

DOMANDE PER IL COMPITINO DI SPETTROSCOPIA

Benedetta Spina, Giovanni B. Carollo, Francesco Manzali et al.

22 maggio 2019

Sommario

Introduzione alla versione del 2019. Sono qui raccolte le risposte alle domande proposte dai proff. Garfagnini e Lunardon in vista del compitino relativo alla parte di spettroscopia. Il documento è un riadattamento consistente di un lavoro già svolto negli anni precedenti (riporto qui sotto l'introduzione della versione precedente). Sono state aggiunte domande nuove e rimosse quelle non più necessarie. Gran parte delle risposte sono state riviste, per renderle più vicine al programma svolto nell'ultimo anno, e soprattutto più sintetiche e chiare.

Molto probabilmente vi è qualche errore in giro o qualche cosa che manca - se trovate qualcosa fatemi sapere (francesco.manzali@studenti.unipd.it). Ringrazio infine Giorgio Menta-sti, Anna Steffinlongo, Leonardo Zampieri, Michele Cappellesso per le utili segnalazioni di errori/cose da aggiungere.

-Francesco Manzali

Introduzione alla versione del 2018. Il seguente file contiene le risposte alle domande proposte dai proff. Garfagnini e Lunardon in vista del compitino relativo alla parte di spettroscopia ed è frutto del lavoro congiunto di più studenti degli anni accademici 2016-17 e 2017-18. La versione iniziale che è stata la base di partenza per questo lavoretto, è dovuta ai lavori di Benedetta Spina e Luca Biasiolo (che ha risposto in parte ai quesiti qui presenti); questa versione è stata adattata alla versione delle domande proposte dai professori nell'anno accademico successivo, inoltre sono state apportate diverse migliorie a parecchie domande. Siccome quattro quesiti sono stati cassati dai professori, questi sono stati spostati in fondo al file, per non buttare al vento il lavoro degli studenti dell'anno passato; la numerazione delle domande è stata inoltre rivista, per seguire quella dell'odierno anno accademico. Ringrazio inoltre Nicola Barbieri, Paolo Barigelli, Andrea Boido, Giovanni Cataldi, Luna Cesari, Antonio Cusano, Giovanni Ferrari, Guglielmo Frittoli, Enrico Marchetto, Daniele Romano, Umberto Tomasini, Matteo Zatti per avermi fornito quest'anno la loro versione delle risposte, che ho utilizzato per migliorare questo lavoro; ringrazio infine tutti quelli che mi hanno contattato dopo aver letto questo lavoro per segnalarmi svariati errori.

Sicuramente ci sono degli errori, sicuramente ci sono risposte, almeno in parte, sbagliate. Qualunque errore segnalato o miglioria sono ben accetti.

Son convinto che alcune risposte contengano più del necessario per prendere tutto il punteggio: ho preferito lasciare comunque tutto quello che è scritto, perchè il fine di questo lavoro è fornire uno strumento per far bene l'esame, non una raccolta di concetti da imparare a memoria; ritengo che sia il singolo che debba decidere cosa studiare e cosa no, in linea con ciò che ritiene necessario sapere per la sua preparazione. In particolare, le appendici sono parti della teoria utili a capire la risposta o risposte successive, ma non sono strettamente necessarie per rispondere alla domanda.

1 Domande 2018-19

DOMANDA 1. *Discutere brevemente le interazioni di particelle cariche e molto più pesanti dell'elettrone con la materia, descrivendo l'andamento della perdita media di energia.*

Una particella con carica $z \neq 0$, e massa $M \gg m_e$ (es. α , π , K , p , $\Lambda \dots$), interagisce con la materia in diversi modi:

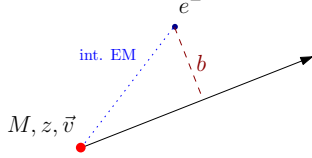


Figura 1 – Interazione tra particella ed elettroni

- **Interazione elettromagnetica** con gli elettroni degli atomi del materiale attraversato, che si realizza con un trasferimento di impulso agli e^- (figura 1).
- Interazioni con i nuclei, es. scattering di Rutherford
- Luce Cherenkov, ossia fotoni emessi quando una particella viaggia a velocità superiore a quella della luce *nel mezzo attraversato*.
- Bremsstrahlung, dovuta alla decelerazione di particelle cariche provocata da interazioni elettromagnetiche

Per particelle massive solo la prima interazione risulta dominante, e le altre sono interi ordini di grandezza più rare. Nell'ipotesi che la velocità v di attraversamento sia molto maggiore della velocità orbitale v_e^{orb} degli elettroni, la perdita di energia dovuta alle interazioni lungo una distanza infinitesima ha l'andamento descritto dalla **formula di Bethe-Bloch**:

$$S = -\frac{d\mathcal{E}}{dx} \propto \underbrace{\left(\frac{z^2}{\beta^2}\right)}_{\text{part.}} \underbrace{\left(\rho \frac{Z_m}{A_m}\right)}_{\text{mat.}} F(\beta, \gamma)$$

dove S è detto **stopping power**. z è la carica della particella incidente e β è la sua velocità (in unità di c), mentre ρ è densità del materiale attraversato, e Z_m e A_m numero atomico e massa atomica dell'elemento che lo compone.

Un grafico di $S(\beta\gamma)$ è riportato in figura 3. Si può notare un minimo attorno a $\beta\gamma \approx 3.5$, e una leggera crescita $S \sim \log[(\beta\gamma)^2]$ per velocità maggiori, dovuta quasi interamente ad effetti relativistici (“*radiative effects*”). Per energie più basse, $F(\beta, \gamma)$ è circa costante - dato che β e γ variano significativamente solo in regime relativistico - e perciò $S \sim 1/v^2$, ossia $S \sim 1/\mathcal{E}_k$. Per energie ancora più basse, l'ipotesi $v \gg v_e^{\text{orb}}$ viene meno, diviene significativo l'effetto di *ricombinazione* (ricattura di elettroni ionizzati), e $S \rightarrow 0$ per $\mathcal{E}_k \rightarrow 0$ (figura 2).

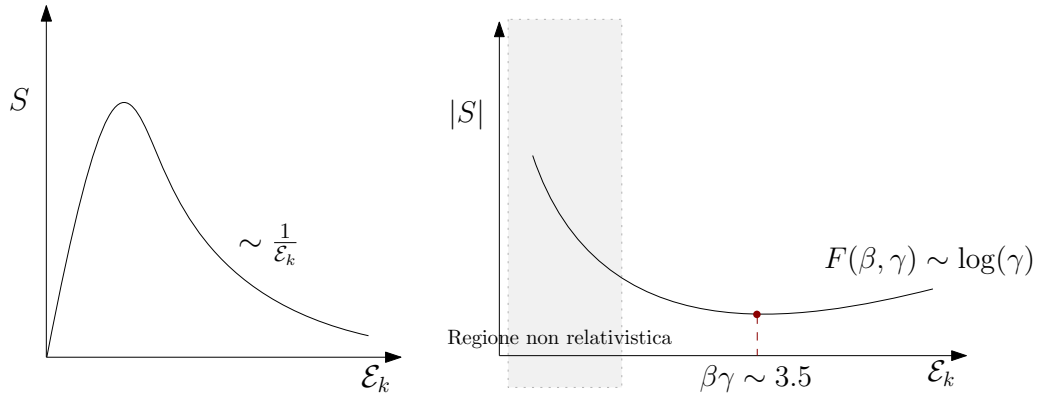


Figura 2 – Grafici dello stopping power in regione non relativistica (sinistra) e relativistica (destra)

Appendice

Più precisamente, la formula di Bethe-Bloch è data da:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon X_0} \right)^2 \frac{4\pi Z\rho N_A}{Am_e v^2} \left(\log \left(\frac{2m_e v^2}{I} \right) - \log(1 - \beta^2) - \beta^2 \right) =$$

$$= K z^2 \frac{Z}{A} \frac{\rho}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

dove Z è la carica dell'atomo su cui incide la particella, z è la carica della particella incidente, ρ è la densità del materiale assorbitore, A è il numero di massa del materiale assorbitore, m_e è la massa dell'elettrone, v è la velocità della particella incidente, β è v/c , I è il potenziale medio di ionizzazione del mezzo frenante, X_0 è la lunghezza di radiazione, $K = 30.74 \text{ keV m}^2/\text{kg}$.

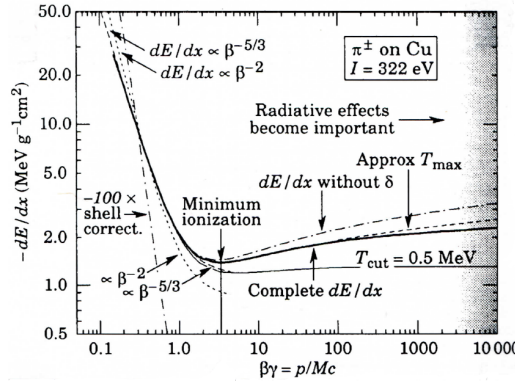


Figura 3 – Plot dello stopping power

DOMANDA 2. Cosa si intende per Stopping Power? Da cosa dipende principalmente lo Stopping Power per una particella alfa di bassa energia ($\sim 5 \text{ MeV}$)?

Con **stopping power** si intende la quantità di energia persa per unità di lunghezza da una particella nell'attraversare un certo materiale.

Una particella α di bassa energia ($\sim 5 \text{ MeV}$, da cui¹ $\beta \approx 0.04$), essendo carica e massiva ($m_\alpha \gg m_e$), interagisce con la materia principalmente trasferendo impulso agli elettroni del corpo attraversato mediante la forza elettromagnetica. Stimando la velocità orbitale degli e^- con $v_e^{\text{orb}} \sim Z\alpha c \approx Zc/137$ (approssimazione di atomo idrogenoide, con α costante di struttura fine), per Z bassi si ha $\beta c \gg v_e^{\text{orb}}$, e perciò è valida (approssimativamente) la formula di Bethe-Bloch per S :

$$S = -\frac{d\mathcal{E}}{dx} \propto \underbrace{\left(\frac{z^2}{\beta^2} \right)}_{\text{part.}} \underbrace{\left(\rho \frac{Z_m}{A_m} \right)}_{\text{mat.}} F(\beta, \gamma)$$

In regime non relativistico $F(\beta, \gamma)$ è circa costante, e perciò S dipende in tal caso principalmente dalla natura del materiale attraversato (numero atomico Z_m e massa atomica A_m), e la sua densità ρ .

DOMANDA 3. Che cosa si intende per **range** di una particella nella materia?

Si definisce **range** la distanza necessaria a una particella incidente (carica e massiva) per perdere completamente la sua energia cinetica iniziale \mathcal{E}_0 nel corso dell'attraversamento, che dipende sia da caratteristiche della radiazione che del mezzo in cui si muove. Conoscendo lo *stopping power* $S = -d\mathcal{E}/dx$, il range è determinato integrando tra 0 e \mathcal{E}_0 :

$$R = - \int_0^{\mathcal{E}_0} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^{-1} d\mathcal{E}$$

¹Da $\mathcal{E}_{\text{tot}} = mc^2 \gamma = \mathcal{E}_k + mc^2$ si trova γ , e quindi β

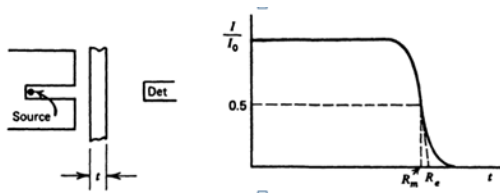


Figura 4 – Intensità relativa delle particelle incidenti in funzione della distanza attraversata

Ne risulta che, poiché S è proporzionale alla densità ρ del materiale attraversato, $R \propto 1/\rho$. Sperimentalmente, poiché la perdita di energia nell'attraversamento è un processo statistico, si definisce **range medio** R_m lo spessore di materiale necessario a ridurre di metà l'intensità delle particelle incidenti (figura 4). Il **range estrapolato** R_e è invece il punto di intersezione tra l'asse x e la tangente a $y = 0.5$ nel grafico $I_{out}/I_{in}(x)$, mentre il **range mas-**

simo è lo spessore necessario a bloccare completamente la radiazione.

Numericamente, una particella α in aria ($p = 1$ bar) ha una perdita di energia media² di $\sim 110 \text{ MeV m}^{-1}$, quindi particelle con energie dell'ordine di qualche MeV avranno range di pochi centimetri.

DOMANDA 4. Descrivere brevemente la curva di Bragg.

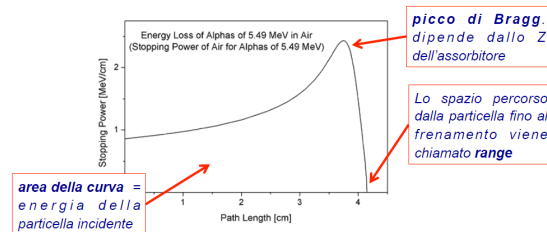


Figura 5 – Curva di Bragg per particelle α di 5.49 MeV in aria.

La quantità di energia persa per unità di lunghezza da una particella nell'attraversare un certo materiale è detta *stopping power* S :

$$S = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

Il grafico di S in funzione della distanza x attraversata è detto **curva di Bragg** e ha l'andamento di figura 5.

All'aumentare di x la particella rallenta, aumenta la probabilità di interazione con gli atomi del mezzo e di conseguenza S sale

($d\mathcal{E}/dx \propto 1/\beta^2$) fino a raggiungere un picco (il **picco di Bragg**) la cui forma e posizione *non* dipende dall'energia iniziale della radiazione. Dopodiché la particella giunge a fermarsi, e S si annulla. La distanza a cui ciò succede è detta **range** R :

$$R = \int_{\mathcal{E}_0}^0 \left(\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^{-1} d\mathcal{E}$$

dove \mathcal{E}_0 è l'energia iniziale della radiazione, data dall'area della curva di Bragg:

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^R \frac{d\mathcal{E}}{dx} dx$$

DOMANDA 5. Cosa dice la **regola di Bragg-Kleeman** per i range? Da dove deriva?

La regola di Bragg-Kleeman costituisce una relazione approssimata tra la lunghezza del range in due materiali i e j , a parità di particella incidente:

$$\frac{R_i}{R_j} \sim \frac{\rho_j \sqrt{A_i}}{\rho_i \sqrt{A_j}} \longrightarrow \frac{R_i \rho_i}{\sqrt{A_i}} \sim \frac{R_j \rho_j}{\sqrt{A_j}} \longrightarrow \frac{R \rho}{\sqrt{A}} \sim \text{const.} \quad (1)$$

dove ρ è la densità del materiale assorbitore, A è il suo numero di massa ed R è il range ad esso relativo. L'approssimazione è particolarmente valida se $A_i \sim A_j$.

La regola di Bragg-Kleeman deriva da considerazioni semi-empiriche unite alla formula di Bethe-Bloch per lo stopping power nel caso di particelle cariche veloci (in cui è valida l'approssimazione di elettroni "fermi durante le interazioni" nel materiale assorbitore):

$$S = -\frac{d\mathcal{E}}{dx} \propto \underbrace{\left(\frac{z^2}{\beta^2} \right)}_{\text{part.}} \underbrace{\left(\rho \frac{Z_m}{A_m} \right)}_{\text{mat.}} F(\beta, \gamma)$$

²Fonte: <http://www.rroij.com/open-access/alpha-particle-stopping-powers-in-air-and-argon.pdf>

Tale relazione è sensata: $R \propto 1/\rho$, dato che un materiale di densità maggiore offre più probabilità di interazione (e quindi di perdita di energia) ad una particella incidente.

La proporzionalità diretta di R con il numero di massa atomica A si può poi spiegare pensando che, a parità di densità e volume di un materiale, aumentare A riduce il numero di atomi per unità di volume, e con esso la probabilità di interazioni. Allo stesso tempo, tuttavia, il raggio (in senso semiclassico) degli atomi è proporzionale ad A - e perciò cresce la sezione d'urto con gli atomi. Combinando i due effetti si ottiene $R \propto \sqrt{A}$.

