

# HEP

tommaso.faorlin, filippo.angelini

March 2020

## Contents

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Perché HEP?</b>                        | <b>3</b>  |
| 1.1 Esercizi . . . . .                      | 3         |
| <b>2 Unità naturali</b>                     | <b>3</b>  |
| 2.1 Esercizi . . . . .                      | 4         |
| <b>3 Panoramica delle interazioni</b>       | <b>4</b>  |
| 3.1 Interazione EM . . . . .                | 6         |
| 3.2 Interazione W . . . . .                 | 6         |
| 3.3 Interazione S . . . . .                 | 7         |
| 3.4 Esercizi . . . . .                      | 10        |
| <b>4 Panoramica delle particelle</b>        | <b>11</b> |
| 4.1 Particelle puntiformi . . . . .         | 11        |
| 4.1.1 Leptoni carichi (W+EM) . . . . .      | 11        |
| 4.1.2 Leptoni neutri (W) . . . . .          | 16        |
| 4.1.3 Quark (W+EM+S) . . . . .              | 17        |
| 4.2 Particelle composite (adroni) . . . . . | 17        |
| 4.2.1 Mesoni . . . . .                      | 17        |
| 4.2.2 Barioni . . . . .                     | 19        |
| 4.3 Antimateria . . . . .                   | 19        |
| 4.4 Esercizi . . . . .                      | 20        |
| <b>5 Rivelatori</b>                         | <b>23</b> |
| 5.1 Particelle cariche . . . . .            | 23        |
| 5.1.1 Ionizzazione . . . . .                | 23        |
| 5.1.2 Rivelatori non elettronici . . . . .  | 26        |
| 5.1.3 Rivelatori elettronici . . . . .      | 30        |
| 5.1.4 Particle Identification . . . . .     | 30        |
| 5.2 Particelle neutre . . . . .             | 32        |
| 5.2.1 Sciame elettromagnetico . . . . .     | 32        |
| 5.2.2 Sciame adronico . . . . .             | 35        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.3      | Neutrini . . . . .  | 37        |
| 5.4      | CMS - Compact Muon Solenoid . . . . .                         | 39        |
| 5.5      | Esercizi . . . . .  | 40        |
| 5.5.1    | Tracciatura . . . . .   | 40        |
| 5.5.2    | Calorimetria . . . . .  | 41        |
| <b>6</b> | <b>Urti</b>   | <b>42</b> |
| 6.1      | Sezione d'urto . . . . .                                      | 42        |
| 6.1.1    | Interpretazione geometrica . . . . .                          | 43        |
| 6.1.2    | Interpretazione classica . . . . .                            | 44        |
| 6.1.3    | Interpretazione quantistica . . . . .                         | 44        |
| 6.2      | Esercizi . . . . .  | 46        |
| 6.2.1    | Interpretazione QFT . . . . .                                 | 47        |
| 6.3      | Esercizi . . . . .  | 56        |
| <b>7</b> | <b>Decadimenti</b>  | <b>57</b> |
| 7.1      | Risonanze . . . . .   | 64        |
| 7.1.1    | Produzione della Delta . . . . .                              | 64        |
| 7.1.2    | Sezione $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .             | 65        |
| 7.1.3    | Risonanza $J/\psi$ scoperta del beauty . . . . .              | 66        |
| 7.1.4    | Esercizi . . . . .  | 67        |
| <b>8</b> | <b>Simmetrie</b>  | <b>68</b> |
| 8.1      | Simmetrie di parità . . . . .                                 | 69        |
| 8.1.1    | Introduzione classica . . . . .                               | 69        |
| 8.1.2    | Parità con particelle e campi . . . . .                       | 70        |
| 8.2      | Violazione di parità nelle interazioni fondamentali . . . . . | 73        |
| 8.2.1    | L'esperimento di Wu . . . . .                                 | 74        |
| 8.2.2    | Modello standard . . . . .                                    | 77        |
| 8.3      | Simmetria di coniugazione di carica . . . . .                 | 78        |
| 8.3.1    | Stati legati fermione anti-fermione . . . . .                 | 79        |
| 8.3.2    | Coniugazione di carica nelle interazioni deboli . . . . .     | 82        |
| 8.3.3    | Interlude: inversione del tempo . . . . .                     | 83        |
| 8.4      | Esercizi . . . . .  | 83        |
| <b>9</b> | <b>Adroni</b>   | <b>84</b> |
| 9.1      | Il numero quantico barionico . . . . .                        | 85        |
| 9.2      | Il numero quantico isotopico . . . . .                        | 86        |
| 9.2.1    | Regole di selezione . . . . .                                 | 88        |
| 9.3      | Il numero quantico di stranezza . . . . .                     | 89        |
| 9.3.1    | Regole di selezione . . . . .                                 | 90        |
| 9.4      | Esercizi . . . . .  | 90        |

# 1 Perché HEP?

## 1.1 Esercizi

Viene richiesto di partire dalle varie nomenclature associabili a questa parte della fisica e, riflettendo sui pro e contro di ognuna, ricavare un nome definitivo.

1. **Fisica subnucleare.** In genere, guardando gli altri settori della fisica, si nota come le lunghezze in gioco decrescano nell'avvicinamento a questa disciplina. **Definire però lunghezze sotto l'Angstrom** Å ( $10^{-10}$  m nel SI) è come *camminare sulle sabbie mobili*. Come abbiamo visto infatti anche nella parte di fisica nucleare, a seconda del tipo di definizione che diamo ad una lunghezza possiamo trovarci in una situazione contraddittoria in cui il raggio di un neutrone al quadrato è negativo. È anche contro intuitivo pensare che particelle subnucleari siano piccole e quindi leggere rispetto a protoni e neutroni. Infatti, la massa dell'Higgs è circa  $m_{Higgs} \approx 130m_N \approx m_{Tellurio}$  che è un nucleo di dimensioni raggardevoli.
2. **Fisica delle particelle elementari** Questa nomenclatura può avere senso dal momento che trattiamo e descriviamo le particelle come puntiformi: 6 leptoni e 6 quark. Ma ci sono assai più particelle che non sono puntiformi e che sono comunque trattate in questo corso: barioni, mesoni e onia. Inoltre, così facendo, ci si dimenticherebbe delle interazioni fondamentali.
3. **Fisica delle interazioni fondamentali** Viceversa, pur accennando ad alcune interazioni come la *Quantum Chromo Dynamics* (QCD) e *ElectroWeak interactions*, parlare di sole interazioni è arrogante, ci si dimentica ora del ruolo di tutte le particelle.
4. **HEP**, acronimo di *High Energy Physics* deriva dall'utilizzo di una scala di energie per descrivere la fisica. In questa branca infatti, le energie in gioco vanno dalle centinaia di MeV in su. (materia: eV, nucleare  $10^4 - 10^6$  eV)

## 2 Unità naturali

Il sistema MKS (*meter-kilometer-second*) non è pratico per le descrizioni di *HEP* per via delle potenze in gioco. La massa dell'elettrone, ad esempio, varrebbe  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg, il raggio del protone  $0.5 \cdot 10^{-15}$  m e la vita media del bosone  $Z$   $\tau(Z) = 2.7 \cdot 10^{-25}$  s. Conviene utilizzare la **scala di Planck**, quella delle unità naturali in cui  $\hbar = c = 1$ . Da qui, sia l'unità di misura del **tempo**, che l'unità di misura della lunghezza sarà l'**elettronvolt inverso**  $eV^{-1}$ . Dalla relazione di Einstein sappiamo inoltre che massa, energia e momento hanno la stessa unità di misura: l'eV.

## 2.1 Esercizi

1. Qual è l'unità di misura del momento angolare in unità naturali?

$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r}$ , ovvero eVeV<sup>-1</sup> perciò **adimensionale**;

2. Calcolare la vita media del bosone Z in unità naturali (UN).

Nel SI  $\tau_Z = 2.7 \cdot 10^{-25} s$ . Dalla conversione per  $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s = \frac{1.055 \cdot 10^{-34}}{1.6 \cdot 10^{-19}} eV \cdot s = 6.56 \cdot 10^{-16} eV \cdot s = 1[\text{UN}]$  trovo che  $1 eV^{-1} = 6.56 \cdot 10^{-16} s$  quindi dividendo per questo fattore ottengo  $\tau_Z = 4.12 \cdot 10^{-10} eV^{-1}$

3. Calcolare la massa del quark top in SI.

$M_t = 175 \text{ GeV}$  nel sistema di unità naturali. Da  $E = mc^2 \Rightarrow kg = \frac{eV}{c^2}$  e quindi, nel Sistema Internazionale,  $\frac{175 \text{ GeV} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{c^2} = 3.11 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ . Moltiplico per  $1.6 \cdot 10^{-19}$  perché nel Sistema Internazionale l'energia non è in eV ma in J.

4. Quanto vale  $\mu_0$  nella convenzione di Gauss? E in quella di HL?

Da  $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$  e sapendo che nel sistema di unità naturali  $c = 1$  allora nel sistema di Gauss, dato che  $4\pi\varepsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 4\pi$  e nel sistema di Heaviside-Lorentz, visto che  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 1$ .

5. Utilizzare l'espressione dell'energia di legame dell'atomo di Bohr per calcolare il valore della costante di struttura fine in UN.

Da  $E_B = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$ , isolo i termini prettamente elettromagnetici ottenendo  $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = -2E_B r_B$  e noto che, visto che il secondo membro è adimensionale lo sarà anche il primo. Nel Sistema Internazionale il secondo membro è Jm, da cui moltiplicando e dividendo per s si ha  $\hbar c$ . Quindi, dividendo tutto per  $\hbar c$  si ottiene una quantità detta **costante di struttura fine**, adimensionale in entrambi i sistemi.

6. La sezione d'urto per la diffusione di neutrini di 10 GeV su nucleoni vale  $10^{-37} cm^2$ . Esprimere il suo valore in barn e in GeV<sup>-2</sup>.

$\sigma = 10^{-37} cm^2 = 10^{-13} b$  visto che  $1 b = 10^{-24} cm^2$ . Inoltre sappiamo che  $1 fm = 5.08(GeV)^{-1}$  quindi inseriamo questo fattore al quadrato per la conversione voluta.  $\sigma = 10^{-37} cm^2 = 10^{-11} fm^2 = (5.08)^2 \cdot 10^{-11} (GeV)^{-2} = 25.8 \cdot 10^{-11} (GeV)^{-2}$

## 3 Panoramica delle interazioni

Ci sono 4 forze fondamentali:

- Forza gravitazionale ( $G$ )
- Forza elettromagnetica ( $EM$ )
- Forza debole ( $W$ )

- Forza forte ( $S$ )

Tuttavia, finora nei corsi di fisica si è affrontato il discorso riguardante solo le prime due. Infatti sono le uniche che agiscono su scala antropica e osservabili nella vita quotidiana. L'interazione debole e quella forte agiscono solo su scale femtoscopiche, dunque approfondiremo la loro natura in questo corso.

Innanzitutto, stabiliamo una **gerarchia** tra le interazioni. Ovvero, diamo un ordine all'intensità relativa delle interazioni. Da calcoli sull'atomo di idrogeno, sappiamo già che l'interazione EM è circa 40 ordini di grandezza più forte della gravità! Per quanto riguarda le altre, si ottiene che la gerarchia è la seguente:

$$F_W \ll F_{EM} \ll F_S$$

In che modo indaghiamo l'intensità relativa delle interazioni ? Ci sono 3 metodi principali:

- Misure di **sezione d'urto** in **processi di collisione** (probabilità della reazione)
- Misure di **vita media** in **processi di decadimento** (velocità del decadimento)
- Indagine **spettroscopica** degli **stati legati** (energia di legame)

### Sezione d'urto

Per reazioni a energie simili con  $\sqrt{s} = 10\text{GeV}$  (energia nel CM) si hanno valori molto diversi di sezione d'urto a seconda del tipo di processo.

- **S**:  $\sigma(pp \rightarrow X) \simeq 40 \text{ mb}$
- **EM**:  $\sigma(e^+e^- \rightarrow X) \simeq 40 \text{ nb}$
- **W**:  $\sigma(\nu N \rightarrow X) \simeq 0.3 \text{ pb}$

Quindi le probabilità di reazione sono molto diverse **a seconda della forza che fa da tramite**.

### Vita media

Anche per quanto riguarda le vite medie si osservano ordini di grandezza di differenza tra processi.

| Reazione                         | Frazione | $\tau [\text{s}]$ | Interazione |
|----------------------------------|----------|-------------------|-------------|
| $\rho \rightarrow \pi\pi$        | 100      | $o(10^{-24})$     | $S$         |
| $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ | 98       | $o(10^{-16})$     | $EM$        |
| $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$     | 99       | $o(10^{-8})$      | $W$         |

Più l'interazione è forte più la vita media, ovvero il tempo trascorso prima di decadere è breve.

## Energia di legame

Confrontiamo inoltre le energie di legame degli stati legati.

- **S:** L'interazione forte è alla base degli stati legati nucleari, che hanno energie dell'ordine di **MeV**. Tuttavia troviamo anche stati legati di altre particelle, come il **charmonio**, ovvero un cluster di quark e anti-quark *charm*, i cui stati legati hanno salti di centinaia di **MeV** fino a **GeV**.
- **EM:** Per l'interazione EM ci si riferisce ai livelli energetici degli elettroni negli atomi, quindi di energie dell'ordine dell'**eV**.
- **W:** L'interazione debole è invece talmente poco intensa da **non produrre stati legati**.

Approfondiamo ora le singole interazioni.

### 3.1 Interazione EM

Il quanto del campo elettromagnetico, mediatore di questa forza, è il fotone, indicato nei diagrammi come un "ondina" al fine di ricordare l'oscillazione del campo elettromagnetico. Il fotone ha **massa nulla e carica nulla**, ovvero non vi sono alcun tipo di interazioni tra fotoni e una **vita media infinita**. La **costante di accoppiamento** o di struttura fine del campo elettromagnetico vale  $\alpha = 1/137$ .



### 3.2 Interazione W

Per l'interazione debole, i quanti sono 3:  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ . La loro massa vale  $m(W^+) = m(W^-) = 80.385 \pm 0.015$  GeV perché sono uno l'antiparticella dell'altro e  $m(Z^0) = \frac{m(W^-)}{\cos \theta_W} = 91,1876 \pm 0.0021$  GeV dove  $\theta_W$  è l'**angolo di Weinberg**. La loro carica vale  $Q(W^+) = -Q(W^-) = e$ , mentre  $Q(Z^0) = 0$ .

Il fotone può interagire con una coppia  $W^+$ ,  $W^-$  ma non con uno  $Z^0$  poiché quest'ultimo ha carica nulla. Può però interagire con la coppia dei  $W$  nel grafico del triplo accoppiamento dei quanti del campo debole.

La costante di accoppiamento, dal modello di Weinberg-Salam prevede che  $\alpha_W = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W} \approx 4.5\alpha$ . Questo può destare sospetti: perché nella gerarchia delle interazioni questa era la forza più debole ma risulta avere una costante di accoppiamento più elevata di quella di struttura fine del campo EM? La risposta a questo quesito **non va cercata nella grandezza delle costanti**, ma bensì

nel seguente ragionamento: Il fotone si propaga all'infinito e può essere rappresentato da una onda piana mediante  $A_\mu = \varepsilon_\mu e^{ikx}$ , che inserita nell'equazione di d'Alembert restituisce un noto risultato: la massa del fotone è nulla.

$$\square A_\mu = \partial_\rho \partial^\rho A_\mu = 0 \Rightarrow -k_\rho k^\rho A_\mu = 0 \Rightarrow m_\gamma^2 = k_\rho k^\rho = 0$$

Se però il mediatore dell'interazione è dotato di massa, l'equazione con il quale si propaga va modificata introducendo un termine di massa. Questa diventa **l'equazione di Klein-Gordon**

$$(\square + m^2)W_\mu = (\partial_\rho \partial^\rho + m^2)W_\mu = 0$$

Ricordando che il d'Alambertiano non è altro che

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

e considerando il caso **statico** (derivata temporale non porta termini) si ottengono le seguenti equazioni

- $(\nabla^2 - m^2)V' = 0$  nel vuoto;
- $(\nabla^2 - m^2)V' = -\rho' = -\sqrt{\alpha_W}\delta^3(0)$  in presenza di una sorgente puntiforme.

Senza fare conti diamo il risultato (verifichiamo poi negli esercizi che nel vuoto questo potenziale è corretto). Un potenziale che risolve queste equazioni è il **potenziale di Yukawa**

$$V(r) = -\frac{\sqrt{\alpha_W}}{r} e^{-m_W r} = -\frac{\sqrt{\alpha_W}}{r} e^{\frac{r}{\lambda}}$$

Compare un termine esponenziale che smorza il potenziale di interazione. Si può valutare di quanto questo potenziale viene smorzato calcolando il **raggio d'azione**  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{m_W} = (80 GeV)^{-1} = \frac{1}{80 \cdot 5 fm^{-1}} = \frac{1}{400} fm$$

(Ricordando che  $1 fm \simeq 5 GeV^{-1}$ ). Quindi due neutrini **si ignorano a meno che questi non passino a una distanza così piccola uno dall'altro in modo da innescare la reazione**: sono interazioni a cortissimo raggio.

### 3.3 Interazione S

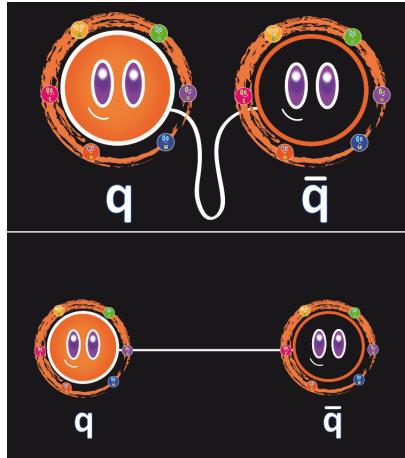
Può essere osservata in **scala più piccola** fra quark costituenti uno stesso protone o neutrone, o in **scala più grande** fra quark di protoni e neutroni diversi all'interno del nucleo atomico, dove si parla più propriamente di **forza nucleare forte** o **forza forte residua**. Nel primo caso le particelle mediatici

dell'interazione sono i **gluoni**, nel secondo i **pioni**.

Per l'interazione forte, i quanti sono almeno 8 **gluoni** e il loro simbolo è quello di una molla per ricordare che è *difficile estendere una molla*. La massa dei gluoni è nulla come la loro carica, mentre la vita media è infinita in buona approssimazione. Il parametro che rende i gluoni interessante e che scatena 3 particolari fenomeni è la **carica di colore**  $Q_c \neq 0$  non nulla. Questo fa sì che vi sia autoaccoppiamento. La carica di colore è analoga alla nozione di carica elettrica, ma a causa degli aspetti matematici della QCD vi sono numerose differenze tecniche. Venne proposta per spiegare come essi, pur avendo caratteristiche identiche, possano coabitare negli adroni senza contraddirre il principio di esclusione di Pauli. La costante di accoppiamento è  $\alpha_S \approx o(10 - 100)\alpha$ .

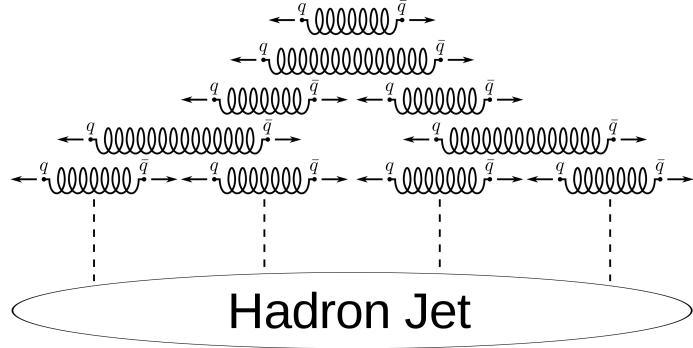
L'autoaccoppiamento dei gluoni comporta cose mai viste prima:

1. **Libertà asintotica.** Dalla lagrangiana della QCD il potenziale delle interazioni forti può essere schematicamente rappresentato come un potenziale che **cresce linearmente** con la distanza tra particelle. Questo comporta che l'interazione tra le particelle, ad esempio i quark, diviene arbitrariamente debole a distanze sempre più piccole, fino ad annullarsi nel caso in cui la distanza tenda a zero. A piccole distanze, ovvero a grandi impulsi scambiati, quark e gluoni si comportano come particelle libere, ignorandosi.

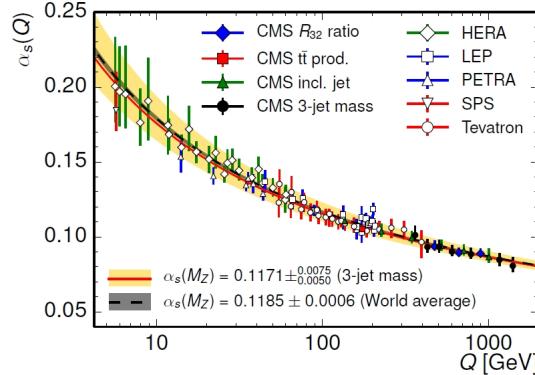


2. **Schiavitù infrarossa.** Se  $r \rightarrow \infty$  allora  $U \rightarrow \infty$  proprio come una molla  $1/2kr^2$ . A grandi distanze quark e gluoni sono quindi fortemente vincolati tra loro. Se il sistema ha energia  $E_0$ , il moto è vincolato a svolgersi dove  $E_0 < U(r_0)$ , ovvero il sistema è schiavo delle basse energie che corrispondono all'infrarosso. Da questo segue l'**ipotesi di confinamento**. Il confinamento di colore o confinamento dei quark è il fenomeno fisico

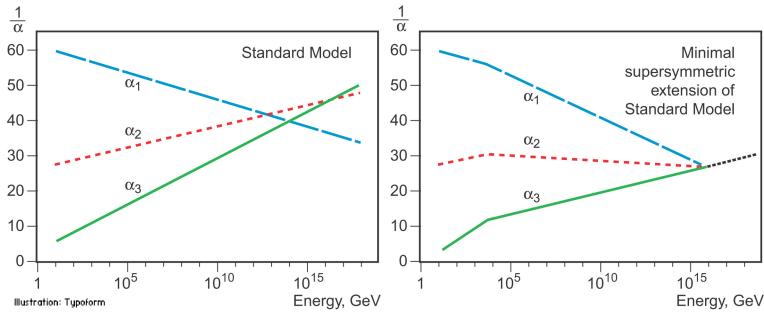
per cui le particelle che hanno carica di colore non possono essere isolate e pertanto non sono osservabili singolarmente. Se io "stiro" una stringa di colore non arriverà mai a romperla in quark e antiquark ma è economicamente più conveniente formare un'altra stringa quark-antiquark. Questo genera gli sciami di partoni.



3. **Running coupling constant.** Le costanti di accoppiamento delle interazioni non sono propriamente costanti, ma sono parametri che variano a seconda dell'energia. Si osserva una ottima corrispondenza tra le previsioni teoriche del modello standard e le misure sperimentali. Per fare un esempio,  $\alpha_s$  varia di un ordine di grandezza nell'intervallo 100 MeV–1 TeV.



Le equazioni del gruppo di rinormalizzazione prevedono che la costante di accoppiamento cresca notevolmente con l'energia nel caso  $EM$  e diminuisca per  $S$  e  $W$



### 3.4 Esercizi

- Si consideri la collisione  $\nu N$  con il nucleone a riposo. Per quale valore di  $E_\nu$  si ha  $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$ ?

$\sqrt{s}$  è una variabile di Mandelstam che rappresenta il l'energia nel centro di massa.  $s$  è un invariante relativistico, quindi  $\sqrt{s}$  è tale anche nel sistema del laboratorio. Da qui, considerando che il  $\nu$  ha massa nulla e il neutrone è a riposo nel laboratorio, con  $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$  si ha che

$$s = (E_\nu + m_N)^2 - |\vec{P}_\nu|^2 = |\vec{P}_\nu|^2 + m_N^2 + 2E_\nu m_N - |\vec{P}_\nu|^2$$

$$\Rightarrow E_\nu = \frac{s - m_N^2}{2m_N} = 52.8 \text{ GeV}$$

avendo scelto  $m_N = 939 \text{ MeV}$ , massa del neutrone.

- È corretto dire che le interazioni deboli sono tali perchè hanno una piccola costante di accoppiamento ?

No: le evidenze sperimentali mostrano come l'interazione debole sia meno intensa delle altre nonostante la sua costante di accoppiamento sia maggiore di quella elettromagnetica. La ragione è da ricercarsi nel fatto che il raggio d'azione della forza dipende dalla propagazione del suo quanto di campo e mentre per la radiazione elettromagnetica si ha che il fotone, privo di massa, si propaga all'infinito, per la forza debole i  $W$  hanno massa non nulla e ciò modifica il campo d'azione della forza stessa (potenziale di Yukawa). Nella fattispecie, questo campo ha un decadimento esponenziale con costante caratteristica data dall'inverso della massa del bosone  $W$  considerato, il che comporta che la forza debole sia a cortissimo raggio e, come tale, meno intensa in fenomeni con dimensione caratteristica femtometrica.

- Verificare che una carica puntiforme che obbedisce all'equazione di KG genera il potenziale di Yukawa, applicando a quest'ultimo il laplaciano (in coordinate sferiche)

Il potenziale di Yukawa dipende solo dalla coordinata radiale. Andando a riscrivere il laplaciano in coordinate sferiche risolviamo per la sola parte radiale:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV(r)] \quad V(r) = -\frac{\sqrt{\alpha_W}}{r} e^{-m_W r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (-\sqrt{\alpha_W} e^{-m_W r}) = \frac{1}{r} (-m^2 \sqrt{\alpha_W} e^{-m_W r}) = -m_W^2 V(r)$$

Ora, dall'equazione di Klein-Gordon nel caso statico

$$(\nabla^2 - m_W^2)V(r) = -m_W^2 V(r) + m_W^2 V(r) = 0$$

Come trattare il punto 0 ? dovrebbe venire una  $\delta^{(3)}(x)$

## 4 Panoramica delle particelle

La scoperta dell'elettrone del 1896 ha portato alla successiva scoperta di centinaia di nuove particelle. È quindi da subito necessario definire dei **criteri di ordinamento** per classificarle al meglio. La prima distinzione è tra particelle puntiformi e composite.

### 4.1 Particelle puntiformi

A livello di particelle puntiformi poi distinguiamo in leptoni carichi, leptoni neutri e quarks.

#### 4.1.1 Leptoni carichi (W+EM)

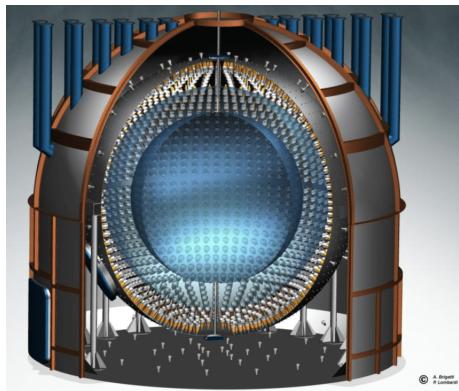
| particella | massa     | spin | giromagnetico       | vita media           | modi  |
|------------|-----------|------|---------------------|----------------------|---|
| e          | 0.511 MeV | 1/2  | $2 + o(\alpha/\pi)$ | $\infty$             | -   |
| $\mu$      | 105 MeV   | 1/2  | $2 + o(\alpha/\pi)$ | $2.2 \cdot 10^{-6}$  | $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$   |
| $\tau$     | 1777 MeV  | 1/2  | $2 + o(\alpha/\pi)$ | $291 \cdot 10^{-15}$ | $\tau \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$<br>$\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau$<br>$\tau \rightarrow had \nu_\tau$ |

#### Elettrone

La materia attorno a noi non scompare e questo fa pensare che l'elettrone sia una particella stabile. Tuttavia, prima di Borexino non si era mai misurata la vita media dell'elettrone. Borexino nasce come un esperimento per analizzare una parte dello spettro dei neutrini del Sole e tra le altre cose detiene il record sulla misura della vita media dell'elettrone

$$\tau(e) > 6.6 \cdot 10^{28} \text{ anni}$$

Intuitivamente, si potrebbe cercare di osservare il decadimento di un elettrone per  $10^{28}$  anni oppure quello di  $10^{28}$  elettroni per un anno.

