gamma^*]$. Se chiamiamo θ_0^* l'angolo nel centro di massa corrispondente a questo massimale:

$$F(\theta_0^*) = \frac{A\sin\theta_0^*}{B+\sin^2\theta_0^*} = \frac{\pm A\sqrt{B}}{2B} = \pm\frac{A}{2\sqrt{B}} = \pm\frac{2/(\beta^*\beta\gamma)}{2\sqrt{\frac{1}{(\beta^*)^2}-\frac{1}{\beta^2}}} = \pm\frac{1}{\beta^*\beta\gamma}\left(\frac{\sqrt{\beta^2-(\beta^*)^2}}{\beta^*\beta}\right)^{-1} =$$

$$= \pm\frac{1}{\beta^*\beta\gamma}\frac{\beta^*\beta}{\sqrt{\beta^2-(\beta^*)^2}} = \pm\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta^2-(\beta^*)^2}} \qquad \Rightarrow$$

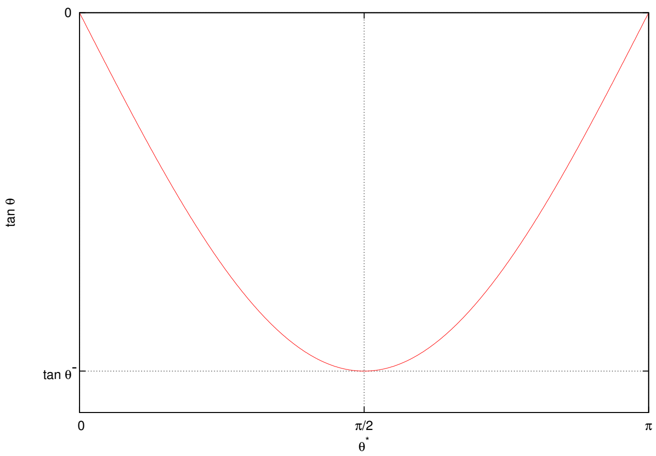
$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\theta_0^* = \arctan\left(\pm\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta^2-(\beta^*)^2}}\right)}$$

Poiché si verifica che $F''(\theta_0^*) < 0$, i due θ_0^* sono *sempre* massimi.

Dunque, considerando le condizioni che abbiamo posto su B, si possono presentare quattro casi:

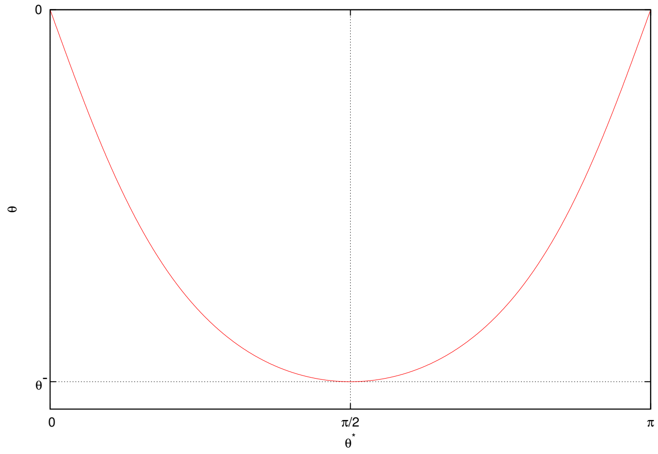
$\boldsymbol{B < -1}$**:** in questo caso, poiché $\beta < \beta^*$, tutte le direzioni di emissione nel laboratorio sono possibili. Inoltre, l'angolo minimo (non in valore assoluto) di emissione fra le particelle nel laboratorio è $\overline{\theta}$, che corrisponde a $\theta^* = \pi/2$. Il grafico di F è pertanto:

Figura 2.4:



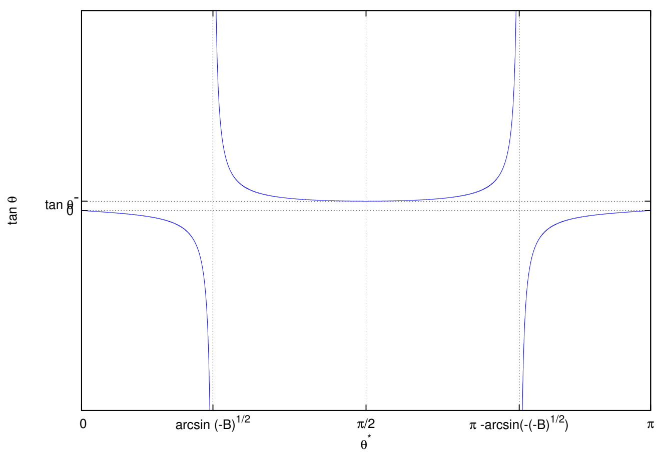
e quello della sua arcotangente (per vedere come davvero vari θ in funzione di θ^*):

Figura 2.5:



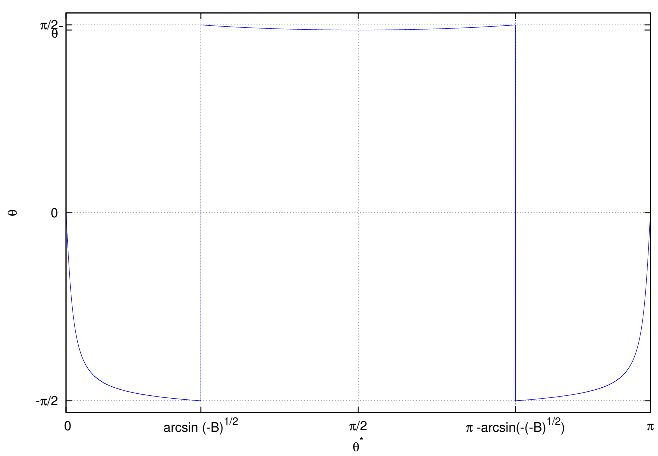
$B \in [-1;0]$: le direzioni di emissione nel laboratorio sono ancora tutte possibili ($\beta < \beta^*$). L'angolo $\overline{\theta}$, che corrisponde a $\theta^* = \pi/2$, è un minimo locale. Inoltre F esplode in $\arcsin(\pm\sqrt{-B})$. Il grafico di F è pertanto[6]:

Figura 2.6:



e quello della sua arcotangente:

Figura 2.7:

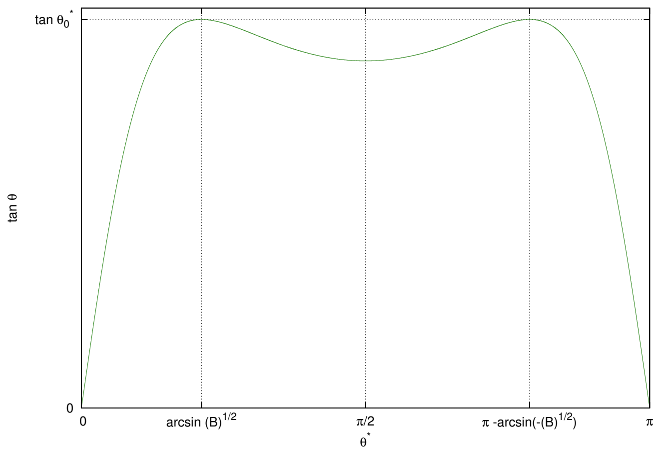


[6]Notare che i θ^* corrispondenti ai massimi ($\theta^* = \arcsin(\pm\sqrt{-B})$) *non* sono simmetrici rispetto a $\pi/2$.

B $\in [0;1]$**:** poiché $\beta^* < \beta$, non tutte le direzioni di emissione nel laboratorio sono permesse (esiste un angolo massimo d'emissione, siamo nel caso di figura 3b). Stavolta, oltre a $\overline{\theta}$, che è un minimo locale, esistono anche i massimi corrispondenti ai θ_0^*.

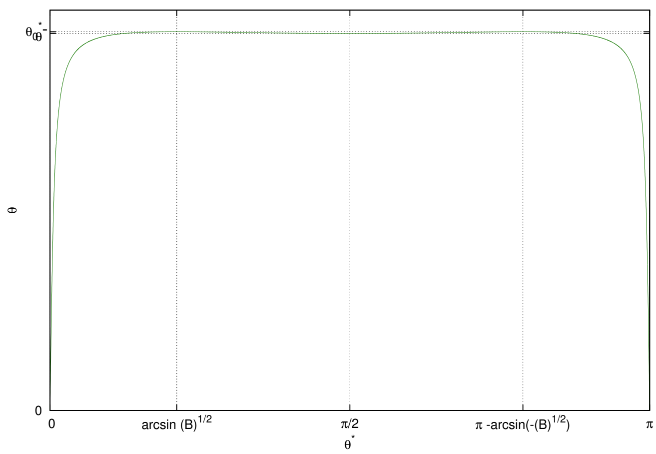
Il grafico di F è pertanto:

Figura 2.8:



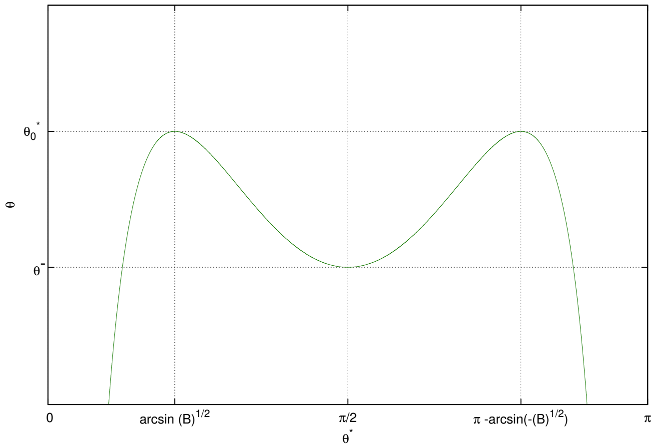
e quello della sua arcotangente:

Figura 2.9:



Metto qui uno "zoom" di quest'ultimo grafico per capire meglio cosa succede nei dintorni dei massimi:

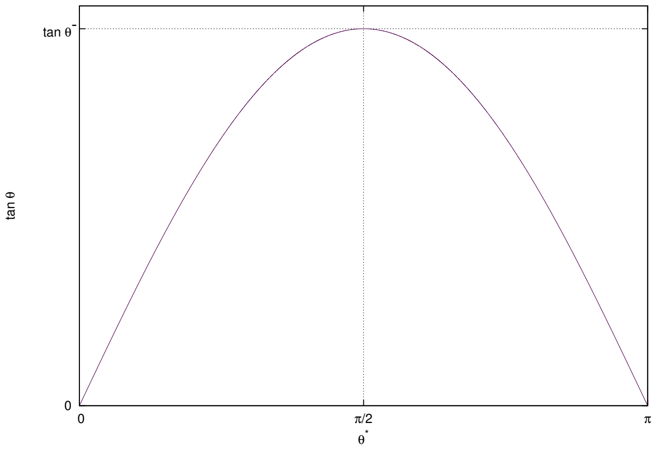
Figura 2.10:



$B > 1$: poiché sempre $\beta > \beta^*$, non tutte le direzioni di emissione nel laboratorio sono permesse, e l'unico massimo esistente è in $\theta^* = \pi/2$, ove vale $\overline{\theta}$.

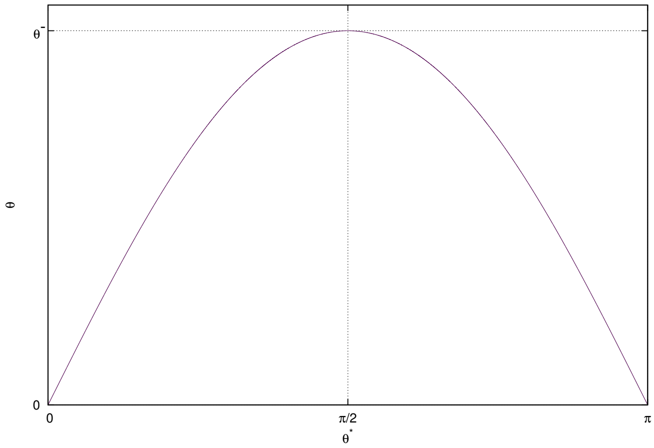
Il grafico di F è pertanto:

Figura 2.11:



e quello della sua arcotangente:

Figura 2.12:



2.4.2 Densità di probabilità d'emissione

Sia N il numero di particelle prodotte nel decadimento di M, e denotiamo con $dN(E)$ il numero di esse che vengono diffuse con energia fra E e $E+dE$. Definiamo la frazione di particelle emesse con energia in $[E;E+dE]$ come:

$$d\chi(E) = \frac{dN(E)}{N}$$

e definiamo inoltre:

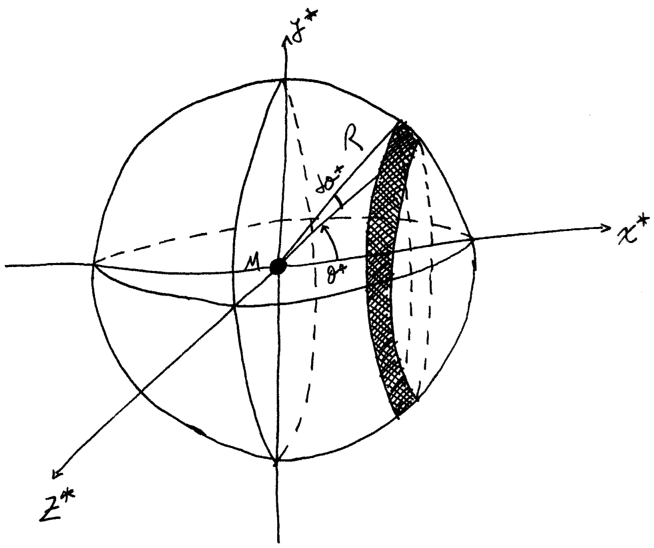
$$\rho(E) = \frac{d\chi(E)}{dE}$$

che altro non è che la densità di probabilità che una particella emessa abbia energia fra E e $E+dE$ (verificheremo poi che è una densità di probabilità).