Appendice

Se non sono disponibili i dati di stopping power per un materiale composto, si può stimare S nell'ipotesi che questo sia additivo rispetto alla composizione dell'assorbitore:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_C = N_C \sum_i W_i \frac{1}{N_i} \left(\frac{dE}{dx}\right)_i, \quad (2)$$

L'indice C è per il materiale composto e i per i costituenti. N_C e N_i sono le densità numeriche e W_i è un peso che rappresenta la frazione di elemento i -esimo rispetto al totale.

DOMANDA 6. *Descrivere la legge dell'assorbimento dei fotoni nella materia e il coefficiente di assorbimento.*

Nell'attraversare un materiale di spessore x un fotone ha una certa probabilità di essere assorbito o diffuso, mediante effetto fotoelettrico, scattering Compton o creazione di coppie. Un fascio di fotoni, perciò, subisce una attenuazione di intensità nel passaggio attraverso un mezzo. Detta σ la sezione d'urto totale dell'interazione, dopo uno spessore infinitesimo dx si ha una variazione dI dell'intensità data da:

$$dI = -N\sigma I dx \quad (3)$$

Integrando l'equazione differenziale si ottiene:

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} \quad (4)$$

Tale relazione è rappresentata in figura 6. Equivalentemente, poiché I è proporzionale al numero N di fotoni nel fascio, possiamo scrivere:

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}. \quad (5)$$

Il **coefficiente di assorbimento** μ dipende dall'energia cinetica del fotone e dalle caratteristiche del materiale attraversato, ed è dato dalla somma di 3 coefficienti relativi alle 3 interazioni possibili tra fotone e materia:

$$\mu = \mu_{\text{fotoelettrico}} + \mu_{\text{compton}} + \mu_{\text{pair production}}$$

Spesso si riporta μ diviso per la densità ρ del materiale attraversato (in unità $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$), detto **coefficiente di assorbimento massivo**, e si esprime di conseguenza lo spessore x in g cm^{-2} :

$$N(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\rho}(\rho x)\right)$$

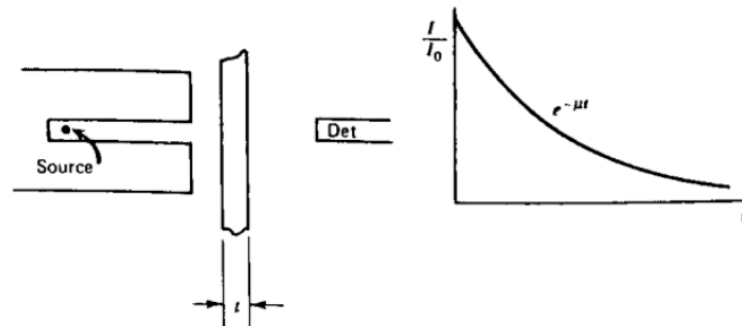


Figura 6 – Intensità relativa per un fascio di fotoni al variare dello spessore del materiale assorbitore

DOMANDA 7. Che cos'è l'effetto fotoelettrico e quale ruolo ha nella perdita di energia dei fotoni che attraversano la materia?

Un fotone di energia \mathcal{E}_γ può essere assorbito da un atomo del mezzo attraversato, cedendo completamente la sua energia e causando l'espulsione di un elettrone con energia cinetica T_e :

$$T_e = \mathcal{E}_\gamma - B_e - \mathcal{E}_R$$

dove B_e è l'energia di legame dell'elettrone, e \mathcal{E}_R è un contributo, in genere trascurabile, di energia ceduta al nucleo ("energia di rinculo"). Tale processo produce uno ione:



L'effetto fotoelettrico avviene con una probabilità p_{ph} che è proporzionale alle "dimensioni" dei nuclei del materiale attraversato - ossia al numero atomico Z degli atomi di cui è composto - e inversamente proporzionale all'energia \mathcal{E}_γ del fotone incidente:

$$p_{\text{ph}}(\mathcal{E}_\gamma) \propto \frac{Z^{4.5}}{\mathcal{E}_\gamma^{3.5}}$$

L'interazione fotoelettrica è perciò molto probabile per materiali pesanti e basse energie, e in tali condizioni costituisce la causa dominante dell'attenuazione di un fascio di fotoni nell'attraversamento di uno spessore di materia (figura 8).

DOMANDA 8. Che cos'è l'effetto Compton e quale ruolo ha nella perdita di energia dei fotoni che attraversano la materia?

Quando una radiazione elettromagnetica si propaga attraverso un mezzo, può capitare che un fotone (di energia \mathcal{E}_γ) "collida" con un elettrone degli atomi del materiale attraversato. Tale interazione devia di un angolo θ significativo la direzione di propagazione del fotone, e ne riduce l'energia a $\mathcal{E}_{\gamma'} < \mathcal{E}_\gamma$:

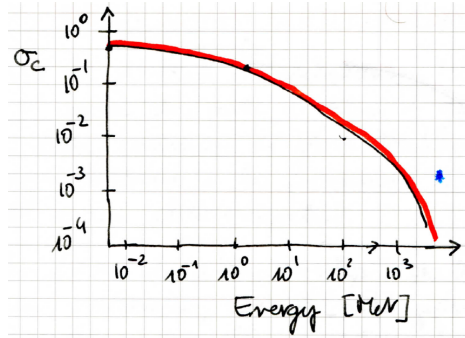


Figura 7 – Sezione d'urto per l'effetto Compton in funzione dell'energia del fotone incidente

Per calcolare $\mathcal{E}_{\gamma'}$ supponiamo che l'elettrone sia libero (approssimazione valida se $\mathcal{E}_\gamma \gg \mathcal{E}_{e^-}$) e modellizziamo il processo con un urto elastico. Imponendo allora la conservazione dell'energia e dell'impulso si trovano le due equazioni:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\gamma + m_e c^2 = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_{\gamma'} \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}_e + \vec{p}_{\gamma'} \end{cases} \quad (8)$$

Isolando \vec{p}_e nella seconda equazione di (8) e uguagliando la norma dei due membri si trova che

$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p_{\gamma'}^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} \cos\theta \quad (9)$$

Ricordando che per un fotone $\mathcal{E} = pc$, moltiplicando entrambi i membri per c^2 si trova che:

$$p_e^2 c^2 = \mathcal{E}_\gamma^2 + \mathcal{E}_{\gamma'}^2 - 2\mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}_{\gamma'} \cos\theta \quad (10)$$

Ricaviamo ora \mathcal{E}_e dalla prima equazione di (8):

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}_{\gamma'} + m_e c^2$$

Elevando al quadrato e sostituendo nella relazione di *mass-shell* per l'elettrone troviamo:

$$\mathcal{E}_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 = \mathcal{E}_\gamma^2 + \mathcal{E}_{\gamma'}^2 - 2\mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}_{\gamma'} \cos\theta + 2\mathcal{E}_\gamma m_e c^2 - 2\mathcal{E}_{\gamma'} m_e c^2 \quad (11)$$

Ricavando ora $p_e^2 c^2$ da (11) e sostituendo in (10), dopo opportune semplificazioni giungiamo alla formula finale per l'energia del fotone dopo uno scattering ad angolo θ :

$$\mathcal{E}_{\gamma'} = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}}{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_{\gamma}}{m_e c^2} \right) (1 - \cos \theta)} \quad (12)$$

In particolare notiamo che l'energia ceduta dal fotone incidente nel corso dell'interazione è massima per $\theta = \pi$ (**Compton edge**). Ciò corrisponde all'energia minima per il fotone scatterato:

$$\mathcal{E}_{\gamma', \min} = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}}{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\gamma}}{m_e c^2}}$$

A seconda della sua energia, un fotone ha una certa probabilità $p_{co}(\mathcal{E}_{\gamma})$ di interagire con la materia per effetto Compton. Come si può notare dal grafico di figura 7, l'effetto Compton è un processo dominante per energie comprese circa tra 1 e 5 MeV, ovvero quando il parametro $r = h\nu/m_e c^2$ è circa pari ad 1.

Poiché ciascun scattering comporta solo una perdita parziale dell'energia iniziale, ciascun fotone può subire multipli eventi Compton nel corso dell'attraversamento.

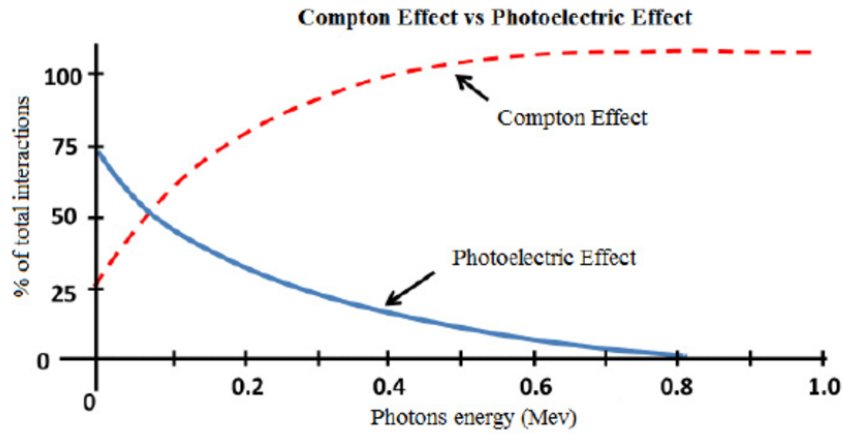


Figura 8 – Andamento della probabilità di effetto fotoelettrico (blu) o Compton (rosso) in funzione dell'energia del fotone incidente

DOMANDA 9. *Che cos'è la produzione di coppie elettrone-positrone e quale ruolo ha nella perdita di energia dei fotoni che attraversano la materia?*

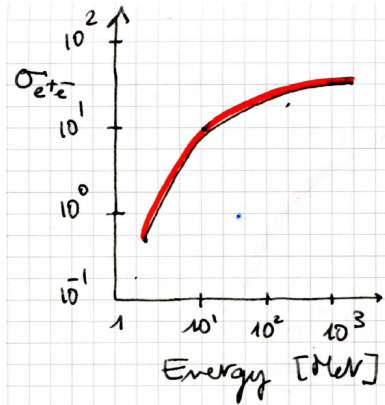
Un fotone di energia \mathcal{E}_{γ} può interagire con gli atomi del materiale attraversato convertendosi in una coppia elettrone-positrone, a cui cede tutta la sua energia. Ciò è possibile solo grazie al campo elettromagnetico generato dai nuclei del mezzo, e la conservazione dell'energia richiede che:

$$\mathcal{E}_{\gamma} > 2m_e c^2 + \mathcal{E}_R \approx 1.022 \text{ MeV}$$

dove $\mathcal{E}_R = 2m_e^2 c^2 / M_{\text{nucleo}}$ è la componente di energia “di rinculo” ceduta al nucleo presso cui si ha l'interazione (generalmente trascurabile, visto che $M_{\text{nucleo}} \gg m_e$).

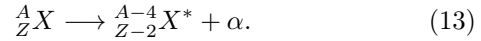
Sperimentalmente si osserva che la probabilità p_{pp} che un fotone produca una coppia cresce all'aumentare di \mathcal{E}_{γ} , e la *pair-production* diviene il fenomeno dominante per $\mathcal{E}_{\gamma} > 5 \div 10 \text{ MeV}$ (dove il parametro $r = h\nu/m_e c^2$ è maggiore di 2). Inoltre, $p_{pp} \propto Z_m^2$, con Z_m numero atomico degli atomi del materiale assorbitore. La pair production, perciò, è notevolmente importante per materiali pesanti.

DOMANDA 10. Descrivere sinteticamente il decadimento α e il decadimento β .



I nuclei instabili, per loro natura, decadono muovendosi verso specie nucleari più stabili attraverso due processi principali: il **decadimento α** ed il **decadimento β** .

Il *decadimento α* avviene quando un nucleo di massa A e numero atomico Z emette un **nucleo di He-4**, trasformandosi in un nucleo di massa $A - 4$ e numero atomico $Z - 2$:



Il decadimento α è tipico di nuclei pesanti, con alto A , che avendo un raggio grande tendono a spezzarsi in quanto le forze nucleari non riescono a compensare completamente la repulsione coulombiana dei protoni “più esterni”. Si tratta di un processo a 2 corpi: i prodotti del decadimento (α e “nucleo figlio” d) si ripartiscono l’energia disponibile Q

(detta Q -valore della reazione) in modo inversamente proporzionale alla loro massa, secondo la legge:

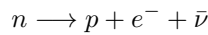
$$\mathcal{E}_\alpha = Q \frac{M_d}{m_\alpha + M_d} \approx Q \frac{A-4}{A} \quad (14)$$

da cui \mathcal{E}_α è solo leggermente minore di Q .

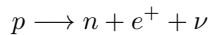
L’energia delle particelle α emesse varia tra $4 \div 9$ MeV, e corrisponde a decadimenti con tempi di dimezzamento molto variabili, da 10^{-7} secondi a 10^{10} anni. Si tratta di radiazioni poco penetranti, che non possono attraversare nemmeno la pelle umana.

Con *decadimento β* si intendono due processi che modificano il numero atomico Z lasciando la massa atomica A quasi costante:

- Decadimento β^- , che avviene quando un nucleo di massa A e numero atomico Z trasforma un neutrone in un protone (β^-), emettendo **un elettrone ed un antineutrino**. Il nucleo finale ha la stessa massa e numero atomico $Z + 1$:



- Decadimento β^+ , in cui un protone si trasforma in un neutrone (β^+), emettendo **un positrone ed un neutrino**. Il nucleo finale ha la stessa massa e numero atomico $Z - 1$:



Una variante è la **cattura elettronica**, in cui un elettrone delle shell interne viene assorbito da un protone che si trasforma in un neutrone emettendo un neutrino



Il decadimento β è in ogni caso un processo a 3 corpi: l’elettrone emesso ha quindi uno spettro continuo di energia, che può variare tra 10 keV e 1 MeV. Le radiazioni β sono più penetranti delle α , ma possono essere efficacemente schermate da piccoli spessori di metalli.

DOMANDA 11. Definire la **radiazione ionizzante**. Quali sono i principali tipi di radiazioni ionizzanti?

Con il termine **radiazione ionizzante** si indicano radiazioni elettromagnetiche oppure particelle di energia sufficientemente elevata da causare una consistente ionizzazione degli atomi del materiale attraversato.

Sono considerate radiazioni ionizzanti: le radiazioni elettromagnetiche di bassa lunghezza d’onda (in ordine di energia: ultravioletto, raggi X, raggi γ), le particelle α , gli elettroni veloci, i neutroni, i raggi cosmici...

Le radiazioni ionizzanti possono essere generate da decadimenti radioattivi, collisioni tra particelle di alta energia, accelerazione o decelerazione di elettroni veloci...

DOMANDA 12. Come si presenta un tipico spettro energetico di una radiazione α da sorgente?

Trattandosi di un processo a due corpi, l'energia della particella α prodotta dal decadimento ha un valore ben definito, pari a una frazione dell'energia totale disponibile Q . Detto X il nucleo originario che si scinde in un nucleo figlio Y e una particella α , si ha:

$$\mathcal{E}_\alpha = Q \frac{m_Y}{m_\alpha + m_Y} \approx Q \frac{A-4}{A} \quad (16)$$

dove l'approssimazione è giustificata dal fatto che $m_Y \gg m_\alpha$.

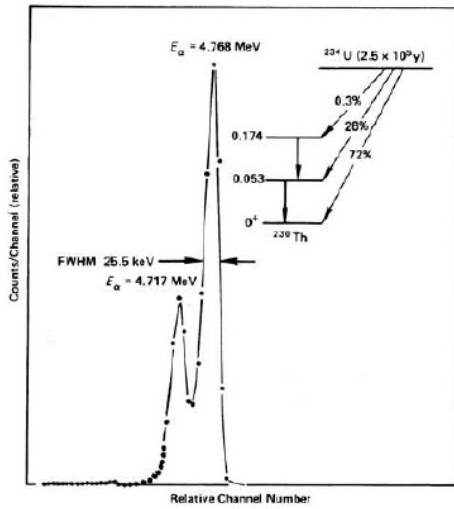


Fig. 4.6. Typical Alpha Spectrum from ^{234}U Showing Alphas from the Two States in ^{230}Th .

Figura 9 – Spettro dei due possibili decadimenti α di una sorgente di U-234.