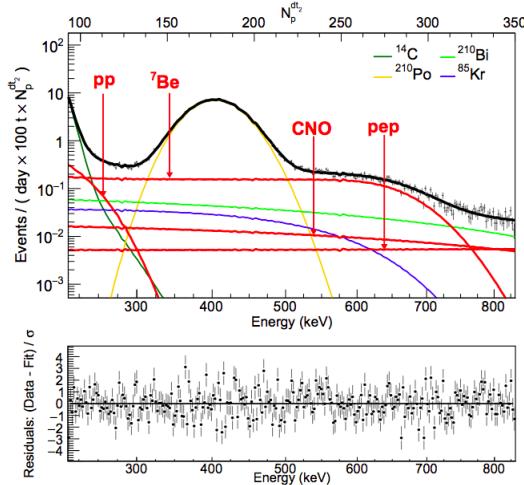


Borexino a grandi righe non è altro che una grossa tanica riempita di 270 ton **liquido scintillante** (un materiale capace di emettere impulsi di luce, in genere visibile o ultravioletta, quando viene attraversato da fotoni di alta energia o da particelle cariche). Nella foto, quelli ai bordi della sfera sono i fotomoltiplicatori. Il decadimento ricercato è

$$e^- \rightarrow \gamma \nu_e$$

e l'elettrone, partendo in buona approssimazione a riposo fa sì che fotone e neutrino elettronico si smezzino l'energia. Perciò  $E_\gamma = m_e/2 = 256$  keV. Il *plot*

che si ottiene è il seguente e non vi è alcun tipo di segnale in corrispondenza dei 256 keV.

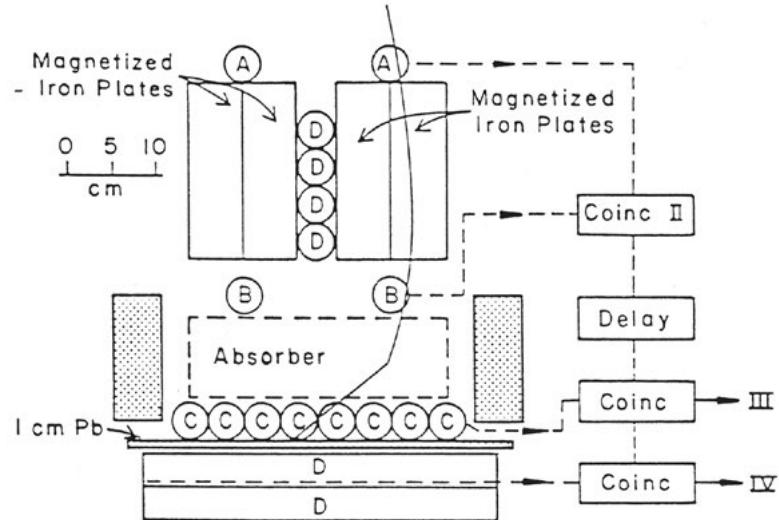


Il decadimento però, se venisse osservato violerebbe la conservazione della carica e qui si formano due diverse scuole di pensiero:

- L'elettrone è stabile perché essendo la particella carica più leggera è protetta dalla conservazione della carica elettrica; (**teorico**, ovvero è la conservazione della carica a rendere stabile l'elettrone)
- La stabilità dell'elettrone, che è la particella carica più leggera è la più convincente prova della conservazione della carica elettrica. (**empirico/sperimentale**, ovvero è la forte stabilità empirica dell'elettrone che conserva la carica)

### Muone

Il muone è stato scoperto da Anderson e Neddermeyer nel 1936, come ultimo prodotto della interazione dei raggi cosmici con i nuclei negli strati alti dell'atmosfera terrestre. Questi sono prodotti nello spazio e non appena vengono in contatto con l'atmosfera formano i cosiddetti **sciami adronici**, che giungono a terra principalmente sotto forma di neutrini, fotoni e muoni. Con il loro esperimento, **Paccini-Piccioni-Conversi**, nel 1942 (terminato nel 1945 e svoltosi in un laboratorio vicino al Vaticano per mettersi maggiormente al riparo dai bombardamenti) trovano che **il muone è in realtà un leptone** (carico perché in campo magnetico curva e quindi assomiglia molto ad un elettrone) e ne ricavano la sua **vita media**. Descriviamo l'esperimento

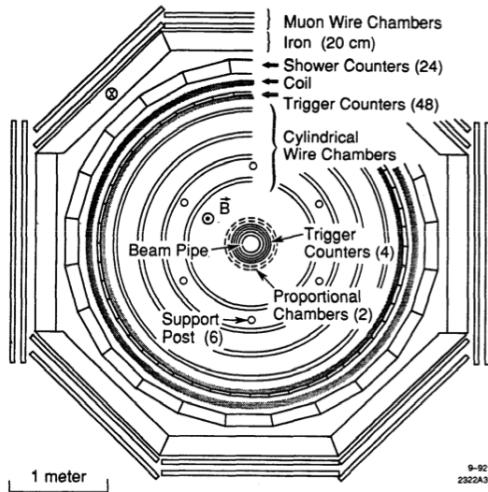


L'esperimento si compone inizialmente di due piastre magnetiche che vengono impiegate per focalizzare il fascio proveniente dall'alto (dal cosmo), alternando la loro polarità si possono far convergere particelle di segno diverso. Alle estremità delle piastre vi sono due rivelatori di **coincidenza diretta** **A** e **B** che servono a discriminare eventi validi (se tutti e due cliccano) da eventi di fondo. Una volta entrato nel rettangolo di **materiale assorbitore**, il muone rallenta fino a fermarsi e decade a riposo. L'elettrone emesso in avanti nel decadimento viene osservato dai rivelatori **C** dopo un tempo di ritardo tipico. Dei contatori **di veto** **D** vengono posti dopo i contatori **C** al fine di eliminare i processi di fondo. Il *delay*, evidenziato nel diagramma a blocchi a fianco dello schizzo dell'esperimento è il tempo  $\Delta t = t_C - t_{AB}$  che viene interpolato con una funzione esponenziale  $f(t) = e^{-\Delta t/\tau}$  con parametro libero  $\tau$ . Si ricava così la vita media del muone.

### Tauone

Esistono leptoni carichi più pesanti di muone ed elettrone: nel 1972, presso lo Standford Linear Accelerator Center SLAC con il collisore SPEAR viene scoperto il tauone  $\tau$ . Si cercava un altro leptone, in grado di decadere sia in elettrone che in muone e che spiegasse l'origine delle differenze dei leptoni. Con l'acceleratore positroni-elettroni SPEAR con energia nel centro di massa fino a 4 GeV si cercava questa nuova particella di eventi tipo

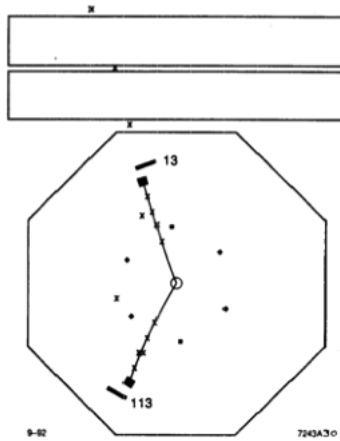
$$e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp 4\nu$$



SPEAR è fatto così, dalla *beam pipe* più interna, andando verso l'esterno si hanno:

- Delle **cylindrical wire chambers** per le tracce di particelle cariche;
- La bobina per il campo magnetico;
- Dei **shower counters**, calorimetri per assorbire gli elettroni;
- 20 cm di ferro;
- Le **muon wire chambers**: fino a questo punto ci arrivano solo dei muoni.

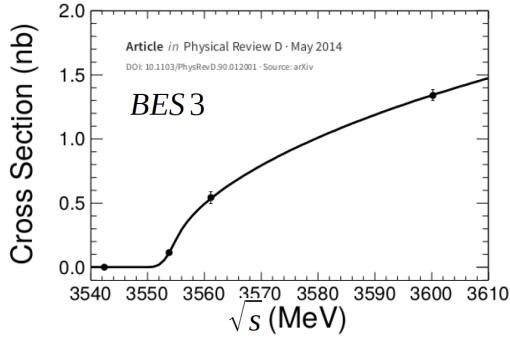
La scoperta è raffigurata nella seguente immagine



Qui, sapendo che nella *beam pipe* hanno colliso positroni contro elettroni si nota una **particella che va verso il basso**, fermata nei calorimetri per elettroni

e una **particella che va verso l'altro** che invece supera i calorimetri, supera il ferro e lascia traccia nelle più esterne *muon wire chamber*: è un muone. L'emissione non simmetrica fa pensare, come in realtà ci si aspetterebbe, che questo decadimento conta anche dei 4 neutrini. Si è quindi scoperto il  $\tau$ .

Una stima della **massa del tau** può essere data da dei fit cinematici sui prodotti di decadimento o meglio, come si usa fare al giorno d'oggi, tramite uno **scan della produzione di soglia**. Per produrre la coppia  $\tau^-\tau^+$  faccio scontrare  $e^+e^-$  e so per certo che  $\sqrt{s} > 2m_\tau$ . Se  $\sqrt{s} = 2m_\tau$  la reazione avviene in soglia e quindi vado a far variare l'energia dei fasci collidenti, conto gli eventi e vado a fare un *plot* della sezione d'urto  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^-\tau^+)$  in funzione dell'energia nel centro di massa. Ciò che ottengo è



e una funzione, che vado a interpolare con  $m_\tau$  parametro libero, del tipo

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^-\tau^+) \propto \beta^2 = 1 - 4 \frac{s}{m_\tau^2}$$

#### 4.1.2 Leptoni neutri (W)

Per ogni leptone carico ce n'è uno neutro, che fa solo interazioni deboli e che pur essendo abbondante in natura è in genere molto difficile da osservare. I leptoni neutri sono i **neutrini** e sono questi

| particella | massa  | spin | giromagnetico | vita media |
|------------|--------|------|---------------|------------|
| $\nu_e$    | < 1 eV | 1/2  | 0             | $\infty$   |
| $\nu_\mu$  | < 1 eV | 1/2  | 0             | $\infty$   |
| $\nu_\tau$ | < 1 eV | 1/2  | 0             | $\infty$   |

Vi sono moltissime sorgenti naturali di leptoni tra le quali si ricordano il Sole ( $\nu_e$ ), i raggi cosmici ( $\nu_\mu$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\bar{\nu}_e$ ), le Supernovae e anche relitti del Big Bang. Possono anche essere prodotti come scarti nei reattori nucleari e negli acceleratori (dal CERN vengono spediti ai laboratori del Gran Sasso ad esempio).

I leptoni vengono arrangiati in 3 famiglie come doppietti di isospin deboli di diverso **sapore leptonico**. Fanno solo interazione debole perciò non vi sono

distinzioni dovute alla carica di colore. Comunque, queste sono  $(e_L \nu_{e,L})$ ,  $(\mu_L \nu_{\mu,L})$ ,  $(\tau_L \nu_{\tau,L})$ .

#### 4.1.3 Quark (W+EM+S)

Dall'ipotesi di confinamento della QCD (come proprio detto sopra) non si osservano quark liberi, ma vi sono incontestabili evidenze indirette della loro esistenza. In natura ci sono 6 tipi di quark distinti dal loro **sapore adronico**: *charm, strange, top, bottom, up, down*. Per ogni quark esiste l'**antiquark**. Tramite l'**interazione debole** un quark può cambiare sapore: un *top, up, charm* può diventare **bottom, down, strange** emettendo un bosone  $W$  e viceversa. In base alla cromodinamica quantistica, teoria per l'interazione forte e per la quale esistono 3 cariche di colore rosso verde e blu, si possono distinguere 18 diversi tipi di quark: sapore adronico + carica di colore. La seguente tabella racoglie alcune proprietà (sottolineando il fatto che non esiste una massa univoca per i quark in quanto non sono direttamente osservati)

| quark | massa                | $Q$  | Sapore         |
|-------|----------------------|------|----------------|
| u     | 1 MeV                | 2/3  | $I_3^S = 1/2$  |
| d     | 4 MeV                | -1/3 | $I_3^S = -1/2$ |
| c     | 1500 MeV             | 2/3  | $c = 1$        |
| s     | 100 MeV              | -1/3 | $s = -1$       |
| t     | $175 \cdot 10^3$ MeV | 2/3  | $t = 1$        |
| b     | 4500 MeV             | -1/3 | $b = -1$       |

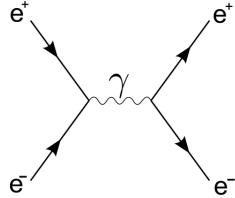
## 4.2 Particelle composite (adroni)

### 4.2.1 Mesoni

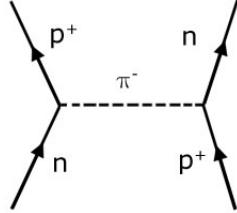
I **mesoni** sono aggregati di quark-antiquark  $q\bar{q}$ . Ad esempio, il pion  $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$ . Oppure il **charmonio**, mesone  $J/\psi$  è aggregato di  $|c\bar{c}\rangle$ . A seconda di come si orientano gli spin si hanno singoletti (antisimmetrici, **pseudoscalari**) o tripletti (simmetrici, **vettori**).

#### Pione

Il **pione** è stato, come tante altre particelle, proposto prima di essere scoperto. Yukawa nel 1935 cerca di modellizzare le interazioni tra nucleoni utilizzando i risultati della interazione EM. Quello che si sapeva delle interazioni elettromagnetiche era che due correnti si scambiano il fotone.



Il pione invece viene teorizzato, in modo analogo, nel caso si abbiano due correnti, una di neutrone e una di protone, e svolge lo ruolo del quanto della interazione forte tra quarks di due adroni diversi (protone e neutrone).

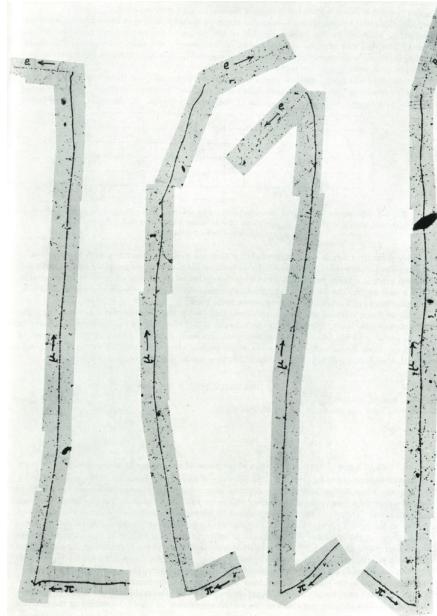


Il potenziale a cui sono sottoposti deve soddisfare il fatto che la forza nucleare è **maggiore di quella coulombiana**  $F_N \gg F_C$  e che è potenziale di una **forza a corto raggio**. Ne esce il potenziale di Yukawa

$$V(r) = \frac{g}{r} e^{-mr}$$

anche se ho  $g$  grande, con una buona  $m$  si abbatte tutto. Immaginando  $r \sim 1 \text{ fm}$  si ha  $m \sim 200 \text{ MeV}$ , si ha quindi l'ordine di grandezza.

L'esperimento Paccini-Piccioni-Conversi esclude che la particella sia un pion. Il primo pion è stato invece osservato per mezzo di emulsioni ad alta quota nelle Ande.



In particolare, qui si nota come l'emulsione frena il  $\pi$ , che decade al 99% come  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ . Il  $\mu^+$  decade successivamente come  $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ . Pochi anni dopo,

al Bevatron, viene anche scoperto il pione neutro, guardando  $\alpha C \rightarrow \pi^0 X$  che a sua volta  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Di questo passo, con l'utilizzo dei palloni sonda, vengono scoperte anche particelle andando ad imprimere delle emulsioni ad alta quota. Poi, dagli anni '50 vengono inventati gli acceleratori e da qui viene scoperta una intera fauna di diverse particelle.

|         | m (GeV) | $\tau$ (s) | S   | Q | g    | Sapore                   | Quark                                     |
|---------|---------|------------|-----|---|------|--------------------------|---|
| p       | 938     | $\infty$   | 1/2 | 1 | 2.79 | $I_3 = \frac{1}{2}$      | uud                                       |
| n       | 939     | 880        | 1/2 | 0 | -1.9 | $I_3 = -\frac{1}{2}$     | udd                                       |
| $\pi^+$ | 139.6   | 26 n       | 0   | 1 |      | $I_3 = 1$                | $u\bar{d}$                                |
| $\pi^0$ | 135     | 840 f      | 0   | 0 |      | $I_3 = 0$                | $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} - u\bar{d})$ |
| $K^+$   | 494     | 12 n       | 0   | 1 |      | $I_3 = \frac{1}{2}, S=1$ | $u\bar{s}$                                |
| $K_s$   | 498     | 89 p       | 0   | 0 |      | ...                      | ...                                       |
| $K_L$   | 498     | 51 n       | 0   | 0 |      | ...                      | ...                                       |

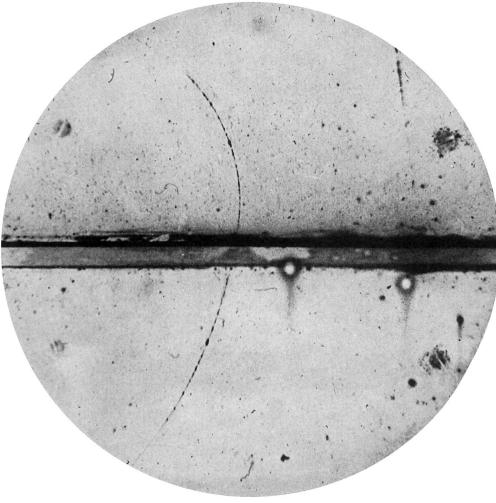
| quark | massa                | Q    | Sapore         | quark | massa | Q   | Sapore        |
|-------|----------------------|------|----------------|-------|-------|-----|---------------|
| u     | 1 MeV                | 2/3  | $I_3^S = 1/2$  | u     | 1 MeV | 2/3 | $I_3^S = 1/2$ |
| d     | 4 MeV                | -1/3 | $I_3^S = -1/2$ |       |       |     |               |
| c     | 1500 MeV             | 2/3  | $c = 1$        |       |       |     |               |
| s     | 100 MeV              | -1/3 | $s = -1$       |       |       |     |               |
| t     | $175 \cdot 10^3$ MeV | 2/3  | $t = 1$        |       |       |     |               |
| b     | 4500 MeV             | -1/3 | $b = -1$       |       |       |     |               |

#### 4.2.2 Barioni

I **barioni** sono particelle composte da un numero dispari di quark. Se hanno più di 3 quark sono detti **barioni esotici**. Essendo dispari hanno chiaramente un momento angolare semi intero e quindi sono dei fermioni.

#### 4.3 Antimateria

L'equazione di Dirac del 1928 prevede l'esistenza dello spin e dell'antimateria. La prima osservazione diretta di antimateria è stata compiuta da Anderson nel 1932: osservò il positrone.



La foto che fruttò il premio Nobel ad Anderson nel 1932, nonché la prima immagine di un positrone. Immaginando il tutto immerso in un campo magnetico e interponendo tra la zona sopra e sotto una lastra di piombo, non si possono avere dubbi sul fatto che sia un elettrone proveniente dall'alto oppure un positrone dal basso, perché il raggio di ciclotrone deve diminuire dopo il passaggio della particella nel piombo. Si nota infatti a vista d'occhio come vi sia una maggior curvatura sulla parte alta, che conferma appunto che la particella in questione sia un positrone che, arrivando dal basso, perde energia nel piombo.

Nel 1935 viene scoperto il secondo antifermione: l'antiproton, osservando  $pp \rightarrow p\bar{p}$

Tutte le particelle elementari o composite, fermioni o bosoni, ha una antiparticella che ha:

- Stessi numeri quantici meccanici;
- Cariche opposte (elettrica, debole, colore);
- Opposto sapore;

#### 4.4 Esercizi

1. Stimare per ordini di grandezza il numero di elettroni presenti in Borexino potenzialmente utili per misurare  $\tau(e)$

Per ordine di grandezza, come spiegato sopra, un numero utile per misurare  $\tau(e)$  è di circa  $\sim 10^{28} \div 10^{30}$  elettroni da osservare per un anno;

2. Perché Borexino non considera il processo  $e \rightarrow \gamma\gamma$  che ha un segnale più chiaro?

Il processo  $e \rightarrow \gamma\gamma$  non conserva né la carica (come l'altro), ma nemmeno il numero leptonico (che comunque è un numero quantico più debole della carica elettrica). L'altra cosa che non si conserva qui è la parità.

3. Quali correzioni si devono apportare per ottenere lo spettro alla quota  $h = 10^3$  m? Si osserva che il massimo sta a circa 10 GeV, e che la frequenza di muoni con 1 GeV e con 100 GeV di energia è circa uguale. Quale valore del rapporto tra le due frequenze  $R = N(E = 100)/N(E = 1)$  vi aspettate a quella quota?

A 1000 metri, vi sarà sicuramente un quantitativo maggiore di muoni a bassa energia, che decadono in numero maggiore prima di toccare terra. Per quelli ad alta energia questo non avviene perché sono più veloci e inoltre la dilatazione dei tempi estende la loro vita media nel sistema di riferimento della Terra. Un muone ( $\tau_0 = 2.2 \mu s$  e  $m_\mu = 105$  MeV) di 1 GeV ha un  $\gamma$  pari a  $\gamma = E_\mu/m_\mu = 9.52$ . Ricordando che in un sistema solidale alla terra la vita media del fotone è dilatata di un fattore  $\gamma$ :  $\tau = \gamma\tau_0 = 21 \mu s$  ricavo la frazione di  $\mu$  sopravvissuta al viaggio dall'altezza  $L$  fino a terra.

$$f_{corr} = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\frac{L}{\beta c \tau}}$$

che a 1 GeV si ha  $f_{corr} = 0.852$  e a 100 GeV si ha  $f_{corr} = 0.998$ . Quindi all'altezza  $h = 0$  per i conteggi vale  $N(E = 100\text{GeV}) = N(E = 1\text{GeV})$  e visto che per i conteggi all'altezza  $h = L$  è valido  $N_0 = N/f_{corr}$ , si ottiene

$$\frac{N_0(E = 100\text{GeV})}{N_0(E = 1\text{GeV})} = \frac{N(E = 100\text{GeV})}{0.998} \frac{0.852}{N(E = 1\text{GeV})} = \frac{0.852}{0.998} = 0.854$$

4. La vita media del  $\tau$  è stata misurata con precisione a LEP, in collisioni  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ . Sapendo che l'energia nel centro di massa è  $\sqrt{s} \approx 91$  GeV calcolare la distanza media tra il punto di produzione e quello di decadimento del  $\tau$ .

Il decadimento è a due corpi di massa uguale e nel centro di massa (indicato con un asterisco)  $E_{\tau^+}^* = E_{\tau^-}^* = \sqrt{s}/2 = 45.5$  GeV.  $\gamma_{\tau^+} = \gamma_{\tau^-} = E_{\tau^-}^*/m_\tau = 25.6$ . Il tempo di vita del tauone è noto nel centro di massa e nel laboratorio è  $\tau = \gamma\tau_0 = 7.45 \mu s$ . Allora, la distanza percorsa prima di decadere è  $d = \beta c \gamma \tau_0 \approx 2$  mm.

Sono stati raccolti circa 10000 decadimenti del  $\tau$  con una risoluzione sulla singola misura della lunghezza di decadimento  $\sigma_L \approx 100 \mu m$ . Con quale precisione si misura la vita media del  $\tau$ ?

Sapendo che sono stati raccolti 10000 decadimenti del  $\tau$  ciascuno con risoluzione sulla lunghezza di decadimento di  $\sigma_L \approx 100 \mu m$ , l'incertezza sulla vita media  $\tau_\tau = \frac{L}{\beta c \gamma}$  è pari a  $\sigma_{\tau_\tau} = \frac{\sigma_L}{\beta c \gamma} = 1.3 \cdot 10^{-14} s$  e  $\frac{\sigma_{\tau_\tau}}{\tau_\tau} = 4.5\%$

5. L'intensità della radiazione solare è  $I = 1.4 \frac{kW}{m^2} = 1.4 \frac{kJ}{s \cdot m^2}$ . Sapendo che in ogni reazione di fusione nel nucleo del sole sono prodotti due neutrini e vengono liberati circa 24 MeV calcolare il flusso di neutrini per metro quadro per secondo.

Calcolo l'energia in eV

$$I = \frac{1.4 \cdot 10^3}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 8.75 \cdot 10^{24} \frac{eV}{s \cdot m^2}$$

da cui, conoscendo l'energia liberata per neutrino  $\approx 12$  MeV (24 MeV per due) si ha il numero di neutrini

$$\Phi = \frac{8.75 \cdot 10^{24} eV}{12 \cdot 10^6 eV s \cdot m^2} \approx 7.3 \cdot 10^{14} \frac{\#}{s \cdot m^2}$$

6. Nelle centrali nucleari vengono liberati circa 200 MeV e sei antineutrini  $\bar{\nu}_e$  per reazione. Quanti neutrini al secondo per una centrale che produce 1 GW?  $1 \text{ GW} = 1 \frac{GJ}{s} = 6.25 \cdot 10^{27} \frac{eV}{s}$ .

Per neutrino si ha  $\frac{200}{6} = 33.3 \frac{MeV}{\bar{\nu}_e}$  perciò una centrale nucleare produce  $\frac{6.25 \cdot 10^{28} eV \bar{\nu}_e}{33.3 \cdot 10^6 eV s} = 1.88 \cdot 10^{20}$  neutrini al secondo. Per guardare l'intensità a distanza  $L = 50m$  divido la potenza per l'area della superficie sferica di raggio  $L$  e per ottenere il rate di neutrini sull'area  $A = 1m^2$  ci moltiplico l'intensità.

$$P = 1.88 \cdot 10^{20} s^{-1} \frac{A}{4\pi L^2} = 5.95 \cdot 10^{15} s^{-1}$$

7. Su quali evidenze sperimentali possiamo affermare che protone e neutrone non sono corpuscoli puntiformi?

Le evidenze sperimentali che permettono di affermare che protone e neutrone non sono corpuscoli puntiformi riguardano la costruzione di questi adroni. Sono composti da un numero dispari di quark (barioni) legati dall'interazione forte e perciò occuperanno uno spazio non puntuale.

8. Già spiegato sopra.  
 9. L'antiproton è stato scoperto sparando un fascio di protoni contro un bersaglio di idrogeno gassoso in cui il protone di bersaglio era a riposo. Qual è la minima energia del fascio necessaria ad innescare la reazione?

La reazione è  $pp \rightarrow ppp\bar{p}$ . Se uno dei due protoni è fermo nel laboratorio, posso calcolare  $s = (E_0 + m_p)^2 - p_0^2$  indicando con  $E_0$  e  $p_0$  l'energia e il momento della particella incidente. Dopo la reazione, se questa avviene in soglia, si ha invece  $s = (4m_p)^2$ . Uguagliando le quantità si ottiene

$$E_0^2 + 2m_p E_0 + m_p^2 - p_0^2 = 16m_p^2$$

ma  $E_0^2 - p_0^2 = m_p^2$  quindi semplificando un  $m_p$

$$E_0 = \frac{14}{2} m_p = 7 m_p = 6.57 \text{ GeV}$$

10. Perchè non si è utilizzata invece la reazione  $pp \rightarrow p\bar{p}$  che è energeticamente più conveniente ?

Non si conserva la carica. Le antiparticelle hanno carica opposta e il bilancio sarebbe  $2^+ = 0$

11. Perchè non si è utilizzata invece la reazione  $pp \rightarrow pp\pi^+\bar{p}$  che è energeticamente più conveniente?

Non si conserva il momento angolare. Il pion  $\pi^+$  ha spin nullo, a differenza di protoni e antiprotoni che sono tutti barioni (non esotici).

## 5 Rivelatori

Non possiamo vedere tutte le particelle, quelle che possiamo rivelare sono quelle **metastabili**, ovvero con una vita media sensata e  $L = c\tau\beta\gamma > 1 \text{ m}$ . Occorre anche fare una distinzione preliminare: **particelle cariche** e **particelle neutre**.