Vogliamo studiare $\rho(E)$ e capire com'è fatta.

Nel sistema di riferimento S^* la probabilità di emissione è isotropa: le particelle vengono emesse uniformemente in tutte le direzioni.
Consideriamo ora una sfera di raggio R circondante M:

Figura 2.13:



Detta $d\chi(\theta^*)$ la frazione di particelle emesse che attraversano la "strisciolina" di sfera fra gli angoli θ^* e $\theta^*+d\theta^*$, $d\chi(\theta^*)$ sarà pari al numero di particelle che la attraversano diviso per il numero di quelle che attraversano tutta la sfera:

$$d\chi(\theta^*) = \frac{\sigma 2\pi R \sin\theta^* R d\theta^*}{\sigma 4\pi R^2} = \frac{1}{2}\sin\theta^* d\theta^* = -\frac{1}{2}d(\cos\theta^*) \tag{2.8}$$

ove σ è la densità di particelle emesse per unità di superficie, che è costante perché la probabilità d'emissione è isotropa, e $2\pi R\sin\theta^* R d\theta^* = 2\pi R^2 \sin\theta^* d\theta^*$ è l'area della "strisciolina".

Ora, come sappiamo

$$E = \gamma(E^* - \beta p^* \cos\theta^*)$$

Differenziando:

$$dE = -\beta\gamma p^* d(\cos\theta^*) \tag{2.9}$$

Dunque, poiché[7]:

$$\rho(E) = \frac{d\chi(E)}{dE} = \frac{d\chi}{d(\cos\theta^*)}\frac{d(\cos\theta^*)}{dE}$$

[7] χ è funzione di E, che a sua volta è funzione di $\cos\theta^*$.

e da (2.8) e (2.9):

$$\frac{d\chi}{d(\cos\theta^*)} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{d(\cos\theta^*)}{dE} = -\frac{1}{\beta\gamma p^*}$$

si avrà:

$$\boldsymbol{\rho(E) = \frac{1}{2\beta\gamma p^*}}$$

che è indipendente da E e costante.

Ovviamente il dominio di variabilità dell'energia varia dalla minima alla massima energia possibile per le particelle emesse, che è data dalla (2.5) (pg 25): poiché θ^*_α varia fra 0 e π si avrà

$$E_{\max} = \gamma(E^* + \beta p^*) \qquad E_{\min} = \gamma(E^* - \beta p^*)$$

Notiamo infine che:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \rho(E)dE = \int_{\gamma(E^*-\beta p^*)}^{\gamma(E^*+\beta p^*)} \frac{1}{2\beta\gamma p^*}dE = \frac{1}{2\beta\gamma p^*}\gamma(E^* + \beta p^* - E^* + \beta p^*) = \frac{2\beta\gamma p^*}{2\beta\gamma p^*} = 1$$

e quindi effettivamente $\rho(E)$ è una densità di probabilità.

2.5 Urti

Come in fisica classica, gli urti si possono dividere in due categorie:

elastici: le particelle prima e dopo l'urto sono le stesse

anelastici: le particelle presenti prima dell'urto sono diverse da quelle presenti dopo l'urto

I problemi che noi tratteremo sono principalente urti elastici fra due particelle. Chiamiamo m_1 e m_2 le loro masse, p_1^μ e p_2^μ i loro quadrimpulsi prima dell'urto e ${p'_1}^\mu$ e ${p'_2}^\mu$ quelli dopo l'urto.

Quanti invarianti non banali ci sono in un processo del genere? La domanda è importante in quanto è per mezzo della determinazione degli invarianti che si possono risolvere i problemi.

Abbiamo a disposizione quattro quadrimpulsi (quelli delle due particelle iniziali e quelli delle due finali), ossia 16 componenti. Queste sono però vincolate da 4 leggi di conservazione, componente per componente:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = {p'_1}^\mu + {p'_2}^\mu$$

Inoltre abbiamo anche quattro invarianti naturali, ossia le contrazioni di ogni quadrimpulso con se stesso:

$$p_1^\mu p_{1\mu} \qquad p_2^\mu p_{2\mu} \qquad {p'_1}^\mu p'_{1\mu} \qquad {p'_2}^\mu p'_{2\mu}$$

(fra l'altro, il primo e il terzo sono uguali a m_1^2, il secondo e il quarto a m_2^2).
Abbiamo poi ancora la possibilità di eseguire trasformazioni di Lorentz, dipendenti da 6 parametri come già sappiamo. Di conseguenza, gli invarianti non banali sono 16-4-4-6=2.

Se questo ragionamento non dovesse piacere, si può giungere alla stessa conclusione in un altro modo. Tutti i possibili invarianti del sistema sono dati dalle contrazioni di tutti i quadrimpulsi fra loro, che sono dieci:

$$\begin{array}{cccccc} p_1^\mu & \rightsquigarrow & p_{1\mu} & p_{2\mu} & p'_{1\mu} & p'_{2\mu} \\ p_2^\mu & \rightsquigarrow & p_{2\mu} & p'_{1\mu} & p'_{2\mu} & \\ {p'_1}^\mu & \rightsquigarrow & p'_{1\mu} & p'_{2\mu} & & \\ {p'_2}^\mu & \rightsquigarrow & p'_{2\mu} & & & \end{array}$$

Di questi dieci invarianti quattro sono naturali (le contrazioni di ogni quadrimpulso per se stesso), e abbiamo ancora quattro leggi di conservazione. Pertanto gli invarianti non banali sono 10-4-4=2.

Quali sono dunque questi invarianti?

Nel caso che stiamo analizzando, sono molto utili le cosiddette *variabili di Mandelstam*:

$$\boldsymbol{s := (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = ({p'_1}^\mu + {p'_2}^\mu)^2 \qquad t := ({p'_1}^\mu - p_1^\mu)^2 = ({p'_2}^\mu - p_2^\mu)^2}$$

$$\boldsymbol{u := (p_1^\mu - p_2'^\mu)^2 = (p_2^\mu - p_1'^\mu)^2}$$

Risulta che:

$$s+t+u = (p_1^\mu)^2 + (p_2^\mu)^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} + (p_1'^\mu)^2 + (p_1^\mu)^2 - 2p_1'^\mu p_{1\mu} + (p_1^\mu)^2 + (p_2'^\mu)^2 - 2p_1^\mu p'_{2\mu} =$$

$$= 4m_1^2 + 2m_2^2 + 2p_1^\mu \underbrace{(p_{2\mu} - p'_{1\mu} - p'_{2\mu})}_{-p_{1\mu}} = 4m_1^2 + 2m_2^2 - 2p_1^\mu p_{1\mu} = 2m_1^2 + 2m_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{s+t+u = 2(m_1^2+m_2^2)}$$

Dunque effettivamente fra queste tre grandezze solo due sono indipendenti, e una volta fissate la terza è automaticamente determinata grazie a questa relazione.

Vediamo ora quali sono i domini di queste variabili:

s: valutandola nel centro di massa, dato che $|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| := p^*$:

$$s = (p_1^{*\mu} + p_2^{*\mu})^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 = \left(\sqrt{(\vec{p}^*)^2 + m_1^2} + \sqrt{(\vec{p}^*)^2 + m_2^2}\right)^2 \geq (m_1+m_2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{s \in \left[(m_1+m_2)^2; +\infty\right[}$$

t: poiché l'urto è elastico si avrà sempre $|\vec{p^*}_1| = |\vec{p^*}_2| := p^*$ e $|\vec{p^*}'_1| = |\vec{p^*}'_2| := p^{*\prime}$. Per la conservazione dell'energia, però:

$$\sqrt{m_1^2 + (p^*)^2} + \sqrt{m_2^2 + (p^*)^2} = \sqrt{m_1^2 + (p^{*\prime})^2} + \sqrt{m_2^2 + (p^{*\prime})^2}$$

e poiché $f(p) = \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2}$ è una funzione monotona in p, si avrà necessariamente $p^* = p^{*\prime}$.

Dunque, valutando t nel centro di massa:

$$t = (p_1^{*\prime\mu} - p_1^{*\mu})^2 = \underbrace{(E_1^{*\prime} - E_1^*)^2}_{0} - (\vec{p}_1^{*\prime} - \vec{p}_1{}^*)^2 = -2(p^*)^2(1-\cos\theta^*) \leq 0$$

con θ^* angolo fra la direzione iniziale di 2 e quella finale di 1. Dunque:

$$\boldsymbol{t \in \left]-\infty; 0\right]}$$

u: per trovare il dominio di u usiamo quanto già trovato e la relazione che lega le tre variabili:

$$s+t+u = 2(m_1^2+m_2^2) \quad \Rightarrow \quad u = 2(m_1^2+m_2^2) - s - t \leq 2(m_1^2+m_2^2) - s \leq$$

$$\leq 2m_1^2 + 2m_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2m_1m_2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = (m_1-m_2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u \in \left]-\infty; (m_1+m_2)^2\right]}$$

Urto a bersaglio fermo Supponiamo ora che nel processo d'urto la particella 2 sia ferma nel laboratorio, e dunque che $p_2^\mu = (m_2; 0)$. Usiamo le variabili di Mandelstam per determinare il momento delle particelle nel centro di massa e l'energia della particella 1 dopo l'urto.

Valutando s nel centro di massa e nel laboratorio:

$$s_{\text{lab}} = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2$$

$$s_{\text{cdm}} = \left(\sqrt{(p^*)^2 + m_1^2} + \sqrt{(p^*)^2 + m_2^2}\right)^2$$

Poiché s è un invariante del sistema, si deve avere $s_{\text{lab}} = s_{\text{cdm}}$, e pertanto:

$$2(p^*)^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{(p^*)^2 + m_1^2}\sqrt{(p^*)^2 + m_2^2} = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{(p^*)^2+m_1^2}\sqrt{(p^*)^2+m_2^2} = E_1 m_2 - (p^*)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{p^* = \sqrt{\frac{m_2^2(E_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2E_1}}}$$

Valutando ora invece t nel laboratorio e nel centro di massa, detto sempre θ^* l'angolo fra la direzione di 2 prima dell'urto e di 1 dopo l'urto:

$$t_{\text{lab}} = (E_2' - m_2)^2 - (\vec{p}_2{}'^*)^2 = 2m_2(m_2 - E_2')$$

e poiché per la conservazione dell'energia si ha $E_1' - E_1 = m_2 - E_2'$:

$$t_{\text{lab}} = 2m_2(E_1' - E_1)$$

Inoltre:

$$t_{\text{cdm}} = -2(p^*)^2(1-\cos\theta^*)$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{E_1' = E_1 - \frac{(p^*)^2}{m_2}(1-\cos\theta^*)}$$

Da ciò possiamo ricavare, ad esempio, il range dell'energia della particella 1 dopo l'urto:

$$\boldsymbol{E'_{1\,\text{min}} = E_1 - 2\frac{(p^*)^2}{m_2}} \qquad\qquad \boldsymbol{E'_{1\,\text{max}} = E_1}$$

Nota sul trasferimento d'energia cinetica In fisica relativistica è possibile trasferire una grande quantità di energia cinetica da una particella di massa molto piccola ad una di massa molto grande, cosa impossibile in fisica classica con un urto[8].

Studiamo dunque il trasferimento di energia cinetica fra le particelle 1 e 2. In particolare, vediamo quanto vale il rapporto fra la minima energia cinetica di 1 dopo l'urto e l'energia di 1 prima dell'urto:

$$T'_{1\,\text{min}} = E'_{1\,\text{min}} - m_1 = \frac{E_1(m_1^2+m_2^2+2E_1m_2) - 2m_2(E_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2E_1m_2} - m_1 = \frac{(E_1-m_1)(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+2E_1m_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{T'_{1\,\text{min}}}{T_1} = \frac{T'_{1\,\text{min}}}{E_1-m_1} = \frac{(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+2E_1m_2} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\frac{T'_{1\,\text{min}}}{T_1} = \frac{(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+2E_1m_2}}$$

Nel limite newtoniano si ha $E_1 \sim m_1$, e dunque il rapporto tende al valore $\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2$, e se $m_2 >> m_1$ questo valore tende a uno: l'energia cinetica della particella 1 dopo l'urto è uguale a quella che aveva prima dell'urto, o in altre parole la sua energia cinetica non è stata trasferita alla particella 2.