Sperimentalmente, lo spettro di un decadimento α si presenta sotto forma di picchi centrati attorno alle energie \mathcal{E}_α dei possibili decadimenti, con $\mathcal{E}_\alpha = 4 \div 9 \text{ MeV}$. Le particelle α hanno uno Stopping Power S (perdita di energia per unità di lunghezza) molto elevato, e perciò cedono tutta la loro energia al mezzo attraversato in un range dell'ordine di poche decine di micron (per un materiale mediamente denso).

Ciascun picco ha una “larghezza” (FWHM) dovuta alla risoluzione finita del rivelatore, e può presentare una piccola coda nella direzione delle basse energie a causa del volume finito della sorgente, per cui parte dell'energia viene dispersa e non viene raccolta.

Infine, \mathcal{E}_α è correlata (attraverso il fenomeno quantistico e probabilistico dell'effetto tunnel) anche al tempo medio di decadimento τ , il quale è tanto più lungo, quanto più l'energia di α è bassa e viceversa.

DOMANDA 13. Come si presenta un tipico spettro energetico di una radiazione β da sorgente?

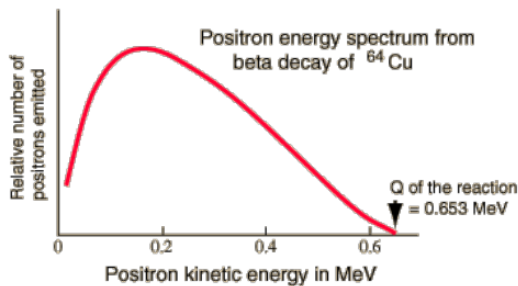
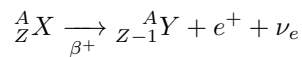
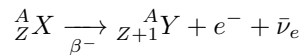


Figura 10 – Spettro energetico per un positrone emesso in un decadimento β^+

Un decadimento β è un processo a 3 corpi in cui un nucleo decade in un isobaro più stabile emettendo un elettrone e un antineutrino elettronico (β^- , il numero atomico aumenta di 1) o un positrone e un neutrino elettronico (β^+ , il numero atomico diminuisce di 1):

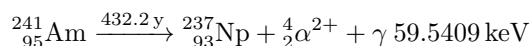


La conservazione del momento e dell'energia non consentono perciò di fissare in modo univoco la distribuzione dell'energia nei prodotti del processo. Perciò lo spettro energetico dell'elettrone (o del positrone) è continuo (figura 10), e solitamente viene caratterizzato mediante il

suo valor medio (dell'ordine di 10 keV) o il suo valore massimo, detto di *end-point* (< 1 MeV), prossimo al Q -valore della reazione.

DOMANDA 14. *Che tipi di radiazione ionizzante possiamo misurare in presenza di una sorgente di Am-241?*

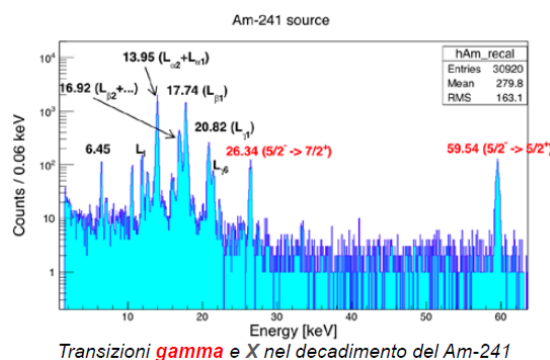
$^{241}_{95}\text{Am}$ è un isotopo artificiale transuranico instabile dell'Americio, che tende a decadere emettendo una particella α verso uno stato eccitato del $^{237}_{93}\text{Np}$, isotopo del Nettunio, che raggiunge rapidamente il suo stato fondamentale emettendo un raggio γ :



Il decadimento α avviene con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 432.6\text{y}$ ($Q_\alpha = 5637.8\text{KeV}$) e presenta uno spettro energetico con tre picchi principali, non equiprobabili, associati rispettivamente al secondo, quarto e sesto stato eccitato di ^{237}Np . L'energia più probabile per l' α è 5.486 MeV (85%), seguita da 5.443 MeV (13%) e 5.388 MeV (2%) - in altre parole i tre picchi sono tra $5.3 \div 5.5$ MeV, e i due più luminosi distano circa 40 keV l'uno dall'altro.

Più raramente il decadimento del nettunio verso il suo stato fondamentale porta all'emissione di raggi X di energie caratteristiche 13.9 keV, 17.8 keV e 26.4 keV, dovute alla redistribuzione degli elettroni sugli orbitali atomici.

Riepilogando, una sorgente di Am-241 emette α , X e γ .



DOMANDA 15. *Che tipi di radiazione ionizzante possiamo misurare in presenza di una sorgente di Na-22?*

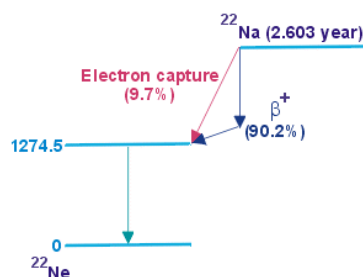


Figura 11 – Schema del decadimento del Na-22

Na-22 è un isotopo instabile del sodio, che decade β^+ ad uno stato eccitato del Neon-22, che raggiunge a sua volta il livello fondamentale con l'emissione di un fotone γ a 1.275 MeV. Il positrone emesso dal decadimento β si annichila con un elettrone di un atomo circostante e produce due fotoni γ a 511 keV. Il Na-22, perciò, costituisce una sorgente di soli raggi γ , che originano uno spettro con due soli fotopicchi rilevanti.

DOMANDA 16. *Cosa sono i raggi X caratteristici? E i γ caratteristici?*

A seguito del decadimento α o β , il nucleo figlio ha un numero atomico Z diverso da quello di partenza: la differente carica nucleare origina un riarrangiamento degli orbitali atomici con conseguente emissione di fotoni per transizione tra gli stati atomici (**raggi X**, con energia tra 0.1 keV \div 100 keV), come avviene ad esempio nel decadimento dell'Am-241.

I **raggi γ** sono i fotoni corrispondenti alle transizioni tra stati nucleari di energia quantizzata,

come descritti dal modello a shell del nucleo. L'energia del fotone è quindi ben definita e caratteristica del nucleo da cui è stata emessa (γ **caratteristici**), ed è generalmente compresa tra $0.1 \text{ MeV} \div 10 \text{ MeV}$.

La misura dei picchi X e γ caratteristici permette perciò di descrivere nel dettaglio il decadimento che li origina.

DOMANDA 17. *Descrivere brevemente la legge fondamentale del decadimento radioattivo e le grandezze caratteristiche associate.*

Il decadimento radioattivo è un fenomeno statistico: in una popolazione di N nuclei a $t = 0$, ciascuno di essi ha una certa probabilità λ (**costante di decadimento**) di decadere nell'unità di tempo. In un intervallo infinitesimo dt si ha perciò una variazione dN del numero di nuclei:

$$dN(t) = -\lambda N(t)dt \quad (17)$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene la **legge esponenziale del decadimento**:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Il valore $\tau = 1/\lambda$ è detto *vita media*: e rappresenta il tempo necessario, in media, perché la popolazione si riduca di un fattore e . Moltiplicando per $\ln 2$ si ottiene il **tempo di dimezzamento**, pari all'intervallo necessario (in media) perché il numero di nuclei iniziali si *dimezzi*:

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2$$

Si definisce poi l'**attività** \mathcal{A} come il numero di decadimenti al secondo:

$$\mathcal{A} = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N, \quad (18)$$

\mathcal{A} si misura in **Becquerel** ($1 \text{ Bq} = 1 \text{ decay/s}$). \mathcal{A} è sperimentalmente misurabile se si conosce il numero di radiazioni emesse per ogni decadimento.

Anche per l'attività vale una legge esponenziale:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t}$$

DOMANDA 18. *Quali sono le principali fonti di radiazioni ionizzanti con cui possiamo venire a contatto nella vita di tutti i giorni?*

Le radiazioni possono essere generate da:

- decadimenti radioattivi (alfa, beta, gamma);
- collisioni fra particelle ad alte energie;
- accelerazione e decelerazione di particelle cariche (tipicamente elettroni) veloci.

Ogni individuo è esposto naturalmente a radiazioni ionizzanti che possono arrivare da:

- radioisotopi primordiali presenti nell'ambiente (K-40, famiglie radioattive dell'Uranio e del Torio), il classico esempio è appunto il potassio contenuto nelle banane $\sim 80\%$;
- raggi cosmici diretti (muoni) o sottoprodotti (n , γ) $\sim 15\%$;
- radioisotopi artificiali dispersi nell'ambiente a seguito di incidenti o disastri naturali o test nucleari $\sim 5\%$.

Inoltre, è necessario tener conto di particolari situazioni di esposizione a radiazioni, come in lavori dove ne è previsto l'utilizzo od esami medici radiologici.

DOMANDA 19. *Cosa si intende per dosimetria? Descrivere le principali grandezze dosimetriche (attività e dose).*

La **dosimetria** si occupa di misurare gli effetti delle radiazioni ionizzanti sui materiali attraversati, ed in particolare sui **tessuti biologici**.

Le principali grandezze di interesse in dosimetria sono:

- l'**attività** di un radionuclide;
- la **dose**.

L'**attività** di un radionuclide (nucleo di un atomo radioattivo) è il numero di disintegrazioni (decadimenti) che si verificano nell'unità di tempo. L'unità di misura utilizzata è il **Becquerel**: 1 Bq corrisponde ad una disintegrazione al secondo. In passato si utilizzava il **Curie** (Ci), corrispondente all'attività di un grammo di radio puro. Vale la conversione $1 \text{ Ci} = 37 \text{ MBq}$.

La **dose** misura la quantità di energia/danno trasferito al materiale (in particolare biologico) per unità di massa. Distinguiamo tra:

- **dose assorbita**: quantità di energia ceduta dalla radiazione ionizzante in un certo materiale per unità di massa; l'unità di misura è il **Gray**: la dose assorbita di 1 Gy corrisponde ad un J assorbito per kg di materia. In passato si usava anche il rad (unità c.g.s), pari ad un centesimo di Gray: $1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$;
- **dose equivalente**: quantifica il danno biologico reale provocato dalla radiazione ionizzante, ed è pari alla dose assorbita moltiplicata per un opportuno fattore di peso W_R . W_R è posto pari a 1 per raggi $X - \gamma$, e definito relativamente per le altre tipologie di radiazione (es. neutroni, protoni, $\alpha...$). Denotando allora con D_T la dose media assorbita da un certo tessuto T , la dose equivalente H_T si calcola come:

$$H_T = D_T \cdot W_R \quad (19)$$

L'unità di misura è il **Sievert** (Sv).

- **dose efficace**: è la somma pesata delle dosi equivalenti di una certa radiazione sui diversi tessuti e organi del corpo umano (il peso è dato da un fattore che quantifica il danno in base all'organo colpito).

DOMANDA 20. *In cosa si differenzia la dose assorbita dalla dose equivalente? Quali sono i fattori principali da considerare nell'esposizione alla radiazione ionizzante?*

Mentre la dose assorbita rappresenta la quantità di energia ceduta dalla radiazione ionizzante in un certo materiale per unità di massa, la dose equivalente è più legata al danno biologico reale della radiazione ionizzante ed è infatti pari alla dose assorbita moltiplicata per un opportuno fattore di peso W_R che ne quantifica la pericolosità. Per un certo tessuto T , la dose equivalente è

$$H_T = D_T \cdot W_R \quad \text{con } D_T \text{ dose assorbita media.} \quad (20)$$

I fattori da considerare nel computo della dose ricevuta sono:

- *distanza dalla sorgente*: l'intensità di radiazione va come $1/r^2$;
- *tempo di esposizione*: la dose è cumulativa, maggiore è l'attività, minore è il tempo massimo di esposizione consentito;
- *schermatura*: l'intensità della radiazione X, γ decresce esponenzialmente con lo spessore del materiale attraversato.

DOMANDA 21. *A quanto ammonta la dose equivalente media annua assorbita da un individuo e a cosa è dovuta?*

Ogni individuo è esposto naturalmente a radiazioni ionizzanti che possono arrivare da:

- radioisotopi primordiali presenti nell'ambiente (K-40, famiglie radioattive dell'Uranio e del Torio), il classico esempio è appunto il potassio contenuto nelle banane $\sim 80\%$;
- raggi cosmici diretti (muoni) o sottoprodotti (n , γ) $\sim 15\%$;
- radioisotopi artificiali dispersi nell'ambiente a seguito di incidenti o disastri naturali o test nucleari $\sim 5\%$.

A questa dose va aggiunta l'eventuale dose derivante da situazioni particolari, come lavori con esposizioni a sorgenti di radiazioni (radiologo, minatore, operatore in centrale nucleare o in laboratori di fisica nucleare, pilota di aereo...) o esami medici radiologici (radiografie, TAC...). La dose equivalente media annua è pari a $2.5 \div 3$ mSv.

DOMANDA 22. *Cosa si intende, per un rivelatore di radiazione, lavorare in current mode o in pulse mode? Indicare un uso tipico per le due configurazioni.*

Un rivelatore di radiazione consiste in un apparato in grado di raccogliere e quantificare l'energia \mathcal{E}_{rel} liberata dall'interazione di una particella con la materia, che è associata alla produzione di una certa quantità di cariche libere nel mezzo. Vi sono due strategie principali per far ciò:

1. **Current mode:** si misura la corrente $I(t)$ prodotta dalla raccolta delle cariche libere su due elettrodi posti a una certa ΔV . Se in un tempo Δt viene raccolta una carica ΔQ , allora la corrente misurata I_{exp} è data da:

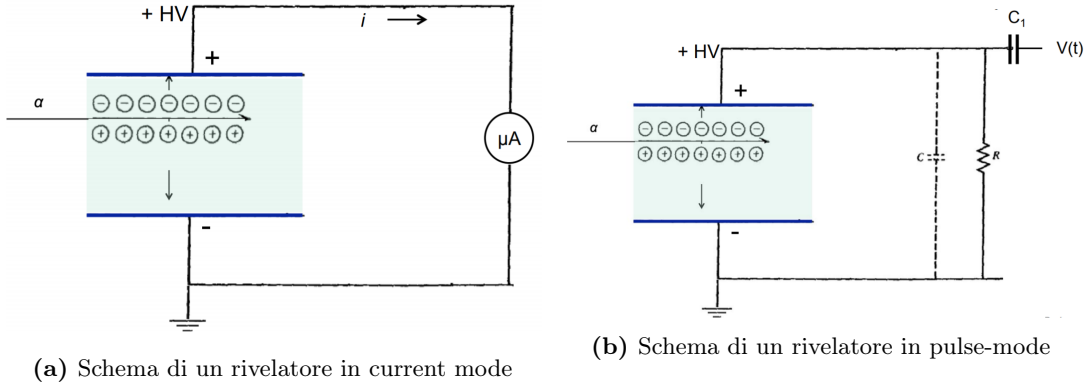
$$I_{\text{exp}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Poiché ΔQ è proporzionale all'energia $\Delta \mathcal{E}_{\text{rel}}$ rilasciata nell'intervallo Δt , si ha:

$$I_{\text{exp}} \propto \frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{exp}}}{\Delta t}$$

Scegliendo un Δt sufficientemente ampio la misura di corrente è relativa alla carica liberata da più interazioni. Calibrando con una sorgente nota è perciò possibile determinare in modo preciso il numero di disintegrazioni per unità di tempo, cosa che viene sfruttata nei *contatori Geiger*, e nei *dosimetri* utilizzati in radioprotezione. Il *current mode* è la configurazione più adatta a sorgenti particolarmente intense.

2. **Pulse mode:** si genera un segnale $V(t)$ in tensione ad ogni interazione, in modo da ottenere informazioni specifiche sui singoli eventi. Ciò è utile per misurare l'energia di ciascuna radiazione rivelata, e avere a disposizione l'andamento funzionale delle $V(t)$ permette di esaminare coincidenze tra più sensori. Il segnale $I(t)$ in corrente viene convertito in $V(t)$ in genere mediante un circuito RC, il cui tempo caratteristico va deciso in fase di progettazione a seconda delle misure che si vogliono svolgere. Nel dettaglio, la corrente $I(t)$ deposita una carica Q su un condensatore C , generando una tensione $V = Q/C$ ai suoi capi.