Un **rivelatore** è uno strumento che accumula informazioni sulla particella: carica, energia, direzione, massa ed è difficile trovarne uno che sia in grado di acquisirle tutte e 4. Le tecniche di rivelazione di particelle cariche e neutre **sono diverse**.

### 5.1 Particelle cariche

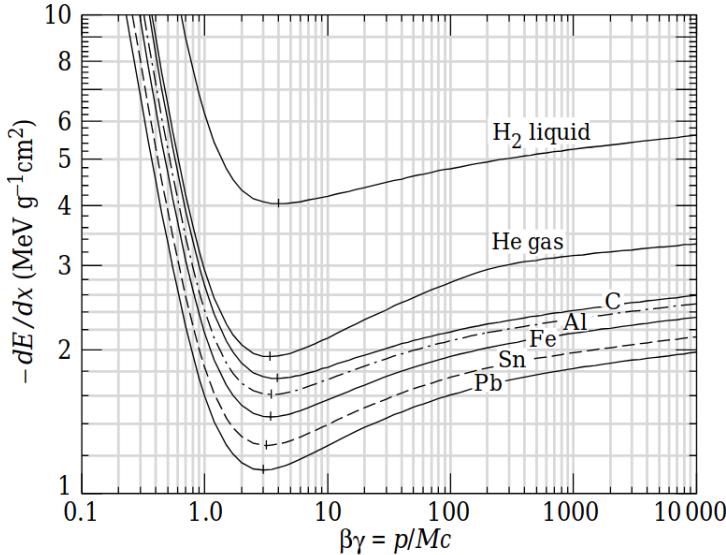
Per la rivelazione di particelle cariche si sfrutta per di più il processo di ionizzazione. Vediamolo in dettaglio.

#### 5.1.1 Ionizzazione

Il processo di ionizzazione è descritto dalla **formula di Bethe-Block**

$$\left\langle -\frac{dE}{dx} \right\rangle = K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

che è una formula semiempirica, quindi non esatta e ha una precisione dell'ordine dell'1%.



La prima cosa da notare è che la curva non rappresenta l'energia persa per unità di lunghezza ma compare anche un  $g^{-1}$  e questo perché in ascissa si ha una lunghezza, ma moltiplicata per la densità del mezzo  $\rho$ . Si usa questa **convenzione** per poter rappresentare sullo stesso grafico il comportamento di una particella in idrogeno liquido o in piombo o in elio gassoso (o in un qualsiasi altro materiale). **Questa curva non rappresenta la perdita di energia dell'elettrone**, che si comporta in modo singolare rispetto alle particelle cariche generiche. Guardiamo le dipendenze della formula:

- **Dipendenze dalla particella ionizzante.** Questa curva dipende dalla **carica** della particella incidente e dalla sua **velocità** (non dalla massa).
- **Dipendenze dal mezzo.** Dipende dal numero di massa atomica del materiale e dal potenziale di ionizzazione  $\approx 10 Z$ .

Distinguiamo infine 4 zone:

- **Grande ionizzazione**  $\beta\gamma < 2$ . In questa zona (la prima, guardando il grafico sopra) la particella è **lenta** e ha molto tempo per interagire. Aumentando la velocità anche di poco si nota come la decrescita sia vertiginosa e corrisponde ad un minor rilascio di energia nel mezzo. Domina

$$\frac{1}{\beta^2}$$

- **MIP - Minimum Ionizing Particles**  $2 < \beta\gamma < 5$ .
- **Risalita Relativistica**  $5 < \beta\gamma < 100$  La relatività ristretta provoca una contrazione relativistica del mezzo che quindi alla particella appare più

denso, e fa più interazioni. Domina

$$\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2}$$

- **Saturazione** Una particella carica carica polarizza un mezzo. Le cariche di polarizzazione, in regimi relativistici, schermano e sopra una certa energia questo fattore di schermo riduce un po' la crescita (cambia la pendenza della curva). Entra in gioco

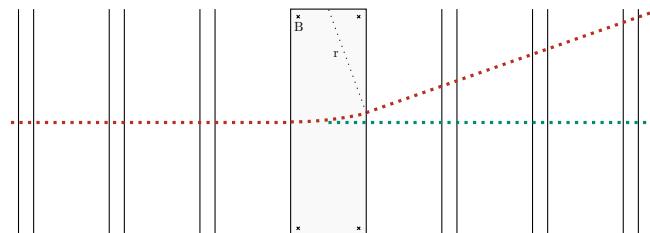
$$-\frac{\delta(\beta\gamma)}{2}$$

Noto anche che nella formula di Bethe Block è rappresentato un valore medio: la ionizzazione è **un processo stocastico**. Prendo 100 particelle uguali e le sparo contro lo stesso strato di materiale, ottengo 100 valori diversi di ionizzazione e si distribuiscono come la **curva di Landau**. Ha le code alte: rendono instabile il calcolo della media.

**Ma come servirsi della ionizzazione per rivelare?** In pratica, una particella incide in un mezzo e inizia a creare coppie ione-elettrone. Se non facciamo nulla queste possono ricombinarsi ma noi vogliamo carpire del segnale. Una delle tecniche è quella di **immergere il gas in un campo elettrostatico** (camera di Bragg). Gli ioni derivano in una direzione e gli elettroni dall'altra. Posso costruire la direzione della particella e immersendo il tutto in campo magnetico posso misurare il suo **impulso**. Per di più, se misuriamo la **carica** prodotta abbiamo misurato anche l'energia lasciata nel mezzo e quindi si ha  $\beta\gamma$ , dal quale anche la **massa** della particella.

### Spettrometro dipolare

È chiaro che essendoci il campo elettrostatico le cariche ionizzate si separano. Tracciando il moto delle particelle e accendendo un campo magnetico misuro il suo impulso dal raggio di curvatura. Se in più misuro anche la carica di ionizzazione, ho l'energia rilasciata nel mezzo e quindi la sua massa. Un esempio molto semplice è lo **spettrometro di massa**.



Una particella (traiettoria rossa) arriva in una regione con tre rivelatori, uno spettrometro (largo  $L$ ) e altri 3 rivelatori. I rivelatori se attraversati dalla particella raccolgono il segnale di ionizzazione e rilasciano delle coordinate. Interpo-

liamo la direzione della particella prima e dopo il campo magnetico e misuriamo l'angolo di deviazione, che corrisponde a  $\theta$  di rotazione nella regione del campo magnetico.

$$r = \frac{L}{\sin \theta} \sim \frac{L}{\theta}$$

Da qui, l'impulso

$$P = eBr = \frac{eBL}{\theta}$$

$B$  ed  $L$  li ho con grande precisione perciò la misura sperimentale sarà su  $\frac{1}{\theta}$ . Ovvvero

$$\sigma_P = \left| \frac{dP}{d\theta} \right| \propto \frac{\sigma_\theta}{\theta^2} \propto P^2 \sigma_\theta$$

e quindi  $\frac{\sigma_P}{P} \propto P \sigma_\theta$ . **La precisione relativa sulla misura dell'impulso è proporzionale all'impulso medesimo.** Tracce ad alto impulso comportano un errore percentuale più alto. Un fascio a 10 GeV avrà un errore, uno a 100 GeV ne avrà uno 10 volte più grande. L'errore relativo cresce linearmente con l'impulso: la tracciatura in campo magnetico è migliore a basso impulso.

In realtà c'è una precisazione. Prendiamo il primo rivelatore: come entra interagisce con la struttura, con gli atomi, ed uscirà con una certa distorsione. Tanto più materiale tanta più distorsione. Particella lenta rilascia tanta energia e quindi interagisce tanto. Si chiama diffusione multipla questo processo e fa sì che ci sia una termine aggiuntivo legato alla quantità di materiale del rivelatore. Da una parte rivelatore precisissimo però all'altra se metto troppo materiale inizio a spogliarla perché la particella urta troppo con il materiale.

### 5.1.2 Rivelatori non elettronici

I rivelatori di particelle cariche sono anche detti **tracciatori**: è come se le particelle lasciassero una traccia dopo il loro passaggio. Storicamente sono i primi.

#### Emulsioni

Sono delle lastre fotografiche (costruite dalla Kodak storicamente). Vi sono dei **pro**, ovvero che queste lastre hanno un costo bassissimo e regalano una precisione strepitosa sulle tracce dell'ordine dei  $o(\mu\text{m})$ . Il **contro**, sostanzialmente, è che sono usa e getta. Sono state usate per osservare l'oscillazione le oscillazioni  $\mu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  (sparando neutrini muonici dal CERN e studiando le oscillazioni con OPERA, esperimento al Gran Sasso qui sotto in foto).



L'esperimento sostanzialmente riceve i neutrini muonici dal CERN (700 km) e l'oscillazione, quella sotto osservazione, li trasforma in neutrini tauonici. Il neutrino tauonico quando viene a contatto con la materia **produce un tauone** che a sua volta decade. Ma avendo una **vita media cortissima** il percorso che lascia è molto breve e quindi **servono risoluzioni altissime** che solo le emulsioni sono in grado di fornire.

### Camere a nebbia

Queste le abbiamo viste all'opera sopra nel caso della scoperta del positrone di Anderson. Un rapido spostamento dello stantuffo provoca nella camera un'espansione adiabatica del vapore che passa allo **stato instabile di soprassaturazione**. In tali condizioni una qualsiasi particella elementare carica elettricamente che penetri nella scatola ionizzando gli atomi con i quali si scontra crea, lungo il proprio tragitto, un **fitto susseguirsi di nuclei di condensazione** (atomi ionizzati), attorno ai quali il vapore soprassaturo si raccoglie a formare minuscole goccioline (nebbia). La traccia lasciata dalla traiettoria percorsa della particella può essere fotografata attraverso una parete trasparente della scatola e da questa si può risalire, con particolari accorgimenti, alla determinazione della natura della particella. Prima di ripetere il ciclo è opportuno rimuovere gli ioni attraverso un campo elettrico e rieffettuare la compressione. Nelle camere a nebbia moderne lo scatto del pistone è comandato, con l'ausilio di un circuito elettronico, dall'arrivo stesso della particella da studiare.

### Camere a bolle

La netta evoluzione è la camera a bolle. Sfrutta il principio opposto: prendendo un liquido in equilibrio **metastabile** con il suo vapore si fanno dei cicli di compressione-espansione. La camera a bolle ha la proprietà di essere allo stesso tempo **sia un bersaglio che un rivelatore**, in quanto il liquido al suo interno (tipicamente H<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>, He<sub>2</sub>, Freon) è molto denso. La particella urta un nucleo della camera a bolle, fa un *putiferio* e il *putiferio* è rivelato dalla camera a bolle.

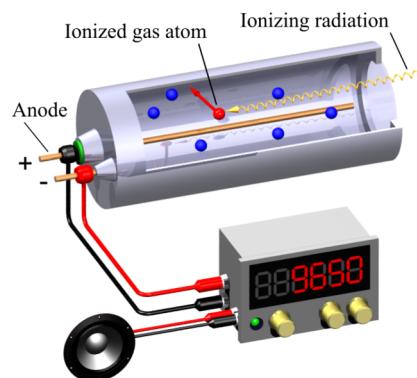
Le bolle sono piccolissime quindi si fa espandere la camera per ingrandire le bolle. Poi si comprime nuovamente per pulire e rendere disponibile al prossimo evento. I cicli di compressione ed espansione devono essere in fase con l'arrivo dell'evento (motore a ritmo con il fascio). Proprio questo fatto fa sì che a differenza dei 40 milioni di interazioni al secondo, con una camera a bolle la **frequenza** sia forzata ad essere molto bassa per limiti meccanici. La **risoluzione** è di 1/10 del diametro di una bolla.

### Rivelatori a gas

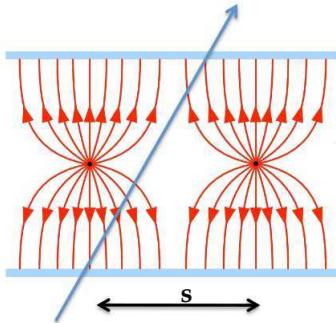
Sono dei volumi riempiti con varie miscele di gas più o meno densi a seconda dell'utilizzo. La particella crea coppie elettrone-ione, che iniziano a *driftare* e noi li raccogliamo. C'è una regione in cui non si raccoglie segnale (campo elettrico poco intenso), poi c'è una parte proporzionale (al deposito di energia) e infine si satura (campo estremamente intenso, il materiale non ionizza più di così). Ci sono anche rivelatori che lavorano nel regime estremo della scarica: all'interno di essi genera un scintilla, io la fotografo e ho le informazioni. Ora come ora sono molto poco usati.

### Contatore Geiger

Abbiamo un filo anodico e un catodo (il cilindro che lo circonda). Le linee del campo elettrico sono radiali. Una volta che una particella passa ionizza (vi è anche una ionizzazione secondaria dovuta alla rottura del dielettrico e questo porta ad una notevole quantità di carica: reazione a cascata). Questo modo però ci fa solo capire se è passata o meno una particella, ma **non ci dice la sua traiettoria**.

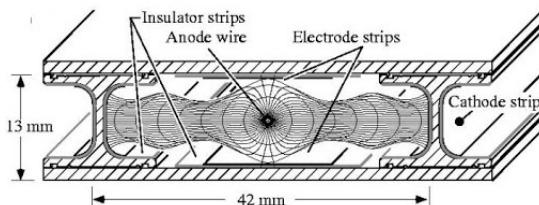


### Camera a fili



L'idea per fare una misura migliore è quella di mettere tanti contatori Geiger uno a fianco all'altro. Oppure, costruire una *multiwire proportional chamber*: ho due catodi e tanti fili anodici. Quando la particella carica arriva inizia a ionizzare e ci sarà del segnale che va sul primo filo e anche nel secondo filo. Interpolando opportunamente il rapporto tra l'intensità di segnale nei due fili riesco a comprendere **il punto medio** di passaggio della carica. Si possono mettere più di due di questi e aumentare la precisione sulla coordinata di passaggio.

### Camera a deriva



Per fare ancora un *level up* si può passare dalle camere a fili alle **camere a deriva**. I catodi sono le *strip* esterne appoggiate sul materiale dielettrico che aiutano a modulare un campo elettrico. Le linee con quella forma strana sono le linee equipotenziali del campo elettrico. La cosa importante da capire è che le cariche di ionizzazione ci mettono più tempo ad arrivare all'anodo se sono vicine ad esso e perciò prendendo l'**intervallo di tempo** che intercorre tra l'**interazione dei fasci** e l'**istante di segnale** si ha l'esatto punto di passaggio. Il **problema di questi rivelatori** è che non si conosce il punto di passaggio lungo l'asse in cui il filo si estende. Ma c'è un trucco: **segmentando** i catodi, la posizione di questi ci danno l'altra coordinata (ma aumenta a dismisura l'elettronica e i catodi non si possono fare minuscoli perciò tipicamente la risoluzione è peggiore sulla direzione di estensione del filo).

### 5.1.3 Rivelatori elettronici

#### Rivelatori a Silicio

Quando passa una particella e ionizza crea **coppie elettrone lacuna** e noi raccogliamo il segnale degli elettroni negli strip anodici. Drogando in modo particolare,  $n^+$  un silicio adiacente si possono raccogliere le lacune e ponendoli due rivelatori con le strip anodiche perpendicolari **si può misurare in diverse coordinate**. Per la coordinata  $z$  li metto uno sopra l'altro. I rivelatori a silicio sono diodi sottili ( $300\ \mu\text{m}$ ). Si possono fare estremamente piccoli con segnali estremamente intensi. Faccio strati estremamente sottili di Silicio (no diffusione multipla), raccolgo 10000 elettroni (errore statistico 100, 1% di rumore sul segnale).

I pro sono che vi è un'**alta risoluzione** e un'**elevata velocità di lettura**. I contro sono i **costi altissimi** e il materiale denso che aumenta la **diffusione multipla** (degrada la risoluzione a basso impulso e per queste sono preferiti i rivelatori a gas).

### 5.1.4 Particle Identification

Quando si parla di identificazione si intende assegnare la corretta ipotesi di massa alla particella carica osservata. Ci sono tre tecniche

#### Tempo di volo

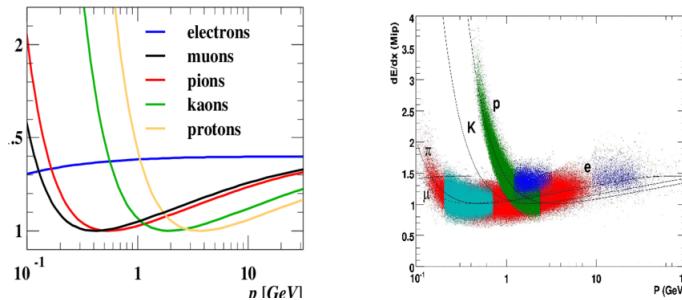
Questo è abbastanza ovvio. Se però le particelle sono ultra relativistiche è molto difficile distinguerle. Quindi questo metodo va bene per particelle lente dal MeV a 1 GeV.

#### Deposito per ionizzazione

Se misuro l'energia rilasciata ho un'informazione su  $\beta\gamma$ . Poi, conoscendo il loro impulso

$$m = \frac{p}{\beta\gamma}$$

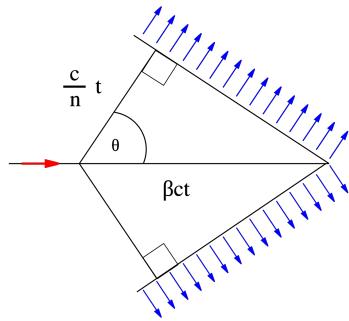
.1 – 100 GeV are displayed in Figure 7.1. At low momentum hadron bands &



Gli elettroni compiono un tragitto a se. Vi sono però delle zone in cui c'è molta ambiguità sul capire qual è la particella.

### Effetto Cherenkov

Con questo misuriamo la velocità della particella. Se un qualche corpo si muove con una velocità superiore a quella della luce nel mezzo emette un segnale coerente che esce come onda d'urto. Quando la particella interagisce con il mezzo questo emette un segnale e in ogni punto genera un'onda sferica. L'onda sferica procede ma questa **si muove più lentamente** della particella.



Supponendo di fissare un intervallo di osservazione  $\Delta t$  e guardando il triangolo rettangolo possiamo dire che, dalla trigonometria

$$\text{cateto minore} = \text{ipotenusa} \cdot \cos \theta$$

ma il cateto minore è il tratto percorso dall'onda luminosa e l'ipotenusa è lo spostamento della particella e quindi

$$\frac{c}{n} \Delta t = v \Delta t \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{c}{nv}$$

E posso rifare questo ragionamento per tutti i punti in cui la particella emette radiazione, che sono tutti in fase tra loro e facendo una costruzione alla Huygens si crea un fronte d'onda che avanza compatto descrivendo un **cono**, che se la particella si muove a velocità costante ha un angolo fisso. Conoscendo l'angolo e l'indice di rifrazione abbiamo la velocità della particella.

Con questi rivelatori possiamo lavorare **in soglia**, per selezionare o rigettare particelle che non emettono luce o possiamo **misurare l'angolo Cherenkov** e determinare la velocità come appena descritto.

La prestazione di un radiatore Cherenkov dipende dall'indice di rifrazione. Se questo è **alto** distinguo particelle lente, se è **piccolo** (gas) distinguo particelle estremamente veloci.

Soltamente si parla di **PID combinata** ovvero metto insieme informazioni delle Bethe Block e, ad esempio, due diversi radiatori Cherenkov (a diverso indice di rifrazione).

## 5.2 Particelle neutre

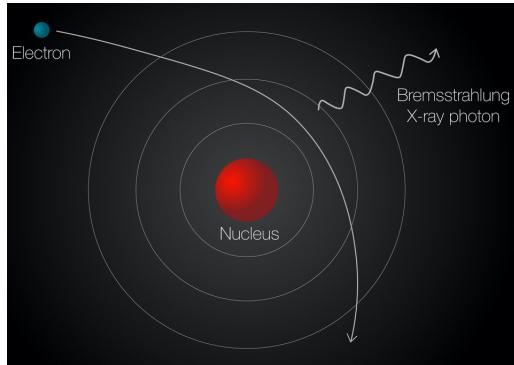
Il fotone viene rivelato mediante lo **sciame elettromagnetico**, neutrone e  $K_L$  invece con lo **sciame adronico**. In entrambi i casi si usano i **calorimetri**. Il neutrino ha un tipo di rivelazione a parte.

I calorimetri sono degli **assorbitori**, ovvero una particella neutra vi entra ma non esce. Deposita in esso tutta la sua energia e produce una cascata di particelle detta **sciame**. Vi è una particella particolare, il muone, che **non produce nessuno sciame**.

### 5.2.1 Sciame elettromagnetico

Questo è prodotto dalla combinazione di due processi che sono speculari:

- **Bremsstrahlung**. Anche detta **radiazione di frenamento**, è l'equivalente quantistico di un processo noto a livello classico: una particella carica accelerata (o decelerata) emette radiazione elettromagnetica. A livello quantistico, se un elettrone interagisce con una sorgente di campo elettromagnetico subisce una accelerazione e a seguito di ciò emette radiazione elettromagnetica. Se l'elettrone è di alta energia (curva notevolmente) vengono emessi fotoni (raggi X ma anche  $\gamma$  a svariati MeV). Questa non distrugge l'elettrone ma dopo questa interazione sarà più lento, avrà perso energia



La Bremsstrahlung è la principale causa di perdita di energia per  $E_e > 10$  MeV. A differenza della ionizzazione, la perdita per Bremsstrahlung è dominata da questa relazione (del tutto generale, non c'è scritto dentro piombo, rame..)

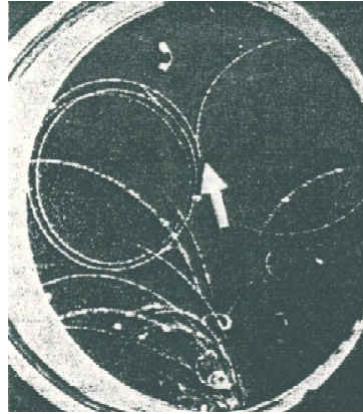
$$\frac{dE}{dX} = -\frac{E}{\chi_0} \Rightarrow E_0 e^{-X/\chi_0}$$

$\chi_0$  è una costante detta **lunghezza di radiazione**, ed è proprio questa che tiene conto del tipo di materiale con il quale stiamo lavorando

$$\chi_0 \approx \frac{716.4A}{Z(Z+1) \log 282/\sqrt{Z}}$$

e indica la distanza per irradiare una frazione di energia  $1/e$ . Ad esempio il piombo ha, in centimetri, una lunghezza di radiazione molto più bassa rispetto al rame e perciò una particella nel piombo viene assorbita molto presto.

- **Produzione di coppie.** Un processo speculare che però non ha analogo classico ed è calcolabile solo attraverso la QCD. Un fotone, se passa in prossimità del campo elettromagnetico di un nucleo può convertirsi in una coppia positrone-elettrone. L'energia del fotone chiaramente  $E_\gamma > 2m_e$



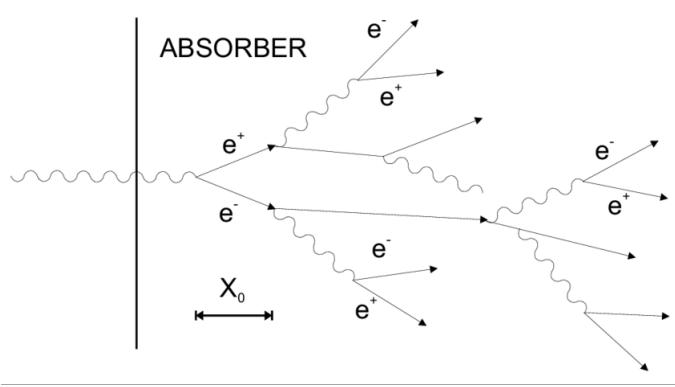
Questa foto in camera a bolle mostra una *pair production*. Un fotone (non rilevabile in quanto all'interno delle camere a bolle si rivelano solo e soltanto particelle cariche) produce una coppia positrone-elettrone. Particelle con la stessa massa ma con carica diversa compiono questi due moti elicoidali simmetrici in campo magnetico.

L'elettrone qui si distrugge a differenza di quanto accade nella Bremsstrahlung. Tutta l'energia del fotone viene spartita dalla coppia. Andando a vedere la sezione d'urto dell'assorbimento dei fotoni in funzione degli stessi notiamo che a bassa energia dominano alcuni tipi di interazioni, mentre passato un certo intervallo ( $\sim 10$  MeV) domina la produzione di coppie. Il tasso di disintegrazione dei fotoni è determinato dalla stessa grandezza  $\chi_0$ , ma stavolta *dumpata* di un fattore  $7/9$ .

$$\frac{dN}{N} = -\frac{7}{9} \frac{dX}{\chi_0} \Rightarrow N(X) = N_0 e^{\frac{7}{9} \frac{X}{\chi_0}}$$

## Sviluppo di uno sciame elettromagnetico

Un elettrone, interagendo con un nucleo genera un fotone, ma se questo fotone è abbastanza energetico **a sua volta produce** coppie elettrone-positrone e a sua volta l'elettrone creato può portare avanti il processo. Più è energetica la particella in arrivo più si generano interazioni. È proprio una **reazione a cascata** che **termina** non appena si scende sotto la soglia tipica di quando tutte le particelle coinvolte nello sciame hanno un'energia inferiore a 10 MeV. Le particelle saranno così lioffie che potranno fare ionizzazione (nel caso dell'elettrone) o Compton, Rayleigh, o anche fotoelettrico (nel caso del fotone).



Il fatto che un elettrone possa decidere a un certo punto di produrre un fotone fa sì che questo processo non sia deterministico: solo delle simulazioni numeriche possono emulare tale processo. Vi è però un'altra approssimazione: la *approssimazione B di Rossi*, che permette di trattare questo problema come **deterministico**. È la lunghezza di radiazione che determina questo processo? Ok, ogni 7/9 di una lunghezza di radiazione il fotone nell'assorbitore cede metà dell'energia (è un'approssimazione ma basta a fare un'idea qualitativa). Siccome ad ogni passo dimezzo l'energia, dopo  $n$  passi ogni particella avrà energia  $E/2^n$  e questo processo lo posso portare avanti fino a che  $E/2^n < 10$  questa energia è **minore dell'energia di soglia**. Il cammino totale, detto **lunghezza di traccia**, sarà la somma di tutti i piccoli tratti, percorsi da **ognuna delle particelle cariche**

$$\mathcal{L} = \sum_j \ell_j$$

ed è proporzionale all'energia incidente  $\mathcal{L} \propto E_0$ . Se ad esempio un fotone produce una coppia  $e^+e^-$ , la lunghezza di traccia in questo caso sarà  $\mathcal{L} = \ell_{e^+} + \ell_{e^-}$ .

La lunghezza della traccia non va confusa con la **lunghezza di assorbimento**  $L$ , che invece cresce con il logaritmo  $L \propto \log E_0$  e mi dice quanto grande devo fare il mio rivelatore per contenere tutto lo sciame. Il processo di assorbimento è infatti esponenziale (ecco perché il logaritmo), quindi se volessi davvero tutto lo

sciame il rivelatore dovrebbe essere lungo tanto quanto l'Universo. Ma questo è impossibile, se si vuole che contenga il 99% va benissimo, quell'1% verrà considerato nella costante di calibrazione.

### Calorimetri elettromagnetici

I calorimetri elettromagnetici sono rivelatori distruttivi per assorbire tutta l'energia della particella incidente e rilasciare un segnale  $S \propto E$ . Assorbendola, raccolgono un segnale  $S \propto E_{inc}$  (strumenti lineari) e siccome quello che vedo è luce, dovrò avere dei mezzi, detti **mezzi sensibili** che siano trasparenti (cristalli, vetro, gas). Sono dei fotoelettroni<sup>1</sup> a venir rivelati. La formula che descrive la risoluzione di un calorimetro elettromagnetico:

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{S}{\sqrt{E}} \oplus \frac{N}{E} \oplus C$$

dove il primo termine è il **termine stocastico**, il secondo il **rumore dell'elettronica** e l'ultimo un termine costante difficile da tenere d'occhio (omogeneità di contatori, deriva termica, deriva dovuta all'usura, strutture morte non fotosensibili). Per il semplice fatto che i calorimetri sono una raccolta di fotoelettroni questi lavorano tanto meglio quanto più è alta l'energia delle particelle.