In condizioni ultra-relativistiche, ossia quando $v \sim c$, invece, questo rapporto può anche tendere a zero, se E_1 è sufficientemente grande: questo significa che la particella 1, dopo l'urto, è ferma, e dunque tutta la sua energia cinetica è stata trasferita alla particella 2.

Studio delle possibili direzioni di diffusione nel laboratorio Vogliamo adesso studiare qual è il luogo geometrico di $\vec{p}_1{}'$ e $\vec{p}_2{}'$.

Il fatto che la particella 2 sia ferma nel laboratorio permette di fare un'analogia col caso dei decadimenti a due corpi. Infatti, per la conservazione del quadrimomento nel laboratorio:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ E_1 + m_2 = E_1' + E_2' \end{cases}$$

[8] Se si lancia un pallone contro un tir (supponendo che non agisca alcun tipo di attrito), per quanto forte lo si possa lanciare il tir acquisterà una quantità irrisoria di energia cinetica.

La struttura di queste equazioni è analoga a quelle relative al caso del decadimento:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ E = E_1 + E_2 \end{cases}$$

con le sostituzioni:

$$\vec{p} \rightsquigarrow \vec{p}_1 \qquad \vec{p}_\alpha \rightsquigarrow \vec{p}\,'_\alpha \qquad E \rightsquigarrow E_1 + m_2 \qquad E_\alpha \rightsquigarrow E'_\alpha$$

In maniera del tutto analoga a quanto visto per i decadimenti, dunque, si trova che il luogo geometrico di $\vec{p}_1{}'$ e $\vec{p}_2{}'$ è un ellisse di equazione

$$\frac{(p'_{y,\alpha})^2}{(p^*)^2} + \frac{\left(p'_{x,\alpha} - \beta\gamma E'^*_\alpha\right)^2}{(\gamma p^*)^2} = 1$$

che ha semiassi $s_x = p^*\gamma$, $s_y = p^*$ e centro in $(d_\alpha;0)$ con $d_\alpha = \beta\gamma E'^*_\alpha$.

Come nel caso del decadimento, dunque, se $s_x > d_\alpha$ l'ellisse sulla quale possono giacere i momenti $\vec{p}_1{}'$ e $\vec{p}_2{}'$ dopo l'urto è interna all'ellisse, e dunque tutte le direzioni di emissione sono possibili nel laboratorio, altrimenti se $s_x < d_\alpha$ l'origine è esterna all'ellisse e dunque esiste un angolo massimo di emissione;se $s_x = d_\alpha$, invece, l'origine e tangente all'ellisse e pertanto l'angolo massimo di emissione è $\pi/2$. In particolare, tutti i ragionamenti che abbiamo già fatto sulla variabilità degli angoli (sia delle singole particelle, sia quello fra esse compreso) nel laboratorio continuano a valere.

Stavolta, però, le varie condizioni possono essere riformulate in maniera un po' più semplice. Ad esempio:

$$s_x > d_\alpha \quad \Rightarrow \quad p^*\gamma > \beta\gamma E_1^* \quad \Rightarrow \quad p^* = m_2\beta\gamma > \beta\sqrt{(p^*)^2 + m_1^2} = \beta\sqrt{(m_2\beta\gamma)^2 + m_1^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_2^2\beta^2\gamma^2 > \beta^2\left((m_2\beta\gamma)^2 + m_1^2\right) \quad \Rightarrow \quad m_2^2\gamma^2 > (m_2\beta\gamma)^2 + m_1^2 \quad \Rightarrow \quad m_2^2\underbrace{(1-\beta^2)\gamma^2}_{=1} > m_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m_2 > m_1}$$

Morale: Nel caso di un urto relativistico a bersaglio fermo, se il bersaglio è più pesante della particella incidente tutte le direzioni di emissione nel laboratorio sono possibili, altrimenti se il bersaglio è più leggero della particella incidente esiste un angolo massimo di emissione, che dipende dall'angolo di emissione nel centro di massa secondo le leggi che abbiamo già trovato nel caso dei decadimenti a due corpi. Ovviamente questo vale se $m_1 \neq 0$, altrimenti si deve operare come nel caso dei decadimenti, ossia confrontando β con β^*_α.

Capitolo 3

Formulazione covariante dell'elettromagnetismo

Il nostro scopo è quello di ricondurre tutto quello che sappiamo sull'elettromagnetismo a espressioni manifestamente covarianti.

Quello che faremo sarà riesprimere i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in formalismo covariante (e da ciò ricaveremo l'unificazione dei due campi), covariantizzando le equazioni di Maxwell e della forza di Lorentz.

Infine, vedremo come il campo elettromagnetico trasformi sotto cambi di sistemi di riferimento, e studieremo i suoi invarianti.

3.1 Equazioni di Maxwell e Lorentz

"Riscrittura" di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ Per esprimere in maniera "maneggevole" le equazioni di Maxwell in relatività, è conveniente un sistema diverso dall'mks[1] per esprimere i campi in gioco nelle equazioni di Maxwell. Questo sistema è detto *sistema di Gauss*, e si ottiene dall'mks con le seguenti sostituzioni:

$$\rho_{\text{mks}} \rightsquigarrow \rho_{\text{Gauss}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_{\text{mks}} \qquad j_{\text{mks}} \rightsquigarrow j_{\text{Gauss}} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} j_{\text{mks}} \qquad \vec{B}_{\text{mks}} \rightsquigarrow \vec{B}_{\text{Gauss}} = c\vec{B}_{\text{mks}}$$

Con questo sistema, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mentre la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

Ora, come già sappiamo possiamo introdurre i due potenziali φ e $\vec{A}$ tali che, almeno localmente:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial ct}$$

e in questo modo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono invarianti per trasformazioni di gauge, ossia i potenziali

$$\vec{A}' \rightsquigarrow \vec{A} - \nabla\Lambda \qquad \varphi' \rightsquigarrow \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial ct}$$

con Λ campo scalare, generano ancora gli stessi campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Poniamo ora, in generale:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} := \partial_\mu \qquad \frac{\partial}{\partial x_\mu} := \partial^\mu$$

[1] La "m" sta per "metri", la "k" per "kilogrammi" e la "s" per "secondi".

e sappiamo che ∂_μ e ∂^μ sono campi quadrivettoriali (operatoriali) rispettivamente covariante e controvariante[2].
Se a questo punto definiamo il *quadripotenziale*:

$$A^\mu = (\varphi \;\; ; \;\; \vec{A})$$

poiché $\partial_0 = \partial^0$ e $\partial_i = -\partial^i$, l'invarianza per trasformazione di gauge si scrive come:

$$A'^\mu \rightsquigarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

Definiamo ora, a partire dal quadripotenziale, il tensore del second'ordine controvariante

$$\boldsymbol{F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

detto *tensore elettromagnetico*. Per definizione, $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, ossia $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.
Vediamo quanto valgono le sue componenti. Se uno dei due indici è nullo:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} = E^i$$

Negli altri casi, ad esempio:

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -(\nabla \times \vec{A})_3 = -B_3$$

più in generale, si trova $F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$.
Infine, poiché F è antisimmetrico si avrà $F^{\mu\mu} = 0$.
Scritto esplicitamente sotto forma di matrice, dunque, il tensore elettromagnetico è:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

I campi elettrico e magnetico, dunque, non sono altro che le "componenti" di un'entità più generale, che ora possiamo davvero chiamare *campo elettromagnetico*, descritta da questo tensore. Già quando avevamo studiato Fisica 2 avevamo visto che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono campi strettamente connessi l'uno all'altro, ma non potevamo in alcun modo sapere che in realtà sono proprio due "aspetti" diversi della stessa cosa. È questa l'unificazione del campo elettromagnetico attuata dalla relatività.

Ora che sappiamo dunque com'è fatto il campo elettromagnetico, vogliamo trovare delle espressioni covarianti delle equazioni di Maxwell.

Covariantizzazione delle equazioni omogenee Consideriamo le due equazioni omogenee[3] di Maxwell, ossia quelle della divergenza di $\vec{B}$ e del rotore di $\vec{E}$. Verifichiamo che sono covariantizzate nell'equazione

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

Innanziutto verifichiamo che quella data è un'identità:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \left(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho\right) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\sigma A^\rho$$

adesso, nel secondo addendo cambiamo il nome agli indici, rinominando ρ con σ e σ con ρ. Quindi:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma =$$

$$= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\rho A^\sigma = 2\varepsilon_{\mu[\nu\rho]\sigma} \partial^{\{\nu} \partial^{\rho\}} A^\sigma = 0$$

[2] Lo abbiamo già verificato per ∂_μ, e la verifica per ∂^μ è assolutamente analoga.
[3] "Omogenee" perché non compaiono né ρ né $\vec{j}$.

L'indice libero dell'equazione, poi, è μ (non è contratto con nessun altro indice). Valutiamo dunque le componenti temporale e spaziale dell'equazione.

Se $\mu = 0$ allora $\{\nu, \rho, \sigma\} \in \{i, j, k\}$ e perciò:

$$0 = \varepsilon_{0ijk}\partial^i F^{jk} = \varepsilon_{0123}\partial^1 F^{23} + \varepsilon_{0231}\partial^2 F^{31} + \varepsilon_{0312}\partial^3 F^{12} + \varepsilon_{0213}\partial^2 F^{13} + \varepsilon_{0132}\partial^1 F^{32} + \varepsilon_{0321}\partial^3 F^{21} =$$
$$= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} - \partial^2 F^{13} - \partial^1 F^{32} - \partial^3 F^{21} = 2(\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12}) =$$
$$= 2\left(-\frac{\partial}{\partial x^1}(-B_1) - \frac{\partial}{\partial x^2}(-B_2) - \frac{\partial}{\partial x^3}(-B_3)\right) = 2\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3}\right) = 2\nabla \cdot \vec{B} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

La componente temporale dell'equazione data è dunque l'equazione di Maxwell per la divergenza di $\vec{B}$.

Se invece ora poniamo $\mu = i$, uno fra ν, ρ e σ è nullo e gli altri sono j o k. Perciò:

$$0 = \varepsilon_{i0jk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}\partial^i F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}\partial^j F^{k0} = -\varepsilon_{0ijk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{0ijk}\partial^j F^{0k} - \varepsilon_{0ijk}\partial^j F^{k0} =$$
$$= -\varepsilon_{0ijk}\partial^0 F^{jk} - 2\varepsilon_{0ijk}\partial^j F^{k0}$$

poiché $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$, come conseguenza della definizione stessa di ε[4], allora:

$$0 = \partial^0(\varepsilon_{ijk}F^{jk}) + 2\varepsilon_{ijk}\partial^j F^{k0} = \partial^0(-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jk\ell}B_\ell) - 2\varepsilon_{ijk}\partial_j F^{k0}$$

poiché $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jk\ell} = 2\delta_{i\ell}$, e quindi $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jk\ell}B_\ell = 2\delta_{i\ell}B_\ell = 2B_i$, e in generale $\varepsilon_{ijk}X_jY_k = [\vec{X} \times \vec{Y}]_i$, allora:

$$0 = 2\left(\partial_0 B_i + \varepsilon_{ijk}\partial_j E_k\right) = 2\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}\right]_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

L'i-esima componente spaziale di $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}$ è dunque l'i-esima componente dell'equazione per il rotore di $\vec{E}$.

Covariantizzazione delle equazioni non omogenee Passiamo ora alle equazioni di Mawell non omogenee, ossia a quelle per la divergenza di $\vec{E}$ e il rotore di $\vec{B}$.

Se definiamo la *quadricorrente* come

$$j^\mu := (c\rho \;\; ; \;\; \vec{j})$$

allora sono covariantizzate dall'equazione

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Infatti, se $\nu = 0$ si ha:

$$\partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \quad \Rightarrow \quad \partial_i E_i = \frac{4\pi}{c} c\rho = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho}$$

e dunque la componente temporale di $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ è l'equazione per la divergenza di $\vec{E}$.

Se invece $\nu = i$:

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i \quad \Rightarrow \quad \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

Poiché $F^{ji} = -F^{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$, dunque:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\varepsilon_{ijk}B_k + \frac{\partial}{\partial x^0}(-E_i) = \frac{4\pi}{c} j^i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^j}\varepsilon_{ijk}B_k - \frac{\partial}{\partial x^0}E_i = \frac{4\pi}{c} j^i \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left[\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]_i = \left[\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right]_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

[4] Infatti, se si tiene fisso il primo indice a 0 in $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, allora $\{\nu, \rho, \sigma\} \in \{1, 2, 3\}$, e dunque permutare gli indici di ε_{ijk} è effettivamente la stessa cosa che permutare quelli di ε_{0123} (in altre parole, le generiche combinazioni $0ijk$ e ijk si ottengono da 123 con lo stesso numero di permutazioni).