DOMANDA 23. Che influenza hanno il tempo caratteristico di raccolta della carica e il tempo caratteristico del preamplificatore sulla forma del segnale in tensione?

In un rivelatore in *pulse-mode*, il segnale in corrente di durata t_c (collection time) prodotto dalla radiazione viene convertito in un segnale $V(t)$ in tensione da un circuito RC con tempo caratteristico τ . L'andamento di $V(t)$ dipende fortemente dal rapporto tra t_c e τ :

- Se $\tau \ll t_c$, allora il condensatore si scarica molto velocemente rispetto al segnale, e quindi la tensione ai suoi capi è proporzionale alla corrente misurata: $V(t) \propto I(t)$
- Se $\tau \gg t_c$, allora il condensatore si scarica molto lentamente rispetto al segnale. $V(t)$ cresce allora velocemente fino a un massimo $V(t_c) \propto Q/C$, per poi decrescere lentamente ($V(t) \sim 0$ per $t \sim 3\tau$).

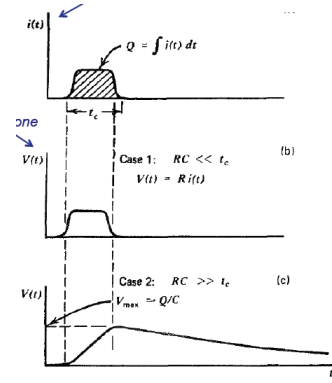


Figura 13 – Andamento di $V(t)$ a seconda del rapporto t_c/τ

DOMANDA 24. Che differenza c'è tra un preamplificatore in corrente e uno in tensione?

Un preamplificatore è un circuito che permette di amplificare il segnale $V_{in}(t)$ prodotto dal rivelatore non appena viene ottenuto, in modo da massimizzare il rapporto segnale/rumore. Vi sono due strategie per farlo:

- **Voltage-sensitive:** si amplifica direttamente $V_{in}(t)$, per esempio mediante un operazionale in configurazione invertente (figura 14a). Vale allora:

$$v_{out} = a(v_p - v_n) - av_n$$

dove $a \gg 1$, e perciò l'amplificazione è data da:

$$A = -\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow V_{out} = AV_{in}$$

- **Charge-sensitive:** la corrente in ingresso carica un condensatore con una certa carica Q , producendo un segnale V_{out} ad essa proporzionale. Facendo riferimento alla figura 14b, assumendo $R_f = \infty$, possiamo vedere la capacità C_f in parallelo tra ingresso e uscita dell'operazionale come una capacità C_{eq} in ingresso pesata dal fattore $1 + a$ (teorema di Miller):

$$C_{eq} = C_f(1 + a)$$

Complessivamente, perciò, tra gli ingressi dell'operazionale è collegata una capacità $C_i + C_{eq}$, su cui si accumula una carica Q , con $Q/(C_i + C_{eq}) = V_{in}$. Mettendo tutto insieme giugniamo a:

$$V_{out} = -av_n = -aV_{in} = -a \frac{Q}{C_i + C_f(1+a)} = -\frac{Q}{\frac{C_i}{a} + \left(\frac{1+a}{a}\right) C_f}$$

Dato che $a \gg 1$, e $C_i \ll C_f$, possiamo trascurare il primo termine al denominatore, e approssimare $(1+a)/a \approx 1$:

$$V_{out} \approx -\frac{Q}{C_f}$$

Tale modalità di preamplificazione ha il vantaggio di avere un'uscita molto stabile, dato che dipende solo da una capacità che si può scegliere in maniera precisa.

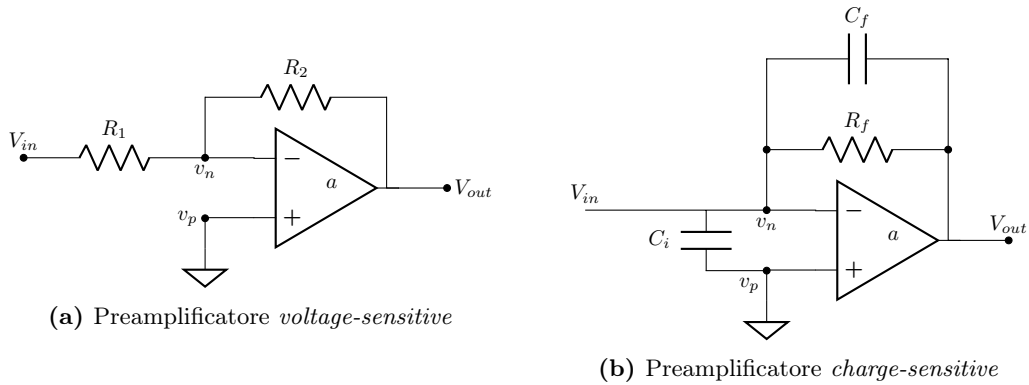


Figura 14 – Tipologie di preamplificatori

DOMANDA 25. Descrivere brevemente il principio di funzionamento di uno *shaping amplifier*.

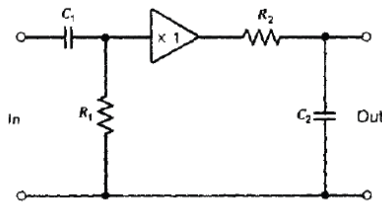


Figura 15 – Schema circuitale di uno *shaping amplifier*

Uno **shaping amplifier** è un modulo elettronico che manipola il segnale in arrivo dal preamplificatore attuando due operazioni:

- Amplificazione e adattamento al range di ingresso del modulo DAQ di acquisizione dati
- *Shaping*, ossia modulazione della forma di V_{in} al fine di evitare la sovrapposizione di segnali di più eventi

La parte di *shaper* è realizzata mediante due filtri, ossia una coppia $CR - RC$ (differenziatore e integratore), tra i quali viene posto un operazionale che funge da adattatore di impedenza, come visibile in figura 15. Se $R_1 C_1 = R_2 C_2 = \tau$, dando in input un segnale a gradino ($V_{in} = H(t)$) si ottiene

in output un'esponenziale che decresce rapidamente:

$$V_{out} \propto V_{in} te^{-\frac{t}{\tau}}$$

Perciò, lo *shaper* è sensibile alle *variazioni repentine* del segnale in ingresso, corrispondenti alla rivelazione di nuovi eventi.

Il preamplificatore genera tuttavia segnali che salgono rapidamente e decrescono lentamente, che vengono formati dallo *shaper* in un andamento gaussiano. Può capitare (figura 16) che $V_{out}(t) < 0$ per un tempo significativo. Tale effetto, detto di “pole zero”, può essere corretto inserendo

una resistenza variabile (trimmer) R_{pz} in parallelo a C_1 e regolandola opportunamente. Un andamento maggiormente gaussiano per V_{out} si può ottenere collegando vari $CR - RC$ in serie.

La larghezza temporale dei segnali in uscita può poi essere modificata attraverso il controllo dello *shaping time* τ e la regolazione della polarità dei segnali in ingresso. Mediante τ e altri controlli, infine, è possibile modificare anche la banda passante del circuito (figura 17).

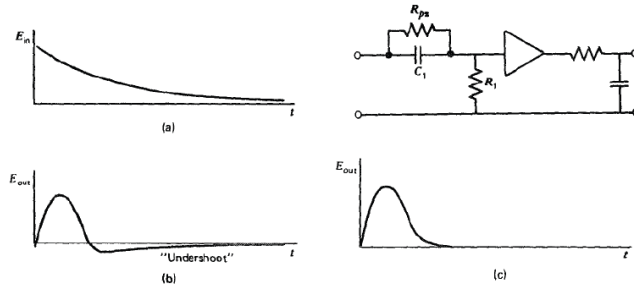


Figura 16 – Segnale di preamp in ingresso (a), segnale in uscita con evidente *undershoot* (b), circuito con trimmer di pole-zero in parallelo a C_1 (c), segnale finale compensato (d).

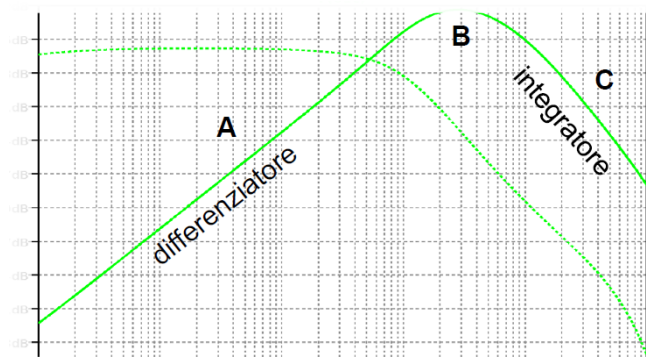


Figura 17 – Plot in scala logaritmica (su entrambi gli assi) della risposta in frequenza $H(\omega)$ dello *shaper*. Il circuito si comporta in A come un differenziatore, in C come un integratore, mentre in B si ha un'amplificazione quasi costante (banda passante).

DOMANDA 26. Descrivere brevemente i blocchi logici dell'elettronica di acquisizione di un rivelatore per radiazione. Dare un esempio tra quelli visti in laboratorio.

Un rivelatore per radiazione consiste generalmente nei seguenti blocchi logici (figura 18):

1. **Detector:** composto di un materiale attivo/apparato per la raccolta dell'energia liberata dalla radiazione (es. camera di ionizzazione con elettrodi, blocco di scintillatore con fotomoltiplicatori...)
2. **Preamplifier:** circuito, generalmente integrato nel detector, che esegue una immediata amplificazione del segnale al fine di massimizzare il rapporto segnale/rumore.
3. **Front-end Electronics (FEE):** moduli per la manipolazione e analisi preliminare del segnale. Consistono in:
 - **Shape amplifier:** circuito che amplifica il segnale e ne ottimizza la forma per l'acquisizione
 - **Acquisizione dati (DAQ):** il segnale viene campionato da un **Analog Digital Converter (ADC)** che lo porta da analogico a digitale. Un **MultiChannel Analyzer (MCA)** raccoglie segnali impulsivi in *bin* a seconda delle loro caratteristiche (per esempio la loro altezza, proporzionale all'energia in certi setup). L'acquisizione

può essere condizionata da moduli di **Logica**, che stabiliscono *trigger* per l'accensione della presa dati (come il superamento di una soglia *gate*, o un'avvenuta *coincidenza* tra più sensori). Le informazioni temporali sui singoli segnali sono poi fornite da un modulo di **Timing**. Un Time Amplitude Converter (TAC) è in grado di produrre segnali a durata fissata e precisa, e un Constant Fraction Discriminator (CFD) serve ad associare ogni impulso ad un istante caratteristico e consistente.

- Spesso, specialmente nelle configurazioni più recenti, il segnale preamplificato viene subito digitalizzato (**Digitizer**), o manipolato da uno stesso modulo programmabile (per esempio costituito da un Field Programmable Gate Array - FPGA).
4. **PC** (Back-end electronics): i risultati delle amplificazioni/analisi preliminari sono raccolti e analizzati da un computer con appositi software.

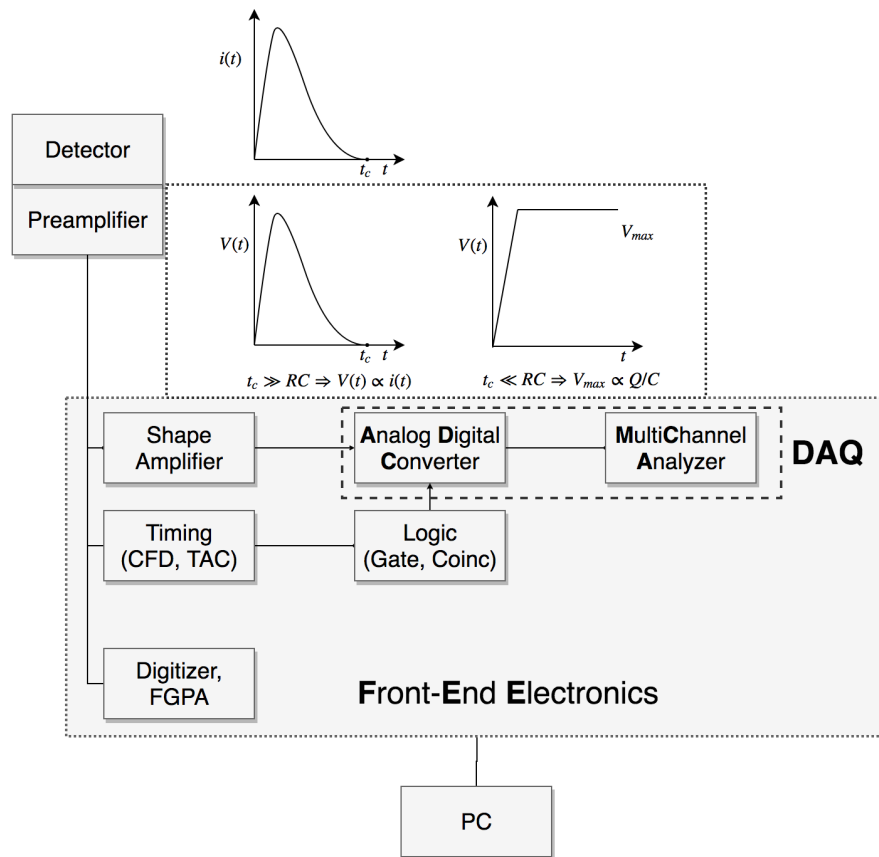


Figura 18 – Schema dei blocchi logici dell'elettronica di acquisizione di un rivelatore per radiazione

DOMANDA 27. Cosa si intende per *efficienza* e *accettanza* di un rivelatore?

L'area dello spettro di energia è proporzionale al numero di particelle che hanno inciso sul rivelatore. Il rapporto tra numero di segnali acquisiti e il numero di particelle incidenti determina l'**efficienza intrinseca** del rivelatore:

$$\epsilon_{\text{riv}} = \frac{N_{\gamma}^{\text{rivelati}}}{N_{\gamma}^{\text{incidenti}}} \quad (21)$$

Contando solo l'area del picco, si ha l'efficienza di fotopicco, mentre quella totale include anche segnali esterni (code, escape peaks, spalla compton...). Per i fotoni, la forte dipendenza dall'energia dei meccanismi di interazione col detector si traduce nella dipendenza dall'energia dell'efficienza intrinseca dei cristalli del rivelatore.

L'area del picco è proporzionale anche al numero di fotoni che sono stati generati dalla sorgente. Il rapporto tra il numero di fotoni che hanno inciso sul rivelatore ed il numero di fotoni generati, definisce l'**accettanza** del rivelatore, che dipende in particolare dall'angolo solido sotteso:

$$\epsilon_a = \frac{N_{\gamma}^{\text{incidenti}}}{N_{\gamma}^{\text{emessi}}}. \quad (22)$$

L'efficienza totale del sistema si ottiene dal prodotto dell'efficienza di rivelazione e dell'accettanza:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{riv}} \cdot \epsilon_a. \quad (23)$$

Riepilogando: l'accettanza (ϵ_a) determina la frazione di radiazione emessa da una sorgente che raggiunge il rivelatore. Di questa solo una parte (efficienza intrinseca ϵ_{riv}) viene effettivamente misurata.

DOMANDA 28. Qual è il significato fisico dei parametri del fit gaussiano di un picco nello spettro di energia di un rivelatore di fotoni/alfa?

Un picco dello spettro in energia di un rivelatore di fotoni/ α presenta una distribuzione approssimativamente gaussiana attorno al valore \mathcal{E}^* della radiazione rivelata. Consideriamo un fit gaussiano con parametri A , μ e σ :

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

Le stime dei parametri consentono di ricavare informazioni sia sulla radiazione incidente che sulle caratteristiche del rivelatore:

- **Media** $\mu \pm \sigma_\mu$, ossia la posizione del centroide della gaussiana, rappresenta il valore più probabile della carica integrata - proporzionale all'**energia** della radiazione rivelata
- **Sigma** $\sigma \pm \sigma_\sigma$, indice della *larghezza* della distribuzione, rappresenta la fluttuazione delle misure di carica attorno al valor medio, ed è legata alla **risoluzione** del detector
- **Costante** $A \pm \sigma_A$, ossia l'altezza della gaussiana, è proporzionale al numero di eventi rivelati, che a sua volta è proporzionale a intensità della sorgente, efficienza del detector e durata della misura.