**CMS** ha una risoluzione di questo tipo

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{2.8\%}{\sqrt{E}} \oplus \frac{12\%}{E} \oplus 0.3\%$$

ovvero se io metto un'energia di 100 GeV le prime due radici sono di qualche punto per mille mentre il termine costante è quello che conta con il suo 0.3%.

**Atlas** invece ha una risoluzione di questo tipo

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{10\%}{\sqrt{E}} \oplus 0.7\%$$

ovvero ha scelto di costruire un calorimetro con risoluzione non troppo buona a bassa energia ma molto buona a energia più alta.

### 5.2.2 Sciamme adronico

Gli adroni hanno le interazioni forti (che sono anche nucleari): quelli carichi  $p$ ,  $\pi^+$  e  $K^+$  e neutri  $n$  e  $K_L$  interagiscono con i nuclei. Tipicamente, gli stati

---

<sup>1</sup>Quando un fotone sbatte su un fotomoltiplicatore, ovvero un tubo ad altissima tensione, per effetto fotoelettrico fa uscire un elettrone e questo è un **fotoelettrone**. Che poi il fotomoltiplicatore da un fotone incidente crei correnti di  $10^4$  elettroni poco importa, il fotoelettrone è il primo.

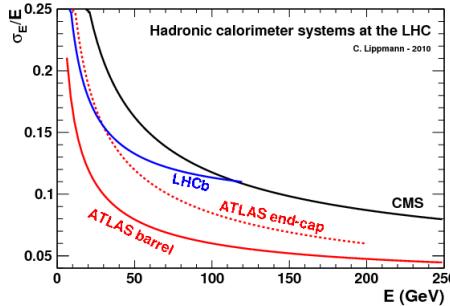
finali delle reazioni di adroni sono sempre i pioni: i più leggeri. I pioni sono tre  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ . I primi due hanno una vita media molto lunga, che in assenza di interazioni permetterebbe loro di attraversare i rivelatori. Il  $\pi^0$  al contrario, per quanto grande sia la loro energia, decadono quasi istantaneamente in due fotoni e sviluppiamo nello sciamone degli adroni una **componente elettromagnetica**.

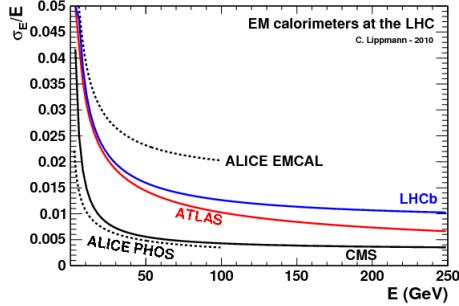
Anche nel caso dello sciamone adronico si ha un processo di assorbimento **esponenziale**  $N(x) = N_0 e^{-x/\lambda}$  dove  $\lambda$  è detta **lunghezza di interazione** e per la quale non abbiamo una formula semplice. È caratteristica del materiale, viene misurata e non esiste una proporzionalità tra lunghezza di interazione e di radiazione. Si sa solo che  $\lambda \gg \chi_0$ . Ciò comunque sta a significare che uno sciamone adronico può protrarsi per lunghezze più grandi di uno sciamone elettromagnetico, a parità di energia, e che quindi un calorimetro adronico sarà molto più grande di uno elettromagnetico.

La risoluzione è peggiore

$$\frac{\sigma(E)}{E} \approx \frac{(50 \div 100)\%}{\sqrt{E}}$$

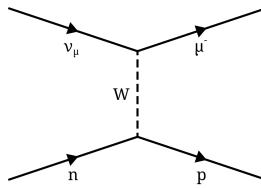
perché anche questo è un processo stocastico ma mentre nel caso elettromagnetico con questo termine si intendeva il fatto che non è dato conoscere quando un elettrone (fotone) facesse Bremsstrahlung (produzione di coppie), nel caso adronico di roba stocastica ce n'è tantissima. Tutte le possibili particelle generabili si sommano e diventano una fluttuazione che rende complesso il tutto e peggiora la risoluzione. Ora vediamo un po' di calorimetri a confronto tra i vari esperimenti su LHC





### 5.3 Neutrini

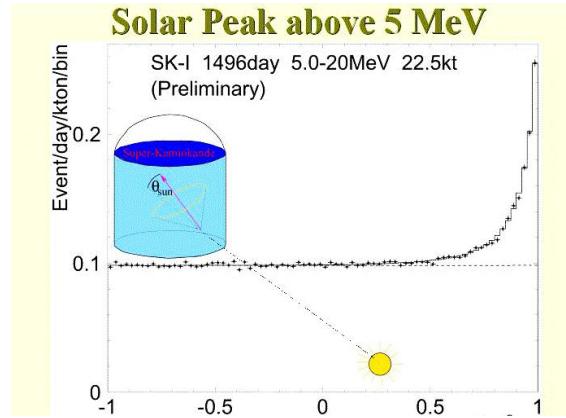
I neutrini vengono identificati soprattutto mediante le **interazioni di corrente carica**. Vediamo un esempio di interazione tra neutrone e neutrino muonico.



Potrei pensare di rivelare o l'elettrone o il protone. Ma normalmente tutta l'energia viene passata all'elettrone. Stabiliamo che per identificare un neutrino si cerca il leitone carico che viene prodotto nella corrente carica. La sezione d'urto (probabilità che in questo particolare caso il  $\nu_\mu$  interagisca con il neutrone) è **estremamente piccola**, perciò devo avere tanta materia su cui farlo sbattere (e questo comporta che si possano usare materiali economici). Materiale più economico sulla terra: l'acqua.

#### Superkamiokande

50000 tonnellate d'acqua: 222 vasche olimpioniche  $25 \times 3 \times 3$  m. In questo caso siamo sotto a 1000 m sotto terra per schermare un po' dalla radiazione cosmica e ogni tanto un neutrino attraversa la roccia e interagisce con l'acqua. Questa particella fa cono Cherenkov all'interno. L'indice di rifrazione dell'acqua è  $4/3$ . Se  $\beta > 3/4$  allora il nostro elettrone fa il cono. Da  $\cos \theta = 1/n\beta$  misuro la velocità e siccome tutta l'energia del neutrino è stata conferita all'elettrone posso misurare l'energia del neutrino. L'esperimento è così potente e versatile che può analizzare un ampio spettro di particelle, in particolare sui neutrini solari e atmosferici (elettronici  $\sim$  MeV e muonici  $\sim$  GeV).



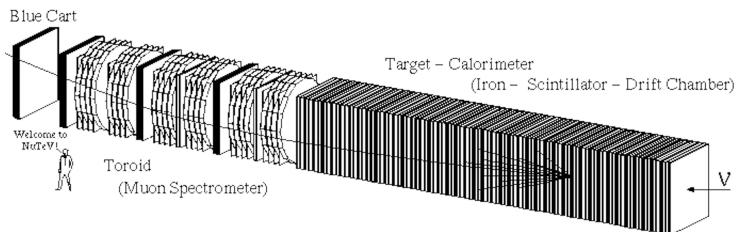
Caso di **neutrini solari**. In ascissa abbiamo il coseno dell'angolo formato tra la direzione del segnale a Superkamiokande e quella che congiunge il sole all'esperimento. In ordinata, numero di conteggi normalizzato. In questo grafico c'è una zona piatta e nell'avvicinarsi di  $\cos \theta \rightarrow 1$ , ovvero il neutrino proviene dal sole, si alza un segnale chiarissimo ed evidente.

### NuTeV

Esperimento ora in funzione negli anni '90 formato da una serie di moduli identici tra loro. NuTeV si divide in due macro zone:

- Un **calorimetro segmentato**: zone sensibili e zone di materiale molto denso in cui i neutrini interagiscono.
- Uno **spettrometro di muoni**: campi magnetici che fanno ruotare la carica e rivelatori che misurano la posizione.

Arriva un neutrino, la maggior parte va via dritta ma ogni tanto uno urta contro il materiale del rivelatore.

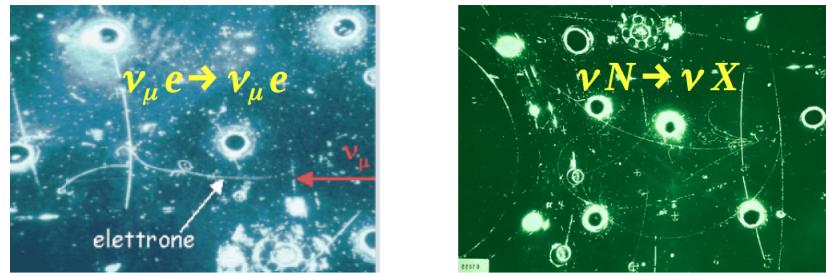


Osservando lo schema qui sopra si nota come un ipotetico neutrino abbia urtato contro il materiale e che vengono osservate alcune particelle che si arrestano presto e una invece che attraversa tutto il volume, ruotando nella regione magnetizzata (quindi è carica). Quella particella che attraversa tutto il rivelatore è **un muone**. Allora è successo proprio il processo di corrente carica descritto sopra. NuTeV ha osservato solo muoni o antimuoni. L'urto è stato così potente

che il nucleo è stato frantumato: ecco perché si vedono tante particelle.

### Commento sulle correnti deboli neutre

In questo caso, il neutrino urta una particella a riposo come un neutrone e però **resta se stesso**. Se però resta neutrino non lo vediamo, ma possiamo vedere la particella urtata (figura a sinistra). Se in più il neutrino è parecchio energetico questo romperà il nucleo urtato e si osserverà uno sciamo adronico (figura a destra)



## 5.4 CMS - Compact Muon Solenoid

Vediamo la costruzione e il funzionamento di questo rivelatore.

### Obiettivi

Scoprire e misurare le proprietà del bosone di Higgs (ok), ricercare nuove particelle con massa elevata (no), ricerca di materia oscura (no) e studio delle interazioni standard attorno al TeV (ok).

### Richieste

Per scoprire l'Higgs era necessario ricostruire l'impulso dei  $\mu$  con una **precisione** dell'1.5% a 100 GeV. Analogamente, costruire fotoni da 100 GeV all'1%. Era richiesta **ermeticità**, ovvero rivelatori i più chiusi possibili e questo è un problema perché ci possono essere dei buchi sulle zone morte di struttura del rivelatore. Dev'essere anche molto **veloce**.

È uscito un rivelatore compatto con  $B = 4$  T, tracciatori a silicio (più precisi) e calorimetro a cristallo (più precisi). Il solenoide da 3.8 T su  $400\text{ m}^3$  sono accumulati  $2.5 \cdot 10^9$  J e ciò equivale a 1/2 ton di TNT. Spegnere il magnete richiede procedure sofisticate altrimenti si fonde tutto. Il solenoide contiene tutti i tracciatori e calorimetri tranne quelli adronici. Funziona a 9.5 K, così la bolletta costa poco.

## 5.5 Esercizi

### 5.5.1 Tracciatura

- Confrontare l'energia depositata per ionizzazione da un muone al minimo di ionizzazione in un cm di Pb con quella depositata in un cm di Al.

Le confrontiamo con un rapporto, dove l'unica cosa che conta sono  $Z/A$  e le densità dei materiali

$$\frac{\frac{Z_{Al}\rho_{Al}}{A_{Al}}}{\frac{Z_{Pb}\rho_{Pb}}{A_{Pb}}} = \frac{103}{82} \frac{\rho_{Pb}}{\rho_{Al}} = \frac{103}{82} \frac{11300}{2700} = 5.3$$

Cioè il rilascio energetico nel piombo è poco più di 5 volte maggiore rispetto a quello nell'alluminio. Questioni di densità.

- Verificare che in buona approssimazione

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{dE}{dx} \right\rangle &= K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \approx \\ &\approx K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \end{aligned}$$

Il fattore  $W_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1+2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2}$  è, considerando che la massa di un nucleo è solitamente molto più grande di quella di un elettrone, approssimabile come

$$\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1+2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

Perciò porto ad esponente il fattore davanti al logaritmo naturale e ottengo quanto chiesto.

- Stimare approssimativamente quanti cm di Pb sono necessari per portare un muone da 100 GeV alla regione di minimo di ionizzazione.

In zona MIP siamo attorno ai  $\sim 5$  GeV. Allora, scegliendo una perdita di energia costante come punto medio tra 100 e 5 GeV si ha

$$\rho \Delta x < 1.5 > = \Delta E \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta E}{< 1.5 > \rho_{Pb}} \approx 56 \text{ m}$$

Al CERN, presso la COMPASS *facility*, si sparano dei muoni su dei *target* polarizzati e quelli più energetici non vengono fermati perché costerebbe troppo. Essendo però innocui, vengono invece lasciati andare contro le montagne.

### 5.5.2 Calorimetria

- Per quale motivo bremsstrahlung e conversione in coppie possono avere luogo solo nel campo di un nucleo ma non nel vuoto ?

Affinché si possa fare bremsstrahlung c'è bisogno di un'interazione con un nucleo, cosa che il vuoto non può fornire. La produzione di coppie non può avvenire nel vuoto perché non si avrebbe conservazione dell'energia. (**calcoli mancanti**)

- Quanti cm di Pb sono necessari per assorbire il 95% dell'energia di un elettrone di  $E_0 = 200$  GeV?

Conoscendo che  $\chi_0/\rho \approx 0.56$  cm, guardo il rapporto

$$\frac{E}{E_0} = 0.05 = e^{-X/\chi_0} \Rightarrow x = -\chi_0 \ln 0.05 = 1.7 \text{ cm}$$

- Qual è il contributo alla risoluzione che va minimizzato progettando un calorimetro che opera ad altissima energia (o 100 GeV)?

Abbiamo visto anche in classe che, siccome la formula per la risoluzione vuole i dati in GeV, i termini alla risoluzione stocastico e di rumore diventano quasi insignificanti a livello percentuale rispetto al **contributo fisso**, che è proprio quello da minimizzare.

- Quale per un calorimetro che opera a bassa energia (o 100 MeV)?

Per un calorimetro a bassa energia, si ha che il termine stocastico va come  $\propto 1/\sqrt{E}$  mentre il **rumore elettronico**  $\propto 1/E$  perciò è chiaramente quest'ultimo quello da minimizzare.

- Qual è la minima energia che deve avere un elettrone per rilasciare radiazione Cherenkov in Superkamiokande? E un muone?

Affinché si veda un segnale in Superkamiokande ( pieno d'acqua con un indice di rifrazione  $n = 4/3$ )  $\beta > 3/4$ . Da questo calcolo il  $\gamma$  come

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

e, conoscendo la massa di elettrone e muone ottengo rispettivamente  $E_e = m_e \gamma \approx 700$  keV  $E_\mu = m_\mu \gamma \approx 160$  MeV.

- Esercizio difficilotto e facoltativo, solo il primo punto. Con le cose imparate più avanti diventa tutto più chiaro. Si osserva la transizione tra stati legati di charmonio (mesoni  $c\bar{c}$ )  $\Psi(2S) \rightarrow \chi_0 \gamma$ , Sapendo che  $J^{PC}(\Psi(2S)) = 1^{--}$ , dire quali tra i seguenti numeri quantici non sono plausibili per lo  $\chi_0$ :  $1^{--}, 0^{++}, 0^{--}$ . Il **momento angolare** si conserva ( $J = 1$ ) sia che  $\chi_0$  abbia momento 1 o 0 perché il fotone ha sempre spin 1. Il fotone ha **carica** nulla e affinché si conservi la negatività si dovrà avere  $C = -$  (escluso

quindi il secondo caso  $0^{++}$ ). Il tema è la **parità** e con delle radiazioni M1 sono plausibili sia  $J^{PC}(\chi_0) = 1^{--}$  che  $J^{PC}(\chi_0) = 0^{--}$ .

## 6 Urti

Le condizioni in cui ci poniamo sono quelle in cui lo **stato iniziale** è composto da due corpi  $A$  e  $B$  e quello da altri due corpi  $C$  e  $D$  (uguali ad  $A$  e  $B$  nel caso di urto elastico). Consideriamo **conservative**: energia, impulso, momento angolare e carica elettrica. Considereremo poi, visto il fatto che

$$t_{\text{collisione}} \ll t_{\text{misura}}$$

i corpi, negli stati finali ed iniziali, come **liberi** (o meglio descritti da **onde piane**, cosa che si usa anche poi nel calcolo dell'elemento di matrice per la sezione d'urto).

I **sistemi di riferimento** sono due: il **bersaglio fisso**, quando un *beam*  $A$  urta un *target*  $B$  (bersaglio a riposo) e quello del **centro di massa** dove  $A$  e  $B$  sono in moto uno contro l'altro. Per questo genere di calcoli si preferisce definire delle variabili invarianti per cambiamenti di sistema di riferimento che sono le **variabili di Mandelstam**

$$\begin{aligned} s &= (P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2 \\ t &= (P_A - P_C)^2 = (P_B - P_D)^2 \\ u &= (P_A - P_D)^2 = (P_B - P_C)^2 \end{aligned}$$

Quali sono in questo caso gli ruoli di esperimento e teoria?

- Nell'esperimento misuro la frequenza di collisioni e da questa ho la sezione d'urto **inclusiva**  $\sigma$ , che interessa solo quando gli stati finali non sono stati analizzati uno ad uno. Se invece guardo la frazione di diversi stati finali allora ottengo la sezione d'urto **parziale** o **esclusiva**  $\sigma_f$ , tale che  $\sigma = \sum \sigma_i$
- Con la teoria si caratterizza tutto di una interazione in funzione dei parametri significativi.

Dal confronto teoria-esperimento si stabilisce il valore dei parametri e si determinano vincoli e informazioni sulla struttura dell'interazione.

### 6.1 Sezione d'urto

Tratteremo questa quantità fondamentale da 4 punti di vista. La **sezione d'urto** quantifica la probabilità che uno stato iniziale di particella risulti trasformato, a seguito dell'evento d'interazione, in un nuovo stato.

### 6.1.1 Interpretazione geometrica

Si abbia un fascio mono-energetico a **velocità media**  $v$ , con **sezione trasversale**  $\Sigma$  e contenente  $n_b$  particelle puntiformi per unità di volume. Questo incide normalmente su un bersaglio fisso, che possiede  $N_t$  centri diffusori nella sezione  $\Sigma$  tutti di uguale sezione  $\sigma$ .

**Ci chiediamo quante interazioni avvengano per secondo.** In  $dt$  urtano tutti e soli i  $dN_b$  proiettili nel cilindro di base  $\Sigma$  e altezza  $l = vdt$ . Considerato ciò, si ha  $dN_b = n_b v dt \Sigma$  (ovvero moltiplico il numero di particelle per unità di volume per l'unità di volume) e si ha che  $p$ , la probabilità di una collisione vale  $p = \frac{\sigma}{\Sigma} N_t$  supponendo che i centri diffusori siano distribuiti in modo omogeneo nell'area  $\Sigma$ . Il rate di collisioni nell'unità di tempo è calcolato come:

$$R_t = \frac{dN}{dt} = \frac{dN_b}{dt} p = \frac{n_b v \Sigma dt}{dt} \frac{\sigma}{\Sigma} N_t \Rightarrow \sigma = \frac{R_t}{n_b v N_t}$$

$\sigma$  ha le dimensioni di un'area per definizione e la precisione con la quale faccio questa misura dipende dalla statistica. Si misura in *barn* dove  $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$ . Non è molto efficace vedere la sezione d'urto come un'area ben definita, ma a questo livello si può dire che più piccola è (ovvero più piccoli sono i centri diffusori), più bassa è la probabilità di cozzarci contro, e quindi di interagire con il bersaglio, per le particelle che viaggiano nel fascio.

$\sigma(pp \rightarrow X) \approx 100) \text{ mb} = 10 \text{ fm}^2$ , ovvero due protoni a LHC si scontrano ad alta energia come fosse due sferette di raggio inferiore ai 2 fm.

### Luminosità

Si usa chiamare il denominatore di questa sezione d'urto come **luminosità**  $\mathcal{L} = n_b v N_t$ , che non è altro che il flusso di particelle incidenti e lo si misura in  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Nel caso si studino due fasci che collidono uno contro l'altro

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{\Sigma} f$$

dove  $\Sigma$  è la sezione trasversale comune tra i due fasci e  $f$  è la frequenza delle collisioni.

LHC effettua collisioni tra 2808 pacchetti contenenti  $N_1 = N_2 = 1.15 \cdot 10^{11}$  protoni ciascuno. La sezione trasversa è di  $(16.7 \times 16.7) \mu\text{m}^2$  e la frequenza di collisione è  $f = 1/T = c/C = c/27 \text{ km} \approx 11 \text{ kHz}$ . Quindi

$$\mathcal{L}_{LHC} = 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

A confronto, vi sono

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LEP} &= 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \mathcal{L}_{SKEKB} &= 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

### 6.1.2 Interpretazione classica

Per l'interpretazione classica consideriamo la collisione Rutherford. Questa coinvolge interazioni elettromagnetiche e di conseguenza, a differenza di una primordiale interpretazione geometrica, abbiamo un potenziale coulombiano a lungo raggio per il quale **tutte le particelle interagiscono** e l'intensità dell'interazione dipende dalla distanza (casuale) tra proiettile e nucleo. Qui, si calcola il **numero di interazioni per unità di angolo solido per nucleo diffusore** e da questo si calcola la sezione d'urto:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{dN}{db} \frac{db}{d\theta}$$

dove  $b$  è il **parametro d'impatto**, ovvero la distanza dal nucleo nella proiezione ortogonale al moto. In condizioni di fascio uniforme  $N \propto \pi b^2$ , da cui

$$\frac{dN}{db} \propto 2\pi b$$

e, considerando come abbiamo detto un potenziale coulombiano (che contiene tutta la fisica dell'interazione)

$$b = \frac{zZe^2}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

andando a sviluppare il tutto si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{zZ\alpha}{4E} \right]^2 \frac{1}{\sin \theta/2^2} \Rightarrow \sigma = 2\pi \left[ \frac{zZ\alpha}{4E} \right]^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta/2^2}$$

### 6.1.3 Interpretazione quantistica

Trattiamo ora dal punto di vista della meccanica quantistica. Con un paragone nel caso classico

$$\sigma = \frac{R_t}{\mathcal{L}} = \frac{\lambda}{\Phi} \text{ cambiando i simboli!}$$

dove il flusso  $\Phi$  viene calcolato considerando l'urto di un solo proiettile con un solo bersaglio all'interno di un volume arbitrariamente grande che circoscrive l'urto, identificato da un cubo di lato  $L$

$$\Phi = n_b v = \frac{v}{L^3}$$

In questo caso,  $\lambda$  è il **tasso di interazione** calcolato con la Regola d'Oro di Fermi

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \rho(E_1)$$

dove  $\mathcal{M} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle$  è l'**elemento di matrice della transizione**. Ora, nell'ipotesi che il nucleo sia talmente pesante che solo la particella venga deviata e questo resti perfettamente fermo  $E_i = E_f = E = p^2/2m = (\hbar k)^2/2m$ . Ciò che cambia è la **direzione** del momento della particella scatterata  $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ , da cui  $\vec{q} \cdot \vec{q} = q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos \theta = 2p^2 - 2p^2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 2p^2 \sin \theta / 2^2$ . Gli stati iniziali e finali li prendiamo come onde piane confinate in un volume  $L^3$ .

$$\psi_i(\vec{r}) = L^{-3/2} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \psi_f(\vec{r}) = L^{-3/2} e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$$

dove la normalizzazione è scelta proprio in modo che se non c'è interazione, il prodotto scalare tra lo stato finale e iniziale mi da la delta di Dirac tra  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_f$ .

$$\langle \psi_f | \psi_i \rangle = L^{-3} \int d\tau e^{i(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} = \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$$

Allora, l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle = \int_{Vol} d^3r \psi_f^* \sqrt{\alpha} V(r) \psi_i \\ &= L^{-3} \int_{Vol} d^3r e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} \frac{zZ\alpha}{r} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = L^{-3} \int_{Vol} d^3r e^{-i(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \frac{zZ\alpha}{r} = \\ &= zZ\alpha L^{-3} \int_{Vol} d^3r \frac{e^{-\frac{1}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}}}{r} = -\frac{4\pi\hbar^2}{L^3} \frac{zZ\alpha}{4p^2 \sin \theta / 2^2} \end{aligned}$$

La **densità di stati** invece l'abbiamo già studiata nella parte di nucleare con il professor Fortunato e ricordiamo essere pari al numero di stati del mio sistema che posso contare dopo aver fissata un'energia della particella. Questo concetto viene definito con un altro nome: **spazio delle fasi**. Lo si calcola come:

$$dN = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 p^2 dp d\Omega \Rightarrow d\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 p^2 \frac{dp}{dE} d\Omega$$

Mettendo insieme i pezzi

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{d\lambda}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 d\rho(E) = \frac{L^3}{v} \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{\pi\hbar^2}{L^3} \frac{zZ\alpha}{p^2 \sin \theta / 2^2} \right)^2 \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 p^2 \frac{dp}{dE} d\Omega \\ &\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{zZ\alpha^2}{4E} \frac{1}{\sin \theta / 2^2} \end{aligned}$$

la dipendenza da  $L$  è scomparsa.

## 6.2 Esercizi

1. Un fascio di muoni con  $E_\mu = 150$  GeV viene inviato contro un bersaglio fisso per studiare la collisione elastica  $\mu e \rightarrow \mu e$ .

- Calcolare  $s$ :

$$\begin{aligned} s &= (P_\mu + P_e)^2 = (E_\mu + m_e)^2 - (p_\mu + p'_e)^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2 + m_e^2 + 2E_\mu m_e - p_\mu^2 = \\ &= m_\mu^2 + m_e^2 + 2E_\mu m_e = 161 \text{ GeV} \end{aligned}$$

- Esprimere  $t$  in funzione dell'energia dell'elettrone emesso, misurata nel laboratorio:

$$\begin{aligned} t &= (P_e - P'_e)^2 = (E_e - E'_e)^2 - (p_e - p'_e)^2 = m_e^2 + m_e'^2 - 2m_e E'_e = -100 \text{ GeV} \\ s + t + u &= 2m_e + 2m_\mu^2 \end{aligned}$$

- A quale angolo  $\theta_e$  vengono emessi elettroni con energia  $E_e = 100$  GeV?

$$\begin{aligned} u &= (P_\mu - P'_e)^2 = (E_\mu - E'_e)^2 - (p_\mu - p'_e)^2 = \\ &p_\mu^2 + m_\mu^2 + m_e'^2 + p'_e^2 + 2E_\mu E'_e - p_e^2 - p_\mu^2 - 2p_\mu p'_e \cos \theta \end{aligned}$$

Facendo il conto esplicitando per  $\cos \theta$  si ottiene  $\cos \theta = 0.999 \approx 1$ , ovvero l'elettrone, essendo molto leggero prende lui quasi tutto l'impulso e parte in avanti con  $\theta \sim 0$ .

2. Consideriamo un urto a due corpi in cui  $A + B \rightarrow C + D$  e le variabili di Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2 \\ t &= (P_A - P_C)^2 = (P_B - P_D)^2 \\ u &= (P_A - P_D)^2 = (P_B - P_C)^2 \end{aligned}$$

e verifichiamo che  $s + t + u = 0$ , sapendo solamente che il modulo del quadri del quadri impulso è il quadrato della particella della massa

$$\begin{aligned} s + t + u &= m_A^2 + m_B^2 + 2P_A \cdot P_B + m_A^2 + m_C^2 - 2P_A \cdot P_C + m_A^2 + m_D^2 - 2P_A \cdot P_D = \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 + 2(m_A^2 + P_A \cdot (P_B - P_C - P_D)) = \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 + 2(m_A^2 - P_A \cdot P_A) \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 + 2(m_A^2 - m_A^2) \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \end{aligned}$$

3. Nel limite ultra-relativistico, trascurando le masse, si ha  $E_1^* = E_2^* = \sqrt{s}/2$  e  $p^* = 1/2\sqrt{s-4m^2} = \sqrt{s}/2$ . Calcoliamo quindi la variabile di Mandelstam  $t$

$$\begin{aligned} t &= (P_A - P_C)^2 = p_A^2 + p_B^2 - 2E_1^*E_2^* + 2p^*p'^* \cos \theta^* = \\ &= -\frac{s}{2} + \frac{s}{2} \cos \theta = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Per il calcolo di  $u$ , va ricordato che nel limite ultra-relativistico

$$s + t + u = 0 \Rightarrow us - \frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta)$$

4.