Conclusioni Abbiamo dunque visto che le equazioni di Maxwell in forma covariante si scrivono:

$$\boldsymbol{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

Una piccola osservazione sulla quadricorrente: dalla seconda equazione possiamo vedere che $j^\nu(x)$ non è un generico campo quadritensoriale[5], ma deve avere un'importante proprietà. Infatti, applicando ∂_ν ad essa:

$$\frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu = \partial_{\{\nu}\partial_{\mu\}} F^{[\mu\nu]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\partial_\nu j^\nu = 0}$$

e dunque j^ν deve essere un campo a quadridivergenza nulla. Se facciamo attenzione, però, ci rendiamo conto che il fatto che j^ν abbia questa proprietà è un modo "covariante" di esprimere la legge di continuità per la carica. Infatti:

$$0 = \partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{1}{c}\frac{\partial c\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

Dall'equazione di continuità, poi, si può ricavare la conservazione della carica. Sia infatti $Q(t)$ della carica presente nello spazio al tempo t; supponendo che non esistano altre cariche (e quindi neanche cariche all'infinito):

$$Q(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} j^0(\vec{x},t)d^3x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}Q(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} c\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t)d^3x = -\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\vec{j}d^3x = -\int_{\Sigma=\partial\mathbb{R}^3}\vec{j}\cdot d\vec{\Sigma}$$

e l'ultimo integrale è nullo. Infatti lo si può vedere come come il flusso di $\vec{j}$ sulla superficie di un volume V che tende all'infinito: poiché, come abbiamo supposto, non esistono cariche all'infinito, questo flusso è nullo.

Covariantizzazione della forza di Lorentz Verifichiamo ora che l'equazione della forza di Lorentz e la legge di potenza ($\mathscr{E}$ è l'energia):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad\qquad \frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$$

sono covariantizzate dall'equazione

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

Infatti, se $\mu = 0$:

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{e}{c}F^{0i}u_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}\frac{\mathscr{E}}{c} = \frac{e}{c}(-E_i)\left(-\gamma\frac{v_i}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathscr{E}}{dt} = eE_i v_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}}$$

Se invece $\mu = i$:

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c}(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j) \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{c}\frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c}\left[E_i\gamma + (-\varepsilon_{ijk}B_k)\left(-\gamma\frac{v_j}{c}\right)\right] = \frac{e}{c}\left(E_i + \varepsilon_{ijk}\frac{v_j}{c}B_k\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp^i}{dt} = \left[e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\right]_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)}$$

Dunque, la forza di Lorentz in forma covariante si scrive:

$$\boldsymbol{\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$$

[5] Ad essere precisi, non abbiamo dimostrato ancora che effettivamente lo è. Questo verrà fatto nello studio dell'elettrodinamica.

3.2 Trasformazioni del campo elettromagnetico

Poiché $F^{\mu\nu}$ è un campo quadritensoriale, sappiamo come trasforma per il gruppo di Poincaré:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} F^{\rho\sigma}(x)$$

Siano ora S e S' due sistemi di riferimento inerziali, con S' in moto lungo x^1 rispetto a S. Chiamiamo $\vec{E}(x) = (E_1(x); E_2(x); E_3(x))$, $\vec{B}(x) = (B_1(x); B_2(x); B_3(x))$ e $\vec{E}'(x') = (E'_1(x'); E'_2(x'); E'_3(x'))$, $\vec{B}'(x') = (B'_1(x'); B'_2(x'); B'_3(x'))$ i vettori dello stesso campo elettromagnetico in S e S'. Se Λ è la matrice di un boost lungo x^1:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e allora si avrà, ad esempio:

$$F'^{01}(x') = -E'_1(x') = \Lambda^0{}_{\rho}\Lambda^1{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(x) = \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_{\sigma}F^{0\sigma}(x) + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_{\sigma}F^{1\sigma}(x) =$$

$$= \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0 \underbrace{F^{00}(x)}_{=0} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01}(x) + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10}(x) + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1\underbrace{F^{11}(x)}_{=0} =$$

$$= \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01}(x) + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10}(x) = \gamma\gamma(-E_1(x)) + (-\beta\gamma)(-\beta\gamma)E_1(x) = -\gamma^2E_1(x) + \beta^2\gamma^2E_1(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -E'_1(x') = E_1(x)\underbrace{\gamma^2(\beta^2-1)}_{=-1} = -E_1(x) \qquad \Rightarrow \qquad E'_1(x') = E_1(x)$$

Oppure, ancora:

$$F'^{02}(x') = -E'_2(x') = \Lambda^0{}_{\rho}\Lambda^2{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(x) = \Lambda^0{}_0\underbrace{\Lambda^2{}_2}_{=1}F^{02}(x) + \Lambda^0{}_1\underbrace{\Lambda^2{}_2}_{=1}F^{12}(x) =$$

$$= \gamma(-E_2(x)) + (-\beta\gamma)(-B_3(x)) \qquad \Rightarrow \qquad E'_2(x') = \gamma(E_2(x) - \beta B_3(x))$$

In generale, si trova che:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E'_1(x') = E_1(x)} \\ \boldsymbol{E'_2(x') = \gamma(E_2(x) - \beta B_3(x))} \\ \boldsymbol{E'_3(x') = \gamma(E_3(x) + \beta B_2(x))} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{B'_1(x') = B_1(x)} \\ \boldsymbol{B'_2(x') = \gamma(B_2(x) + \beta E_3(x))} \\ \boldsymbol{B'_3(x') = \gamma(B_3(x) - \beta E_2(x))} \end{cases}$$

Nel passaggio da S a S', dunque, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si "mescolano" in maniera non ovvia; è solo il campo elettromagnetico nel suo totale, rappresentato dal tensore $F^{\mu\nu}$, ad avere esistenza "assoluta", nel senso di "indipendente dal sistema di riferimento".

3.3 Invarianti del campo elettromagnetico

Possiamo adesso chiederci se esistono delle grandezze relative al campo elettromagnetico che sono invarianti.

Sappiamo che, in generale, la contrazione di un tensore con sé stesso è uno scalare. Pertanto, poiché il campo elettromagnetico è rappresentato dal tensore $F^{\mu\nu}$, la sua contrazione con sé stesso è una grandezza invariante:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{i0}F^{i0} + F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij} = -F^{i0}F^{i0} - F^{0i}F^{0i} + F^{ij}F^{ij} =$$

$$= -F^{i0}F^{i0} - F^{i0}F^{i0} + F^{ij}F^{ij} = -2F^{i0}F^{i0} + F^{ij}F^{ij} =$$

$$= -2(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) + \varepsilon_{ijk}B_k\varepsilon_{ijl}B_l = -2\vec{E}^2 + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}B_kB_l$$

Ora, poiché $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 + 2\delta_{kl}B_kB_l = -2\vec{E}^2 + 2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

Dunque:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

Possiamo però costruircene un altro: possiamo infatti considerare la contrazione di $F^{\mu\nu}$ con se stesso, che già sappiamo essere un invariante, moltiplicata per $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, che è una caratteristica "intrinseca" dello spaziotempo di Minkowski[6]. Il conto è abbastanza lungo e laborioso, ed è riportato in appendice a pagina 44. Il risultato è:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = 8\vec{E}\cdot\vec{B}$$

A questo punto, si possono presentare quattro casi:

$\boldsymbol{\vec{E}\cdot\vec{B} = 0, \vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0}$**:** in questo caso esiste un sistema di riferimento S' in cui $\vec{B}' = 0$, ossia in cui c'è solo campo elettrico.

Dimostriamolo. Possiamo scegliere gli assi di modo che il campo elettrico sia diretto lungo x^2 e quello magnetico lungo x^3:

$$\vec{E} = (0; |\vec{E}|; 0) \qquad \vec{B} = (0; 0; |\vec{B}|)$$

Applicando un boost lungo x di velocità β, per le leggi di trasformazione del campo elettromagnetico:

$$B'_1 = B_1 = 0 \qquad B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) = \gamma(0 + \beta 0) = 0 \qquad B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) = \gamma(|\vec{B}| - \beta|\vec{E}|)$$

Dunque, affinché nel sistema S' (quello in cui ci siamo spostati col boost) il campo magnetico sia effettivamente nullo è necessario che $B'_3 = 0$, ossia $|\vec{B}| = \beta|\vec{E}| \Rightarrow \beta = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|}$, e poiché $\vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0$ ciò significa che $\beta < 1$, e dunque il boost è possibile.

Morale: in questo caso, se si effettua un boost lungo x^1 con velocità

$$\boldsymbol{\beta = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|}}$$

ci si porta in un sistema di riferimento con solo campo elettrico

$\boldsymbol{\vec{E}\cdot\vec{B} = 0, \vec{B}^2 - \vec{E}^2 = 0}$**:** è un caso molto complicato, che non trattiamo

$\boldsymbol{\vec{E}\cdot\vec{B} = 0, \vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0}$**:** in questo caso esiste un sistema di riferimento S' in cui $\vec{E}' = 0$, ossia in cui c'è solo campo magnetico.

Dimostriamolo. Possiamo scegliere gli assi di modo che il campo elettrico sia diretto lungo x^3 e quello magnetico lungo x^2:

$$\vec{E} = (0; 0; |\vec{E}|) \qquad \vec{B} = (0; |\vec{B}|; 0)$$

Applicando un boost lungo x di velocità β, per le leggi di trasformazione del campo elettromagnetico:

$$E'_1 = E_1 = 0 \qquad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) = \gamma(0 + \beta 0) = 0 \qquad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) = \gamma(|\vec{E}| + \beta|\vec{B}|)$$

Dunque, affinché nel sistema S' (quello in cui ci siamo spostati col boost) il campo elettrico sia effettivamente nullo è necessario che $E'_3 = 0$, ossia $|\vec{E}| = -\beta|\vec{B}| \Rightarrow \beta = -\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$, e poiché $\vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0$ ciò significa che $|\beta| < 1$, e dunque il boost è possibile.

Morale: in questo caso, se si effettua un boost lungo x^1 con velocità

$$\boldsymbol{\beta = -\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}}$$

ci si porta in un sistema di riferimento con solo campo magnetico

[6] Da notare che anche stavolta la grandezza ottenuta è sicuramente uno scalare, in quanto tutti gli indici sono sommati.

$\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0, \vec{B}\not\parallel\vec{E}$: in questo caso esiste un sistema di riferimento S' in cui $\vec{B}'\parallel\vec{E}'$.

Dimostriamolo. Poiché $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non sono paralleli, esiste un piano che li contiene; sia x^1 la direzione perpendicolare a questo piano. In questo modo $E_1 = B_1 = 0$, e applicando un boost lungo x^1 con velocità β:

$$\begin{cases} E_1' = 0 \\ E_2' = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E_3' = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} B_1' = 0 \\ B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{cases}$$

Imponiamo dunque che $\vec{E}'\parallel\vec{B}'$, ossia che $\vec{E}'\times\vec{B}' = 0$. Considerandone la prima componente:

$$E_2'B_3' - E_3'B_2' = 0 \quad\Rightarrow\quad \gamma(E_2-\beta B_3)\gamma(B_3-\beta E_2) - \gamma(E_3+\beta B_2)\gamma(B_2+\beta E_3) = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \gamma^2\left[E_2B_3 - E_3B_2 - \beta(B_3^2+E_2^2+B_2^2+E_3^2) + \beta^2(B_3E_2 - B_2E_3)\right] = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad (E_2B_3 - E_3B_2)(1+\beta^2) = \beta(B_2^3 + B_3^2 + E_2^2 + E_3^2) \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad (E_2B_3 - E_3B_2) = [\vec{E}\times\vec{B}]_1 = \frac{\beta}{1+\beta^2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) \quad\Rightarrow\quad \frac{[\vec{E}\times\vec{B}]_1}{\vec{E}^2+\vec{B}^2} = \frac{\beta}{1+\beta^2}$$

In generale, dunque:

$$\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\vec{E}^2+\vec{B}^2} = \frac{\vec{\beta}}{1+\beta^2}$$

Affinché questo boost sia possibile, occorre che:

$$|\vec{\beta}| < 1 \quad\Rightarrow\quad 0 < \frac{|\vec{\beta}|}{1+\beta^2} < \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{|\vec{E}\times\vec{B}|}{\vec{E}^2+\vec{B}^2} < \frac{1}{2}$$

Poiché $|\vec{E}\times\vec{B}| \leq |\vec{E}||\vec{B}|$, allora:

$$\frac{|\vec{E}||\vec{B}|}{\vec{E}^2+\vec{B}^2} \leq \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2|\vec{E}||\vec{B}| \leq \vec{E}^2+\vec{B}^2 \quad\Rightarrow\quad \vec{E}^2+\vec{B}^2 - 2|\vec{E}||\vec{B}| \geq 0 \quad\Rightarrow\quad (|\vec{E}|-|\vec{B}|)^2 \geq 0$$

che è sicuramente verificata.

Morale: in questo caso, se si effettua un boost lungo x^1 con velocità

$$\frac{|\vec{\beta}|}{1+\beta^2} = \frac{|\vec{E}\times\vec{B}|}{\vec{E}^2+\vec{B}^2} := A \quad\Rightarrow\quad A\beta^2 - |\vec{\beta}| + A = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{|\vec{\beta}| = \frac{1-\sqrt{1-4A^2}}{2A}}$$

che è lecito in quanto $A < 1/2$ (la soluzione con + al numeratore va scartata in quanto altrimenti non si riuscirebbe a soddisfare anche $|\vec{\beta}| < 1$) ci si porta in un sistema di riferimento con campi elettrico e magnetico paralleli

Appendice

Valore di $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$

Questo conto è abbastanza tremendo (difatti è stato prontamente saltato nella spiegazione in classe). Comunque, il conto si può svolgere scrivendo esplicitamente la sommatoria su tutti gli indici. Farlo per intero, però, è un vero suicidio.