DOMANDA 29. Descrivere brevemente il principio di funzionamento di una camera a ionizzazione.

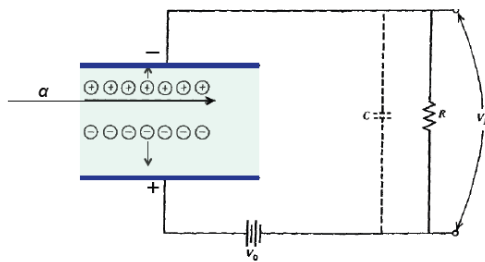


Figura 19 – Schema di una camera a ionizzazione in *pulse-mode*

Una camera a ionizzazione è un tipo di rivelatore di radiazione ionizzante basato sull'uso di un volume attivo di gas immerso in un forte campo elettrico \vec{E} . Una particella di radiazione che attraversa il mezzo ne ionizza alcune molecole, generando così coppie ione⁺-e⁻ che driftano verso gli elettrodi che producono il campo. Ciò origina una corrente misurabile $I(t)$ per un certo tempo Δt , corrispondente alla raccolta di una carica Q :

$$Q = \int_0^{\Delta t} I(t) dt$$

Entro certi limiti sul modulo di \vec{E} , Q risulta proporzionale al numero medio di coppie $\langle N_{\text{pair}} \rangle$ prodotte da una data interazione. Se per formare una coppia è necessaria, in media, un'energia $\langle \mathcal{E}_{\text{pair}} \rangle$ (dell'ordine di $25 \div 35$ eV), e la radiazione ha rilasciato nel gas un'energia \mathcal{E}_{rel} , si ha:

$$Q \sim \langle N_{\text{pair}} \rangle e = \frac{\mathcal{E}_{\text{rel}}}{\langle \mathcal{E}_{\text{pair}} \rangle} e$$

Il segnale in corrente $I(t)$ può poi essere convertito in una tensione $V(t)$ mediante un circuito RC, consentendo al rivelatore di operare in *pulse-mode*.

DOMANDA 30. Cosa dice il **teorema di Ramo**?

Il teorema di Ramo fornisce una formula per calcolare la corrente $i_k(t)$ indotta sull'elettrodo k -esimo dal movimento di una carica q ad una velocità $\vec{v}_q(t)$ in una posizione vicina $\vec{x}_q(t)$. Nello specifico vale:

$$i_k(t) = q \vec{v}_q(t) \cdot \vec{E}_{W_k}(\vec{x}_q(t)) \quad (24)$$

dove $\vec{E}_{W_k}(\vec{x})$, detto *campo di ripesamento*, è il campo elettrico in $\vec{x}_q(t)$ ottenuto rimuovendo la carica in movimento e ponendo a una unità il potenziale dell'elettrodo k e a 0 quello di tutti gli altri elettrodi $j \neq k$. In altre parole, la corrente $i_k(t)$ indotta è proporzionale alla carica q e alla sua velocità di avvicinamento all'elettrodo k stesso, data dal prodotto scalare $\vec{v}_q(t) \cdot \vec{E}_{W_k}$ (che tiene conto anche di eventuali schermature parziali/totali).

Un'applicazione importante per il teorema di Ramo si ha nel calcolo del segnale in corrente prodotto dal drift delle coppie di cariche libere in una camera a ionizzazione.

DOMANDA 31. Descrivere **qualitativamente** lo sviluppo temporale del segnale in tensione in uscita da una camera a ionizzazione.

Consideriamo una particella carica che attraversa il volume attivo di una camera a ionizzazione al tempo $t = 0$, generando n_p coppie ione⁺-e⁻ al suo passaggio. Il campo elettrico nella camera fa sì che le cariche così generate si muovano rispettivamente verso gli elettrodi negativo e positivo, presso cui inducono complessivamente (teorema di Ramo) una corrente $I(t)$. In generale, gli ioni hanno una velocità di drift v_+ molto minore rispetto a quella v_- degli elettroni. Detti allora t_- e t_+ i rispettivi tempi di arrivo agli elettrodi, si avrà $t_- < t_+$.

Supponiamo che il tempo caratteristico τ del circuito RC del preamplificatore sia molto maggiore di t_+ . In tal caso, il condensatore si scarica molto più lentamente della durata del segnale, e perciò $V(t)$ ha il seguente andamento (figura 20b):

- Crescita rapida tra $0 < t < t_-$, dovuta alla sovrapposizione dei segnali indotti dal moto di ioni ed elettroni. Quando gli elettroni vengono raccolti a $t = t_-$ dall'elettrodo negativo cessano di indurre una corrente.
- Tra $t_- < t < t_+$ $V(t)$ cresce più lentamente, per il solo effetto di induzione dovuto al moto (più lento) degli ioni positivi verso l'elettrodo negativo
- $V(t)$ raggiunge un massimo (proporzionale a $n_p e$) a $t = t_+$, quando l'intera carica è stata raccolta. A tal punto $V(t)$ decresce lentamente per la scarica del condensatore C .

Numericamente, t_- è dell'ordine di $1 \div 10 \mu s$, e $t_+ \sim (100 \div 1000)t_-$: per evitare lunghi tempi morti, spesso si sceglie $t_- \ll \tau \ll t_+$ realizzando così un rivelatore *electron-sensitive*, in cui il segnale $V(t)$ raggiunge un massimo a t_- , e poi decresce velocemente. In generale, tuttavia, l'andamento del segnale $V(t)$ in *pulse mode* dipende dalla distanza x della particella incidente dagli elettrodi per $0 < t < t_+$ (ciò avviene sempre in regime *electron-sensitive*), e tale dipendenza scompare solo dopo che tutta la carica è stata raccolta ($t > t_+$).

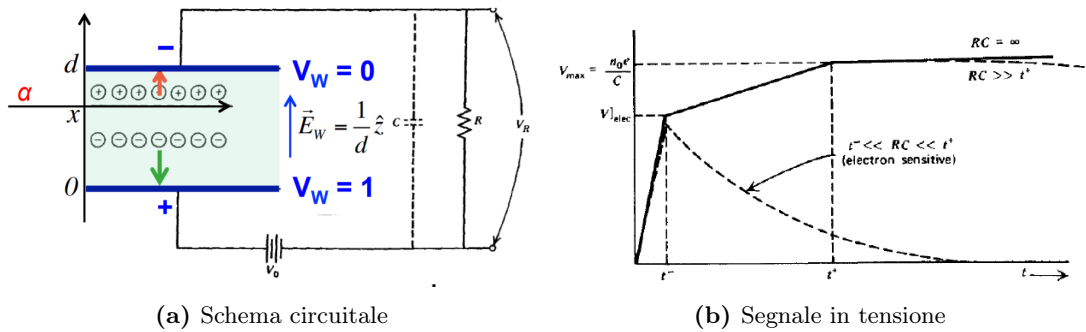


Figura 20 – Camera di ionizzazione: schema circuitale e segnale in tensione.

Appendice: discussione quantitativa. Consideriamo una camera a ionizzazione di larghezza d , con un potenziale V_R tra i due elettrodi (figura 20a). Fissiamo l'origine del sdr $z = 0$ al catodo. Ci concentriamo sugli e^- , che raggiungono il catodo (+), e quindi nell'applicare il teorema di Ramo poniamo $V_W(+) = +1$ e $V_W(-) = 0$. Avremo quindi un campo elettrico di *ripesamento* \vec{E}_w dato da:

$$\vec{E}_w = -\frac{1}{d}\hat{z}$$

Ipotizziamo che una particella α attraversi la camera a $z = x$, producendo a tale altezza n_0 cariche libere negative (elettroni) e positive (ioni), che si muovono con le velocità di drift date da:

$$\vec{v}_+ = -\mu_I \mathcal{E} \hat{z}; \quad \vec{v}_- = \mu_e \mathcal{E} \hat{z}$$

dove $\mathcal{E} = \vec{E}/p$ è il campo elettrico **ridotto**, con \vec{E} il campo elettrico nella camera (prodotto da V_R), e p la pressione del gas. Entrambe le cariche producono segnali sul catodo, e di conseguenza dobbiamo tenere conto di entrambe.

Gli elettroni e gli ioni raggiungeranno i rispettivi elettrodi dopo, rispettivamente, un tempo t^- e t^+ :

$$t^+ = \frac{(d-x)}{v_+} \quad t^- = \frac{x}{v_-}$$

dove si ha immediatamente che $t^+ \gg t^-$ poiché gli ioni si muovono molto più lentamente rispetto agli elettroni. Invertendo tali formule, otteniamo le velocità:

$$\vec{v}_-(t) = -\frac{x}{t^-} \hat{z}; \quad \vec{v}_+(t) = \frac{d-x}{t^+} \hat{z}$$

Applicando il teorema di Ramo otteniamo per $i_-(t)$:

$$\begin{aligned} i_-(t) &= q\vec{v}_-(t) \cdot \vec{E}_w = \\ &= (-n_0e) \left(-\frac{x}{t^-} \right) \frac{1}{d} = n_0e \frac{x}{t^-d} \end{aligned}$$

Ossia per $0 < t < t_-$ la corrente rilevata è **costante**. Il relativo potenziale, ai capi del condensatore C_1 del circuito RC:

$$V_-(t^-) = \frac{Q_-(t^-)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^{t^-} i_-(t) dt = n_0e \frac{x}{Cd}$$

Notiamo perciò che l'ampiezza del segnale in *pulse mode* **dipende** dal punto di decadimento x .

D'altro canto, per gli ioni otteniamo:

$$\begin{aligned} i_+(t) &= q\vec{v}_+(t) \cdot \vec{E}_w = \\ &= (+n_0e) \left(\frac{d-x}{t^+} \right) \frac{1}{d} = n_0e \left(\frac{d-x}{t^+d} \right) \frac{1}{d} = n_0e \frac{d-x}{t^+d} = \\ \Rightarrow V_+(t) &= \frac{Q_+(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^{t^+} i_+(t) dt = n_0e \frac{d-x}{Cd} \end{aligned}$$

Il risultato dipende, nuovamente, dal punto di decadimento x . Tuttavia, considerando il segnale in *pulse mode totale* dato dalla somma dei due contributi (ipotizzando $\tau_{RC} \gg t^+ \gg t^-$) otteniamo:

$$V(t > t^+) = V_-(t) + V_+(t) = \frac{n_0e}{C}(x + d - x) = \frac{n_0e}{C}$$

che **non** dipende da x . Ciò ha senso, poichè dopo t^+ *tutta* la carica è stata raccolta, indipendentemente dal punto dove è avvenuta l'interazione.

DOMANDA 32. Qual è l'effetto della **griglia di Frish** in una camera a ionizzazione?

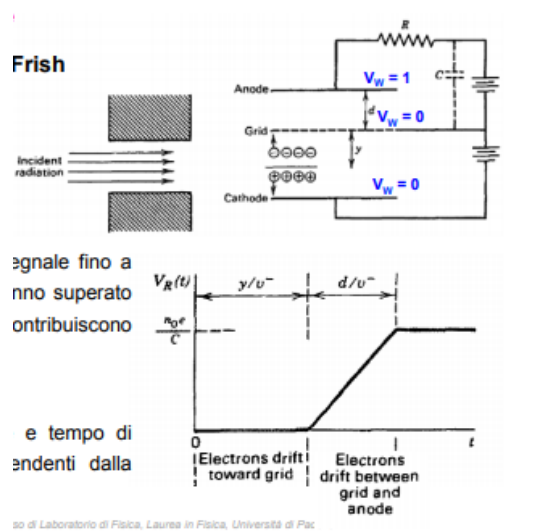


Figura 21 – Schema di una camera a ionizzazione con griglia di Frisch

La griglia di Frisch, perciò, permette di rimuovere la dipendenza dell'ampiezza di $V(t)$ dalla posizione di attraversamento in rivelatori *electron-sensitive* in *pulse mode*, permettendo una grande riduzione dei tempi morti rispetto ad una semplice camera a ionizzazione.

DOMANDA 33. Descrivere il principio di funzionamento di una camera a ionizzazione tipo Bragg.

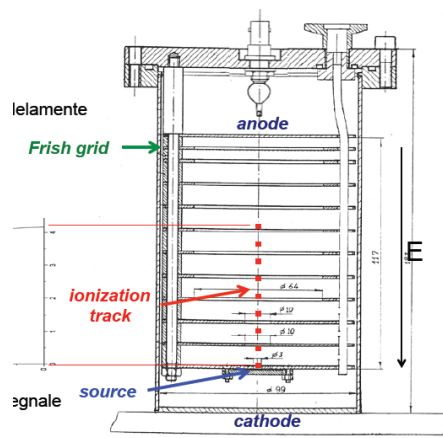


Figura 22 – Schema di una camera a ionizzazione tipo Bragg

Una camera di tipo Bragg è una particolare camera a ionizzazione, ovvero un rivelatore (molto usato, soprattutto in passato, per la rivelazione di particelle α) costituito da un volume attivo di gas che viene ionizzato dal passaggio di radiazione.

La camera Bragg usata in laboratorio è formata da un contenitore cilindrico le cui basi inferiore e superiore fungono rispettivamente da catodo e anodo per la generazione del campo elettrico in cui è immerso il gas. L'anodo è schermato a breve distanza da una griglia metallica - la griglia di Frisch. La sorgente da esaminare è posta all'altezza del catodo, e la radiazione viene emessa antiparallelamente a \vec{E} , in direzione dell'anodo, grazie ad un apposito collimatore. In tal modo la traccia di ionizzazione, formata da coppie ione $^+$ -e $^-$ ha un profilo verticale. Gli ioni positivi si muovono verso il catodo senza indurre alcuna corrente all'anodo per effetto della schermatura della griglia di Frisch. D'altro

canto gli elettroni, spinti dal campo \vec{E} verso la cima dell'apparato, sono liberi di attraversare la griglia e indurre una corrente sull'anodo, che viene trasformata in un segnale $V(t)$ in tensione da un apposito preamplificatore. Poiché la maggior parte delle coppie di cariche di ionizzazione viene generata nella parte finale dell'attraversamento (picco di Bragg), ossia la più vicina all'anodo, la $V(t)$ generata segue l'andamento di una curva di Bragg "rovesciata" orizzontalmente.

DOMANDA 34. Come possiamo misurare il range delle particelle alfa di una sorgente a 3 picchi (Pu-Am-Cm) con la camera di Bragg del laboratorio?

La camera di Bragg presente in laboratorio consente di misurare, tramite un segnale in tensione $V(t)$, la curva di Bragg (con ascisse invertite) di particelle α di 3 energie diverse, relative a sorgenti Pu-Am-Cm. È inoltre possibile regolare la pressione p del gas all'interno dell'apparato e il campo elettrico \vec{E} in cui è immerso, mantenendo costante il campo elettrico ridotto $\epsilon = E/p$. Ciò permette di stimare il range delle particelle α mediante la seguente procedura:

1. Da ogni segnale $V_i(t)$ è possibile stimare la durata Δt_i di raccolta della carica come l'intervallo temporale $[t_{\min}; t_{\max}]$ in cui $V(t) > aV_{\max}$, dove $0 < a < 1$ è una certa frazione dell'ampiezza V_{\max} rilevata. In laboratorio scegliamo, per esempio, $a = 0.3$.
2. Si regola $p = p_{\min}$ in modo che la particella α di energia più alta abbia come range l'intera lunghezza L della camera di Bragg (R è inversamente proporzionale a p per la relazione di Bragg-Kleeman). Per $p < p_{\min}$ il picco di Bragg dell' α più energetica si abbassa o scompare completamente dallo spettro, dato che avviene al di fuori del volume attivo della camera.