5.

### 6.2.1 Interpretazione QFT

Abbiamo visto il caso classico di corpo puntiforme contro un potenziale statico, quello quantistico di diffusione di un'onda piana sempre per mezzo di un potenziale statico e ora trattiamo in modo euristico l'urto in *quantum field theory*. In questa trattazione avviene uno scambio di quanti del campo di forza tra i due corpi in moto e generalmente l'urto non è elastico ma bensì ha diverse particelle nello stato finale.

Anche qui continua a valere

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} 2\pi |\mathcal{M}|^2 d\rho(\sqrt{s})$$

ma vanno rivalutati tutti i termini sapendo che ci sono dei vincoli. Il principio, è quello di dire che  $\sigma$  è **un invariante relativistico** e va riformulato in modo che ogni suo fattore sia invariante.

#### Termine di flusso

Su un bersaglio fisso si ha  $\Phi = n_b v$ , mentre per due corpi che collidono si ha  $\Phi = n_1 n_2 |\beta_1 - \beta_2|$  dove  $n = Vol^{-1}$  non è Lorentz invariante. Non è difficile convincersi di questo fatto perché se a riposo ho un volume  $V = V_0$  con  $n = N/V_0$ , con un *boost* il volume si rimpicciolisce (contrazione delle lunghezze) di un fattore  $\gamma$ . Per cui  $V' = V_0/\gamma$  e  $n' = n\gamma$ . Questo però non è un grosso problema perché come nel caso di *scattering Rutherford*, il volume scompare nel calcolo della sezione d'urto e così farà anche in questo caso. Il volume è quindi arbitrario, possiamo scegliere noi le condizioni che più ci aggradano. La scelta che viene fatta è quella di prendere un **volumen unitario** con all'interno  $n = 2$

particelle (nel sistema a riposo) dove quindi  $n' = n\gamma$ . Tutto questo, a patto di **rinormalizzare** le funzioni d'onda degli stati come (conventionalmente)

$$\langle \psi(E) | \psi(E) \rangle = 2E$$

In modo tale che la funzione d'onda sia rinormalizzata a due volte l'energia dello stato, ovvero due volte la massa della particella nel sistema a riposo. Il flusso si riscrive quindi come:

$$\Phi = n_A n_B |\beta_1 - \beta_2| = \Phi = 4E_A E_B |\beta_1 - \beta_2| = 4|E_B \vec{p}_A - E_A \vec{p}_B|$$

Nel caso in cui un fascio **incide in un bersaglio fisso**  $B$ , ovvero  $\vec{p}_B = 0$  si ottiene  $\Phi = 4m_B p_A$ . Nel **centro di massa** invece  $\vec{p}_A = -\vec{p}_B$  (aventi lo stesso modulo  $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = p^*$ ) e quindi  $\Phi = 4|p^*(E_A + E_B)| = 4p^* \sqrt{s}$ . Questa grandezza inoltre può anche essere riscritta (difficile) come  $4\sqrt{(P_{A\mu} P_B^\mu)^2 - m_A^2 m_B^2}$  che è manifestamente Lorentz-invariante.

### Spazio delle fasi

L'espressione diventa

$$d\rho = (2\pi)^2 \delta^{(4)} \left( \sum_f P_f - P_A - P_B \right) \prod_{f=1}^N \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

dove la delta esprime la **conservazione del quadrupolso**, il  $2E_f$  a denominatore la **normalizzazione** e il termine al numeratore il **numero di stati**. Grazie alle proprietà della delta di Dirac si ottiene la grandezza manifestamente Lorentz invariante

$$\frac{d^3 p}{2E} = d^4 P \delta(E^2 - (p^2 + m^2))$$

Concentriamoci ora sul caso con due corpi nello stato finale  $AB \rightarrow CD$ ,  $p_A = p_B = p_i$  e  $p_C = p_D = p_f$ . Se  $p_i = p_f$  si avrà urto elastico. L'energia delle particelle nello stato finale sarà chiaramente  $E_C^2 = p_f^2 + m_C^2$  e  $E_D^2 = p_f^2 + m_D^2$ . L'energia nel centro di massa è di conseguenza  $\sqrt{s} = E_A + E_B = E_C + E_D$ . L'espressione è quindi

$$d\rho = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_C + P_D - P_A - P_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

che nel centro di massa vale

$$d\rho = \frac{p_f}{16\pi^2 \sqrt{s}} d\Omega$$

Un esempio di sezione d'urto calcolata nel centro di massa di una reazione  $AB \rightarrow CD$  è

$$d\sigma = \frac{1}{4p_i\sqrt{s}} \frac{p_f}{16\pi^2\sqrt{s}} |\mathcal{M}(\sqrt{s}, \Omega)|^2 d\Omega$$

L'elemento di matrice è **adimensionale**.

### Elemento di matrice

Questo calcolo **dipende dalla natura delle particelle coinvolte** e dal tipo di interazioni. Noi considereremo **fermioni** in interazione **elettromagnetica**. La corretta espressione può essere compresa solo se si conosce la QFT ma noi con argomenti euristici ne illustreremo ugualmente la struttura soffermandoci nel caso di urto elastico  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ . Ricordiamo che in meccanica quantistica si aveva:

$$\mathcal{M} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle = \int_{Vol} d^3 r z \sqrt{\alpha} V(r) \psi_f^* \psi_i = \int_{Vol} d^3 r \rho(r) V(r)$$

Il termine  $\rho(r)$  può essere visto come una densità di carica e  $\mathcal{M}$  è un'energia (densità di carica per potenziale). Una naturale estensione Lorentz-invariante è  $\rho V \rightarrow j_\lambda A^\lambda$ , da cui

$$\mathcal{M} = \int_{Vol} d^4 x j_\lambda A^\lambda$$

In altre parole, stiamo dicendo che il termine elementare dell'interazione che ha come conseguenza la deflessione dell'elettrone dovuta al campo elettromagnetico è il prodotto della densità di corrente dell'elettrone per il campo associato  $j_{e,\lambda} A^\lambda$ . Questa semplice constatazione porta a una descrizione grafica con un **diagramma di Feynmann**, dove una corrente elettronica viene deflessa per via di un campo elettromagnetico tramite l'interazione con il suo quanto, che in questo caso è il fotone.

La conservazione del quadrimpulso dice che  $P_i^\lambda + q^\lambda = P_f^\lambda$ . Focalizziamoci su  $A^\lambda$ , questo campo sarà dovuto al fotone che è stato **prodotto dal muone** che interagisce con l'elettrone. Facendo riferimento al caso classico, nello spazio delle coordinate si ha

$$\partial_\rho \partial^\rho A^\lambda = j_\mu^\lambda$$

che nello **spazio dei parametri** (degli impulsi) è pari a

$$q_\rho q^\rho A^\lambda \Rightarrow -q^2 A^\lambda = j_\mu^\lambda \Rightarrow A^\lambda = -\frac{1}{q^2} j_\mu^\lambda$$

Abbiamo riscritto il **potenziale in termini della corrente del muone** che ha emesso il fotone che poi a sua volta intercetta il nostro elettrone e vi interagisce. Quindi, nella sua forma finale

$$\mathcal{M} = - \int_{Vol} d^4 x j_{e,\lambda} \frac{1}{q^2} j_\mu^\lambda$$

Per riassumere, stiamo considerando un processo in cui un muone emette un fotone, che si propaga e viene assorbito da un elettrone che deflette la sua traiettoria di una quantità pari al quadrimomento del fotone  $P_f^\lambda = P_i^\lambda + q^\lambda$ . **Ma chi ci dice che non possa essere avvenuto il contrario?** Si sarebbe potuto benissimo raccontare la storia al contrario. Il grafico che rappresenta questo fenomeno è la combinazione dei due.

Facendo un po' di analogie con la quantistica si ha che:

$$\begin{aligned} q^2 &= (P_{e,i} - P_{e,f})^2 = (P_A - P_C)^2 = t \approx -s \sin \theta / 2^2 \\ \Rightarrow \sigma &\propto |\mathcal{M}|^2 \propto \frac{1}{\sin \theta / 2^4} \end{aligned}$$

che è proprio il termine di Rutherford! In **fisica classica** questo termine arriva dalla relazione tra  $b$  e  $\theta$ , in **meccanica quantistica** dalla trasformata di Fourier di  $V(r)$  e in **QED** dalla propagazione del fotone, mediatore dell'urto.

C'è anche da commentare brevemente una **stranezza**:  $q$  è il quadrimpulso del fotone e ci si aspetta che contraendolo con se stesso si ottenga 0 poiché la contrazione di  $q$  con se stesso è esattamente  $m_\gamma^2$ . Trovo invece una quantità addirittura negativa  $m_\gamma^2 = q^2 = t = -s \sin \theta / 2$ . Quello che succede è che non si parla di un vero fotone ma di una **particella virtuale** che può propagarsi solo per un tempo dettato dal principio di indeterminazione:

$$\Delta t \approx \frac{1}{\sqrt{q^2}}$$

tempi piccoli in corrispondenza di grandi impulsi trasferiti e viceversa.

### Commento sullo spin

La corrente legata all'equazione di Dirac è data dalla somma di due termini. L'extra-termine è interpretabile come il **contributo dello spin** alla corrente elettronica:

$$j_p^{f_i} \propto \frac{1}{2m} [(P_f + P_i)_\rho + i \sigma_\rho \lambda (P_f - P_i)^\lambda]$$

La struttura spinoriale delle correnti determina la distribuzione spaziale dei prodotti dell'interazione. Il che ci consente di **rovesciare il discorso** e dire che conoscuta la distribuzione degli angoli di deviazione tra particelle si hanno importanti informazioni sulla struttura spinoriale (di spin) delle particelle interagenti.

### Interlude: Elicità

Quando si ha una particella, del suo spin si possono misurare il modulo quadro del momento totale o una sua proiezione lungo un opportuno **asse di quantizzazione**, che indica la direzione del moto. L'**elicità** di una particella è la **direzione** del suo spin lungo la direzione del momento:

$$\Lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}$$

ed evidentemente  $\Lambda = \pm 1/2$ .  $\Lambda = 1/2$  se lo spin è allineato esattamente con la direzione del moto della particella (*left-handed L*). Se viceversa è diretto nel verso opposto  $\Lambda = -1/2$  (*right-handed R*). L'operatore associato all'elicità (sostanzialmente un'operatore di spin proiettato) **commuta con l'hamiltoniano** della particella libera ovvero, questa è una **grandezza conservata nel moto della particella**. Purtroppo però è **non Lorentz-invariante**, perché basta semplicemente provare a definire l'elicità nel sistema di riposo di una particella, dove **il momento è nullo** e quindi quest'ultima non è proprio definita.

### Qual è il suo ruolo nei processi d'urto?

Prima di rispondere a questa domanda vanno poste alcune condizioni per delineare il *framework* in cui si opera. Nei **processi ad alta energia**, ( $q^2$  molto elevato) l'**elicità è conservata**. Il che vuol dire, in ottima approssimazione, che una particella, emettendo un fotone non cambia la proiezione del suo spin lungo la direzione del moto. L'elicità, ad alta energia, non viene praticamente mai invertita in un processo d'urto. Da ora in poi ci poniamo in **condizioni di altissima energia**.

Consideriamo inoltre urti nei quali il **momento angolare è conservato**. Con momento angolare parliamo del modulo  $J$  e della sua proiezione  $j_z$  lungo un opportuno asse di quantizzazione. Questa è la chiave tramite la quale possiamo interpretare le distribuzioni angolari nel caso di un urto. **Supponiamo il caso di una particella diffusa nel caso statico**.

(tutto questo perché poi, in questo *framework* si può pensare all'urto come ad un semplicissimo cambio dell'asse di quantizzazione)

Possiamo conoscere le direzioni dello spin lungo  $z$  inizialmente e lungo  $z'$  a seguito dell'urto. Il momento angolare complessivo deve essere conservato. Quindi, la diffusione ad un angolo  $\theta$  tra uno stato iniziale e uno finale è corrispondente ad un **cambio dell'asse di quantizzazione**. L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale a quello finale, dal punto di vista del momento angolare è l'ampiezza della probabilità di fare prima una misura di momento angolare lungo l'asse  $z$  e poi ritrovare quello stato nella sua proiezione lungo  $z'$ :

$$\langle \psi_i | \psi_f \rangle = \langle J, j_z | J', j'_z \rangle = \langle J', j'_z | e^{-iJ_y\theta} | J, j_z \rangle \delta_{J'J} = d_{j_z, j'_z}^J(\theta) \delta_{J, J'}$$

dove le ultime sono **matrici di rotazioni di Wigner** in  $\mathbb{R}^3$  o *d-functions* e la delta di Dirac è lì per la conservazione del modulo del momento angolare totale a seguito di una rotazione degli assi. Queste matrici sono tabulate e dipendono dal momento totale e dalle due proiezioni lungo  $z$  e  $z'$ . Da *Wikipedia*, per particelle vettori e per fermioni si ha:

$$\begin{aligned}
 & \text{for } j = 1/2 \\
 d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= \cos \frac{\theta}{2} \\
 d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= -\sin \frac{\theta}{2} \\
 & \text{for } j = 1 \\
 d_{1,1}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\
 d_{1,0}^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\
 d_{1,-1}^1 &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\
 d_{0,0}^1 &= \cos \theta
 \end{aligned}$$

### Esempio: Elettrone urta un bersaglio privo di spin

- Corrente Right.

$$A_R = A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| e^{-iJ_y\theta} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = \cos \theta / 2$$

- Corrente Left.

$$A_L = A_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta) = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| e^{-iJ_y\theta} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = \cos \theta / 2 = A_R$$

- **Corrente Mista.** Soppressa ad alte energie, ma il suo valore è  $A_{R \rightarrow L} = A_{L \rightarrow R} = -\sin \theta / 2$

Manca ora da combinare questi stati. R e L sono stati finali distinti, ad esempio con una misura di polarizzazione posso distinguere tra i due stati. Questo vuol dire che non devo sommare le ampiezze (e quindi prendendo il modulo quadro ho un'interferenza che non voglio proprio perché come appena detto R ed L sono distinguibili) ma sommo le probabilità. Come li combino dipende da come preparo i fasci: posso scegliere di polarizzarli o di **non polarizzarli**, e nel secondo caso da considerazioni classiche si avrà che  $P_R = P_L = 1/2$ . Poi sommo:

$$P(\theta) = \frac{1}{2}|A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta)|^2 + \frac{1}{2}|A_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta)|^2 = \cos \theta / 2^2$$

e, in modo approssimato posso calcolare la sezione d'urto come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Rutherford} \cos \theta / 2^2$$

La formula corretta però la seguente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Rutherford} (1 - \beta^2 \sin \theta / 2^2)$$

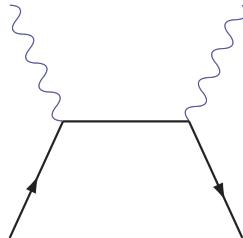
e la si ottiene pensando che

$$(1 - \beta^2 \sin \theta / 2^2) = \sin \theta / 2^2 + \cos \theta / 2^2 - \beta^2 \sin \theta / 2^2 = \cos \theta / 2^2 + (1 - \beta^2) \sin \theta / 2^2$$

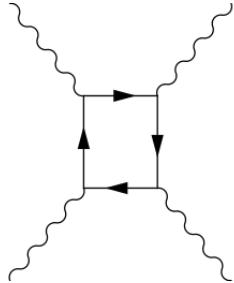
dove c'è un termine che domina e conserva l'elicità e un altro che invece tende a ruotarla. Il secondo è tanto meno presente quanto più  $\beta$  si avvicina a 1 ovvero quanto più siamo ad alta energia.

### Commento sui diagrammi di Feynman

Consideriamo solo correnti mediate dal quanto di un campo di forza (scambio di quanto di un'interazione con una corrente fermionica). Si può costruire qualsiasi tipo di processo andando a combinare opportunamente i vertici di interazione, descrivendo tanti tipi di interazione (alcune a noi note e alcune no). Si può pensare ad un processo elettromagnetico che non è rappresentabile come l'interazione di due correnti fermioniche e questo è ad esempio lo scattering Compton.

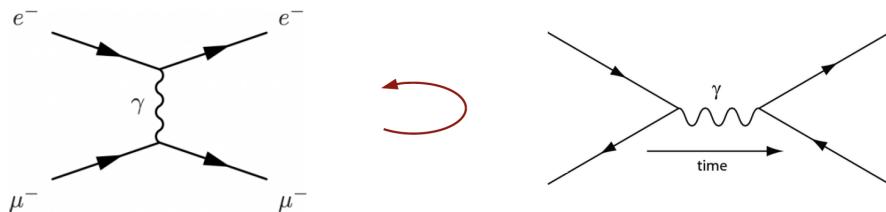


La sezione d'urto è  $\sigma \propto \alpha^2$ . Analizzando il processo si nota anche che l'elettrone iniziale in un certo senso 'assorbe' il fotone per poi riemetterlo in seguito ad un'altra energia. Nel momento in cui ha assorbito il  $\gamma$ , l'elettrone, ricordando che i diagrammi di Feynman hanno la coordinata spaziale in ordinata e il tempo in ascissa, è **fermo**. Però, avendo assorbito il  $\gamma$ , sarà momentaneamente ad una energia superiore a quella dovuta alla sola che però non è cinetica perché è fermo. Perciò, in questo caso, non si parla di un elettrone ma di un **elettrone virtuale**. Vediamo un altro diagramma:



Questo ci dice che la luce può interagire con se stessa. Non si è mai visto un processo del genere, è un processo che esce solo con la QED e nessun'altra teoria. Non è che fanno interferenza, interagiscono nel vero senso della parola: due fotoni che interagiscono diventano due fotoni diversi. La sezione d'urto sarà, contando una  $\sqrt{\alpha}$  per ogni vertice di interazione,  $\sigma \propto \alpha^4$  ed è proprio per questo che il processo non si osserva.

Vediamo cosa succede se **si ruotano i diagrammi di Feynman**. Questa tecnica è talmente potente che, considerando l'interazione studiata più sopra e contando che nell'asse  $x$  si ha il tempo, notiamo che ruotando di  $\pi/2$  il grafico si ottiene un grafico strano.



Si nota infatti che due particelle **vanno indietro nel tempo**. Sembrerebbe una teoria pleonastica: contiene cose non fisiche? **No**. Feynman e Stuckelberg dicono che quelle ad andare indietro nel tempo sono le antiparticelle. Queste ultime sono proposte da Dirac come conseguenza di soluzioni alla sua equazioni con energia negativa. Un'onda piana con energia negativa, nelle due visioni Dirac-Feynman è

$$e^{(-|E|)it} = e^{i|E|(-t)}$$

Particella con energia positiva che va indietro nel tempo: antimateria in QED formulata da Feynman.

### Calcolo $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)$

Ci poniamo nel sistema del centro di massa e in condizioni ultra-relativistiche. Partiamo da:

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}(\sqrt{s}, \Omega)|^2 d\Omega$$

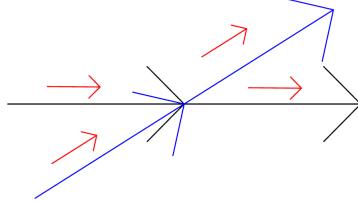
e calcoliamo l'elemento di matrice Ora,

$$|\mathcal{M}(\sqrt{s}, \Omega)|^2 \propto j_{e,\lambda} \frac{1}{q^2} j_\mu^\lambda$$

**e il fotone è in canale s.**

Le diciture **canale s** o **canale t** sono l'abbreviazione di **canale space** e **canale time**: se io ricordo quali sono gli assi di un dei due ultimi diagrammi di Feynman mostrati in poco mi convinco che nel primo caso il fotone è in canale t, ovvero è fermo nel tempo e corre nello spazio, mentre ruotandolo il fotone finisce in canale s, dove è fermo nello spazio.

Calcolo  $s = (P_{e^-} + P_{e^+})^2$  e vedo che questo si becca tutto il quadrimpulso dovuto all'annichilazione di elettrone e positrone. Vi sono 4 possibili combinazioni di correnti:



$$j_{e^-,R} \cdot j_{\mu,R} \Rightarrow A_{R,R}(\theta) = d_{1,1}^1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

Poi le altre, seguendo la stessa logica:

$$\begin{aligned} j_{e^-,R} \cdot j_{\mu,L} &\Rightarrow A_{R,L}(\theta) = d_{1,-1}^1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ j_{e^-,L} \cdot j_{\mu,R} &\Rightarrow A_{L,R}(\theta) = d_{-1,1}^1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ j_{e^-,L} \cdot j_{\mu,L} &\Rightarrow A_{L,L}(\theta) = d_{-1,-1}^1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \end{aligned}$$

Per il calcolo, vado a sommare queste 4 probabilità e siccome vi sono 4 possibili polarizzazioni dello stato iniziale ognuna avrà probabilità pari a  $1/4$ . Prima di fare il calcolo vero e proprio suppongo che una corrente L abbia una carica diversa da una carica R: questo è vero nelle *weak interactions* ma **non in QED**, dove si pone  $g_L = g_R = 1$ . Noi comunque restiamo nel caso generale:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j=L}^R [g_i g_j A_{ij}(\theta)]^2 = \frac{1}{4} (g_L^2 + g_R^2)^2 (1 + \cos \theta^2) + \frac{1}{2} (g_L^2 - g_R^2)^2 \cos \theta$$

e come atteso, se  $g_L = g_R$  l'ultimo termine **scompare**. È interessante la seguente sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (g_L^2 + g_R^2)^2 (1 + \cos \theta^2) + 2(g_L^2 - g_R^2)^2 \cos \theta$$

Si definisce **asimmetria avanti-indietro**

### 6.3 Esercizi

1. Calcolare la sezione d'urto per particelle puntiformi che incidono su una sfera rigida di raggio R.
2.  $\sigma$  è Lorentz-invariante perché è uno scalare e comunque la sua definizione non può dipendere dal sistema di riferimento scelto.
3. Dalla relazione  $\phi = 4\sqrt{(P_{A\mu}P_B^\mu)^2 - m_A^2m_B^2}$  ricavare che a bersaglio fisso si ha  $4p_A m_B$ . Qualche conto porta alla soluzione:

$$(P_{A\mu}P_B^\mu)^2 = (E_A E_B)^2 - (p_A p_B)^2 =$$

a bersaglio fisso  $p_B = 0$ , perciò

$$= (m_A^2 + p_A^2)m_B^2 - 0 = m_A^2 m_B^2 + p_A^2 m_B^2$$

che nel complesso porta a:

$$\phi = 4\sqrt{m_A^2 m_B^2 + p_A^2 m_B^2 - m_A^2 m_B^2} = 4p_A m_B$$

4.

5. Partendo da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (\textcolor{red}{g_L^2 + g_R^2})^2 (1 + \cos \theta^2) + 2(\textcolor{blue}{g_L^2 - g_R^2})^2 \cos \theta$$

devo verificare

$$\mathcal{A}_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{4} \left[ \frac{\textcolor{blue}{g_L^2 - g_R^2}}{\textcolor{red}{g_L^2 + g_R^2}} \right]^2$$

dove

$$\sigma_F = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos \theta} d\cos \theta \quad \sigma_B = \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\cos \theta} d\cos \theta$$

Per il primo, ricordando che  $d\Omega = d\cos \theta d\varphi = 2 \sin \theta d\theta d\phi$  e sapendo che l'integrale in  $\phi$  non porta contributo ed eventuali fattori costanti si elidono nel rapporto:

$$\sigma_F = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos \theta} d\cos \theta = \int_0^1 (\textcolor{red}{+})^2 (1 + \cos \theta^2) + 2(\textcolor{blue}{-})^2 \cos \theta d\cos \theta =$$

$$= (+)^2 \left( 1 + \frac{\cos \theta^3}{3} \right) + 2(-)^2 \frac{\cos \theta^2}{2} \Big|_0^1 = (+)^2 \frac{4}{3} + 2(-)^2 \frac{1}{2}$$

e, con un segno invertito

$$\sigma_F = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos \theta} d\cos \theta = - \left[ (+)^2 \left( -\frac{4}{3} \right) + 2(-)^2 \frac{1}{2} \right]$$

da cui il risultato finale.

6.  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  che avviene in soglia con  $E_\gamma = 1\text{meV}$ . Calcolare  $E'_\gamma$ .

$$(P_\gamma + P'_\gamma)^2 = (E_\gamma + E'_\gamma)^2 - (p_\gamma + p'_\gamma)^2 = E_\gamma^2 + E'^2_\gamma + 2E_\gamma E'_\gamma - p_\gamma^2 - p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta$$

ma per i fotoni,  $m_\gamma = 0$  e  $E_\gamma = p_\gamma$ , quindi resta:

$$2E_\gamma E'_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta$$

e nel centro di massa  $\theta = \pi$ , e quindi  $p_\gamma = -p'_\gamma$  da cui  $E'_\gamma = \frac{m_e^2}{E_\gamma} = 250\text{ MeV}$

Il diagramma di Feynman è un Compton ruotato di  $\pi/2$ .

7. Ricavare l'espressione della sezione d'urto  $e\mu \rightarrow e\mu$  nel centro di massa.

$$|\mathcal{M}|^2 = 32\pi^2 \alpha^2 \frac{s^2 + u^2}{t^2} =$$

## 7 Decadimenti

Tutti i processi di decadimento sono regolati dalla legge esponenziale

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

che segue banalmente dalla richiesta che il numero di transizioni  $dN$  in un intervallo di tempo  $dt$  sia proporzionale al numero  $N$  di particelle non ancora decadute:

$$dN \propto -N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che vi è una scomparsa,  $N$  infatti cala nel tempo. Ci poniamo 3 domande:

- Qual è l'origine di questa legge?** Una particella libera a riposo è un autostato dell'operatore energia con autovalore  $E$ , che nel caso a riposo coincide con la massa:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle = m |\psi\rangle$$

Vado a scrivere l'equazione di evoluzione temporale dello stato e si arriva a:

$$i\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = e^{-imt} |\psi(0)\rangle$$

che non è altro che la funzione preliminare moltiplicata per l'onda piana. Andando a misurare l'ampiezza che la particella sia rimasta nello stato iniziale si ottiene l'espressione dell'onda piana:

$$A(t) = \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle = \psi_0 e^{imt}$$

Se da questo spazio delle coordinate andiamo nello spazio dei parametri con una trasformata di Fourier giungiamo a uno stato con energia molto ben definita: la sua massa è tutta l'energia nel sistema a riposo:

$$\tilde{A}(E) \propto \int_0^\infty A(t) e^{-iEt} dt = \tilde{A}_0 \delta(m - E)$$

In conclusione, se abbiamo un  $H$  hermitiano, gli autovalori di energia  $E$  sono numeri reali e porta ad avere una soluzione di onda piana nello spazio delle coordinate, che corrisponde ad un preciso valore di energia nello spazio delle fasi. Il fatto che sia un'onda piana, ovvero *che non è mai iniziata e non ha mai fine*, comporta che lo stato che essa descrive **non può essere uno stato instabile**. Quindi non è nulla di fisicamente rappresentabile.

Vediamo ora una rappresentazione intuitiva, euristica di uno stato instabile. Chiaramente se una particella decade, noi **non possiamo osservarla per una durata maggiore della sua vita propria**. Grossomodo quindi  $\Delta t \approx \tau$  e dal principio di indeterminazione tra le incertezze di tempo di misura ed energia si ha

$$\Delta E \Delta t \sim 1 \Rightarrow \gamma = \Delta E \sim \frac{1}{\tau}$$

dove questo nuovo parametro  $\gamma$  corrisponde all'incertezza intrinseca sulla misura dell'energia di uno stato legata al fatto che quello stato è instabile e ha una durata ben definita. **In sostanza questo ci dice che più una particella è sfuggibile, ovvero è veloce a decadere più l'incertezza che ho sulla misura della sua energia è grande.** Non si ha più un valore univoco dell'energia, e quindi della massa, ma uno spettro rappresentato da una funzione continua non banale  $\tilde{A}(E)$ . Il parametro  $\gamma$  prende il nome di **larghezza dello stato** e corrisponderà alla dispersione di questa ultima funzione nello spazio dei parametri.