Esiste però un metodo (relativamente) "furbo" per farlo. Infatti, ognuno degli indici μ, ν, ρ, σ potrà essere singolarmente nullo e gli altri no (altrimenti ε si annulla). Quindi, tenendo a mente che $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$ e che $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jk\ell} = 2\delta_{i\ell}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{0ijk}F^{0i}F^{jk} + \varepsilon_{i0jk}F^{i0}F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}F^{ij}F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}F^{ij}F^{k0} = \varepsilon_{0ijk}F^{0i}F^{jk} - \varepsilon_{0ijk}F^{i0}F^{jk} + \varepsilon_{0ijk}F^{ij}F^{0k} - \varepsilon_{0ijk}F^{ij}F^{0k} =$$
$$= \varepsilon_{ijk}F^{0i}F^{jk} + \varepsilon_{ijk}F^{0i}F^{jk} + \varepsilon_{ijk}F^{ij}F^{0k} + \varepsilon_{ijk}F^{ij}F^{0k} =$$
$$= 2\varepsilon_{ijk}(F^{0i}F^{jk} + F^{ij}F^{0k}) = 2\varepsilon_{ijk}((-E_i)(-\varepsilon_{jk\ell}B_\ell) + (-\varepsilon_{ijm}B_m)(-E_m)) =$$
$$= 2\varepsilon_{ijk}(E_i\varepsilon_{jk\ell}B_\ell + E_k\varepsilon_{ijm}B_m) = 2E_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jk\ell}B_\ell + 2E_k\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm}B_m = 4E_i\delta_{i\ell}B_\ell + 2E_k\varepsilon_{kij}\varepsilon_{ijm}B_m =$$
$$= 4E_iB_i + 4E_k\delta_{km}B_m = 4(E_iB_i + E_kB_k) = 4(E_iB_i + E_iB_i) = 8E_iB_i = 8\vec{E}\cdot\vec{B}$$

Capitolo 4

Elettrodinamica

4.1 Moto relativistico di cariche in campi costanti uniformi

4.1.1 Precisazione introduttiva

Per poter procedere nello studio del moto relativistico di una carica in un campo elettromagnetico costante uniforme, è necessario studiare in generale il moto relativistico “uniformemente accelerato”, nel senso che adesso precisiamo.

Sia S il nostro sistema di riferimento inerziale, che consideriamo fisso, e P un punto che si muove lungo $x^1 \equiv x$ di moto “uniformemente accelerato”, nel senso che l’accelerazione a è costante nel sistema proprio S' del punto.

La quadrivelocità e la quadriaccelerazione del corpo in S sono (dato che le altre due sono nulle, scriviamo solo la prima componente spaziale):

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \\ \gamma(t)\frac{v}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} \\ \\ \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}} \end{pmatrix} \qquad w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{v}{c\sqrt{\beta^2(t)}} \end{pmatrix}$$

In componenti:

$$w^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}} \frac{\frac{\beta}{c}\frac{d}{dt}v(t)}{(1-\beta^2(t))^{3/2}}$$

$$w^1 = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}} \left[\frac{v(t)}{c} \frac{\frac{\beta}{c}\frac{d}{dt}v(t)}{(1-\beta^2(t))^{3/2}} + \frac{\frac{d}{dt}v(t)}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}} \right] = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{d}{dt}v(t)}{1-\beta(t)} \left(\frac{\beta^2(t)}{1+\beta^2(t)} + 1 \right) = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{d}{dt}v(t)}{(1-\beta(t))^2}$$

Nel sistema S', invece, dalla definizione stessa di quadriaccelerazione si ha, poiché $\vec{v} = 0$ e $\gamma = 1$:

$$w'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ a/c^2 \end{pmatrix}$$

Ora, poiché la contrazione di un tensore con sé stesso, come già sappiamo, è uno scalare, si dovrà avere $w_\mu w^\mu = w'_\mu w'^\mu$, ossia:

$$-\frac{a^2}{c^4} = -\frac{\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2}{c^4(1-\beta^2(t))^3} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\frac{d}{dt}v(t)}{(1-\beta^2(t))^{3/2}}$$

Notiamo dunque che:

$$a = \frac{\frac{d}{dt}v(t)}{(1-\beta^2(t))^{3/2}} = \frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}$$

e pertanto:

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = at \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} \right)$$

Dunque, integrando e ponendo $x(0)=0$:

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}-1\right)}$$

Da ciò possiamo anche ricavare la relazione che lega il tempo proprio τ del punto col tempo nel sistema di riferimento S:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} = dt\sqrt{\frac{1-\left(\frac{at}{c}\right)^2}{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{at}{c}\right)^2}} \quad\Rightarrow\quad \tau(t)=\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-\left(\frac{as}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{at}{c}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau(t)=\frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{at}{c}\right)}$$

4.1.2 Moto di una particella in un campo elettrico costante uniforme

Sia S il sistema di riferimento inerziale in cui ci troviamo. Poniamo l'asse x della direzione del campo elettrico (pertanto $\vec{E}=(E;0;0)$) e l'asse y in modo tale che $\vec{E}$ e il momento iniziale $\vec{p}(t=0)$ della particella appartengano al piano xy, e l'asse z di conseguenza. Chiamiamo:

$$p_{0x}=p_x(t=0) \qquad p_{0y}=p_y(t=0) \qquad p_{0z}=p_z(t=0)=0$$

. Detta e la carica della particella, si ha:

$$\frac{dp^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{i\mu}u_\mu \qquad\Rightarrow\qquad \frac{\gamma}{c}\frac{dp^i}{dt}=\frac{e}{c}F^{i0}u_0=\frac{e}{c}E_i\gamma \qquad\Rightarrow\qquad \frac{dp^i}{dt}=eE_i$$

e dunque le equazioni del moto saranno:

$$\begin{cases}\dot{p}_x=eE\\ \dot{p}_y=0\\ \dot{p}_z=0\end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad \begin{cases}p_x(t)=eEt+p_{0x}\\ p_y(t)=p_{0y}\\ p_z(t)=0\end{cases}$$

scegliamo quindi l'origine dei tempi di modo che $p_{0x}=p_x(t'=0)=0$. Dunque:

$$t'=t+\frac{p_{0x}}{eE} \qquad\Rightarrow\qquad \begin{cases}p_x(t')=eEt'\\ p_y(t')=p_{0y}\\ p_z(t')=0\end{cases} \qquad \underset{\text{rinominando } t' \text{ con } t}{\Longrightarrow} \qquad \begin{cases}p_x(t)=eEt\\ p_y(t)=p_{0y}\\ p_z(t)=0\end{cases}$$

Ora, detta $\vec{r}$ la posizione del punto, $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{p}}{\mathscr{E}}$, con $\mathscr{E}$ energia della particella. Pertanto, detta $\mathscr{E}_0=\sqrt{m^2+p_{0y}^2}$ l'energia iniziale, si ha:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{eEt}{\sqrt{(eEt)^2+p_{0y}^2+m^2}}=\frac{1}{eE}\frac{d}{dt}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(eEt)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_{0y}}{\sqrt{(eEt)^2+p_{0y}^2+m^2}}=\frac{p_{0y}}{\mathscr{E}_0}\frac{d}{dt}\operatorname{arcsinh}\frac{eEt}{\mathscr{E}_0}$$

Dunque:

$$\boldsymbol{x(t)=x_0+\frac{1}{eE}\left(\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(eEt)^2}-\mathscr{E}_0\right) \qquad y(t)=y_0+\frac{p_{0y}}{eE}\operatorname{arcsinh}\frac{eEt}{\mathscr{E}_0}}$$

Determiniamo ora la traiettoria della carica. Ponendo $\alpha := (y-y_0)\frac{eE}{p_{0y}}$, l'equazione per $y(t)$ porge $\frac{eEt}{\mathscr{E}_0}=\sinh\alpha$, che inserita nell'equazione per $x(t)$ dà:

$$x-x_0=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\left(\sqrt{1+\sinh^2\alpha}-1\right)$$

Poiché $1+\sinh^2\alpha=\cosh^2\alpha$:

$$\boldsymbol{x-x_0=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\left[\cosh\frac{(y-y_0)eE}{p_{0y}}-1\right]}$$

La traiettoria della carica è dunque una catenaria con asse coincidente con l'asse x. Nel limite $v/c << 1$, l'espressione si riconduce a quella classica, cioè ad una parabola. Infatti:

$$\alpha=\frac{(y-y_0)eE}{p_{0y}c}\xrightarrow{c\to\infty}0 \qquad \Rightarrow \qquad \cosh\alpha\xrightarrow{\alpha\to 0}1+\frac{\alpha^2}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x-x_0=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\left[1+\frac{1}{2}\frac{(y-y_0)^2e^2E^2}{p_{0y}^2c^2}-1\right]=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0\frac{eE}{c^2p_{0y}^2}(y-y_0)^2$$

Dunque, poiché $\mathscr{E}_0\xrightarrow{c\to\infty}mc^2$ e $p_{0y}\xrightarrow{c\to\infty}mv_0$:

$$x-x_0=\frac{1}{2}mc^2\frac{eE}{m^2v_0^2c^2}(y-y_0)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x-x_0=\frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2}(y-y_0)^2}$$

4.1.3 Moto di una particella in un campo magnetico costante uniforme

Posto $c=1$, per l'espressione della forza di Lorentz e per la legge di potenza:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{v}\times\vec{B} \qquad \qquad \frac{d\mathscr{E}}{dt}=0$$

Dunque, poiché $\mathscr{E}$ è costante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{p}}{\mathscr{E}}=\frac{d}{dt}\frac{m\gamma\vec{v}}{m\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{e}{\mathscr{E}}\vec{v}\times\vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{e}{\mathscr{E}}\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.1}$$

Notiamo anche che, come sappiamo, il campo magnetico non compie lavoro, ossia non altera il modulo della velocità della carica:

$$\frac{d|\vec{v}|^2}{dt}=2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{2e}{\mathscr{E}}\vec{v}\times\vec{B}\cdot\vec{v}=0$$

Poniamo dunque il campo magnetico lungo l'asse z, ossia $\vec{B}=(0;0;|\vec{B}|)$. Proiettando l'equazione (4.1) lungo le tre direzioni:

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{eB}{\mathscr{E}}v_y \qquad \frac{dv_y}{dt}=-\frac{eB}{\mathscr{E}}v_x \qquad \frac{dv_z}{dt}=0$$

Un "trucco" per risolvere queste equazioni è quello di definire la "velocità complessa":

$$v_\perp:=v_x+iv_y$$

In questo modo infatti le prime due equazioni diventano:

$$\frac{dv_\perp}{dt}=-i\frac{eB}{\mathscr{E}}v_\perp \qquad \Rightarrow \qquad v_\perp(t)=v_\perp(0)e^{-i\omega t} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{\omega=\frac{eB}{\mathscr{E}}}$$

Ora, dato che $v_\perp(0)\in\mathbb{C}$ possiamo esprimerlo come $v_\perp(0)=v_{\perp 0}e^{-i\alpha}$, con

$$\boldsymbol{v_{\perp 0}=\sqrt{v_{x0}^2+v_{y0}^2}}\in\mathbb{R}^+ \qquad \boldsymbol{\alpha=-\arctan\frac{v_{y0}}{v_{x0}}}$$

Adesso possiamo scomporre la soluzione dell'equazione differenziale per $v_\perp$ in parte reale e immaginaria:

$$v_x(t)=\mathrm{Re}\,v_\perp(t)=\mathrm{Re}\left(v_{\perp 0}e^{-i(\omega t+\alpha)}\right)=v_{\perp 0}\cos(\omega t+\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{v_{\perp 0}}{\omega}\frac{d}{dt}\sin(\omega t+\alpha)$$

$$v_y(t)=\mathrm{Im}\,v_\perp(t)=\mathrm{Im}\left(v_{\perp 0}e^{-i(\omega t+\alpha)}\right)=-v_{\perp 0}\sin(\omega t+\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{v_{\perp 0}}{\omega}\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\alpha)$$

Dunque, integrando (anche l'equazione per z) otteniamo la legge oraria:

$$\boldsymbol{x(t) = k_1 + \frac{v_{\perp 0}}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) \qquad y(t) = k_2 + \frac{v_{\perp 0}}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \qquad z(t) = z_0 + v_{z0}t}$$

con

$$k_1 = x_0 - \frac{v_{\perp 0}}{\omega}\sin\alpha \qquad k_2 = y_0 - \frac{v_{\perp 0}}{\omega}\cos\alpha$$

La proiezione della traiettoria sul piano xy è la curva

$$(x-k_1)^2 + (y-k_2)^2 = \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2}$$

che è una circonferenza centrata in (k_1, k_2) e raggio (esplicitando anche c):

$$\boldsymbol{R = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} = \frac{v_{\perp 0}\mathscr{E}}{ceB} = \frac{|\vec{p}_{\perp 0}|}{ceB}}$$

e percorsa con velocità angolare ω, detta anche "frequenza di ciclotrone".