Misurando ora il Δt_{\max} di raccolta si può così stimare la velocità di drift degli elettroni come:

$$v_e = \frac{L}{\Delta t_{\max}}$$

3. Poiché la stima v_e dipende solo da E/p , che rimane costante nel corso delle misure, può essere utilizzata per calcolare i range R delle 3 possibili α a qualsiasi p :

$$R = v_e \Delta t$$

DOMANDA 35. Descrivere brevemente il principio di funzionamento di un rivelatore X al Si(Li). Che differenza c'è rispetto a un normale diodo a giunzione pn?

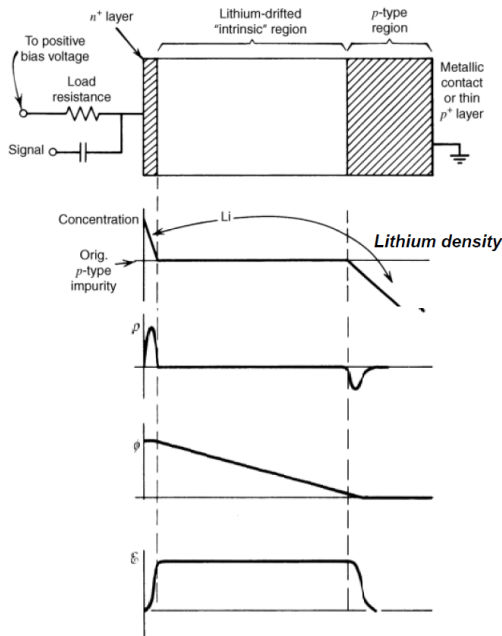


Figura 23 – Dall'alto verso il basso: schema di un PIN diode, concentrazione di litio a seconda della posizione, carica elettrica ρ , potenziale φ intrinseco e campo elettrico E .

Un rivelatore X al Si(Li) (*Lithium Drifted Silicon Detector*) fa uso di un PIN-diode, ossia un cristallo di silicio con drogaggio di tipo p su una cui estremità viene depositato un sottile strato di litio, che viene poi fatto diffondere grazie a una forte polarizzazione inversa e alte temperature. In questo modo si ottengono tre regioni (figura 23):

- Uno strato n^+ presso il deposito di litio iniziale
- Un largo strato intrinseco (I) intermedio in cui gli atomi (donatori) di litio compensano la concentrazione di accettori del drogante p ($N_D = N_A$)
- Uno strato p finale oltre il range della diffusione del litio

All'equilibrio si genera perciò una densità di carica positiva nello strato n^+ , e una negativa presso p . Poiché la zona compensata I è neutra e resistiva (agli effetti si comporta come un cristallo intrinseco), il campo elettrico è in essa all'incirca uniforme, diretto da n a p , e pari a V/d , dove V è la differenza di potenziale ai suoi estremi e d lo spessore di I .

Tale zona costituisce la **regione attiva** del diodo. Quando una radiazione ionizzante la attraversa libera coppie di cariche e^- -lacuna che sono dirette dal campo \vec{E} verso gli elettrodi, dove originano certa corrente $I(t)$ misurabile. È fondamentale che il tempo di drift t_c necessario a raccogliere la carica (*collection time*) sia piccolo rispetto al tempo necessario alle cariche per ricombinarsi, altrimenti parte del segnale viene perso all'interno di I . Ciò si ottiene con una forte polarizzazione inversa del diodo (lato n collegato a $+$, p a $-$), dell'ordine di $0.5 \div 4 \text{ kV}$, tale da realizzare un campo nella regione attiva di vari kV cm^{-1} . In tal modo per un rivelatore di $1 \div 10 \text{ mm}$ si ha $t_c = 0.1 \div 1 \mu\text{s}$.

Il principio di funzionamento di un PIN diode è perciò lo stesso che si ha per un normale diodo a giunzione pn, con l'unica differenza di avere a disposizione una grande regione di svuotamento da utilizzare per rivelare segnali. Per un diodo pn , infatti, la larghezza attiva w è direttamente proporzionale a tensione di *bias* V_D e intrinseca φ , e inversamente proporzionale al drogaggio:

$$w \propto \sqrt{(\varphi + |V_D|)/N_{LD}}$$

Anche con V_D molto alte e cristalli poco drogati, tuttavia, si riesce al più a ottenere $w \sim \text{mm}$, molto inferiore rispetto agli spessori consentiti dai PIN diode.

DOMANDA 36. Descrivere sinteticamente il principio di funzionamento di uno **scintillatore inorganico** per spettroscopia gamma.

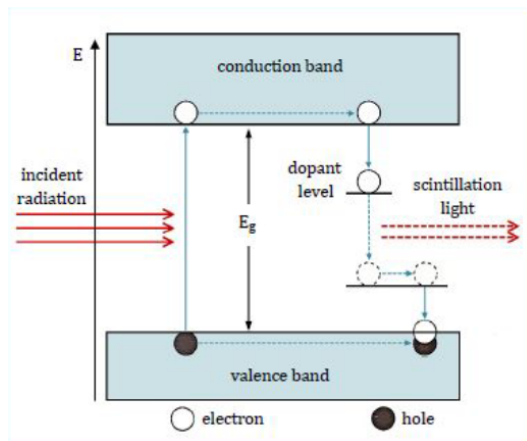


Figura 24 – Emissione di fotoni in un materiale scintillatore

Uno scintillatore inorganico consiste in un cristallo che emette luce (luce di scintillazione), di frequenza nel visibile o nel vicino ultravioletto, quando attraversato da una radiazione (γ) ionizzante. Alcuni esempi di materiali scintillatori sono ZnS, NaI e CsI.

Il principio di funzionamento si basa sulla promozione, dovuta all'interazione con i fotoni incidenti, di elettroni del cristallo dalla banda di valenza a quella di conduzione, che poi emettono luce nel ritornare allo stato fondamentale. Per evitare che i fotoni di diseccitazione vengano riassorbiti dal cristallo è necessaria la presenza di impurità, come il Tallio nel caso del NaI, che creano livelli intermedi metastabili nel *band-gap* tra le bande di valenza/conduzione. La luce di scintillazione emessa tra tali livelli è così in grado di lasciare il cristallo ed essere rivelata (per esempio

da un PMT).

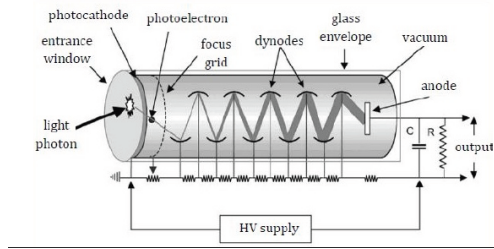
DOMANDA 37. Descrivere brevemente il principio di funzionamento del **PMT** e il suo utilizzo insieme ai cristalli scintillatori.

Un fotomoltiplicatore (PMT) è un tipo particolare di tubo a vuoto in grado di amplificare enormemente ($A \sim 10^{5 \div 8}$, ossia $\sim 160 \text{ dB}$) il segnale in corrente prodotto da un fascio luminoso. Il funzionamento si basa sulla presenza di coppie di elettrodi (dinodi) poste a potenziali via via crescenti. La luce in ingresso incide su un fotocatodo, liberando per effetto fotoelettrico alcuni fotoelettroni, che poi sono accelerati da un elettrodo all'altro dalle reciproche differenze di potenziale. Raggiunta una velocità sufficiente, ciascun fotoelettrone è in grado di liberare altri elettroni dagli elettrodi, generando così una cascata di elettroni che porta ad una corrente misurabile all'anodo.

I PMT sono utili per rivelare i fotoni prodotti da materiali scintillatori al passaggio di radiazione incidente, in quanto presentano un grande guadagno, basso rumore e notevole velocità di risposta. Il materiale del fotocatodo ha una certa efficienza (*quantum efficiency*) che dipende dalla

frequenza della luce in input. Con scelte opportune, e con un buon accoppiamento ottico tra scintillatore e fotocatodo è possibile rivelare anche singoli fotoni in caso di basso rate di input. Valori tipici del segnale in output sono pari a 0.5 V per ogni 10 fotoni prodotti dallo scintillatore.

DOMANDA 38. Descrivere brevemente gli aspetti principali dello spettro in energia per un rivelatore di radiazione X/gamma al variare della dimensione del volume attivo.



Un rivelatore di volume attivo infinito è in grado di raccogliere tutta l'energia di un evento e convertirla in un segnale misurabile. In tal caso una radiazione di energia \mathcal{E}_γ produce uno spettro ad un unico picco attorno a tale valore, con una certa larghezza data dalla risoluzione del detector.

Nel caso reale, una regione attiva ristretta porta ad osservare una varietà di strutture spettrali legate ad una raccolta non completa dell'energia rilasciata. Facendo riferimento

alla figura 25, che mostra lo spettro di una sorgente a un solo picco di bassa energia (come, ad esempio, il Cs-137), distinguiamo:

1. **Fotopicco**, formato dagli eventi di cui viene raccolta tutta l'energia. In ipotesi di fondo trascurabile, il fotopicco è l'unica struttura dominante per rivelatori di grande volume attivo. Per detector più piccoli il picco non risulta più simmetrico, e presenta una coda prominente nella direzione delle basse energie, dovuta a una fuga di parte dell'energia della radiazione (es. a causa di scattering Compton all'interno del rivelatore stesso, con assorbimento del fotone deviato e fuga dell'elettrone)
2. **Compton-edge**: eventi in cui la radiazione γ subisce uno scattering Compton con $\theta = \pi$ e viene deviata al di fuori della regione attiva del detector. In questi casi solo l'energia (massima) trasferita all'elettrone viene raccolta:

$$\mathcal{E}_{\text{edge}} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2 / 2}$$

3. Tra Compton-edge e fotopicco sono presenti gli eventi, più rari, di multipli scattering Compton del γ , con fuga del fotone deviato.
4. **Compton continuum**: il fotone subisce uno scattering Compton a $0 < \theta < \pi$ e fugge dal rivelatore, dopo aver ceduto una piccola parte della sua energia ad un elettrone, che produce il segnale rivelato.

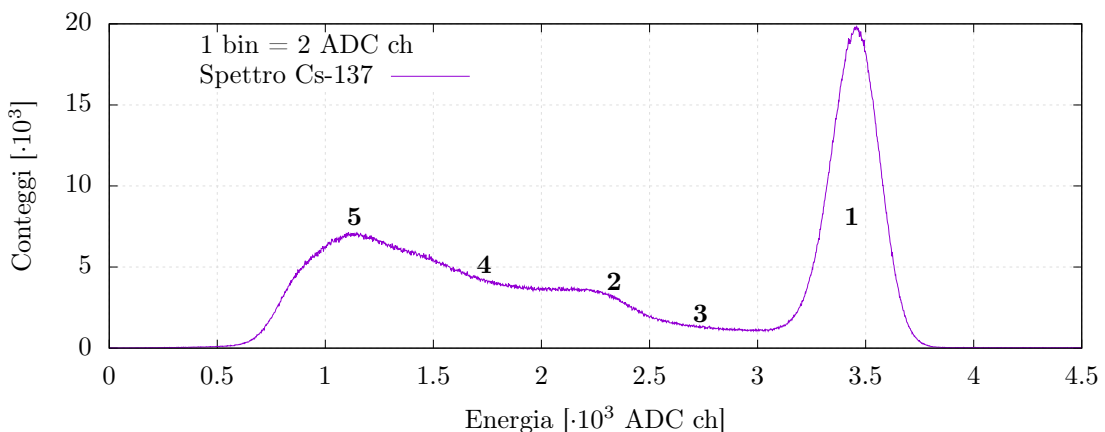


Figura 25 – Spettro γ del Cs-137

L'ampiezza del fondo Compton diminuisce all'aumentare del volume attivo del rivelatore e della sua *accettanza*.

Per \mathcal{E}_γ sufficientemente alte ($\gg 2m_e c^2$) la probabilità di interazione per *pair-production* è dominante, e perciò il γ iniziale può generare una coppia e^+e^- . Il positrone si disintegra con un elettrone producendo due fotoni γ che, nel caso di rivelatori finiti, possono non entrare nella regione attiva, e quindi non essere registrati. Si ha quindi la comparsa di **escape peaks** a $\mathcal{E}_\gamma - 511 \text{ keV}$ e $\mathcal{E}_\gamma - 1.022 \text{ MeV}$, che comprendono gli eventi in cui rispettivamente uno o entrambi i fotoni sono fuggiti.

DOMANDA 39. Com'è definita la **risoluzione energetica** per un rivelatore di radiazione X/γ ? Quali sono i principali fenomeni che la determinano?

Misure ripetute dell'energia di una radiazione X/γ di valore \mathcal{E}_γ definito si distribuiscono, a causa delle limitazioni intrinseche del rivelatore e di altri fenomeni di fondo, a formare un picco di andamento approssimativamente gaussiano attorno a \mathcal{E}_γ .

La larghezza di tale fotopicco, stimata mediante la FWHM (larghezza a metà altezza) costituisce la **risoluzione in energia** del rivelatore:

$$R = \frac{\Delta \mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}_\gamma} = \frac{FWHM_{peak}}{mean_{peak}} \quad (25)$$

La produzione e raccolta delle cariche, necessaria per la misura sperimentale di \mathcal{E}_γ , è un processo statistico che segue la statistica di Poisson. Un evento di energia \mathcal{E}_γ produce perciò un numero medio $\langle N_{\text{pair}} \rangle$ di coppie di cariche rivelate, con $\sigma(N_{\text{pair}}) = \sqrt{\langle N_{\text{pair}} \rangle}$. Supponendo che l'energia sia direttamente proporzionale a $\langle N_{\text{pair}} \rangle$ (ipotesi valida se non vi sono *offset* dovuti all'elettronica), e non vi siano altri contributi rilevanti alla risoluzione, allora:

$$\mathcal{E} = k \langle N_{\text{pair}} \rangle \Rightarrow \Delta \mathcal{E} = 2.355 \sigma(\mathcal{E}) = k' \sqrt{\langle N_{\text{pair}} \rangle} \Rightarrow R = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{k''}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

con opportuni coefficienti k' e k'' . Tale grandezza è detta **risoluzione intrinseca** del rivelatore. In generale possono esservi altri effetti che incrementano R , come presenza di rumore elettronico, drift di guadagno del detector, offset dell'elettronica...

Una stima della risoluzione in energia reale deve tener conto di tutti questi:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{exp}}^2 = \Delta \mathcal{E}_{\text{intrinseca}}^2 + \Delta \mathcal{E}_{\text{noise}}^2 + \Delta \mathcal{E}_{\text{drift}}^2 + \dots$$

DOMANDA 40. Un contatore Geiger misura 400 conteggi in 10 s e 30 000 conteggi di fondo in 1000 s. Stimare il rate del segnale netto con la sua incertezza (assumere il tempo privo di errore). Se in una successiva misura lunga 1 s si misurano 42 conteggi, possiamo dire, con un $CL > 95\%$, di aver individuato la presenza di una sorgente radioattiva? Motivare la risposta. (I numeri sono a titolo di esempio)

I conteggi di un contatore Geiger seguono la statistica di Poisson, per cui N conteggi in un tempo Δt corrispondono ad un rate r :

$$r = \frac{1}{\Delta t} (N \pm \sqrt{N}) \text{ counts/s}$$

Nel nostro caso otteniamo:

$$r_{\text{tot.}} = 40(2) \text{ counts/s}; \quad r_{\text{fondo}} = 30.0(2) \text{ counts/s}$$

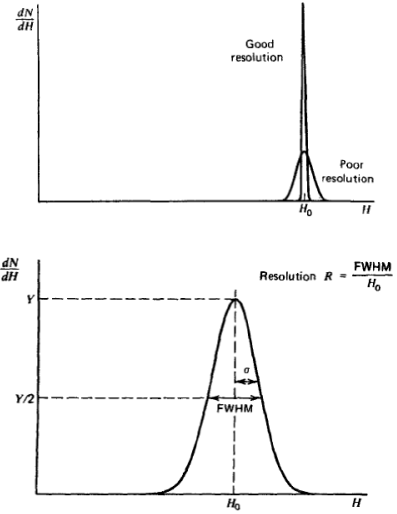


Figura 26 – Risoluzione energetica del rivelatore e FWHM

Il rate del segnale netto, ipotizzando misure indipendenti, è dato da:

$$r_{\text{sig.}} = r_{\text{tot}} - r_{\text{fondo}}; \quad \sigma_{r_s}^2 = \sigma_{r_t}^2 + \sigma_{r_f}^2$$

Numericamente si ottiene $r_{\text{sig}} = 10(2)$ counts/s.