Per ottenere formalmente una distribuzione di questo tipo è sufficiente modificare l'hamiltoniano al termine 'libero' (che fa sì che la particella

viva per sempre) aggiungendo un pezzo di interazione che determina il decadimento della particella

$$H = M - i \frac{\Gamma}{2}$$

I due termini singolarmente sono hermitiani ma l'hamiltoniano complessivo non lo è. Sapendo che  $M|\psi\rangle = m|\psi\rangle$  e  $\Gamma|\psi\rangle = \gamma|\psi\rangle$ , scriviamo:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i(M+i\frac{\Gamma}{2})t} |\psi(0)\rangle = e^{(im-\frac{\gamma}{2})t} |\psi(0)\rangle$$

che non è altro che un'**onda piana smorzata** da un termine esponenziale legato alla larghezza dello stato. La ampiezza risulta:

$$A(t) = \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle = \psi_0 e^{imt - \frac{\gamma}{2}t} = \psi_0 e^{imt} e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

e la probabilità di osservare la particella ad un tempo  $t$  avendola preparata in  $\psi(0)$  avrà:

$$P(t) = A^*(t)A(t) = \gamma e^{-\gamma t}$$

che rappresenta esattamente la distribuzione che stavamo cercando **a patto di porre**  $\gamma = 1/\tau$ . Dal discorso fatto poco più un su, dove si aveva che  $\Delta t \approx \tau$  e quindi  $\gamma = \Delta E \sim 1/\tau$  abbiamo fatto un passo avanti.  $\gamma$  non è *circa* pari a  $1/\tau$ , lo è **esattamente**.

La richiesta di avere  $H$  hermitiano consegue dalla necessità di conservare l'unitarietà del processo. Un decadimento comporta la **scomparsa di particelle** in uno stato iniziale e la **comparsa di nuove particelle** in uno stato finale. I due termini singolarmente **non sono hermitiani**, non descrivono singolarmente processi unitari (e questo ha un senso anche fisico: una volta sparite due particelle non posso 'tornare indietro'). Se però conosco anche gli stati finali, ovvero conosco il processo nella sua interezza ecco allora che i due contributi singoli si bilanciano al fine di avere un hamiltoniano complessivo che è **hermitiano**.

Ora concentriamoci su  $\tilde{A}(E)$ . L'ampiezza di probabilità, da sopra, è pari a

$$A(t) \sim e^{imt} e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

e prendendo la sua trasformata di Fourier trovo esattamente un integrale per l'espressione dell'ampiezza nello spazio delle fasi.

$$\begin{aligned} \tilde{A}(E) &= \mathcal{F}(A(t)) \propto \int_0^\infty A(t) e^{-iEt} dt = \int_0^\infty e^{(i(m-E)-\frac{\gamma}{2})t} \\ &\tilde{A}(E) \propto \frac{1}{i(m-E) - \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

grazie ad una banale integrazione. I fattori di normalizzazione non sono importanti: normalizzandola in questo modo si ha che il massimo dell'espressione di probabilità (curva di Breit-Wigner) ha il suo massimo a 1 per  $E = m$ :

$$\tilde{P}(E) = |\tilde{A}(E)|^2 = \frac{\gamma^2/4}{(m - E)^2 + \gamma^2/4}$$

che è la **funzione di Breit-Wigner normalizzata**. Anziché ricavare la normalizzazione opportuna dalla trasformata di Fourier si preferisce questo tipo di normalizzazione. È una funzione a campana non perfettamente simmetrica. Per  $E = m$ ,  $\tilde{P}(E) = 1$  e per  $E = m \pm \gamma/2$  dimezza il suo valore. Ecco perché  $\gamma$  è anche detta *full width at half maximum FWHM*. Tanto più piccolà è  $\gamma$ , tanto meglio è definita la massa e più stretta è la funzione.

Quindi la Breit-Wigner è la distribuzione che nel sistema a riposo della particella descrive la probabilità di trovare una particella con energia tra  $E$  ed  $E + dE$  in funzione della massa e della larghezza della particella instabile considerata.

Questa funzione però **non è relativistica**. Passando in QFT la Breit-Wigner consegue dalla teoria dei propagatori (il propagatore per il fotone era un termine  $1/q^2$ ). Noi in questo corso abbiamo direttamente la conclusione. La densità di probabilità per uno stato con energia  $\sqrt{s}$  è espressa dalla seguente funzione (simile ma un po' più complicata):

$$\tilde{P}_R(E) = \frac{s\gamma^2}{(s - m^2)^2 + \gamma^2 m^2}$$

che per  $\gamma \ll m$  torna ad essere la Breit-Wigner non relativistica.

Due esempi concreti:

- $\mu$ .  $\tau_\mu = 2\mu s$  e da questo  $\gamma_\mu = \hbar/\tau_\mu = 1/\tau_\mu \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ eV} = o(10^{-18})m_\mu$ . È praticamente una  $\delta$  di Dirac.
- $Z_0$ .  $\tau_{Z_0} = 3 \cdot 10^{-25} \text{ s}$  e da qui  $\gamma_{Z_0} = 1/\tau_{Z_0} \approx 2.5 \text{ GeV} = 0.037m_{Z_0}$  cioè una indeterminazione pari al 3% della sua massa. In questi casi si parla di **risonanza larga**.

2. **Quali informazioni possiamo estrarre dalla misura di  $\tau$ ?** Dalla misura di  $\tau$  si può validare e no una teoria sulla base di una stima di grandezze fondamentali note con precisione altissima. Bisogna subito precisare però che la teoria non calcola  $\tau$  ma la **larghezza di decadimento**. Questa ultima la possiamo calcolare sorprendentemente usato le **stesse tecniche** messe in atto per il calcolo della **sezione d'urto**: La sezione d'urto era legata alla probabilità che 2 particelle di un certo stato iniziale  $\psi_i$  si urtassero al fine di produrre uno  $\psi_f$ . Possiamo copiare pari pari il

formalismo stando attenti tenere una sola particella nello stato iniziale

$$\sigma(ab \rightarrow cde \dots) \Rightarrow \sigma(a\cancel{b} \rightarrow cde)$$

Si avrà dunque, ricordando quanto detto:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m} |\mathcal{M}|^2 d\rho$$

Da ora in poi chiamiamo la larghezza  $\Gamma$  in modo da non confonderci con il fattore per i **boost** di Lorentz.

Questa **non è una grandezza Lorentz-invariante** perché essendo per definizione, nel sistema a riposo:  $\Gamma = 1/\tau$  allora in uno moto si avrà  $t = \gamma\tau$  da cui  $\Gamma' = \Gamma/\gamma$ . Noi la studiamo nel sistema a riposo. Non serve formalismo ulteriore.

---

### Esempio

**Larghezza di decadimento del muone.** Questa larghezza si esprime per mezzo di alcuni parametri:

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{1}{\tau_\mu}$$

Misuriamo la vita media, lo confrontiamo con il rapporto di parametri (noto) a sinistra e invertendo la formula otteniamo

$$G_F = 1.1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}$$

Il caso del muone però è un caso isolato perché è una particella con uno solo stato finale. In realtà, la maggior parte delle particelle ha numerosi stati finali (adroni con *beauty* ne hanno addirittura centinaia). La teoria deve procedere **calcolando un processo alla volta!**

---

La QFT deve essere applicata **indipendentemente** per tutti i processi, caso per caso e lo spettro Breit-Wigner risulta essere la somma dei decadimenti in tutti gli stati finali. Formalmente allora, data una particella  $P$  e uno specifico stato finale  $f$  si definiscono:

- **Larghezza parziale:**  $\Gamma_f = \Gamma(P \rightarrow f)$ , larghezza del singolo caso;
- **Larghezza totale:**  $\sum_f \Gamma_f$ , che conta tutti i modi di decadimento;
- **Branching Fraction:** Il rapporto  $B_f = \Gamma_f / \Gamma$  ( $\sum B_f = 1$ ).

**Cosa dobbiamo fare per estrarre informazioni dalla misura?** Con la teoria dobbiamo calcolare  $\Gamma_f(\theta)$  in funzione di parametri fondamentali quali ( $G_F$ ,  $\sin \theta_W^2$ ,  $\alpha_W$ , ...). L'esperimento effettua due misure, o

la vita media  $\tau$  o la larghezza  $\Gamma$  e contemporaneamente  $B_f$  (la frequenza con cui la particella decade in  $f_1$  piuttosto che in un i-esimo  $f_i$  tra quelli possibili rispetto alla frequenza con cui la particella è decaduta). Dal **confronto** teoria-esperimento (minimizzazione chi quadro e massimizzazione delle *likelihood*) si ricavano i valori dei parametri  $\theta$  e si valida o si demolisce la teoria vincolando la scketa al fatto che i parametri ricavati per inversione delle formule **devono essere compatibili a quelli noti**.

### 3. Come si misura $\tau$ ? La relazione

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

garantisce un approccio **win-win**. Ad una grande vita media (misureremo questa) corrisponde una piccola larghezza, ad una grande larghezza (misureremo questa, se è grande è solitamente maggiore della precisione strumentale) corrisponde una piccola vita media. Tipicamente, si misura la vita media se  $\tau > 1 fs$  e da qui si ricava  $\Gamma$  e il resto. Viceversa altrimenti. Lo **spartiacque** è fornito dal  $\pi^0$  (e forse solo non da lui ma è un esempio noto) perché è l'unica particella della quale sono state misurate entrambe le variabili, per via del fatto che queste due sono davvero molto simili (compatibili addirittura!):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pi_0} &= [(8.30 \pm 0.19) \cdot 10^{-17} s]^{-1} \\ \tau_{\pi_0} &= (8.97 \pm 0.22 \pm 0.17) \cdot 10^{-17} s\end{aligned}$$

**Vediamo ora tre approcci per la misura delle vite medie.** Questi non esauriscono tutti gli approcci disponibili ma sono quelli più perseguiti.

- **Conteggio.** Tecnica dalla fisica nucleare: Prendo una sostanza con una percentuale nota di carbonio-14, verifico la frazione residua (con *back-scattering*), conosco  $\tau$  del carbonio-14 e da questo determino il tempo  $t$  intercorso dalla produzione dell'oggetto al momento di analisi usando la legge esponenziale del decadimento; (non si usa questa nelle particelle elementari!)
- **Interpolazione della distribuzione del decadimento di particelle a riposo.** L'idea è quella di Paccini-Piccioni-Conversi; (solo se la particella vive a lungo!)
- **Misura della lunghezza di volo.** (più utilizzata!). Sostanzialmente, immaginando due fasci che urtano e producono particelle il nostro rivelatore salva delle tracce. Andando a ricostruirle (non esattamente per via di errori sperimentalni) si può giungere ad un area corrispondente al vertice di produzione. Si misura quindi la distanza di volo come la lunghezza tra il punto di produzione e il punto di decadimento stimati. Ma la lunghezza di volo  $L$  è:

$$L = \beta\gamma ct \Rightarrow t = \frac{L}{\beta\gamma c} = \frac{L}{cp/m}$$

(dove  $\beta/P/E$ ,  $\gamma = E/m$  e  $\beta\gamma = p/m$ ).  $p$  non lo misuro direttamente, ma lo calcolo dalla somma vettoriale degli impulsi in cui la particella madre è decaduta. Conoscendo  $\sigma(L) = o(10)\mu m$ ,  $\sigma(p) = o(10) MeV$  allora  $\sigma(t) \approx 50 fs$  (dati CMS). Per  $\sigma(\tau)$  prendo la media su un campione e se prendo tanti campioni posso ridurlo in modo significativo.

Una volta determinati questi parametri scrivo la legge esponenziale e l'unica incognita che resta è la vita media:

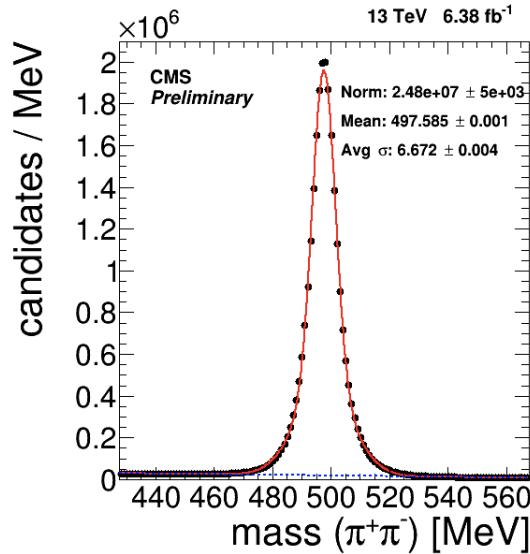
$$N(t) = N_0 = e^{-\frac{mL}{p\tau}}$$

### Esempio 1: Il *Kappa corto*.

$K_S \rightarrow \pi^+\pi^-$  ha una  $c\tau \approx 10 cm$ . In primo luogo si misurano i quadrimpulsi dei due pioni e si ottiene quello del  $K_S$  andando a sommare questi due. Dopodiché si calcola la massa invariante della particella secondo

$$m = \sqrt{[P(\pi^+) + P(\pi^-)]^2}$$

La distribuzione porta un picco che può ricordare una Breit-Wigner sommata ad una bassa distribuzione tipo *box* (**fondo combinato**: prendo  $\mu$  non correlati tra di loro e sommandoli non mi aspetto alcun addensamento significativo). Con una successiva *side-band subtraction* mi concentro sulla zona e ciò che trovo (in *logscale*) è una retta.



Le proprietà del  $K_S$  sono molto note e CMS non ha una precisione sufficiente ad indagare con più precisione i parametri di quest particella. Questi punti infatti sono utilizzati solamente per una **calibrazione**.

**Esempio 2:**  $B_S$ .

Il mesone  $B_S$  è uno stato legato  $|\bar{b}s\rangle$  ed è stata misurata la vita media da poco. Il  $B_S$  decade:

$$B_S \rightarrow J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^- K^+ K^-$$

e combinando le informazioni di queste 4 particelle ricostruiamo il  $B_S$ . Si è ottenuto  $\tau(B_S) = (1.53 \pm 0.01) ps$ . In questo caso la scala, una volta fatte le operazioni per concentrarsi sul segnale, si ottiene una scala nell'ordine dei millimetri e la maggior parte degli eventi sta in  $500 \mu m$ .

## 7.1 Risonanze

Vediamo alcune risonanze caratteristiche e la loro misura. Quando la vita media è troppo piccola si può caratterizzare la particella misurando la forma della Breit-Wigner. Ci sono due metodi tipici per misurare:

- **Misura in formazione.** Io formo la particella facendo collisioni ad energia opportuna per ottenere una particella X. Vario  $\sqrt{s}$  e misuro  $\sigma(\sqrt{s})$  che è collegata esattamente all'espressione della Breit-Wigner relativistica:

$$\sigma(\sqrt{s}) = \frac{dN}{d\sqrt{s}} \propto \frac{s\Gamma^2}{(s - M^2)^2 + s\Gamma^2}$$

Questo metodo è detto **studio della risonanza in formazione**

- **Studio in produzione.** Ricostruisco la massa invariante della particella identificando tutte le particelle nello stato finale e calcolando

$$m = \sqrt{\sum_i E_i^2 - (\sum_i p_i)^2}$$

Facciamo esempi ricordandoci delle risoluzioni sperimentali.

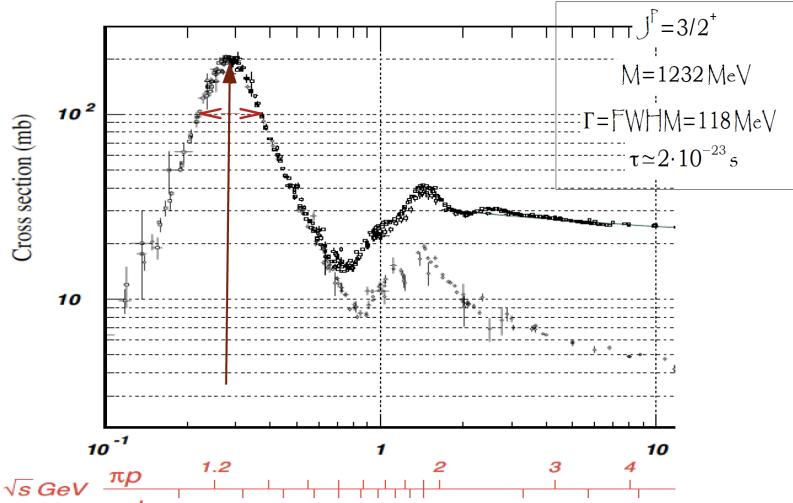
### 7.1.1 Produzione della Delta

Discussiamo gli esempi di formazioni della delta:

$$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$$

$$\pi^- p \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi N$$

Vediamo la sezione d'urto per il primo processo:



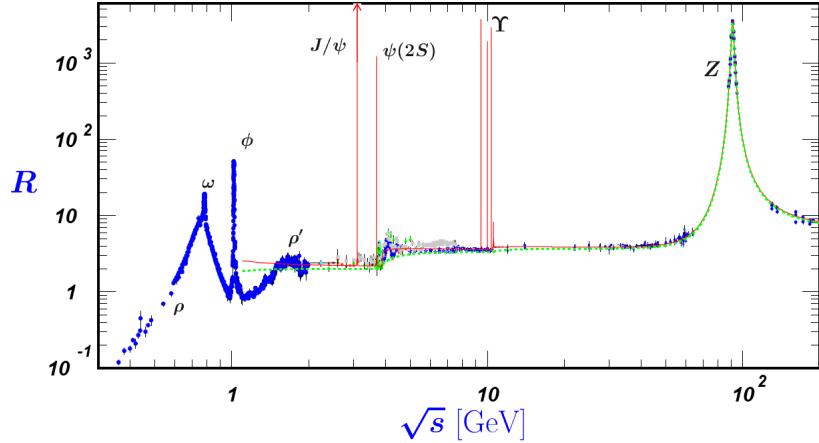
La scala sotto è quella del centro di massa. In corrispondenza del massimo della curva si ha la massa: 1232 MeV. Nei punti in cui la curva si dimezza si ha il parametro  $\gamma$  pari a circa 118 MeV. Il caso è una risonanza larga 10% della sua massa. Allora,  $\tau = 2 \cdot 10^{-23}$  s. La  $\Delta^{++}$  decade mediante interazioni forti. La curva di puntini meno intensi è la sezione d'urto elastica (stati finali uguali a quelli finali  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ . Sparando ora pioni negativi si nota una struttura risonante molto simile in corrispondenza sempre della stessa massa  $\approx 1200$  MeV. C'è anche una risonanza più alta, ma noi guardiamo la solita. In questo caso però la delta prodotta è **neutra** e può decadere in due stati molto simili tra loro:

$$\Delta^0 \rightarrow \pi N = 70 \text{ mb}$$

$$\Delta^0 \rightarrow \pi^- p \approx 20 \text{ mb}$$

### 7.1.2 Sezione $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Lo spettro è davvero molto complesso. Si nota anche la produzione della  $J/\psi$ , stato  $|c\bar{c}\rangle$ . Con un ingrandimento la si vede meglio.



Se si va a vedere la produzione della  $J/\psi$  si distinguono tre casi a seconda dello stato finale e la forma dei fondi combinatori è diversa. L'altezza delle tre curve è diversa per via dei diversi *branching ratio* ma la larghezza della curva e la struttura è la stessa (che non dipende dallo stato finale). Come vedremo tra poco questa risonanza ha portato allo scoperto del *charm*. È stato scoperto anche il quark *beauty*

### 7.1.3 Risonanza $J/\psi$ e scoperta del beauty

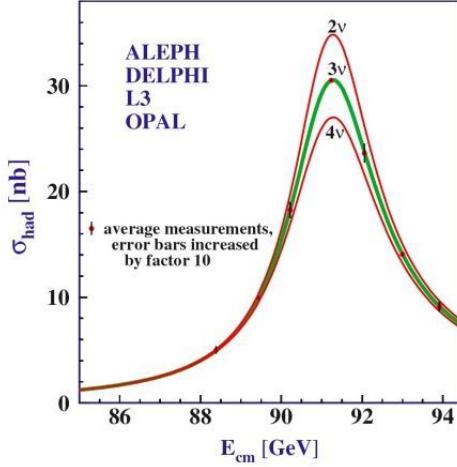
Questa particella ha due nomi perché nello stesso momento due laboratori l'hanno scoperta. A Brookhaven, Samuel Ting analizzava collisioni

$$pBe \rightarrow \mu^+ \mu^- X$$

e andava a cercare stati finali con muoni di segno opposto. Questa particella pesava 3100 MeV con una larghezza cospicua di una cinquantina di MeV. Nel frattempo, a SLAC veniva compiuto un esperimento di risonanza in formazione. Si ottiene una curva con una larghezza molto minore, ma non sono due particelle diverse! Ne deduciamo che questa è la risoluzione sperimentale dell'apparato: non si rispecchia la natura intrinseca della particella ma la pessima risoluzione dei rivelatori. Simultanea scoperta: premio Nobel simultaneo. Mai un accordo per unificare il nome.

Con la stessa tecnica di Ting, al Fermilab si scopre il quark beauty con una pessima risoluzione. Una migliore misura però viene fatta a New York con l'acceleratore CESR.

Proprietà della  $Z_0$  a LEP nel 1990. Lo studio delle sue proprietà è stato fatto con le collisioni  $e^+e^- \rightarrow Z$  e le curve di risonanza sono le seguenti:



Quella da guardare è la curva verde: quello è l'effettivo profilo. La misura della curva verde ci offre la sezione d'urto totale e la solita  $\gamma$ . La larghezza della Z può essere usata per calcolare il numero di neutrini leggeri. I neutrini non possiamo rivelarli! Allora, non si potevano contare i neutrini perciò lo si fa per differenza. Con il modello standard si ha  $\Gamma_{\nu\nu} = \Gamma(Z \rightarrow \nu\nu)$  e conoscendo  $\Gamma_{\ell\ell} = \Gamma(Z \rightarrow \ell^+\ell^-)$  dove con  $\ell$  possono essere  $e, \mu, \tau$  e  $\Gamma_{had} = \Gamma(Z \rightarrow had)$  si calcola

$$N_\nu = \frac{\Gamma(Z) - 3 \cdot \Gamma_{\ell\ell} - \Gamma_{had}}{\Gamma_{\nu\nu}} \approx 3\nu$$

ovvero la larghezza invisibile corretta è compatibile con 3 neutrini e il numeratore è la cosiddetta **larghezza invisibile**.

#### 7.1.4 Esercizi

1. L'energia è la frequenza della forza esterna. La massa è l' $\omega_0$ , la frequenza intrinseca del sistema: quella che ho anche se non ho una forza esterna. Il  $\gamma$  invece è il termine che dà lo smorzamento esponenziale.
2. L'integrale è normalizzato a 1
3. Nella Breit Wigner normalizzo affinché il picco sia a probabilità 1. Se una è normalizzata è normalizzata anche la sua trasformata di Fourier.
4. Vogliamo provare che la Breit-Wigner relativistica:

$$\frac{s\Gamma^2}{(s-m)^2 + \Gamma^2 m^2}$$

nel limite  $\Gamma \ll m$  si riduce a quella classica. Allora:

$$\frac{s\Gamma^2}{(\sqrt{s}-m)^2(\sqrt{s}+m)^2 + \Gamma^2 m^2} = \frac{s\Gamma^2}{m^2} \frac{1}{(\sqrt{s}-m)^2 \left(\frac{\sqrt{s}+m}{m}\right)^2 + \Gamma^2} =$$

$$= \Gamma^2 \frac{1}{(\sqrt{s} - m)^2 \left( \frac{2p\ell}{p\ell} \right)^2 + \Gamma^2} = \frac{\Gamma^2/4}{(\sqrt{s} - m)^2 + \Gamma^2/4}$$

5. Per il calcolo della larghezza del mesone  $K_S$  ricordo la relazione

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}$$

La vita media la prendo dal PDG in secondi:

|   |                             |  |                     |                        |
|---|-----------------------------|--|---------------------|------------------------|
| $K_S^0$   | $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$ |  |                     |                        |
| <b><math>K_S^0</math> MEAN LIFE</b>   |                             |  |                     |                        |
| For earlier measurements, beginning with BOLDT 58B, see our 1986 edition, Physics Letters <b>170B</b> 130 (1986).   |                             |  |                     |                        |
| OUR FIT is described in the note on "CP violation in $K_L$ decays" in the $K_S^0$ Particle Listings. The result labeled "OUR FIT Assuming CPT" ["OUR FIT Not assuming CPT"] includes all measurements except those with the comment "Not assuming CPT" ["Assuming CPT"]. Measurements with neither comment do not assume CPT and enter both fits. |                             |  |                     |                        |
| <small>VALUE (<math>10^{-10}</math> s)</small>  | <small>EVTS</small>         | <small>DOCUMENT ID</small>                       | <small>TECN</small> | <small>COMMENT</small> |
| <b>0.8954 ± 0.0004 OUR FIT</b>  |                             | Error includes scale factor of 1.1. Assuming CPT |                     |                        |
| <b>0.8954 ± 0.00033 OUR FIT</b>   |                             | Not assuming CPT                                 |                     |                        |

la trasformo in  $eV^{-1}$  e calcolo la larghezza che esce pari a circa  $7.33 \cdot 10^{-6}$  MeV. Ci sta che sia piccola perché la vita media è molto lunga: conviene misurare quest'ultima.

6. Il  $B^0$  decade in 549 modi stando al PDG.

7. - Primo decadimento, dal PDG:

$$\frac{\Gamma(W \rightarrow c\bar{s})}{\Gamma(W \rightarrow hadrons)} = 0.46^{+0.18}_{-0.14} \pm 0.07$$

- Secondo decadimento, dal PDG:

$$\frac{\Gamma(W \rightarrow e\nu)}{\Gamma(W \rightarrow total)} \frac{\Gamma(W \rightarrow total)}{\Gamma(W \rightarrow leptons)} \approx 0.98$$

- Terzo decadimento, dal PDG:

$$\frac{\Gamma(W \rightarrow c\bar{s})}{\Gamma(W \rightarrow hadrons)} \frac{\Gamma(W \rightarrow hadrons)}{\Gamma(W \rightarrow total)} \frac{\Gamma(W \rightarrow total)}{\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_e)} \approx 2.89$$

## 8 Simmetrie

*"a thing is symmetrical if there is something we can do to it so that after we have done it, it looks the same as it did before"* (Fisica di Feynman, citando Weyl)

Il mondo non manifesta nessuna invarianza evidente (posso essere in vita, spostarmi dritto verso le scogliere di Dover, cadere e morire ammazzato: il mio stato vitale non è invariante). Si è però convinti che tali **simmetrie esistano a livello fondamentale**, poiché dal primo postulato della relatività ristretta di Einstein

*Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali:*

ora e ai tempi di Galileo (invarianza **temporale**), qui e a Berkeley (invarianza **traslazionale**) e comunque si orientino gli assi (invarianza **rotazionale**). In sostanza, i risultati di un esperimento non dipendono dal punto (nello spazio tempo e dall'inclinazione degli assi del sistema di riferimento) in cui vengono effettuati. Nelle leggi **non possono comparire termini legati a posizione, tempi o orientazioni assolute**.

L'interesse per le simmetrie è legato al **teorema di Noether**: *ad ogni invarianza di un sistema corrispondono grandezze conservative*. Citando alcuni esempi:

- invarianza per traslazione spaziale comporta conservazione della quantità di moto;
- invarianza per traslazione temporale comporta conservazione dell'energia;
- invarianza per rotazioni spaziali comporta conservazione del momento angolare;

Ci focalizzeremo sulle simmetrie discrete, quali **parità** e **coniugazione di carica**. La fisica infatti non deve poter dipendere dall'orientazioni degli assi di un sistema cartesiano o dal segno della carica elettrica.