La situazione è quindi del tutto analoga a quella classica: l'unica differenza è che ω ha una correzione relativistica. Infatti:

$$\omega = \frac{ceB}{mc^2}\sqrt{1 - \frac{v_{\perp 0}{}^2 + v_{0z}^2}{c^2}} = \frac{eB}{mc}\sqrt{1 - \frac{v_{\perp 0}{}^2 + v_{0z}^2}{c^2}} = \omega_{\text{non-rel}}\sqrt{1 - \frac{v_{\perp 0}{}^2 + v_{0z}^2}{c^2}}$$

4.2 Elettrodinamica

4.2.1 Teoria delle distribuzioni e elettrodinamica

In meccanica classica i corpi vengono modellizzati principalmente in due modi: punti materiali e corpi rigidi. Ora, il concetto di corpo rigido in senso stretto *non può* essere generalizzato in alcun modo in ambito relativistico: se un punto di un corpo esteso viene soggetto, a un certo istante, ad una forza $\vec{F}$, quest'informazione non può propagarsi istantaneamente agli altri punti del corpo (cosa che invece supponevamo in meccanica classica); un corpo rigido in relatività è per forza "elastico".

Per quello che invece riguarda i corpi puntiformi, a un'analisi attenta sorgono problemi matematici. Consideriamo, ad esempio, il campo elettrico generato da una carica q puntiforme situata nell'origine di un sistema di riferimento:

$$\vec{E} = q\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Come possiamo "misurare" la carica?

Sappiamo che $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. Sia dunque B_ε una palla di raggio ε centrata nell'origine. Allora per il teorema della divergenza:

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla \cdot \vec{E} d^3x = \int_{S_\varepsilon} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

con $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ e $d\vec{\Sigma}$ vettore ortogonale a S_ε e di modulo $d\Sigma$. Dunque $d\vec{\Sigma} = (\vec{x}/|\vec{x}|)d\Sigma = (\vec{x}/|\vec{x}|)\varepsilon^2 d\Omega$, con $d\Omega$ angolo solido, e pertanto:

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla \cdot \vec{E} d^3x = \int_{S_\varepsilon} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = q\int_{S_\varepsilon} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\varepsilon^2 d\Omega = q\int_{S_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{|\vec{x}|^2} d\Omega = q\int_{S_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} d\Omega = q\int_{S_\varepsilon} d\Omega = 4\pi q$$

perché su S_ε si ha $|\vec{x}| = \varepsilon$.
Confrontandola con $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ si ha:

$$q = \int_{B_\varepsilon} \rho(\vec{x}) d^3x$$

e sembrerebbe dunque che non ci siano problemi.

Proviamo però a svolgere lo stesso conto in modo diverso:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q\nabla \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = q\frac{3|\vec{x}|^3 - 3|\vec{x}|\vec{x} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^6} = q\frac{3|\vec{x}|^3 - 3|\vec{x}|^3}{|\vec{x}|^6} = 0$$

Poiché dunque $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ per ogni punto di B_ε tranne che nell'origine, che è un insieme di misura nulla e quindi che non contribuisce al valore di un integrale di Lebesgue, si ha:

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla \cdot \vec{E} d^3x = 0 \neq 4\pi q$$

Considerando dunque $\vec{E}$ e ρ come funzioni ordinarie ci si imbatte in contraddizioni.

Il problema è che $\rho(\vec{x})$ non ha le proprietà di una funzione, perché $\rho(\vec{x}) = 0 \; \forall \vec{x} \neq 0$ ma contemporaneamente $\int_{B_\varepsilon} \rho(\vec{x}) d^3x \neq 0$.

L'equazione $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})$ per una carica puntiforme ha senso *solo* nell'ambito della teoria delle distribuzioni:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}) = q\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$$

ove δ è la delta di Dirac. Ricordiamo che, per ogni coordinata, δ è un funzionale lineare continuo sulle funzioni test $\varphi \in C^\infty$, definite come quelle funzioni che si annullano all'infinito assieme a tutte le loro derivate più velocemente di qualsiasi potenza. In particolare:

$$\delta(x) : \varphi(x) \longmapsto \varphi(0) = \text{“} \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx \text{”}$$

L'integrale è solo una scrittura simbolica, non ha senso di per sé. Volendo, gli si può dar senso come integrale di una successione di funzioni regolari, ossia definendolo come

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx$$

Una delle proprietà fondamentali delle distribuzioni è il loro comportamento sotto derivazione. Nel caso della delta di Dirac:

$$\frac{d}{dx}\delta(x) = \varphi(x) \longmapsto -\frac{d}{dx}\varphi(0)$$

espressione giustificata formalmente da:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\frac{d}{dx}\delta(x)dx = \delta(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)dx = 0 - \frac{d}{dx}\varphi(0)$$

Più in generale, se F è una distribuzione, allora:

$$F'(\varphi) = -F(\varphi')$$

Poiché, dunque, “scarichiamo” il problema della derivazione sulla φ, che è ultra-regolare, ogni distribuzione è infinitamente derivabile, e in generale tutte le proprietà delle funzioni regolari si ripercuotono sulle distribuzioni.

Una proprietà importante della δ che ci servirà poi è il suo comportamento sotto trasformazioni lineari: se $\delta^{(n)}(\vec{x}) = \delta(x^1)\cdots\delta(x^n)$ e M è matrice $n \times n$ reale invertibile, allora:

$$\delta^{(n)}(M\vec{x}) = \frac{1}{|\det M|}\delta^{(n)}(\vec{x})$$

Ricaviamo l'equazione delle onde per il campo elettromagnetico. Le equazioni di Maxwell nel vuoto sono:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

Dalla prima si ha dunque, per definizione di tensore elettromagnetico:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

Il primo addendo è proprio $\Box A$, con $\Box$ operatore d'Alembertiano. Dobbiamo dunque “maneggiare” l'equazione in qualche modo per far annullare il secondo addendo. Applichiamo ∂^ρ ad ambo i membri e antisimmetrizziamo rispetto agli indici ρ e ν. Si ottiene:

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial^{[\rho} A^{\nu]} - \partial_\mu \partial^{[\rho} \partial^{\nu]} A^\mu = 0$$

e poiché l'ordine di derivazione è irrilevante, $\partial^{[\rho}\partial^{\nu]} = \partial^\rho\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\rho = \partial^\rho\partial^\nu - \partial^\rho\partial^\nu = 0$, e quindi:

$$\boldsymbol{\partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\nu} = 0}$$

che non è altro che l'espressione covariante delle equazioni $\Box\vec{E} = 0$ e $\Box\vec{B} = 0$.

Supponiamo ora di avere un campo elettrico $\vec{E}$ che si propaga parallelamente a una direzione ubbedendo a $\Box\vec{E} = 0$. La forma che $\vec{E}$ può assumere può essere anche quella di un'onda quadra, come risulta sperimentalmente. Questa sembrerebbe una contraddizione perché l'onda quadra non è nemmeno differenziabile, e quindi non ha le proprietà minime per poter essere soluzione di un'equazione differenziale quale $\Box\vec{E} = 0$. Le equazioni di Mawxell, però, hanno vero significato nell'ambito delle distribuzioni. In questo modo anche l'onda quadra diventa perfettamente derivabile, e pertanto può essere soluzione dell'equazione delle onde.

Rivediamo ora il problema relativo al campo di una carica puntiforme alla luce delle distribuzioni. Si dovrà avere (è una scrittura formale, al solito):

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\vec{E}\varphi(\vec{x})d^3x = 4\pi\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\vec{x})\varphi(\vec{x})d^3x \qquad \forall\varphi\in S(\mathbb{R}^3)$$

con S spazio delle funzioni test, e le derivate sono da intendersi nel senso delle distribuzioni.

In questo modo:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\vec{E}\varphi(\vec{x})d^3x = -\int_{\mathbb{R}^3}\vec{E}\cdot\nabla\varphi(\vec{x})d^3x = -q\int_{\mathbb{R}^3}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(\vec{x})d^3x = -q\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\vec{x}|>\varepsilon}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(\vec{x})d^3x$$

a questo punto, dato che abbiamo "eliminato" il punto "patologico" (l'origine), possiamo integrare per parti:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\vec{E}\varphi(\vec{x})d^3x = -q\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\vec{x}|>\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\varphi(\vec{x})\right) - \varphi(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\right]d^3x$$

ora, tenendo conto che $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} = 0$ perché si sta integrando in un dominio che non contiene l'origine, e come visto poco fa la divergenza di $\vec{x}/|\vec{x}|^3$ è nulla fuori dall'origine, e applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\vec{E}\varphi(\vec{x})d^3x = q\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{S_\infty}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\varphi(\vec{x})d\Sigma_i + \int_{S_\varepsilon}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\varphi(\vec{x})d\Sigma_i\right)$$

con S_∞ superficie che circonda $\mathbb{R}^3$; il primo integrale è dunque nullo perché le funzioni test si annullano all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza. Perciò, poiché $|\vec{x}| = \varepsilon$ su S_ε, detto $\vec{n}$ il versore nella direzione radiale:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\vec{E}\varphi(\vec{x})d^3x = q\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{\Sigma} = q\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{\varepsilon\vec{n}}{\varepsilon^3}\varphi(r,\theta,\phi)\cdot\vec{n}\varepsilon^2 d\Omega = q\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(r=\varepsilon,\theta,\phi)d\Omega =$$

$$= q\varphi(0)\int_{S_\varepsilon}d\Omega = 4\pi q\varphi(0) = 4\pi q\int\delta^{(3)}(\vec{x})\varphi(\vec{x})d^3x$$

Siccome ciò è vero per ogni funzione di test $\varphi\in S(\mathbb{R}^3)$, abbiamo dimostrato che:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi q\delta^{(3)}$$

4.2.2 La quadricorrente

Consideriamo una particella puntiforme di carica e. Siano z^μ le sue coordinate spaziotemporali in un sistema di riferimento inerziale S con coordinate x^μ.

La densità di carica della particella che all'istante x^0 è nel punto $\vec{z}$ è data da:

$$\rho(x^0,\vec{x}) = e\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(x^0)\right)$$

La sua corrente è[1]

$$\vec{j}(x^0,\vec{x}) = c\frac{d}{dx^0}\vec{z}(x^0)\rho(x^0,\vec{x})$$

[1] Ricorda: anche in Fisica 2 avevamo visto che la densità corrente si può esprimere come densità di carica per velocità.

Quello che vogliamo fare ora è dimostrare che $j^\mu(x^0,\vec{x})$, definito come

$$j^\mu(x^0,\vec{x}) = \left(c\rho(x^0,\vec{x}),\vec{j}(x^0,\vec{x})\right) \tag{4.2}$$

è un campo quadrivettoriale.

Per renderne esplicita la covarianza, conviene utilizzare la linea d'universo della particella, che chiamiamo γ. Poniamo

$$z^\mu = (z^0;z^i) = (c\tau;z^i) = (s;z^i)$$

con τ tempo proprio della particella. Parametrizziamo γ, e quindi anche z^μ, con l'intervallo spaziotemporale s. In questo modo j^μ si può esprimere come

$$j^\mu(x) = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^\mu}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds$$

Verifichiamo che è effettivamente equivalente alla (4.2). Per la componente temporale:

$$j^0(x) = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^0}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds =$$

$$= ce\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x^0-z^0)\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(z^0)\right)dz^0 = ce\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(x^0)\right) = c\rho(x^0,\vec{x})$$

Per quelle spaziali, invece:

$$j^i(x) = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^i}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^i}{dz^0}(z^0)\delta(x^0-z^0)\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(z^0)\right)dz^0 =$$

$$= ce\frac{dz^i}{dx^0}(x^0)\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(x^0)\right) = c\frac{dz^i}{dx^0}\rho(x^0,\vec{x}) = \left[\vec{j}(x^0,\vec{x})\right]_i$$

Dunque le due j^μ sono effettivamente uguali.

Dimostriamo ora che j^μ è un campo quadrivettoriale. Se $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ è la nostra trasformazione di Poincaré[2] (ricordare che $|\det\Lambda| = 1$):

$$j'^\mu(x') = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'^\mu}{ds'}\delta^{(4)}\left(x'-z'(s')\right)ds' = ce\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda^\mu{}_\nu\frac{dz^\nu}{ds}\delta^{(4)}\left(\Lambda(x-z(s))\right)ds =$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^\nu}{ds}\frac{\delta^{(4)}(x-z(s))}{|\det\Lambda|}ds = \Lambda^\mu{}_\nu ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^\nu}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)$$

Affinché però $j^\nu(x)$ sia una vera quadricorrente, dobbiamo dimostrare che ha quadridivergenza nulla, cioè che $\partial_\nu j^\nu(x) = 0$. Poiché j^ν è una distribuzione, questa relazione va intesa nel senso delle distribuzioni, ossia si deve avere[3]

$$\int_{\mathbb{R}^{1,3}}\partial_\nu j^\nu(x)\varphi(x)d^4x = 0 \qquad \forall\varphi\in S(\mathbb{R}^{1,3})$$

Dunque:

$$\int_{\mathbb{R}^{1,3}}\varphi(x)\partial_\mu j^\mu(x)d^4x = -\int_{\mathbb{R}^{1,3}}j^\mu(x)\partial_\mu\varphi(x)d^4x = -\int_{\mathbb{R}^{1,3}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi(x)\left(ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^\mu}{ds}\delta^{(4)}(x-z(s))ds\right)d^4x$$

e per le proprietà della δ:

$$\int_{\mathbb{R}^{1,3}}\varphi(x)\partial_\mu j^\mu(x)d^4x = -ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz^\mu}{ds}(s)\frac{\partial}{\partial z^\mu}\varphi(z(s))ds =$$

$$= -ce\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds}\varphi(z(s))ds = -ce\,\varphi(z(s))\Big|_{s=-\infty}^{s=+\infty} = 0$$

[2]Per essere il più generali possibile, escludiamo il caso $a^\mu = 0$.