Nel secondo caso partiamo da un segnale con rate $r_2 = 42(6)$ counts/s. Possiamo confermare la presenza di una sorgente radioattiva a CL > 95% se r_2 ha una compatibilità $\lambda > 2$ con il rate di fondo r_{fondo} . Sempre nell'ipotesi di misure indipendenti si ha:

$$\lambda = \frac{|r_2 - r_{\text{fondo}}|}{\sqrt{\sigma_{r_2}^2 + \sigma_{r_f}^2}} \approx 1.9 < 2$$

Perciò non è possibile escludere l'ipotesi nulla al Confidence Level desiderato.

Equivalentemente si può costruire una statistica del χ^2 a $\nu = 1$ dgf:

$$\chi^2 = \frac{(r_2 - r_{\text{fondo}})^2}{\sigma_{r_2}^2 + \sigma_{r_f}^2} \approx 3.4$$

e si ha $\chi^2 \in [0.000982, 5.024]$ al CL 95% (double tail).

DOMANDA 41. *Descrivere brevemente l'effetto Zeeman normale e ricavare il valore del potere risolvante minimo per poter misurare tale effetto in una lampada al Neon con un campo magnetico di 0.5 T.*

Con **effetto Zeeman normale** si intende la divisione di una riga spettrale relativa a una transizione tra stati atomici di singoletto (spin totale nullo) in 3 righe equispaziate per effetto di un campo magnetico \vec{B} .

Una particella con momento magnetico totale $\vec{\mu}_J$ posta in un campo magnetico \vec{B}_{ext} ha un'energia potenziale data da:

$$U = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

Nel caso di un atomo con N elettroni, poiché il momento di ogni elettrone ha un contributo orbitale (L) e di spin (S) si ha:

$$\vec{\mu}_J = -\frac{\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N (g_L \vec{L}_i + g_e \vec{S}_i)$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr, mentre $g_L = 1$ e $g_e \approx 2.0023$ sono i g-factor orbitale e di spin dell'elettrone. Per B non troppo alti l'accoppiamento spin-orbita è l'effetto dominante, e perciò \vec{S} e \vec{L} sono ben definiti e disaccoppiati. In tali ipotesi, la teoria delle perturbazioni al primo ordine consente di calcolare la deviazione $\Delta\mathcal{E}$ in energia che subisce un orbitale all'accensione del campo magnetico (intesa rispetto all'energia del livello non perturbato):

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{zee}} = \mu_B B m_J g_j$$

dove m_J sono gli autovalori di J_z (proiezione del momento totale sull'asse \hat{z}) e $g_j = 1$ è il fattore di Landè per orbitali a spin nullo³.

In laboratorio esaminiamo la transizione del Neon ($Z = 10$, gas nobile), tra lo stato fondamentale $2s^2 2p^6$ e il primo eccitato $2s^2 2p^5 3s$. I relativi termini spettroscopici⁴ sono 1S_0 e 1P_1 (nella notazione $^{2S+1}L_J$), e quindi la transizione avviene tra stati con $S = 0$, per cui si ha effetto Zeeman normale in presenza di B . Nello specifico, il campo rompe la degenerazione di J_z , e l'unica transizione $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$ si scompone in 3 transizioni possibili:

³Da $\vec{\mu}_J = -g_j \mu_B \vec{J}/\hbar$, e tenendo conto che se $S = 0$, $\vec{J} = \vec{L}$

⁴Nel caso di $2s^2 2p^6$ si hanno solo shell piene, e quindi il termine è 1S_0 . Nello stato eccitato sommiamo due spin $1/2$ (l'elettrone con $n = 3$ e la "lacuna" con $n = 2$), ottenendo $S = 0, 1$. $S = 1$ è scartato perché transizioni tra tripletto e singoletto non sono ammesse per radiazione di dipolo. Il momento angolare è quindi 1 (dato dalla "lacuna" nell'orbitale $2p$), e quindi $J = 0 + 1 = 1$

- $m_J = +1 \rightarrow 0$, con $\Delta m_J = -1$, e $m_J = -1 \rightarrow 0$, con $\Delta m_J = +1$. In senso semi-classico, tali transizioni corrispondono all'oscillazione degli elettroni *attorno alla direzione del campo*, e generano fotoni polarizzati circolarmente (se visti lungo la direzione di \vec{B}), o perpendicolarmente a \vec{B} (se visti $\perp \vec{B}$).
- $m_J = 0 \rightarrow 0$, con $\Delta m_J = 0$. In questo caso possiamo pensare ad un elettrone che oscilla *lungo la direzione del campo*. Perciò osservando parallelamente a \vec{B} non si vede alcun fotone (la radiazione di dipolo è nulla nella direzione di oscillazione), mentre osservando $\perp \vec{B}$ si trovano fotoni polarizzati parallelamente a \vec{B} .

La spaziatura tra le righe estreme è la maggiore, ed è quindi quella che richiede la minor risoluzione per essere osservata. Concentriamoci allora sul caso di osservazione lungo la direzione di \vec{B} . La spaziatura tra le due righe è data da:

$$\Delta\nu = \nu_{1 \rightarrow 0} - \nu_{-1 \rightarrow 0} = \frac{2\Delta\mathcal{E}_{zee}}{h} \stackrel{\lambda\nu=c}{=} c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{c(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_0 + \Delta\lambda)(\lambda_0 - \Delta\lambda)} \stackrel{\Delta\lambda \ll \lambda_0}{\approx} \frac{c(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_0^2}$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda della transizione a campo spento (coincidente con quella con $\Delta m = 0$). Detta $\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda_{\text{exp}}$ si ottiene:

$$\Delta\lambda_{\text{exp}} = \frac{2\lambda_0^2}{hc} \Delta\mathcal{E}_{zee}$$

Numericamente, ponendo $B = 0.5 \text{ T}$, e ricordando che $\mu_B = 9.3 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$, per $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{zee} &= \frac{0.5 \cdot 9.3 \times 10^{-24}}{1.6 \times 10^{-19}} = 3 \times 10^{-5} \text{ eV} \\ \Delta\lambda_{\text{exp}} &= 2 \frac{(600 \text{ nm})^2}{1240 \text{ eV nm}} 3 \times 10^{-5} \text{ eV} = 16 \times 10^{-3} \text{ nm} \end{aligned}$$

Il potere risolvete (minimo) necessario per distinguere una differenza così piccola è quindi:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \sim 36\,000$$

DOMANDA 42. *Descrivere sinteticamente il principio di funzionamento della lamina di Lummer-Gehrcke. Dove viene usata nelle esperienze del Laboratorio e perché?*

La lamina di Lummer-Gehrcke consiste in un lungo spessore di vetro o quarzo dalle facce ben levigate e parallele tra loro. Facendo riferimento alla figura 27, un fascio luminoso viene riflesso dentro la lamina da un prisma (in P), in modo che la luce incida la base della lamina ad un angolo θ' appena al di sotto dell'angolo critico per la riflessione totale. In questo modo gran parte della luce viene riflessa - rimanendo all'interno della lamina - ma una piccola parte viene rifratta ed esce dall'apparato. I fasci uscenti dopo riflessioni interne successive interagiscono tra loro formando una figura di interferenza, che viene infine proiettata su un piano da una lente. Regolando gli angoli e i materiali in modo da avere interferenza tra fasci di intensità simile, è possibile ottenere una grande risoluzione R , nell'ordine di 10^5 , che può essere usata per misurare $\Delta\lambda$ più piccole della distanza tra due massimi della figura di interferenza.

Ciò è utile in laboratorio per poter osservare la $\Delta\lambda$ di separazione tra le righe spettrali di un multipletto Zeeman, per cui è richiesta $R \sim 50k$, impossibile da realizzare con un semplice prisma ($R \sim 10^3$) o reticolo di diffrazione ($R \sim 10^4$).

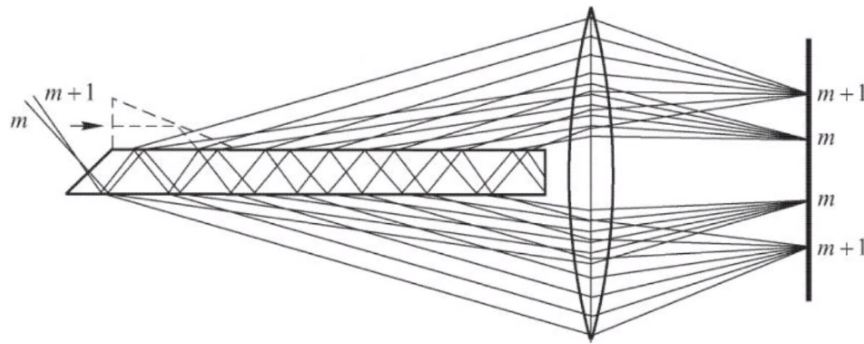


Figura 27 – Schema di un interferometro con lamina di Lummer-Gehrcke

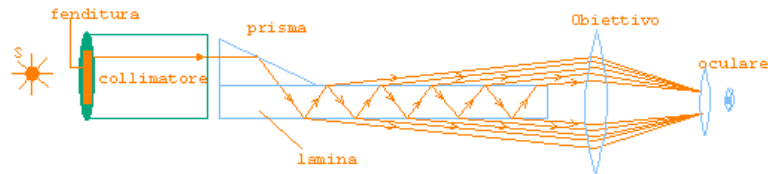


Figura 28 – Schema dell'apparato usato in laboratorio per l'osservazione dell'effetto Zeeman

2 Domande degli anni precedenti

DOMANDA 43. *Discutere brevemente le interazioni di elettroni e positroni con la materia.*

A causa della loro massa piccola, rispetto alle altre particelle cariche più pesanti, avviene un meccanismo addizionale responsabile della perdita di energia: l'**emissione di radiazione elettromagnetica** a causa del campo elettrico del nucleo (**bremstrahlung**). Classicamente, è la radiazione generata dall'accelerazione del positrone/elettrone dovuta all'attrazione/repulsione elettrica del nucleo:

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{tot} = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{coll} + \left. \frac{dE}{dx} \right|_{rad} \quad (26)$$

dove il primo contributo è la perdita di energia dovuta alle collisioni anelastiche; è lo stesso meccanismo discusso per le particelle più pesanti, con alcune correzioni:

- la massa dell'elettrone è confrontabile con quella quelli elettroni atomici: la particella incidente subisce ora una deflessione;
- le collisioni avvengono tra particelle identiche, quindi indistinguibili: non è possibile, dopo la collisione, distinguere tra elettrone primario e secondario.

In prima approssimazione, la perdita di energia associata a questo termine è

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{coll} = k \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \rho \left[\ln \left(\frac{\gamma m_e c^2}{2I} \right) - \beta^2 \right], \quad (27)$$

ma calcoli più precisi danno un diverso contributo per elettroni e positroni:

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{coll,e^-} = k \frac{Z}{A} \frac{\rho}{\beta^2} \left[\log \left(\frac{\gamma m_e c^2 \beta \sqrt{\gamma - a}}{\sqrt{2} I} \right) + \frac{1}{2} (1 - \beta^2) - \frac{2\gamma - a}{2\gamma^2} \log(2) + \frac{1}{16} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 \right] \quad (28)$$

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{coll,e^+} = k \frac{Z}{A} \frac{\rho}{\beta^2} \left[\log \left(\frac{\gamma m_e c^2 \beta \sqrt{\gamma - a}}{\sqrt{2} I} \right) + \frac{\beta^2}{24} \left(23 + \frac{14}{1 + \gamma} + \frac{10}{(1 + \gamma)^2} + \frac{4}{(1 + \gamma)^3} \right) \right] \quad (29)$$

I positroni ultimi, una volta a riposo, annichilano con un elettrone ed emettono due fotoni con la stessa energia e direzione, ma verso opposto.

Il secondo termine della relazione 26 rappresenta la frazione di energia cinetica emessa sotto forma di radiazione per una particella leggera che subisce una decelerazione nel campo coulombiano di un nucleo, detta appunto di **bremstrahlung**, secondo la relazione

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{brem,rad} = 4\alpha N_A \frac{Z^2}{A} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4}{m_e^2 c^4} E \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \quad (30)$$

In conclusione, mentre il termine 27 è proporzionale a $\ln E$, il termine 30 è proporzionale ad E ; inoltre il termine 30 è inversamente proporzionale alla massa al quadrato della particella incidente. Si definisce E_c l'*energia critica* per cui i due valori di perdita di energia sono uguali. Per $E < E_c$ è predominante il termine 27, per $E > E_c$ è predominante il termine 30.

DOMANDA 44. *Definire la lunghezza di radiazione.*

La lunghezza di radiazione rappresenta la distanza dopo la quale l'energia di una particella viene ridotta di un fattore $\frac{1}{e}$ a causa della perdita di energia per interazione con la materia. Essa è un parametro del materiale in cui incide la particella.

Nell'ambito delle interazione elettroni/positroni con la materia, si può definire una lunghezza di radiazione che dimensionalmente è una massa su una lunghezza al quadrato (si misura in g/cm^{-2} : la perdita di energia legata al fenomeno di **bremstrahlung** (classicamente è la frazione di energia cinetica emessa sotto forma di radiazione per una particella leggera che subisce una decelerazione nel campo coulombiano di un nucleo) può essere espressa come:

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{brem,rad} = 4\alpha N_A \frac{Z^2}{A} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4}{m_e^2 c^4} E \ln \frac{183}{Z^{1/3}}. \quad (31)$$

dove Z è il numero atomico del bersaglio e A il suo numero di massa. La perdita di energia va come l'inverso della massa al quadrato, ed è direttamente proporzionale all'energia della particella incidente. Poichè

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{mc^2} \quad \text{raggio classico dell'elettrone} \quad (32)$$

è possibile riscrivere l'equazione 31 come

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad \text{con} \quad X_0 = \frac{A}{4\alpha N_A Z^2 r_e^2 \ln(183 \cdot z^{-1/3})} \quad (33)$$

Integrando l'equazione 33 si ottiene $E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$, con X_0 lunghezza di radiazione.

DOMANDA 45. Cosa si intende per energia critica, in riferimento all'interazione di elettroni con la materia?

La perdita di energia per *bremsstrahlung*, dovuta al fatto che l'elettrone, essendo frenato dal materiale, irraggia in accordo con l'elettromagnetismo classico, è proporzionale all'energia

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{brem,rad}} \propto E, \quad (34)$$

mentre quella per *ionizzazione*, dovuta al fatto che l'elettrone incidente si scontra con gli elettroni presenti nel materiale, è proporzionale al logaritmo dell'energia

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{coll}} \propto \ln E. \quad (35)$$

Si definisce l'**energia critica** E_c il valore di energia degli elettroni/positroni per il quale le due perdite di energia sono uguali

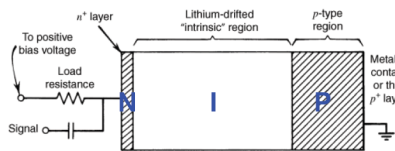
$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{brem,rad}} = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{coll}} \quad \text{per } E = E_c. \quad (36)$$

Esiste una buona parametrizzazione di tale valore, in funzione del materiale

$$E_c = \frac{610}{Z + 1.24} \text{MeV} \quad (37)$$

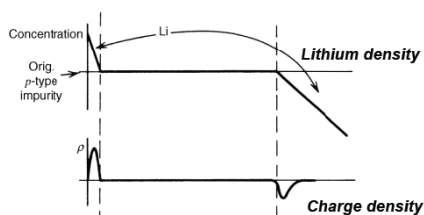
Si hanno dunque due casi: per $E < E_c$ è predominante il termine di ionizzazione, mentre per $E > E_c$ è predominante il termine di *bremsstrahlung*.

DOMANDA 46. Che differenza c'è tra un **PIN diode** e un normale diodo a giunzione pn?