## 8.1 Simmetrie di parità

### 8.1.1 Introduzione classica

I due modi convenzionali per orientare una terna di assi cartesiani sono il modo **levogiro** (mano destra) o **destrogiro** (mano sinistra). Descrivere un sistema con una terna destrogiro o levogiro dovrebbe essere una scelta **puramente convenzionale**: se siamo abituati alla mano destra non ci aspettiamo di modificare le leggi della fisica scegliendo invece una terna destrogiro. L'operazione matematica o fisica che trasforma un levogiro in un destrogiro o viceversa è, appunto, la **parità** (corrispondente ad una **inversione degli assi**). In fisica classica:

- $\vec{r} = (x, y, z)$  per un sistema levogiro;
- $\vec{r}' = (x', y', z') = (-x, -y, -z)$  per un sistema destrogiro;

Osservo che  $|\vec{r}'| = |\vec{r}|$ ,  $\theta = \pi - \theta'$  e  $\phi' = \pi + \phi$ .

In sostanza, un **vettore**, invertendo gli assi, rappresenta sempre lo stesso punto nello spazio per i diversi sistemi di riferimento presi singolarmente, perciò restando sul levogiro vedo un vettore che ha la stessa direzione ma va in verso opposto. Uno **pseudovettore** invece, a seguito di una inversione degli assi non cambia verso se lo guardo sempre dallo stesso sistema di riferimento, perché il prodotto vettoriale di due vettori che rappresentano, come detto prima, sempre lo stesso punto nello spazio. Ovvero questa grandezza misurata nel sistema destrogiro o misurata nel sistema levogiro **resta costante** (fondamentale capire

questo per afferrare il concetto dell'esperimento di Wu). I **prodotti scalari** di due vettori  $\vec{V}$  o di due vettori assiali  $A\vec{V}$ :

$$s = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = A\vec{V}_1 \cdot A\vec{V}_2 = s'$$

esempi di quantità scalari sono chiaramente il lavoro o l'energia. I **prodotti pseudo-scalari** invece cambiano di segno poiché in questo caso uno cambia segno e l'altro no:

$$ps = \vec{V} \cdot A\vec{V} = -ps'$$

e un esempio di pseudoscalare invece è l'elicità:  $\lambda = \vec{S} \cdot \vec{p} = -\lambda'$ . Il momento angolare di spin è uno pseudo-vettore mentre il momento è un vettore perciò nel complesso il prodotto è pseudo-scalare.

In elettromagnetismo il termine di riferimento è la **forza di Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

la forza è un vettore, il campo elettrico pure, mentre il campo magnetico **deve essere uno pseudo-vettore** affinché il suo prodotto vettoriale con la velocità, che è un vettore dia un vettore. La **densità di corrente**  $\vec{j} = nq\vec{v}$ , che dipende dalla velocità è chiaramente un vettore. Il **campo magnetico**  $\nabla \times \vec{A}$ . Siccome  $\nabla$  cambia di segno per parità dovrà farlo anche  $\vec{A}$  affinché il segno di  $\vec{B}$  resti inalterato.

### 8.1.2 Parità con particelle e campi

Ogni particella è rappresentata da una funzione d'onda che è autostato dell'operatore di parità.

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = p\psi(\vec{r})$$

$$P^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \Rightarrow p = \pm 1$$

Abbiamo visto che il potenziale vettore deve essere un vettore e perciò  $P(\vec{A}) = -\vec{A}$ . Da qui, per mezzo del **principio di corrispondenza**<sup>2</sup> possiamo asserire che il **fotone** deve essere rappresentato da una funzione che cambia segno sotto inversione degli assi

$$P|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$$

Nel caso dei **fermioni** bisogna fare riferimento all'equazione di Dirac, per la quale  $P(f)P(\bar{f}) = -1$ . Una ragione intuitiva la si può avere pensando a un diagramma di Feynman di *pair production*, dove un fotone converte in un elettrone e un positrone. Dal momento che nelle interazioni elettromagnetiche la parità è conservata, se al fotone associamo parità  $-1$  allora la parità combinata di  $e^+e^-$  deve essere uguale a  $-1$ . Dal momento che la parità è una caratteristica

---

<sup>2</sup>In fisica il principio di corrispondenza afferma che i risultati della meccanica quantistica devono ridursi a quelli della meccanica classica nelle situazioni in cui l'interpretazione classica può essere considerata valida.

intrinseca di una funzione d'onda e una funzione d'onda di due particelle è il prodotto (opportunamente simmetrizzato o anti-simmetrizzato) delle due allora la parità è un **numero quantico moltiplicativo**.

Convenzionalmente: **parità positiva alla particella, parità negativa alla antiparticella.**

Per i **mesoni** la situazione è differente: in alcuni casi la si misura, in altri la si calcola e poi si confrontano le due.

Se si ha un **sistema di particelle** la funzione complessiva può essere scritta come il prodotto delle funzioni d'onda singole per la funzione d'onda che rappresenta le due (esempio) particelle nel sistema di riferimento in cui esse sono descritte. Dalla fisica atomica, l'atomo di idrogeno prevede una funzione complessiva data da: una funzione per il protone, una per l'elettrone e una che descrive il moto relativo delle due particelle attorno al centro di massa comune. Se ci poniamo nelle **condizioni di potenziale centrale** (ipotesi per tutti i processi che studieremo) allora la funzione d'onda spaziale sarà scomposta da un termine radiale e da uno angolare, rappresentata dalle armoniche sferiche. Allora, conoscendo la parità delle armoniche sferiche (potenze del coseno di theta), ovvero  $(-1)^\ell$  si può scrivere la parità totale come:

$$P(\psi) = p(\psi_1)p(\psi_2)(-1)^\ell$$

che è pari a  $(-1)^{\ell+1}$  nel caso di una **coppia fermione antifermione** non necessariamente dello stesso tipo  $f\bar{f}'$ .

### Esempio: transizioni atomiche (interazioni EM)

Nelle transizioni atomiche  $\Delta\ell = \pm 1$ , cosa comporta questa regola per la parità? Beh, devo passare da un sistema da  $\ell + 1$  a uno con momento più basso ma con un fotone emesso  $\ell + \gamma$ . Si avrà, nello stato iniziale la parità di una armonica sferica con numero quantico  $\ell + 1$ :

$$P(i) = P(\ell + 1) = P(Y_{\ell+1}^m) = (-1)^{\ell+1}$$

e nello stato finale:

$$P(f) = P(\ell) \times P(\gamma) = P(Y_\ell^m) \times P(\gamma) = (-1)^{\ell+1}$$

ovvero stiamo facendo le cose bene, abbiamo attribuito una giusta parità al fotone. **Le interazioni elettromagnetiche conservano la parità.**

### Esempio: parità $\pi^0$

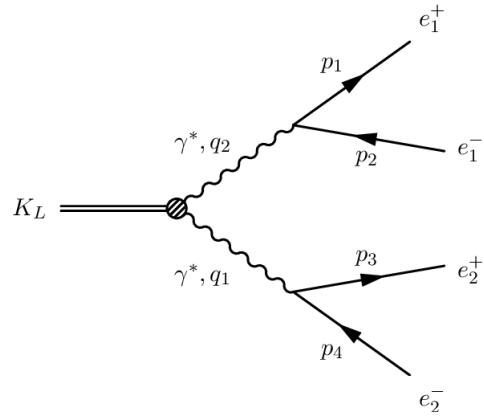
Questa particella decade così:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

La parità del  $\pi^0$  sarà  $P(\pi^0) = P(\gamma)^2 \times (-1)^\ell$ , dove il secondo fattore dipende dal momento angolare relativo dei due fotoni al momento dell'emissione. È molto più pratico però studiare un decadimento raro del  $\pi^0$  chiamato **doppio Dalitz**

$$\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow (e^+ e^-)(e^+ e^-)$$

Esaminiamo i singoli casi. Nel 98% dei casi il  $\pi^0$  decade in due fotoni e li ci resta ( $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ), nel 2% dei casi decade con un processo **Dalitz**, ovvero crea un fotone virtuale che da origine ad una coppia elettrone-positrone [ $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma \rightarrow (e^+ e^-)\gamma$ ]. Invece, 0( $10^{-4}$ ) volte su 100 decade, appunto, **doppio Dalitz**:

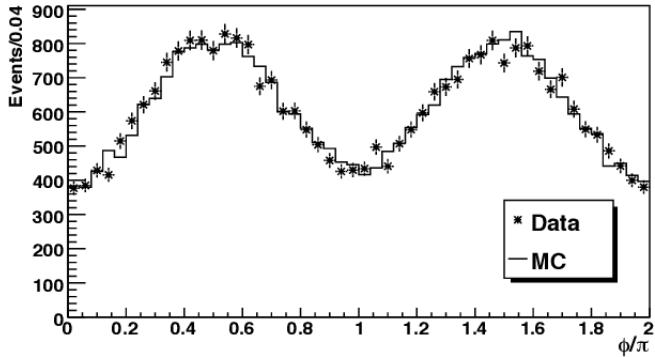


È interessante per una assegnazione non ambigua della parità al  $\pi^0$ . Analizziamo il processo nel sistema a riposo del  $\pi^0$ : questo emette due fotoni in direzione opposte. Posso andare a proiettare su un piano l'angolo relativo alle due polarizzazioni dei due fotoni. Se io faccio una misura di questo angolo ricavo una informazione sulla parità del  $\pi^0$ . La distribuzione avrà due andamenti:

$$\frac{dN}{d\phi} \propto \cos \theta \Rightarrow \text{pari}$$

$$\frac{dN}{d\phi} \propto \sin \theta \Rightarrow \text{dispari}$$

Dai dati sperimentali si ha che una funzione **seno** interpola perfettamente i dati sperimentali.



La parità del  $\pi^0$  è quindi pari a -1.

## 8.2 Violazione di parità nelle interazioni fondamentali

Un modo è selezionare delle transizioni la cui **parità** calcolata nello stato iniziale è **diversa** da quella calcolata nello stato iniziale. Un altro modo è quello di **osservare** se compaiono nelle **ampiezze** termini che **sommano** vettori con pseudo-vettori o scalari con pseudo-scalari:

$$\text{infatti } |V + AV|^2 \neq |-V + AV|^2$$

Partendo dal presupposto che **anche con le interazioni forti non si sono osservate violazioni di parità**. Le interazioni deboli però mostrano delle notevoli violazioni della parità. Le prime osservazioni risalgono agli anni cinquanta, nel **paradosso  $\tau \theta$** . Questi due nomignoli erano attribuiti a particelle con stessa carica +1, stesso spin nullo, stessa massa ma sfortunatamente queste due particelle **differivano per il modo di decadere**. In particolare,  $\theta$  finiva in uno stato con parità positiva,  $\theta$  invece con parità negativa. Per non creare confusione, a quei tempi il leptone  $\tau$  non era stato scoperto e con il senno di poi sappiamo che quella particella è un  $K^+$ : unadrone, ovvero decade in una frazione consistente di stati a tre pioni o a due pioni. Dal momento che il kaone carico ha spin nullo, anche i pioni hanno spin nullo e la transizione in due o in tre pioni ha sempre momento angolare  $L = 0$ . Di conseguenza la parità della prima transizione:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \Rightarrow P = p_\pi^2 \times (-1)^0 = +1$$

mentre quella della seconda (che è più complicato perché 3 pioni potrebbero mettersi in onda non  $s$ , ma diamo per buono che questo avvenga perché in realtà è così):

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0 \Rightarrow P = p_\pi^3 \times (-1)^0 = -1$$

dove ci ricordiamo dall'esempio sopra che  $P(\pi) = -1$ .

Ci vuole un po' di tempo prima che Richard Feynman arrivi a supporre che la questione **non riguarda il fatto che esistono due particelle** che si assomigliano perfettamente in tutto tranne che nei modi di decadimento, ma bensì

che le interazioni deboli **violano la parità**. Young e Mills propongono una decina di diversi possibili modi per verificare l'affermazione e madame Wu realizza uno di questi portando la prova sperimentale dell'affermazione.

### 8.2.1 L'esperimento di Wu

Si tratta della transizione  $^{60}\text{Co} \rightarrow \text{Ni}^{**} e^- \bar{\nu}_e$ . Il cobalto-60 ha uno spin intrinseco pari a 5 e decade in uno stato finale con spin 4 e quindi libera una unità di spin. portata via da elettrone e antineutrino. Questi ultimi due verranno emessi, nel sistema a riposo del cobalto, ad un certo angolo rispetto alla direzione dell'unità di spin allineata con il cobalto-60. La distribuzione di questi angoli rispetto alla direzione di polarizzazione del cobalto è dettata dalle matrici di rotazione che ci danno la probabilità di trovare la componente dello spin lungo un asse di quantizzazione a seguito di un cambiamento di quest'ultimo.

È un po' come, per fare un parallelo con la fisica nucleare, quando nel decadimento  $\alpha$  studiamo il processo come se la particella  $\alpha$  sia già preformata all'interno del nucleo. Qui diciamo che il cobalto è già nichel $^{**}$ , elettrone e antineutrino e questi ultimi due hanno in totale spin 1. Si può quindi considerare il decadimento come un urto e pensare che a seguito di una interazione, come visto più sopra, la differenza tra inizio e fine è semplicemente una rotazione dell'asse di quantizzazione. Per questo entrano in campo le matrici di rotazione.

Noi possiamo distinguere il caso di corrente Right (elettrone elicita positiva mentre antineutrino elicita negativa) da quello di corrente Left. Perciò, la probabilità totale risulta:

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \frac{1}{4}(g_L^2 + g_R^2)(1 + \cos\theta^2) + \frac{1}{2}(g_L^2 - g_R^2)\cos\theta$$

Ma questa probabilità vale nel caso di sistema levogiro. Nel caso di sistema destrogiro  $\theta' = \pi + \theta$  e quindi  $\cos\theta' = -\cos\theta$  e quindi il secondo termine in coseno cambia segno:

$$\frac{dN}{d\cos\theta'} = \frac{1}{4}(g_L^2 + g_R^2)(1 + \cos\theta'^2) - \frac{1}{2}(g_L^2 - g_R^2)\cos\theta'$$

Da un'operazione di conteggio della distribuzione dell'angolo relativo tra queste due direzioni posso stabilire se sto descrivendo il sistema da un punto di vista levogiro o destrogiro a patto che questo termine non sia nullo. Posso identificare un'osservabile che non è invariante per operazione di parità. Questa è ad esempio la **simmetria up-down**:

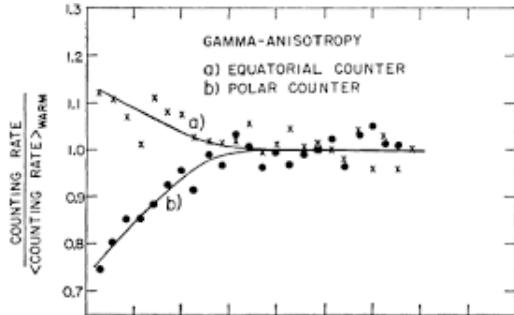
$$A_{ud} = \frac{N(0) - N(\pi)}{N(0) + N(\pi)} = -A'_{ud}$$

ovvero il numero di conteggi che ho di elettroni emessi nella medesima direzione della polarizzazione del cobalto e il numero di elettroni che conto viceversa emessi nella direzione opposta. Da qui, se la parità è conservata, la simmetria

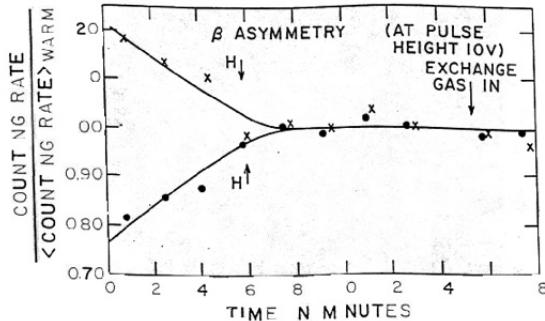
$A_{ud}$  deve necessariamente **essere nulla**: il sistema destrogiro e il sistema levogiro concordano sul suo valore. Se  $A_{ud} \neq 0$  allora la parità è violata e lo è massimamente se  $A_{ud} = \pm 1$ .

Il primo problema da affrontare per svolgere questo esperimento è quello di polarizzare il cobalto: con delle bobine faccio in modo di poterlo polarizzare o verso il basso o verso l'alto. Per contrastare gli effetti termici inserisco tutto dentro ad un criostato. La misura della simmetria viene effettuata utilizzando due contatori. Il primo, **contatore equatoriale**, è posto a circa  $\pi/2$  rispetto all'asse di polarizzazione del cobalto. Il secondo, **contatore polare** viene messo a circa  $\theta \approx 0.24$  rad per via di problemi strutturali. Entrambi vengono impiegati per misurare il **grado di polarizzazione**, il secondo misura anche l'asimmetria.

Sebbene sia isolato molto bene il sistema comunque la finestra temporale di misura dev'essere contenuta perché in circa 8 minuti il sistema è completamente randomizzato. Vediamo i risultati.

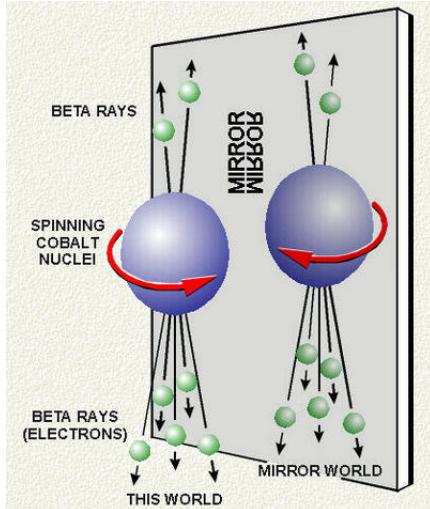


Affrontiamo in primis la questione della **polarizzazione**. Vista l'influenza della temperatura, ci aspettiamo che non tutti i nuclei di cobalto che decadono siano esattamente polarizzati nella direzione del campo magnetico. Per misurare qual è la frazione di nuclei opportunamente polarizzati si confrontano i conteggi nel contatore polare e in quello equatoriale per la diseccitazione del nichel con l'emissione di due fotoni. Il fotone, che si propaga nella direzione equatoriale avrà la sua polarizzazione orientata nella stessa direzione del nichel. Quello che si propaga in direzione polare invece ha il suo momento angolare quasi ortogonale alla direzione originale di polarizzazione del nichel (ovvero lungo il campo, come il cobalto). Quando il sistema è altamente polarizzato ci aspettiamo quindi che fotoni emessi lungo la direzione equatoriale siano **altamente più probabili** di quelli emessi lungo la direzione polare. **Il confronto tra i due numeri ci misura il grado polarizzazione** del nichel eccitato e di conseguenza quello del cobalto originario. Nel grafico appena mostrato si nota proprio come il numero di conteggi nel contatore equatoriale (sopra) è più alto di quello polare (sotto) fin tanto che la criogenia fa il suo lavoro: poi, è completamente *random*. Questa anisotropia nella polarizzazione dei fotoni è altresì detta **gamma anisotropy**.



Parliamo ora di **asimmetria**. In questo secondo istogramma confrontiamo i conteggi nel solo contatore polare nel caso si metta il campo magnetico verso l'alto o verso il basso. La struttura di questo grafico è analoga a quello sopra. Vi è una notevole asimmetria di conteggio (asimmetria *up-down*) che cala nel tempo a seguito della temperatura: il contatore polare becca più elettroni quando quando il campo è polarizzato in direzione opposta e viceversa. Con la differenza tra i conteggi e la misura del grado di polarizzazione estratta dal primo istogramma si può determinare il valore dell'asimmetria. Dal punto di vista dei conti veri e propri, nel sistema levogiro vedo elettroni in direzione opposta al campo magnetico. L'analisi quantitativa dei risultati afferma che entro gli errori sperimentali  $A_{ud}$  è compatibile con 1, e quindi  $g_R \approx 0$  e  $g_L \approx 1$  (il coseno ha segno positivo) e la parità è quindi **massimamente violata**. Misura più accurate e recenti per mezzo di fasci di neutrini confermano che la violazione di parità è massima, cioè  $g_L = 1$  e  $g_R = 0$  e che le **correnti deboli cariche sono puramente Left**, cioè consistono di leptoni con elicità negativa e anti-leptoni con elicità positiva.

Come interpretiamo questa asimmetria dal punto di vista sperimentale? Interpretiamo lo stesso esperimento mantenendo **fissa** la direzione del campo magnetico come **up** e vedendo l'esperimento dal punto di vista di un sistema levogiro e poi destrogiro. Nelle condizioni di sistema levogiro, quello che si osserva è un campo magnetico polarizzato in direzione positiva dell'asse z e gli elettroni vengono emessi verso il basso: **non sono concordi con la direzione del campo**. Facendo una trasformazione di parità mi trovo sempre con il campo in direzione dell'asse z nel nuovo sistema (è uno pseudovettore! È costante nel cambio di sistema) ma la direzione di emissione degli elettroni è la stessa: **sono concordi con la direzione del campo**. Se la parità non fosse violata cosa si osserverebbe?



**Cosa si può dire sulle correnti deboli neutre?** Nel caso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  la sezione d’urto poteva essere espressa con una forma analitica molto simile a quella appena ricavata:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = (g_L^2 + g_R^2)^2 (1 + \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (g_L^2 - g_R^2)^2 \cos \theta$$

e il termine in coseno di theta che manifesta la violazione della parità è anche esso modulato dalla differenza tra i coefficienti left e right. Quindi di nuovo, una misura di simmetria come la  $A_{FB}$  può dirci il grado di violazione del processo che stiamo misurando. Se  $g_L = g_R$  allora il termine in coseno è nullo e la parità non sarà violata. Se  $g_L = 0 \vee g_R = 0$  allora sarà massimamente violata. A energie non altissime l’elettrone che si annichila con il positrone, invece di scambiare un fotone scambia una  $Z_0$  che poi diventa  $\mu^+\mu^-$ . Questo diagramma interferisce con lo scambio del fotone ed quello che contribuisce alla simmetria che viene manifestata dal termine in coseno nella formula. La distribuzione, in termini del  $\cos \theta_m u$  (chiaramente dello stato finale), per dei *run* sulla  $Z_0$  ad energie corrispondenti al suo picco e spostati di  $\pm 2$  GeV rispetto ad esso. Si nota che tutte e tre le curve sono asimmetriche ma il grado di asimmetria **dipende dall’energia nel centro di massa**. Questo perché i contributi del fotone e della  $Z_0$  all’ampiezza totale sono diversi nei due casi. **Non ho affatto capito cosa ho appena scritto.**

### 8.2.2 Modello standard

Studiando il modello standard, nelle correnti neutre i coefficienti  $g_R$  e  $g_L$  **non sono 0 e 1 come nelle correnti cariche** ma hanno una dipendenza elaborata dall’angolo di Weinberg:

$$g_R = -2Q \sin \theta_W^2$$

$$g_L = -2T_3 + g_R$$

In questa tabella raccogliamo i valori di questi due coefficienti per le diverse categorie di particelle (leptoni carichi, neutri, quark di tipo down e up):

|                         | <b><math>\ell</math></b> | <b><math>v</math></b> | <b><math>d</math></b> | <b><math>u</math></b> |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| <b><math>T_3</math></b> | <b>-1</b>                | <b>1</b>              | <b>-1</b>             | <b>1</b>              |
| <b>Q</b>                | <b>-1</b>                | <b>0</b>              | <b>-1/3</b>           | <b>+2/3</b>           |
| <b><math>g_L</math></b> | <b>0.446</b>             | <b>1</b>              | <b>0.149</b>          | <b>-0.297</b>         |
| <b><math>g_R</math></b> | <b>-0.554</b>            | <b>0</b>              | <b>-0.851</b>         | <b>0.703</b>          |

Siccome i neutrini sono privi di carica elettrica interagiscono solo con correnti Left anche nelle interazioni deboli in corrente neutra. Nel modello standard, i neutrini di tipo Right o non esistono o non interagiscono con nessun bosone di gauge (abbiamo visto appunto che  $g_R = 0$ ). I leptoni carichi hanno valori sufficientemente simili da poter dire che le asimmetrie avanti indietro sono piuttosto piccole. Nei casi dei due tipi di quark sono invece più marcate.

### 8.3 Simmetria di coniugazione di carica

Questa è un'altra simmetria discreta che nasce dall'arbitrarietà di scelta, ovvero l'aver definito come negativa la carica dell'elettrone è un fatto **quasi accidentale** avvenuto agli albori dell'elettrostatica. Anche il definire cos'è una particella: possiamo immaginare un mondo di antimateria tranquillamente. L'operazione di inversione tra particella e anti-particella comporta invertire un gran numero di **numeri quantici** (cariche (elettrica, forte, debole, numero barionico, sapore leptonico, sapore adronico, la terza componente dell'isospin forte e la terza componente dell'isospin debole)). La **coniugazione di carica** è in sostanza quell'operazione che ci fa passare dal nostro mondo a quello delle anti-particelle:

$$C |f\rangle = c |\bar{f}\rangle$$

e in primo luogo occorre notare che **non tutti gli stati possono essere autostati di coniugazione di carica**. In particolare, una particella è autostato se e solo se essa coincide con la propria anti-particella, ovvero se non porta nessuno dei numeri quantici e di particelle così ce ne sono:  $Z_0, \gamma, \pi^0, \eta, \rho^0, \dots$ . Ad esempio, l'**elettrone, come qualsiasi particella carica non è autostato di coniugazione di carica** perché ad esso corrisponde il positrone, ovvero l'anti-particella con tutte le cariche invertire dall'operatore C e non si ha più la stessa particella.

Basta vedere nell'ultima equazione scritta come un fermione non sia autostato della coniugazione di carica perché a seguito dell'applicazione dell'operatore viene mappato in una particella diversa.

In particolare, prendendo ad esempio il fotone si dovrà avere che applicando la coniugazione di carica si dovrà riottenere il fotone

$$C|\gamma\rangle = c|\gamma\rangle$$

Se la applico due volte mi deve riportare ad avere la stessa particella (materia → antimateria → materia) e quindi

$$C^2|\gamma\rangle = c^2|\gamma\rangle \Rightarrow c = \pm 1$$

### Esempio: Coniugazione di carica del fotone

Siccome macroscopicamente la coniugazione di carica di un elettrone mi porta ad un positrone, mi aspetto che tutte le linee del campo magnetico ed elettrico siano *flippate*. Perciò, usando il principio di corrispondenza, asserisco che il fotone ha autovalore di coniugazione di carica **pari a -1**.

### Esempio: Un mesone pseudo-scalare e uno vettore

Sottolineiamo che anche la coniugazione di carica sarà un numero quantico moltiplicativo e guardiamo alcuni *branching ratio* del  $\pi^0$

$$B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 98\% \Rightarrow c(\pi^0) = c^2(\gamma) = +1$$

$$B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma) < 10^{-8} \quad \text{vietato da C}$$

Vediamo ora la  $\rho^0$  che è un mesone vettore a spin 1 e per trasformazioni di parità cambia segno (perciò è  $1^-$ ).

$$B(\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma) = (4.7 \pm 0.6 \cdot 10^{-4}) \Rightarrow c(\rho^0) = c(\gamma) \times c(\pi^0) = -1$$

e questo ci spiega il fatto che la  $\rho^0$  può tranquillamente decadere in:

$$B(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = 100\%$$

ma non riesce a decadere in:

$$B(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$$

per coniugazione di carica.