[3]L'$\mathbb{R}^{1,3}$ negli integrali serve per tenere mentalmente distinte le parti temporale e spaziale.

L'ultimo passaggio è dovuto alle proprietà delle funzioni test: se una componente dell'argomento di φ va all'infinito, la φ si annulla; sicuramente, però, la componente teporale di z lo fa: essendo infatti $z \propto s$, $\lim_{s\to\pm\infty} z(s) = \pm\infty$, e pertanto $\lim_{s\to\pm\infty} \varphi(z(s)) = 0$. Pertanto l'integrale è nullo, e dunque j^μ è effettivamente una quadricorrente.

In base alla quadricorrente, definiamo la carica di una distribuzione di cariche come:

$$Q(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} j^0(x^0,\vec{x})d^3x$$

Dimostriamo che se le cariche in gioco sono puntiformi questa grandezza è uno scalare. Non è infatti immediato che ciò sia vero, perché Q è definita come l'integrale della componente temporale di un quadrivettore su una "superficie" (un'ipersuperficie, in realtà) a tempo fissato. In realtà vedremo ora che Q è uno scalare come conseguenza del fatto che j^μ è un quadrivettore. Ci servirà inoltre la relazione tra la funzione H di Heaviside e la delta di Dirac:

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x)$$

Dunque, si ha:

$$Q(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} j^0(x^0,\vec{x})d^3x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^0(x)\delta(x^0)d^4x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^0(x)\frac{d}{dx^0}H(x^0)d^4x$$

Ora, però, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}H(x^0) = \delta_{\mu 0}\frac{d}{dx^0}H(x^0) = \delta_{\mu 0}\delta(x)$. Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}H(x^0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^0}H(x^0) = \frac{d}{dx^0}H(x^0) & \text{se } \mu = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial x^i}H(x^0) = 0 & \text{se } \mu = i \end{cases}$$

Dunque:

$$Q(x^0) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}H(x^0)d^4x$$

A questo punto, definiamo la stessa carica in un altro sistema di riferimento inerziale come:

$$Q'(x'^0) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j'^\mu(x')\frac{\partial}{\partial x'^\mu}H(x'^0)d^4x'$$

con, appunto, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$. Allora:

$$Q'(x'^0) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)\Lambda_\mu{}^\rho\frac{\partial}{\partial x^\rho}H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0)\frac{d^4x}{|\det\Lambda|}$$

e poiché $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda_\mu{}^\rho = \delta_\nu{}^\rho$:

$$Q'(x'^0) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^\nu(x)\delta_\nu{}^\rho\frac{\partial}{\partial x^\rho}H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0)d^4x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\nu}H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0)d^4x$$

Adesso, aggiungendo e togliendo Q a secondo membro:

$$Q'(x'^0) = Q(x^0) + \int_{\mathbb{R}^{1,3}} j^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) - H(x^0)\right)d^4x$$

La dimostrazione è dunque conclusa se mostriamo che l'integrale è nullo.

Integrando per parti, l'integrale è uguale a:

$$\int_{\mathbb{R}^{1,3}} \partial_\nu\left[j^\nu(x)\left(H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) - H(x^0)\right)\right]d^4x - \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \partial_\nu j^\nu(x)\left(H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma + a^0) - H(x^0)\right)d^4x$$

Il secondo integrale è nullo perché $\partial_\nu j^\nu(x) = 0$. Per calcolare il primo applichiamo il teorema della divergenza, trasformandolo quindi in un integrale di "superficie", che deve contornare tutto lo spaziotempo. Per farlo, consideriamo $\mathbb{R}^{1,3}$ come il limite di un opportuno "cilindro quadridimensionale"[4]. Sia L il "raggio" e la "semialtezza" di questo cilindro, il cui centro si trova nell'origine e le cui "basi" sono disposte perpendicolarmente a x^0. Chiamiamo allora $S^0_+(L)$ la "base" che si trova nella parte positiva dei tempi e $S^0_-(L)$ quella nella parte negativa, e S_L la "superficie laterale". Si avrà dunque che l'integrale è uguale a:

$$\lim_{L\to\infty}\left(\int_{S_L}+\int_{S^0_+(L)}+\int_{S^0_-(L)}\right)\left(j^\nu(x)(H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma+a^0)-H(x^0))\right)d\Sigma_\nu$$

Consideriamo l'integrale su S_L: $d\Sigma_\nu$ va all'infinito come L^3 (è il bordo di un oggetto quadridimensionale), mentre $H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma+a^0)-H(x^0)$ è limitata. Se dunque $|\vec{x}|^3 j^\nu(x)\xrightarrow{|\vec{x}|\to\infty}0$, ossia se j va a zero all'infinito più velocemente di L^3, l'integrale è nullo.

Considerando invece i due integrali su $S^0_+(L)$ e $S^0_-(L)$, si ha che

$$H(\Lambda^0{}_\sigma x^\sigma+a^0)-H(x^0)\xrightarrow{x^0\to\pm\infty}0$$

e dunque anche questi due integrali sono nulli.

Pertanto, la carica si conserva se $|\vec{x}|^3 j^\nu(x)\xrightarrow{|\vec{x}|\to\infty}0$, ossia se j va a zero all'infinito più velocemente di L^3.

4.2.3 Il tensore energia-impulso

In meccanica classica, oltre alla carica si conservano anche il momento e l'energia di un sistema di cariche in un campo elettromagnetico. Poiché l'energia e l'impulso di una particella in relatività sono le componenti del quadrivettore p^μ, è naturale che ciò sia vero anche per l'energia-momento totale di un sistema di cariche in un campo elettromagnetico relativistico.

Chiamando dunque P^μ il quadrimpulso totale del sistema, vogliamo dimostrare che si conserva.

Per farlo, seguiamo un ragionamento analogo a quello fatto per dimostrare la conservazione della carica: in quel caso, dall'equazione di continuità per la quadricorrente abbiamo definito la carica come l'integrale, esteso a $\mathbb{R}^3$, della sua componente temporale, e poi abbiamo dimostrato che è uno scalare sfruttando il fatto che la quadricorrente è un quadrivettore.

Vorremmo dunque poter scrivere:

$$P^\nu(x^0)=\int_{\mathbb{R}^3}T^{0\nu}(x^0,\vec{x})d^3x$$

con $T^{0\nu}$ componente temporale per il primo indice di un campo tensoriale[5], $T^{\mu\nu}(x)$, detto *tensore energia-impulso*. L'equazione di continuità per quest'oggetto sarà dunque $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0$.

Postuliamo dunque che in elettrodinamica relativistica, per particelle puntiformi in un campo elettromagnetico esista il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}(x)$ che soddisfa le proprietà:

1. $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0$
2. $\lim_{x\to\infty}|\vec{x}|^3 T^{\mu\nu}(x)=0$

Dimostriamo dunque che così

$$P^\nu(x^0)=\int_{\mathbb{R}^3}T^{0\nu}(x^0,\vec{x})d^3x$$

si conserva ed è un quadrivettore.

Per quanto riguarda la conservazione:

$$\frac{d}{dx^0}P^\mu(x)=\frac{d}{dx^0}\int_{\mathbb{R}^3}T^{0\mu}(x^0,\vec{x})d^3x=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial x^0}T^{0\mu}(x^0,\vec{x})d^3x$$

[4] Il ragionamento diventa più comprensibile nel caso in cui lo spazio ha due dimensioni: in questo caso il cilindro è effettivamente un cilindro tridimensionale. ***AGGIUNGERE DISEGNO***

[5] Deve esserlo perché ν è sicuramente indice quadrivettoriale (P^ν è quadrivettore), e anche μ deve esserlo in analogia con quanto fatto con la quadricorrente.

per la proprietà 1 si ha $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_0 T^{0\nu} + \partial_i T^{i\nu} = 0$, quindi $\partial_0 T^{0\nu} = -\partial_i T^{i\nu}$, e usando poi il teorema della divergenza:

$$\frac{d}{dx^0} P^\mu(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\mu}(x^0,\vec{x}) d^3x = -\int_{\Sigma_\infty = \partial\mathbb{R}^3} T^{i\mu}(x^0,\vec{x}) d\Sigma_i = 0$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che, per la proprietà 2, $T \overset{x\to\infty}{\sim} 1/r^3$, mentre $d\vec{\Sigma} = \lim_{r\to\infty} r^2 \vec{n} d\Omega \overset{x\to\infty}{\sim} r^2$ (con $\vec{n}$ versore nella direzione radiale), e dunque l'integrando si annulla all'infinito. Perciò:

$$\frac{d}{dx^0} P^\mu(x^0) = 0$$

Vediamo ora che è un quadrivettore, e lo facciamo in modo del tutto analogo a quanto visto per dimostrare che la carica è uno scalare. Dunque, tenendo sempre conto che $\frac{\partial}{\partial x^\mu} H(x^0) = \delta_{\mu 0} \delta(x)$:

$$P^\nu(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} T^{0\nu}(x^0,\vec{x}) d^3x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} T^{0\nu}(x) \delta(x^0) d^4x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} T^{0\nu}(x) \frac{d}{dx^0} H(x^0) d^4x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} T^{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} H(x^0) d^4x$$

In un altro sistema di riferimento inerziale, le cui coordinate sono legate a quelle del sistema di partenza, al solito, da $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, si ha:

$$P'^\nu(x^0) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} T'^{\mu\nu}(x') \frac{\partial}{\partial x'^\mu} H(x'^0) d^4x' = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \Lambda_\mu{}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) \frac{d^4x}{|\det\Lambda|} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \delta_\rho{}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) d^4x = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial}{\partial x^\rho} H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) d^4x$$

A questo punto, aggiungiamo e togliamo $\Lambda^\nu{}_\sigma P^\sigma(x^0)$ a secondo membro:

$$P'^\nu(x^0) = \Lambda^\nu{}_\sigma P^\sigma(x^0) + \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) - H(x^0) \right) d^4x$$

Dobbiamo dunque mostrare che l'integrale è nullo. Integrando per parti, questo risulta uguale a:

$$\Lambda^\nu{}_\sigma \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left[T^{\rho\sigma}(x) \left(H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) - H(x^0) \right) \right] d^4x -$$

$$-\Lambda^\nu{}_\sigma \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\rho\sigma}(x) \left(H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) - H(x^0) \right) d^4x$$

Ora, il secondo integrale è nullo perché per la prima proprietà del tensore energia-impulso si ha $\partial_\rho T^{\rho\sigma}(x) = 0$. Il primo lo calcoliamo come abbiamo fatto per dimostrare che la carica è uno scalare, ossia pensando lo spaziotempo come limite di un opportuno cilindro quadridimensionale. Con la stessa notazione di prima, si ha dunque che l'integrale è uguale a:

$$\Lambda^\nu{}_\sigma \lim_{L\to\infty} \left(\int_{S_L} + \int_{S^0_+(L)} + \int_{S^0_-(L)} \right) \left(T^{\rho\sigma}(x) (H(\Lambda^0{}_\beta x^\beta + a^0) - H(x^0)) \right) d\Sigma_\rho$$

ed è nullo per gli stessi argomenti dell'altra volta: il primo integrale si annulla per la proprietà 2 del tensore energia-impulso, mentre gli altri due perché all'infinito le due H si elidono.

Dunque P^μ è effettivamente un quadrivettore.

Quello che vogliamo fare ora è ricavare l'espressione del tensore energia-impulso per un sistema di cariche puntiformi in un campo elettromagnetico, ossia vedere esplicitamente quali sono le sue componenti. Lo faremo in questo modo: andremo innanzitutto a vedere com'è fatta la componente temporale del tensore energia-impulso del solo campo elettromagnetico, dopodiché derivandola andremo a trovare anche il contributo a questa componente dovuto alle particelle del sistema. A partire da ciò, covariantizzeremo quest'espressione per trovare in generale tutte le altre componenti del tensore.

Dunque, poiché:

$$P^0_{\text{emg}}(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x}) d^3x$$

e $P^0_{\text{emg}}(x^0)$ è l'energia del campo, $T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x})$ dev'essere la densità d'energia del campo stesso, che nel sistema di Gauss è $(\vec{E}^2+\vec{B}^2)/(8\pi)$.