Un pin diode è un diodo a cui è stata interposta una larga zona di semiconduttore intrinseco (detta zona i), fra le zone p e n, che può essere ottenuto per compensazione con Litio di un cristallo p molto puro. La zona drogata di tipo n risulta l'anodo, mentre la zona drogata di tipo p è a contatto con una lastra metallica e risulta essere il catodo. La caratteristica principale che distingue i due e rende il PIN utile sperimentalmente,

è la dimensione della zona svuotata che si ha quando la polarizzazione è inversa: in questo caso infatti, si possono raggiungere dimensioni di anche 10 ÷ 15 mm praticamente indipendenti dalle condizioni esterne, mentre nel caso del diodo a giunzione pn non si supera il millimetro.



La zona i risulta essere neutra, perciò, come si può osservare nel grafico a lato, il potenziale decresce linearmente mentre il campo E è costante. Inoltre la zona i è molto più resistiva delle zone p,n quindi quasi tutto il V esterno si situa all'interno della regione. In un silicio completamente svuotato il campo con buona approssimazione vale $E \sim V/d$ all'interno della zona compensata (sensitive volume) e va rapidamente a 0 ai bordi. Per non perdere carica (segnale) nella zona at-

tiva, il tempo di drift (collection time) deve essere piccolo rispetto al tempo di ricombinazione. Si usano perciò tensioni di polarizzazione abbastanza elevate (0.5 - 4 kV)

Una particella carica e sufficientemente energetica che attraversa la regione svuotata di un diodo genera una scia di coppie elettrone-lacuna rivelabili. Il volume sensibile del rivelatore coincide dunque con la regione svuotata, che si cercherà di massimizzare polarizzando inversamente il diodo. In un diodo PIN la regione svuotata, come detto, può avere spessore fino a 15 volte quella di un normale diodo, pertanto il suo utilizzo è preferibile.

DOMANDA 47. *Descrivere brevemente gli aspetti principali della misura dello spettro di emissione di una lampada a gas di un elemento ignoto con l'apparato del Laboratorio.*

La misura dello spettro di emissione di una lampada a gas viene effettuata mediante uno spettrometro ottico a prisma: l'energia di separazione dei livelli energetici più esterni di un atomo è infatti dell'ordine dell'eV e pertanto le radiazioni emesse hanno lunghezze d'onda nel campo del visibile e sono rilevabili tramite strumenti ottici. L'apparato utilizzato consta di tre elementi fondamentali: la sorgente (lampada a gas), un dispositivo disperdente (prisma o reticolo con un opportuno sistema di lenti e fenditure) e uno strumento di acquisizione (telecamera o CCD). La sorgente emette luce che passa attraverso una fenditura sufficientemente stretta da poter limitare gli effetti di diffrazione; colpisce poi il dispositivo disperdente che devia e rifrange il raggio stesso e lo fa passare attraverso una lente focale; il prisma, opportunamente ruotato, permette di osservare le linee di emissione mediante il CCD. Per la misura di un elemento incognito, si utilizza il confronto con lo spettro di un elemento noto (nel caso specifico, di HgCd): individuato lo spettro dell'elemento noto in modo ottimale, si mantengono gli stessi parametri (apertura della lente, angolo del prisma, distanza della focale, tempo di integrazione) e si misura lo spettro dell'elemento incognito. Partendo dalle posizioni delle linee individuate per l'elemento noto, è possibile costruire una curva sperimentale che metta in relazione posizioni e lunghezze d'onda dello spettro. La formula approssimata della curva è data dalla formula di Hartman per lo spettrometro a prisma

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{c}{x - x_0}, \quad (38)$$

mentre nel caso dello spettrometro a reticolo si può usare un fit lineare o parabolico. Da questi fit è possibile ricavare i vari termini costanti; misurando le posizioni dello spettro incognito, è possibile ricavare le lunghezze d'onda delle linee di emissione e dunque risalire all'elemento utilizzato.

Appendice

La metodologia operativa da seguirsi prevede 5 fasi:

- Settaggio angolazione del dispositivo disperdente: visionando tramite telecamera e mantenendo ben aperta la fenditura che limita il fascio di fotoni in ingresso si individua la posizione ottimale per la visualizzazione di entrambi gli spettri delle sorgenti nota ed incognita.
- Settaggio parametri ottici: acquisendo gli spettri tramite il CCD (Charge-Coupled Device) si regolano il fuoco delle lenti (per ridurre la presenza di aberrazioni ottiche), la distanza della sorgente e l'apertura della fenditura (per ridurre le ampiezze dei picchi acquisiti) e il tempo di acquisizione (per non mandare il CCD in saturazione).

- **Acquisizione spettri:** mantenendo fisse tutte le impostazioni si acquisiscono fondo e spettro delle sorgenti.
- **Calibrazione apparato:** Tramite opportune macro di root si procede a rimuovere il fondo, determinare le posizioni ed ampiezze dei picchi fittando tramite centroidi (in particolare gaussiane con relativa FWHM), interpolare le coppie (px, λ_{th}) con gli opportuni modelli teorici per determinare i parametri di calibrazione dello strumento ed infine a determinare le lunghezze d'onda dello spettro incognito.
- **Analisi dei dati:** si determinano potere risolvente, ampiezze dei picchi, grafico dei residui; si trascurano specificazioni ulteriori in quanto pur necessaria a corroborare la validità della misura non è funzionale all'esecuzione della misura in sé.

Tramite confronto con una sorgente nota è così possibile eseguire la misura dello spettro di emissione di una sorgente incognita, come descritto sopra.

DOMANDA 48. *Descrivere brevemente i principali parametri sperimentali che influenzano la forma delle righe spettrali delle lampade a gas misurate negli apparati utilizzati in Laboratorio.*

L'esperimento per il riconoscimento dello spettro di un elemento incognito, si basa sull'utilizzo di uno spettrometro ottico a prisma/reticolo: l'apparato utilizzato consta di tre elementi fondamentali: la sorgente (lampada a gas), un dispositivo disperdente (prisma o reticolo con un opportuno sistema di lenti e fenditure) e uno strumento di acquisizione (telecamera o CCD). La sorgente emette luce che passa attraverso una fenditura sufficientemente stretta da poter limitare gli effetti di diffrazione; colpisce poi un dispositivo disperdente che devia il raggio stesso e lo fa passare attraverso una lente focale; il prisma/reticolo, opportunamente ruotato, permette di osservare le linee di emissione mediante il CCD. Lo spettro viene quindi misurato ed è possibile identificare correttamente le linee di emissione.

I parametri che permettono di individuare in maniera ottimale lo spettro dell'elemento sono:

- **Posizione della sorgente:** La radiazione emessa, pur se opportunamente limitata dalla fenditura, non potrà mai essere unidimensionale per il principio di indeterminazione. Ulteriori correzioni di larghezza (trascurabili nella misura dello spettro operata in laboratorio) sono dovute a: effetto doppler (allargamento causato dall'ampiezza della distribuzione delle velocità), effetto di pressione (allargamento riga emessa e red shift in caso di urto) ed effetto Stark (allargamento linee nel caso di gas fortemente ionizzato a causa dello splitting del momento angolare).
- **Apertura fenditura:** la larghezza della fenditura influenza direttamente la larghezza della linea spettroscopica. Infatti, maggiore è l'apertura della fenditura, maggiore è la quantità di luce entrante e maggiori sono i fenomeni di diffrazione della luce con se stessa, aumentando la luminosità, ma anche lo spessore delle linee di emissione che non sono più assimilabili a delle gaussiane. Inoltre la dimensione dei bordi (parametro costruttivo non modificabile) ne influenza la nitidezza: bordi sottili evitano fenomeni di riflessione e garantiscono bordi marcati.
- **Angolazione prisma:** il prisma può introdurre fenomeni di aberrazione ottica, in particolare astigmatismo. Se il prisma non è ben posizionato, il raggio osservato non sarà ben collimato con la lente e appariranno maggiori effetti di aberrazione: per questo è inoltre necessario posizionare bene la lente, per avere delle linee le più strette possibili. Essendo le immagini unidimensionali tale fenomeno può essere ridotto scegliendo opportunamente il piano dell'immagine e posizionando il prisma in modo che la luce lo attraversi parallelamente e simmetricamente e la fenditura sia parallela allo spigolo.
- **Angolazione reticolo:** ai picchi di interferenza si sovrappone una figura di diffrazione che ne riduce l'intensità (è conveniente utilizzare solamente i primi ordini di interferenza dunque). Il reticolo introduce inoltre aberrazioni che pur non modificando direttamente le forme delle righe ne variano le distanze reciproche deviando dal modello di andamento lineare.

- Posizione lente focale: introduce/riduce fenomeni di aberrazione ottica che generano forte asimmetria nelle code dei segnali.
- Sistema di ripresa (telecamera e CCD): il tempo di integrazione ed il numero di acquisizioni influenzano la qualità della misura. Infatti, un maggior tempo e numero di integrazioni, rende le linee sì più luminose, ma rischia di portare a saturazione il CCD, non permettendo una corretta misura della luminosità delle linee stesse.

DOMANDA 49. *Descrivere brevemente le interazioni di fotoni con la materia.*

I fotoni interagiscono con la materia con 3 processi principali:

- **Effetto Fotoelettrico:** un fotone viene assorbito dall'atomo nel materiale con emissione di un elettrone e di energia cinetica $T_e = E_\gamma - B_e$ (con B_e energia di legame dell'elettrone); la probabilità che avvenga è circa proporzionale a $Z^{4\div 5}$ ed inversamente proporzionale ad $E_g^{3.5}$, dunque è importante per elementi pesanti e basse energie gamma.
- **Diffusione Compton:** è il processo per cui un fotone collide con un elettrone atomico e diffonde con una energia più bassa $E_{\gamma,scatt}$, mentre l'elettrone assume la differenza di energia

$$E_{\gamma,scatt} = \frac{E_\gamma}{1 + \left(\frac{E_\gamma}{mc^2}\right)(1 - \cos \theta)} \quad (39)$$

con θ angolo di diffusione del fotone; è un processo dominante per energie comprese circa tra 1 e 5 MeV.

- **Creazione di coppie $e^+ e^-$:** il fotone interagisce con il campo elettromagnetico del materiale sparendo e creando una coppia elettrone-positrone; è un processo dominante per energie $E_\gamma > 5 \div 10$ MeV.

DOMANDA 50. *Descrivere in maniera qualitativa lo sviluppo di sciame elettromagnetici a partire da fotoni di alta energia.*

Uno dei risultati più eclatanti della produzione di coppia da parte di fotoni di alta energia e della emissione di bremsstrahlung da parte degli elettroni è la formazione e lo sviluppo di **sciame elettromagnetici**.

Un fotone di alta energia, attraversando un materiale, si converte in una coppia e^+e^- , i quali, a loro volta, emettono fotoni per bremsstrahlung e così via: il risultato è una cascata elettromagnetica. Il processo continua fino a quando l'energia degli elettroni/positroni prodotti non si trovi al di sotto dell'energia critica: a questo punto, tutti gli elettroni/positroni perderanno energia a causa delle collisioni atomiche, bloccando la cascata elettromagnetica.

Lo sviluppo è di natura statistica, ma è possibile costruire un modello che descriva il numero medio di particelle prodotte e la loro energia media in funzione dello spessore del materiale attraversato. Sia E_0 l'energia iniziale di un fotone: questo genera una coppia che dopo aver percorso una lunghezza di radiazione x_0 , ha energia dimezzata; a loro volta, l'elettrone/positrone, genera un fotone e così via. Proseguendo nella cascata elettromagnetica, il numero totale di particelle dopo una lunghezza t sarà $N \simeq 2^t$ e ciascuna avrà energia

$$E(t) \simeq \frac{E_0}{2^t}. \quad (40)$$

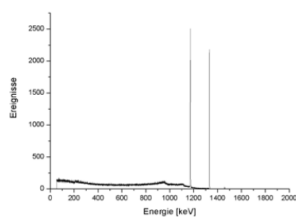
La profondità massima della cascata si ottiene al raggiungimento dell'energia critica, ottenendo

$$t_{max} = \log_2 \frac{E_0}{E_c}. \quad (41)$$

Inoltre, il numero massimo di particelle prodotte sarà

$$N_{max} = 2^{t_{max}} = \frac{E_0}{E_c}. \quad (42)$$

DOMANDA 51. *Che tipi di radiazione ionizzante possiamo misurare in presenza di una sorgente di Co-60?*



Spettro gamma del Co-60 preso con un HPGe detector

Il Cobalto 60 è un nucleo artificiale, con massa $A = 60$ e $Z = 27$. Esso decade β^- al 100% al $Ni - 60$, con un tempo di dimezzamento di $5.27y$ ed emette quindi due γ in cascata. La radiazione ionizzante prodotta è di tipo γ .

DOMANDA 52. *Quale tecnica viene utilizzata frequentemente per costruire rivelatori di radiazione X al silicio?*

Descrivere sinteticamente gli aspetti principali.

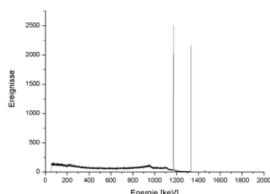
Una tecnica che permette di ottenere buoni spessori della zona attiva è quella della **compensazione con il Litio**. Si parte da un cristallo di elevate purezza di tipo p e gli si deposita uno strato di Litio sulla superficie: il Litio si comporta da donatore e crea quindi uno strato n con una giunzione pn . Il diodo così formato viene polarizzato inversamente con forte campo elettrico e riscaldato; il Litio depositato viene lasciato diffondere nel volume del cristallo per un certo tempo.

Il Litio ha infatti la caratteristica che la diffusione raggiunge un equilibrio al valore di esatta compensazione ($N_A = N_D$); quello in eccesso si accumula eventualmente sulle superfici esterne.

DOMANDA 53. *Descrivere gli aspetti principali della risposta di una camera di Bragg a una sorgente α a 3 picchi (Pu-Am-Cm).*

Le particelle α generano segnali di tensione all'interno della camera di Bragg che vengono graficati dal software di acquisizione sotto forma di curve di Bragg. Tramite l'analisi di queste si può poi ricavare l'energia della radiazione emessa dalla sorgente e studiare anche il range delle particelle al variare della pressione all'interno della camera.

DOMANDA 54. *Come si presenta un tipico spettro energetico di una radiazione γ da sorgente?*



Spettro gamma del Co-60 preso con un HPGe detector

I raggi γ sono i fotoni corrispondenti alle transizioni tra stati nucleari di energia quantizzata. L'energia del fotone è quindi ben definita e caratteristica del nucleo da cui è stata emessa. Pertanto, lo spettro energetico associato al decadimento γ si presenta in forma di un certo numero di picchi, dipendenti dalla sorgente e dal decadimento avvenuto precedentemente. Tipicamente infatti la radiazione γ segue sempre un decadimento di tipo α o β , nel quale però il nucleo "figlio" Y si presenta in una configurazione energetica (ben descritta dal modello a Shell) eccitata, dalla quale si sposta in direzione di quella fondamentale

proprio attraverso l'emissione di fotoni (transizione dei nucleoni da un livello energetico a un altro). L'energia di questi fotoni emessi, e quindi la posizione dei picchi nello spettro, è pari dunque alla differenza energetica fra un livello e un altro. La presenza inoltre di più di un picco dipende perciò dallo stato energetico in cui si trova il nucleo in partenza, ossia dal numero di transizioni necessarie a ricadere nello stato fondamentale.

Fino ad alcune decine di keV il processo predominante di interazione fotone-materia è l'effetto fotoelettrico: il fotone incidente viene assorbito e viene emesso un elettrone la cui energia è convertita in cariche e raccolta agli elettrodi; il detector poi riarrangia i suoi orbitali e l'energia liberata viene a sua volta convertita in cariche e raccolta. Alla fine quindi, tutta l'energia del fotone iniziale contribuisce a formare il segnale nel rivelatore. Nello spettro di energia vedremo un **picco** (fotopicco o full-energy peak) corrispondente all'energia del fotone incidente. Esso in realtà non sarà esattamente una delta di Dirac, ma avrà una forma gaussiana; la sua larghezza (in Nucleare, larghezza a metà altezza FWHM) determina la risoluzione in energia del rivelatore.