Derivando T^{00}_{emg} rispetto al tempo:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}T^{00}_{\text{emg}}(x)=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial x^0}+\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x^0}\right)=\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)+\vec{B}\cdot\left(-\nabla\times\vec{E}\right)\right]$$

Ove $\vec{j}$ è la corrente del sistema di cariche. Cerchiamo di esprimere $\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B}$ e $-\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E}$ in modo più semplice e compatto:

$$\begin{array}{r}\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B}=E_i\varepsilon_{ijk}\partial_jB_k\\ -\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E}=-B_i\varepsilon_{ijk}\partial_jE_k\end{array}\quad\Rightarrow\quad\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B}-\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E}\overset{i\leftrightarrow k}{=}E_i\varepsilon_{ijk}\partial_jB_k-B_k\varepsilon_{kji}\partial_jE_i=$$

$$=E_i\varepsilon_{ijk}\partial_jB_k+B_k\varepsilon_{ijk}\partial_jE_i=\partial_j\varepsilon_{ijk}E_iB_k=-\partial_j\varepsilon_{jik}E_iB_k=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Dunque:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{4\pi}\frac{4\pi}{c}\vec{E}\cdot\vec{j}=-\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j}$$

Integrando ora su tutto lo spazio, usando il teorema della divergenza il termine contenente $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$ non contribuisce supponendo che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ decadano all'infinito (ossia supponendo che non esistano cariche all'infinito). Si ha dunque:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{\mathbb{R}^3}T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x})d^3x=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j}d^3x$$

Supponiamo ora che il sistema di cariche di cui $\vec{j}$ è la corrente sia composto da $r=1,\dots,N$ particelle puntiformi, di carica e_r e coordinate spaziotemporali z_r, che parametrizziamo con l'intervallo spazio-temporale s_r. Allora, detta γ_r la linea d'universo della particella r-esima:

$$j^\mu=\sum_{r=1}^N j^\mu_r=\sum_{r=1}^N ce_r\int_{\gamma_r}\delta^{(4)}(x-z_r)dz^\mu_r=\sum_{r=1}^N ce_r\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))\frac{dz^\mu_r}{ds_r}ds_r$$

Dunque, poiché integrando rispetto alla componente temporale quest'ultima espressione si ha

$$\vec{j}_r(x^0,\vec{x})=e_r\vec{v}_r\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))$$

allora:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x})d^3x=-\sum_{r=1}^N e_r\frac{\vec{v}_r}{c}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\vec{E}(x^0,\vec{x})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))d^3x=-\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{r=1}^N\mathscr{E}_r(x^0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))d^3x$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto alla legge di potenza:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dx^0}=e\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E}$$

Dunque:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{\mathbb{R}^3}T^{00}_{\text{emg}}(x^0,\vec{x})d^3x+\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{r=1}^N\mathscr{E}_r(x^0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))d^3x=0\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{\mathbb{R}^3}\left(T^{00}_{\text{emg}}(x)+\sum_{r=1}^N\mathscr{E}_r(x^0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))\right)d^3x=0$$

Pertanto la quantità conservata è $\int T^{00}(x)d^3x$, con[6]

$$T^{00}(x)=\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}+\sum_{i=1}^N\mathscr{E}_r(x^0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r(x^0))$$

[6]Ricorda: $T^{00}_{\text{emg}}(x)=\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}$.

Ora, poiché $T^{00}(x)$ dev'essere la componente $(0,0)$ di un campo tensoriale $T^{\mu\nu}(x)$, covariantizziamo T^{00} per ottenere tutto $T^{\mu\nu}$.

Iniziamo covariantizzando T^{00}_{emg} per ottenere $T^{\mu\nu}_{\text{emg}}$, ossia il campo tensoriale relativo al solo campo elettromagnetico. Poiché T^{00}_{emg} è costruito con $F^{\alpha\beta}$, e quadratico in esso, anche $T^{\mu\nu}_{\text{emg}}$ dovrà esserlo.

L'unica espressione che covariantizza T^{00}_{emg} è:

$$T^{\mu\nu}_{\text{emg}} = c_1 F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha\nu} + c_2 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

A priori potevano esserci termini del tipo $F^{\mu\nu}F^{\alpha}{}_{\alpha}$, ma sono nulli perché $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, o del tipo $g^{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$, ma termini di questo tipo sono pseudotensori per via della presenza di ε, e questo "non va bene" perché $T^{\mu\nu}$ dev'essere un "vero" tensore, e non uno pseudotensore.
Poiché conosciamo T^{00}_{emg}, possiamo fissare il valore delle costanti c_1 e c_2:

$$\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi} = T^{00}_{\text{emg}} = c_1 F^{0}{}_{\alpha}F^{\alpha 0} + c_2 \underbrace{g^{00}}_{=1} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = c_1 F^{0}{}_{i}F^{i0} + c_2 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = c_1 E_i^2 + c_2 2(B_i^2 - E_i^2) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi} = c_1\vec{E}^2 + 2c_2(\vec{B}^2-\vec{E}^2) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{4\pi} \qquad c_2 = \frac{1}{16\pi}$$

Dunque, il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico è:

$$\boldsymbol{T^{\mu\nu}_{\text{emg}} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}$$

Questo è un tensore simmetrico in μ, ν:

$$T^{\nu\mu}_{\text{emg}} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\nu}{}_{\alpha}F^{\alpha\mu} + \frac{g^{\nu\mu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$$

e poiché $F^{\nu}{}_{\alpha} = g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta} = -g_{\alpha\beta}F^{\beta\nu} = -F_{\alpha}{}^{\nu}$, allora

$$F^{\nu}{}_{\alpha}F^{\alpha\mu} = (-F_{\alpha}{}^{\nu})(-F^{\mu\alpha}) = F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} = F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu}$$

e quindi $T^{\mu\nu}_{\text{emg}} = T^{\nu\mu}_{\text{emg}}$.

Esplicitando le sue componenti[7]

$$T^{i0}_{\text{emg}} = \frac{1}{4\pi}F^{i}{}_{\alpha}F^{i0} = \frac{1}{4\pi}F^{i}{}_{j}F^{j0} = -\frac{1}{4\pi}F^{ij}F^{j0} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{ijk}B_kE_j = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]_i \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{T^{i0}_{\text{emg}} = \frac{1}{4\pi}S_i}$$

ove $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}$ è il vettore di Poynting.
Si trova inoltre che

$$\boldsymbol{T^{ij}_{\text{emg}} = \frac{1}{8\pi}\left((\vec{E}^2+\vec{B}^2)\delta^{ij} - E_iE_j - B_iB_j\right)}$$

Consideriamo ora, invece, il contributo dovuto alle particelle, che chiamiamo T_P. In modo analogo a quanto fatto per la quadricorrente, e tenendo conto che $\mathscr{E}_r = m_rc^2\gamma_r = m_rc^2u_r^0 = m_rc^2\frac{dz_r^0}{ds_r}$:

$$T_P^{00}(x) = \sum_r \mathscr{E}_r(x^0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_r) = \sum_r \int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{E}_r\delta^{(4)}(x-z_r)dz_r^0 = \sum_r\int_{-\infty}^{+\infty} m_rc^2\frac{dz_r^0}{ds_r}\frac{dz_r^0}{ds_r}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r$$

Dunque:

$$\boldsymbol{T_P^{\mu\nu}(x) = \sum_r\int_{-\infty}^{+\infty} m_rc^2u_r^{\mu}(s_r)u_r^{\nu}(s_r)\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r}$$

[7] Il secondo passaggio per ricavare l'espressione di T^{i0}_{emg} è dovuto al fatto che, nella somma, se $\alpha = 0$ si ha $F^{00} = 0$, e quindi i termini con $\alpha = 0$ sono tutti nulli.

Notiamo che:

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_P^{00}(x^0,\vec{x})d^3x = \sum_r \mathscr{E}_r$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_P^{0i}(x^0,\vec{x})d^3x = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_r \int_{-\infty}^{+\infty} m_r c^2 u_r^0(z_r(s_r))u_r^i(z_r(s_r))\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r\right)d^3x = c\sum_r m_r c\frac{dz_r^0}{ds_r}u_r^i = c\sum_r p_r^i$$

<u>Osservazione:</u> non essendo $T_P^{\mu\nu}$ conservato in presenza di campo elettromagnetico, *non* è vero che la somma dei p_r^μ è un quadrivettore[8]. Nello studio degli scattering (decadimenti e urti) l'abbiamo invece considerato tale perché avevamo supposto che l'interazione fra le particelle fosse puntuale sia nello spazio che nel tempo.

Vogliamo adesso verificare che l'equazione di continuità per $T_{\text{emg}}^{\mu\nu} + T_P^{\mu\nu}$ è soddisfatta, ossia che $\partial_\mu(T_{\text{emg}}^{\mu\nu} + T_P^{\mu\nu}) = 0$. Consideriamo il contributo di $T_{\text{emg}}^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[(\partial_\mu F^\mu{}_\alpha)F^{\alpha\nu} + F^{\mu\alpha}(\partial_\mu F_\alpha{}^\nu) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\partial_\mu F^{\alpha\beta}\right]$$

Ora, per le equazioni di Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu$; inoltre $F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = F_{\mu\alpha}\partial^\mu F^{\alpha\nu}$, e effettuando il cambio di nome $\mu \rightsquigarrow \beta$ si ha $F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = F_{\beta\alpha}\partial^\beta F^{\alpha\nu} = F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\nu\alpha}$. Scambiando però il nome degli indici $\alpha \rightsquigarrow \beta$, si avrà anche $F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = F_{\beta\alpha}\partial^\alpha F^{\nu\beta} = F_{\alpha\beta}\partial^\alpha F^{\beta\nu}$. Quindi:

$$F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\nu\alpha} \qquad\qquad F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = F_{\alpha\beta}\partial^\alpha F^{\beta\nu}$$

e pertanto, essendo uguale a questi due termini, $F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu$ sarà uguale alla loro semisomma. Quindi:

$$F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_\alpha{}^\nu = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\left[\partial^\beta F^{\nu\alpha} + \partial^\alpha F^{\beta\nu}\right]$$

e pertanto:

$$\partial_\mu T_{\text{emg}}^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j^\alpha F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\left[\partial^\beta F^{\nu\alpha} + \partial^\alpha F^{\beta\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\beta}\right]$$

Notiamo dunque che fra parentesi quadre è presente un termine che contiene una permutazione ciclica degli indici ν, α e β. Ora, per le equazioni di Maxwell:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \partial^\nu F^{\rho\sigma} + \partial^\rho F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\rho} = 0$$

e pertanto la permutazione ciclica di questi indici è nulla, e di conseguenza anche il termine fra parentesi in $\partial_\mu T_{\text{emg}}^{\mu\nu}$ è nullo. Quindi:

$$\partial_\mu T_{\text{emg}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c}j^\alpha F_\alpha{}^\nu = -\frac{1}{c}j_\alpha F^{\nu\alpha} = -\frac{1}{c}\sum_r e_r\int_{-\infty}^{+\infty}F^{\nu\alpha}(z_r(s_r))u_{r\alpha}(s_r)\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r$$

Vediamo adesso il contributo relativo alle particelle:

$$\partial_\mu T_P^{\mu\nu}(x) = \sum_r m_r c^2\int_{-\infty}^{+\infty}u_r^\mu u_r^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r$$

Dovendo intendere la derivata nel senso delle distribuzioni, se $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_r^\mu u_r^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = \int_{\mathbb{R}^{1,3}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u_r^\mu u_r^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))\varphi(x)ds_r\right]d^4x =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{1,3}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u_r^\mu u_r^\nu\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)ds_r\right]d^4x = -\int_{-\infty}^{+\infty}u_r^\mu u_r^\nu\frac{\partial}{\partial z_r^\mu}\varphi(z_r(s_r))ds_r$$

[8] Questo fatto è anche conseguenza del fatto che ogni particella ha un proprio tempo proprio (scusate il gioco di parole). ***APPROFONDIRE***

e, poiché $u_r^\mu = \frac{dz_r^\mu}{ds_r}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_r^\mu u_r^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds_r}\varphi(z_r(s_r))u_r^\nu(s_r)ds_r =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds_r}\left(\varphi(z_r(s_r))u_r^\nu(s_r)\right)ds_r + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z_r(s_r))\frac{d}{ds_r}u_r^\nu(s_r)ds_r$$

Il primo integrale è nullo per le proprietà delle funzioni test, dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_r^\mu u_r^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = \int_{\mathbb{R}^{1,3}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du_r^\nu}{ds_r}(s_r)\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))\varphi(x)ds_r\right]d^4x \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u_r^\mu u_r^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du_r^\nu}{ds_r}(s_r)\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r$$

Perciò:

$$\partial_\mu T_P^{\mu\nu}(x) = \sum_r m_r c^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du_r^\nu}{ds_r}(s_r)\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = \sum_r c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_r^\nu}{ds_r}\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r$$

Quindi, infine:

$$\partial_\mu(T_{\text{emg}}^{\mu\nu}+T_P^{\mu\nu}) = c\sum_r\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{dp_r^\nu}{ds_r}-\frac{e_r}{c}F^{\nu\alpha}(z_r)u_{r\alpha}\right]\delta^{(4)}(x-z_r(s_r))ds_r = 0$$

ove l'ultimo passaggio è giustificato dalla legge di Lorentz: $\frac{dp_r^\nu}{ds_r} = \frac{e_r}{c}F^{\nu\alpha}(z_r)u_{r\alpha}$.

Quindi, $T^{\mu\nu}$ è effettivamente un campo tensoriale, ed è tale per cui l'"energia-impulso" di *tutto* il sistema cariche+campi è conservata.