#### 8.3.1 Stati legati fermione anti-fermione

Tutti gli adroni sono o stati legati di tre quark e sono dei barioni o stati legati di due quark e sono dei mesoni. La maggior parte di questi ultimi è stato legato di quark di un tipo e anti-quark di un altro tipo. Esempio  $|c\bar{s}\rangle$  (un tipo *up* e uno *down*) ma anche  $|c\rangle \bar{c}$ . Se adesso applico la coniugazione di carica succede che:

$$|f\bar{f}\rangle \rightarrow c|\bar{f}f\rangle$$

Dobbiamo capire quanto vale  $c$ . L'operazione di coniugazione di carica. se guardiamo, corrisponde ad un banale scambio di due particelle e in meccanica quantistica si deve stare attenti alle simmetrie soggiacenti nel fare ciò. Lo scambio delle due particelle, per quanto riguarda la funzione d'onda spaziale corrisponde ad una operazione di parità e questa ci porta un fattore.  $(-1)^{\ell+1}$ . Siccome sono fermioni li devo organizzare o in stato di singoletto o di tripletto. Quello di tripletto è simmetrico per scambio e il fattore è +1, l'altro -1. Riassumo questo fatto dicendo per quanto riguarda lo spin il fattore è  $(-1)^{s+1}$ . Complessivamente:

$$(-1)^{s+1}(-1)^{\ell+1} = (-1)^{s+\ell}$$

La notazione è  $J^{PC}$  dove vengono riassunti tutti i valori.

| L        |              | 0     | 0     | 1     | 1        | 1        | 1        |
|----------|--------------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| S        |              | 0     | 1     | 0     | 1        | 1        | 1        |
| J        |              | 0     | 1     | 1     | 0        | 1        | 2        |
| P        | $(-1)^{L+S}$ | -1    | -1    | 1     | 1        | 1        | 1        |
| C        | $(-1)^{L+S}$ | 1     | -1    | -1    | 1        | 1        | 1        |
| $J^{PC}$ |              | $0^+$ | $1^-$ | $1^+$ | $0^{++}$ | $1^{++}$ | $2^{++}$ |

### Esempio: Positronio

Sostituisco al protone un positrone ed è uno stato legato dall'interazione elettromagnetica: sistema in cui elettrone e positrone ruotano attorno al centro di massa. Il sistema **non è stabile** perché se le funzioni d'onda di positrone ed elettrone si sovrappongono questi due si annichilano ed emettono qualche fotone. Quanti? Dipende! Uno stato finale di due fotoni può essere prodotto soltanto con coniugazione di carica positiva e questo è possibile solo per lo stato fondamentale del positronio: il para-positronio

$${}^1S_0(0^{+-}) \rightarrow \gamma\gamma \quad c(\gamma\gamma) = +1$$

Lo stato eccitato è l'orto-positronio

$${}^3S_1(1^{--}) \rightarrow \gamma\gamma\gamma \quad c(\gamma\gamma\gamma) = -1$$

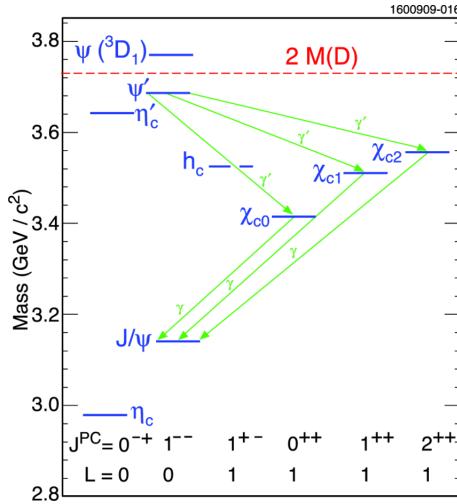
e questo decade in 3 fotoni, che non è proprio la stessa cosa del precedente. Vediamo le ampiezze, il primo diagramma di Feynman ha due vertici di interazione e l'ampiezza va come  $\alpha^{1/2}$ , il terzo invece ha tre vertici di interazione e l'ampiezza va come  $\alpha^{3/2}$ . Prendendo le probabilità avrà  $\alpha^2$  e  $\alpha^3$ : vi è un fattore  $\alpha$  di differenza. Il primo avrà una vita media più breve.

$$\frac{\tau({}^1S_0)}{\tau({}^3S_1)} \propto \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1} \approx o \frac{\alpha}{\pi}$$

Dal PDG:  $\tau(^1S_0) = 125\text{ ps}$  e  $\tau(^3S_1) = 142\text{ ns}$  e il rapporto ( $\sim 1/500$ ) non è troppo fuori dalla nostra stima approssimata.

### Esempio: Charmonio

Producendo questi stati  $|c\bar{c}\rangle$  instabili. Ci sono degli stati particolari, quelli di **mesone vettore**  $^3S_1$  nella notazione spettroscopica o  $1^{--}$  nella notazione nuova che hanno gli stessi numeri quantici del fotone  $J^{PC}(\gamma) = 1^{--}$ . Questo vuol dire che questi stati legati possono essere costruiti dall'annichilazione  $e^+e^-$ .



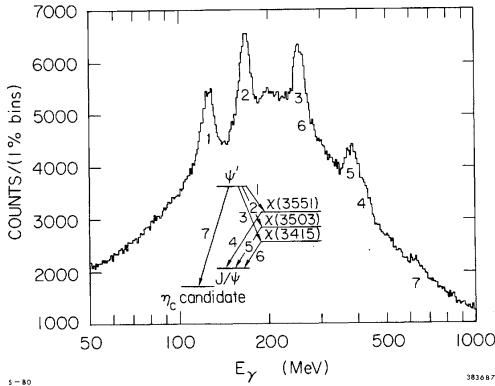
Vi è però un vincolo! Ovvvero **non tutti gli stati possono essere prodotti** perché ad ogni vertice devo rispettare momento angolare, parità e coniugazione di carica. Gli unici che posso produrre in condizioni  $e^+e^-$  sono gli  $1^{--}$  (perché l'annichilazione emette un fotone che a sua volta emette  $|c\bar{c}\rangle$ ). Gli stati quindi, in colonna, sono solo due (tre ma lasciamolo perdere). Come faccio a ottenere gli altri? **Per decadimento**. Creo, in questo caso, la  $\psi'$  del grafico sopra e questa decade in tutti gli altri stati. Nella *crystal ball*, popolata di rivelatori di fotoni, si andavano a rivelare solo i fotoni emessi in queste transizioni. Esempio:

$$\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma$$

(questo fotone ha un'energia ben definita dalla differenza di massa) e questa farà poi il decadimento:

$$\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma$$

di nuovo con un fotone ben definito. Il risultato è un bel fondo combinatorio con belle risonanze, ognuna delle quali è una diversa transizione:



### 8.3.2 Coniugazione di carica nelle interazioni deboli

Ci aspettiamo che il mondo sia invarianto per coniugazione di carica: un universo di antimateria obbedisca alle stesse regole dell'universo di materia. **La coniugazione di carica è una simmetria delle interazioni deboli?** Sappiamo che le interazioni deboli non sono invarianti per parità, ovvero un neutrino con elicita positiva o negativa hanno proprietà totalmente diverse. Il neutrino Right non interagisce né con la W, né con la Z, ma la coniugazione di carica **cambia solo la sua natura** e non il suo spin! Rinomina neutrini in antineutrini. Nel nostro caso trasforma un neutrino Left in un antineutrino Left e un antineutrino Right in un neutrino Right. Ma un antineutrino Left è un neutrino Right. Quindi la coniugazione di carica trasforma ad esempio un antineutrino Right, che è un neutrino Left (ovvero una **particella attiva** e che può interagire) in un neutrino Right che è invece una **particella inerte** che non si accoppia con W e Z. Ovvero in questo caso particella e antiparticella hanno proprietà diverse e violano la coniugazione di carica (massimamente). Ma se io faccio sia parità che coniugazione di carica? Per le interazioni forti ed elettromagnetiche nulla, per quelle deboli invece:

- L'esperimento di Wu mostra che le particelle vanno in direzione opposta a  $\vec{B}$  mentre le antiparticelle nella stessa direzione;
- Applicando una **trasformazione di parità**, ovvero vedendo dal punto di vista destrogiro vedo le particelle che vanno nella stessa direzione di  $\vec{B}$  e le antiparticelle in quella opposta;
- Se faccio la **coniugazione di carica** è l'antiparticella che va in direzione del campo magnetico, mentre la particella in quella opposta:

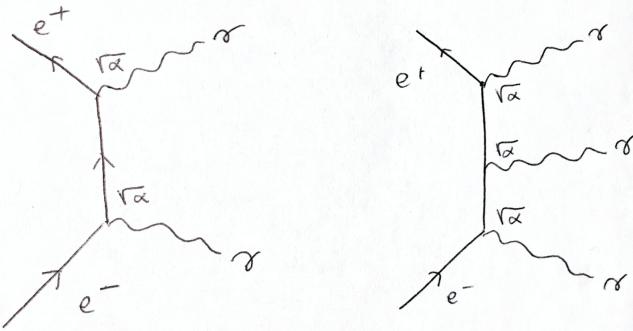
Ovvero se combino le operazioni, ovvero mondo di antimateria con terne destrogiro arriverei alla stessa conclusioni. Potrei aspettarmi che anche se C e P sono violate singolarmente, il prodotto CP non sia violato.

### 8.3.3 Interlude: inversione del tempo

In meccanica e in elettromagnetismo le equazioni del moto dipendono dalla derivata seconda del tempo e quindi la freccia del tempo non si manifesta. Già in termodinamica con l'entropia fisso una freccia del tempo (irreversibilità). La freccia del tempo, se svolgo una partita di biliardo con due palline allora non so, avendo tre istanti metterli in ordine. Se invece la gioco con tante palline è già più semplice. Con le sezioni d'urto, nel termine dello spazio delle fasi ho dentro i concetti di tempo, sono processi irreversibili perché ho tanti possibili stati finali. Le teorie devono essere simmetriche rispetto allo scambio  $t \rightarrow -t$ ? Ci aiuta il **teorema CPT**: ogni QFT che soddisfi l'invarianza di Lorentz e il principio di località è invariante per trasformazioni CPT (EM,W,S). La verifica di questo teorema per via sperimentale è data dalla differenza di massa di particella e antiparticella  $|m_{K_0} - m_{\bar{K}_0}| < 4 \cdot 10^{-19}$  GeV. Però il fatto che valga questo teorema ci dice che se CP è conservata allora anche T è conservata. Mentre però la logica in primis non presuppone che se T è conservata allora lo deve essere anche CP.

## 8.4 Esercizi

1. Siete in corrispondenza con un esapode di un'altra galassia dotato di due cuori disposti simmetricamente. Potete determinare se ha adottato un sistema levogiro o destrogiro discutendo l'esperimento di Wu? **Si.** È proprio il risultato finale dell'esperimento. Se gli elettroni vanno nella stessa direzione di dove l'esapode ha  $\vec{B}$  allora questo sta usando un sistema destrogiro. Posso farlo anche discutendo i risultati dell'annichilazione  $e^+e^-$ : andando ad effettuare una misura della asimmetria  $A_{FB}$ .
2. Il motivo per cui il para-positronio decade in due fotoni è perché il processo deve avere coniugazione di carica positiva  $c(\gamma)^2 = +1$  e invece l'orto-positronio decade in tre  $\gamma$  perché la coniugazione di carica di questo stato è  $-1$  proprio come  $c(\gamma\gamma\gamma) = -1$ . I diagrammi di Feynman sono:



3. È possibile produrre, tramite l'annichilazione  $e^+e^-$ , stati legati  $|c\bar{c}\rangle$  perché a seguito dell'annichilazione viene prodotto un fotone che ha  $c(\gamma) = -1$  e

$P(\gamma) = +1$ , quindi per forza può essere prodotto solo  $1^{--}$ .

- La parità del  $\pi^0$ , la si determinava andando a guardare la distribuzione dei fotoni emessi nel raro decadimento doppio Dalitz. L'orto-positronio è tipo  $J^{PC} = 1^{+-}$  perciò è pari e allora la distribuzione angolare che mi aspetto è di tipo  $\cos \theta$  dove  $\theta$  è l'angolo tra le direzioni dei due fotoni:

$$\frac{dN}{d\theta} \propto \cos \theta$$

## 9 Adroni

Una **adrone** è una **particella composta sensibile alle interazioni forti**. Per orientarsi nel guazzabuglio degli adroni andranno fissati dei criteri di ordinamento.

Prima domanda: come facciamo ad **essere sicuri che gli adroni sono particelle composte**? Ad esempio, misurando il momento magnetico intrinseco

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

che per un fermione puntiforme vale  $g = 2 + o(\alpha/\pi)$  dalla teoria di Dirac più la correzione dalla QED. Le misure di protone e neutrone danno dei valori discostanti:  $g(p) = 2.79$  e  $g(n) = 1.9$ . Un'altra possibile evidenza è la diffusione elastica di fasci di elettroni da bersagli di idrogeno (distribuzioni relative ai protoni) o deuterio (relative ai neutroni dopo aver sottratto quelle fatte con l'idrogeno):  $e^- N \rightarrow e^- N$ . Analizziamo questa diffusione, guardando solo urti elastici:

$$q^2 = (P'_e - P_e)^2 = -2EE' \sin \theta/2^2 = -m_N(E - E')$$

In altre parole l'esperimento che vuole studiare questa diffusione non ha bisogno per ricostruire il nucleone nello stato finale perché tutta la cinematica è sufficientemente descritta dalla misura delle proprietà dell'elettrone diffuso. L'espressione per la sezione d'urto nel caso di bersaglio puntiforme era:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin \theta/2^4} \frac{E'}{E} [\cos \theta/2^2 - \frac{q^2}{2m_N^2} \sin \theta/2^2]$$

mentre se invece il bersaglio + un fermione dalla scrittura composta la struttura si complica:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin \theta/2^4} \frac{E'}{E} \left[ \frac{\textcolor{red}{G_E^2}(q^2) + \tau \textcolor{red}{G_M^2}(q^2)}{1 + \tau} \cos \theta/2^2 - \frac{q^2}{2m_N^2} \textcolor{red}{G_M^2}(q^2) \sin \theta/2^2 \right]$$

che sono, in un opportuno sistema di riferimento, della trasformata di Fourier della distribuzione di carica e di momento magnetico della particella incriminata. Sono detti **fattori di forma elettrico e magnetico**:

$$G_E(q^2) = \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(r) d^3 r$$

e se il protone fosse una particella puntiforme,  $\rho(r)$  dovrebbe essere una  $\delta$  di Dirac e  $G_E$  quindi sarebbe un puro coefficiente. Interpolando i dati sperimentali però questi hanno un ben chiaro andamento, diverso da una costante, il che fa pensare che  $\rho(r)$  è in realtà una distribuzione diffusa. Da questa formula si può anche definire il **raggio quadrato del protone**:

$$\sqrt{r^2(p)} = 6 \times \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{dG_E(q^2)}{dq^2} = 0.8751(61) \text{ fm}$$

Allora, i nucleoni non sono delle particelle elementari ma **sono strutture complesse**.

Seconda domanda: **quali criteri, aka numeri quantici** usare per classificarli con maggior precisione? In primo momento questi si dividono in mesoni e barioni, poi all'interno guardiamo la  $J^{PC}$  ma si può spingere ulteriormente la precisione: **i sapori adronici**.

## 9.1 Il numero quantico barionico

Soffermiamoci prima sul numero barionico. Questo viene introdotto per spiegare una stranezza, alla base del fatto che noi siamo vivi e l'Universo è composto da materia dotata di una struttura: il protone, pur avendo una cospicua massa, è un adrone **stabile** ma perché lo è? Perché non decade ad esempio in  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ ? Se lo sono chiesti a Superkamiokande: la famosa *tank* per lo studio sui neutrini, inizialmente, è stata progettata per andare a studiare la stabilità del protone. Il volume interno, detto volume **fiduciale** contiene 20 kton d'acqua, che corrispondono a  $6.5 \cdot 10^{33}$  protoni. Qui si è andati a cercare alcuni decadimenti del protone, analizziamo ad esempio  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ . Positrone e  $\pi^0$  si dividono equamente l'energia  $\frac{m_p - m_{\pi^0}}{2}$ . Dopo il positrone, interagendo con l'acqua genera un cono Cerenkov, la cui apertura è legata alla velocità iniziale del positrone. Il  $\pi^0$  invece decade istantaneamente in due fotoni, che interagendo con l'acqua fanno altri due sciami elettromagnetici, la cui componente carica genera a sua volta altri coni Cerenkov. Allora, tre coni Cerenkov devono venir osservati simultaneamente in tre zone diverse del rivelatore e tali da conservare energia e quantità di moto della transizione. Il risultato è che **non si osserva** alcuna transizione al di sopra dei fondi, i vecchi amici neutrini atmosferici. In maniera *model-independent*,  $\tau p > 10^{29}$  anni: miglior limite mai osservato. Ma nel caso dell'elettrone, la sua stabilità era la prova della conservazione della carica elettrica, oppure la conservazione della carica elettrica protegge l'elettrone dal decadimento. Per il protone si può dire che non c'è nessun numero quantico noto che venga violato da quei processi: evidentemente deve esistere un nuovo numero quantico: il **numero barionico** che protegge il protone e deve essere osservato da tutte le interazioni.

**Come lo utilizziamo?** Lo definiamo in modo tale che tutti gli adroni con spin semi-intero abbiamo numero barionico  $B = +1$ , gli anti-barioni  $B = -1$  e leptoni o adroni con spin intero (mesoni) con  $B = 0$ . Si osserva anche che poi che il numero barionico è un numero quantico additivo:  $B(p\bar{p})$ ,  $B(d) = B(np) = +2$ .

**Come lo si interpreta?** Il numero barionico è conservato da tutte le interazioni, quindi essendo il protone il barione più leggero è stabile. Per contrasto, il  $\pi^0$  essendo il mesone più leggero non è protetto e infatti decadi in non-adroni  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  o  $\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$ . Nelle **collisioni i mesoni** possono essere **prodotti singolarmente** mentre i **barioni solo in coppia** particella anti-particella. Esempi:

Vi è una **peculiarità**, per il teorema di Noether sappiamo che ad ogni invarianza corrisponde un numero quantico associato conservato. Ad esempio, all'invarianza di traslazioni nello spazio tempo si ha la conservazione del quadrimomento, all'inversione degli assi la parità e non sappiamo però legare una simmetria alla conservazione del numero barionico. Può essere che sia una **conservazione accidentale** senza una simmetria profonda, oppure le *quantum field theories* future dimostreranno che vi può essere una **leggera violazione** di *B compatibile* con i dati sperimentali, oppure ancora una qualche altra simmetria profonda della natura sta sfuggendo alla nostra vista.

## 9.2 Il numero quantico isotopico

Il concetto di isospin è stato introdotto da Niels Bohr (1932) nello studio delle interazioni nucleari che seguiva dall'analisi delle proprietà dei cosiddetti *mirror nuclei*: ovvero nuclei di quale  $J^P$  ma diversi per uno scambio di neutrone con protone. Questi nuclei hanno masse simili, quindi le interazioni nucleari sono, secondo Bohr, **indipendenti dalla carica elettrica**. La conseguenza di questo postulato stimola l'idea dell'esistenza di una simmetria parziale, **rispettata dalle interazioni nucleari** (forti) ma violata dall'elettromagnetismo, dal momento che  $\alpha \ll \alpha_S$ . A questa sorta di simmetria di scambio viene associato un numero quantico detto **spin isotopico** (isospin) e miracolosamente questo funziona obbedendo allo stesso formalismo sviluppato da Pauli per lo spin. Questo meccanismo è modellato dal gruppo  $SU(2)$ . Sostanzialmente, p e n sono due stati della medesima particella, il nucleone. Quando due nucleoni interagiscono tra loro i meccanismi dell'interazione non distinguono tra neutrone e protone, ma noi sappiamo distinguerli per via della carica elettrica (guardando l'interazione Coulombiana capiamo quale è un protone e quale un neutrone). Ma non sarà solo la carica elettrica a creare questa distinzione. Dal punto di vista formale, un nucleone è ( $p$   $n$ ) un oggetto a due possibili stati, e in questo spazio virtuale dell'isospin, il nucleone costituisce un doppietto, e perciò l'autovalore dell'isospin  $I$  è  $1/2$ :

$$I |N\rangle = \frac{1}{2} |N\rangle$$

Protone e neutrone sono autostati della terza componente dell'isospin a cui corrispondono rispettivamente:

$$I_3 |p\rangle = +\frac{1}{2} |p\rangle$$

$$I_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

Quello che si osserva è che praticamente tutti gli adroni possono individuati come singoletti o multipletti di isospin. Un altro doppietto è fatto dal kaone:

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad m_{K^+} = 493.7 \text{ MeV} \quad m_{K^0} = 497.6 \text{ MeV}$$

dove vi è una leggera differenza di massa (come con protone e neutrone). A questa differenza, si attribuisce la **rottura della simmetria di isospin**. Il kaone è autostato di isospin con autovalore  $1/2$  e di nuovo  $K^+$  avrà  $+1/2$  mentre  $K^0 = -1/2$  per la terza componente dell'isospin. Dopodiché un tripletto di isospin è il pione:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad m_{\pi^+} = m_{\pi^0} = 139.6 \text{ MeV} \quad m_{\pi^-} = 135 \text{ MeV}$$

di nuovo una rottura della simmetria. Il pione è autostato di isospin con autovalore  $+1$ . Il quadrupletto noto invece è quello della  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix} \quad m_\Delta = 1232 \text{ MeV} \quad \Delta m \ll \Gamma_\Delta (= 118 \text{ MeV})$$

Avendo quattro stati di carica l'autostato di isospin è  $3/2$ . Non soltanto possiamo ordinare le particelle con questo numero quantico ma utilizzando la stessa algebra dello spin  $SU(2)$  possiamo fare previsioni sulle relazioni tra processi d'urto, sezioni d'urto ecc purché queste interazioni siano medicate dall'unica interazione che rispetta l'isospin: l'interazione forte. Vogliamo confrontare le sezioni d'urto della produzione di deuterio con le due  $pp \rightarrow d\pi^+$  e  $pn \rightarrow d\pi^0$ :

$$|pp\rangle = |1/2, 1/2\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|d\pi^+\rangle = |0, 0\rangle \otimes |1, 1\rangle = |1, 1\rangle$$

e nell'altro caso

$$|pn\rangle = |1/2, 1/2\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

$$|d\pi^0\rangle = |0, 0\rangle \times |1, 0\rangle = |1, 0\rangle$$

Gli elementi di matrice che si avranno sono:

$$M_a = \langle d\pi^+ | H_{fi} | pp \rangle = \langle 1, 1 | H_{fi} | 1, 1 \rangle = \langle 1, 1 | 1, 1 \rangle H_{fi} = H_{fi}$$

$$M_b = \langle d\pi^0 | H_{fi} | pn \rangle = [\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | 1, 0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | 0, 0 \rangle] H_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{fi}$$

$$\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} = \frac{1}{2}$$

dove l'hamiltoniano è **indipendente dalla carica delle particelle coinvolte nei processi** e deve essere lo stesso per i processi che stiamo osservando. I risultati sono lo stesso hamiltoniano pesato, nel secondo caso, dal coefficiente di Clebsch-Gordan. Il rapporto delle sezioni d'urto è stato sperimentalmente osservato.

### 9.2.1 Regole di selezione

Le regole di selezione dovranno essere che  $I$  e  $I_3$  si devono conservare in tutte le transizioni nucleari, ovvero modellate dalle interazioni forti. Quelle elettromagnetiche e deboli le violano: perché possiamo benissimo distinguere un protone da un neutrone misurando la sua carica. Quando osserviamo un decadimento che contiene solo adroni non dobbiamo essere sicuro di affermare che questo è regolato solo ed esclusivamente dalle interazioni forti. Se viola isospin non può essere una transizione forte. Per la corrente adronica vale questa regola empirica:

$$\Delta Q = \Delta I_3$$

ovvero la variazione di **carica adronica in una transizione deve essere pari alla variazione della terza componente dell'isospin**. Ad esempio, il seguente decadimento:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu$$

è chiaramente un decadimento debole perché **vi è violazione dell'isospin**:  $\Delta I_3 = I_{f,3} - I_{i,3} = -1$ , ma  $\Delta Q = Q_f - Q_i = -1$ . Da questa regola si ricava anche la formula di Gell-Mann e Nishijima, che dice che la carica di un adrone è data dalla somma:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B$$

Nel caso del pion neutro (che è un adrone), si ha che  $Q(\pi^0) = 0$ ,  $I_3(\pi^0) = 0$  e quindi, non essendo un barione  $B(\pi^0)$  (numero barionico 0 perché è un mesone). Un altro esempio: prendiamo il **neutrone**, la carica è nulla, la terza componente dell'isospin è  $-1/2$  e il numero barionico è 1 perciò torna il fatto che la carica di questo adrone è nulla.

Vediamo ora un **caso strano**:

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$$

Questa transizione avviene con sezione d'urto  $\sigma \sim \text{mb}$  e si tratta quindi di un processo forte. Dopodiché, osservando tante transizioni non si vedono dei partner carichi della  $\Lambda$  (**iso-singololetto**: lei sta da sola). Per vedere che è un processo forte deve conservarsi l'isospin (condizione solamente necessaria, ma non sufficiente):  $I_f - I_i = -1 + 1/2 - 1/2 = 0$  e questo avviene. Dopodiché sappiamo che il numero barionico è conservato sempre e usiamo questo fatto per attribuire alla  $\Lambda$  il numero barionico +1 (uguale al protone). I problemi sorgono quando si va a considerare i decadimenti, tipo:

$$\Lambda \rightarrow p\pi^- / n\pi^0$$

( $1/3-1/3$ , ce ne sono altri ma non ci interessa). La vita della  $\Lambda$  è parecchio lunga, ma noi sappiamo che transizioni lente possono essere mediate solo da transizioni deboli: infatti **questo è un decadimento debole**. Il decadimento rispetto il numero barionico (ovvio), ma non rispetta l'isospin:

$$I_{3,i} = 0 \neq I_{3,r} = 1/2 - 1 = -1/2$$

Ma niente panico, l'isospin deve essere rispettato solo dalle interazioni forti e questa è debole. L'inconsistenza nasce perché viola anche la regola di Gell-Mann Nishijima, che funzionava bene per qualsiasi processo visto in precedenza:  $\Delta Q = 0 \neq \Delta I_3$ . Si potrebbe dire: è una regola empirica senza significato profondo, ma in realtà da questa si sviluppa il modello a quark.

### 9.3 Il numero quantico di stranezza

Gell-Mann: continuo a mantenere buona questa regola empirica e definisco un nuovo numero quantico: **la stranezza**. La stranezza viene rispettata dalle elettromagnetiche e dalle interazioni forti ma è violata dalle interazioni deboli. Si da stranezza positiva al kaone e stranezza negativa alla  $\Lambda$ :

$$S(\Lambda) = -S(K) = -1$$

. Le antiparticelle hanno stranezza opposta delle particelle:

$$S(\bar{\Lambda}) = -S(\bar{K}) = 1$$

$$S(\text{particella}) = -S(\text{anti-particella}) = -1$$

Poi anche  $S(N) = S(\Pi) = S(\Delta)$ . Vediamo alcuni esempi di **decadimento**:

$$\Lambda \rightarrow p K^-$$

questo rispetta B,I,S (tutte e tre!) ma non è cinematicamente possibile :  $m(\Lambda) < m(p) + m(K)$ . Poi:

$$\Lambda \rightarrow p\pi^-/n\pi^0$$

e questo è cinematicamente possibile e il numero barionico è conservato. Tuttavia, violando isospin e stranezza può solo che essere un decadimento debole. Tra i decadimenti rari della  $\Lambda$  c'è anche:

$$\Lambda \rightarrow n\gamma$$

osservando il fotone in stato finale si può pensare che sia elettromagnetico. Da un punto di vista puramente sperimentale dobbiamo dire che è debole perché è molto raro. Inoltre, viola anche la stranezza e quindi non può essere che debole.

### 9.3.1 Regole di selezione

Dal momento che la stranezza è rispettata in processi adronici ed elettromagnetici si potrebbero utilizzare per attribuire la corretta stranezza ad ogni particella partendo dal fissare quelle fissate poco sopra. Le antiparticelle hanno stranezza opposta alle particelle. I barioni strani sono detti iperoni. In ultimo, vediamo come la introduzione della stranezza risolve il problema dell'ipercarica che aveva innescato la discussione. Ridefiniamo la regola di Gell-Mann e Nishijima introducendo un altro termine:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}S = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

dove  $Y = S + B$  è l'**ipercarica**. Rivediamo

$$\Lambda \rightarrow \pi^- p$$

Allora,  $\Delta Q = 0$ ,  $\Delta B = 0$ ,  $\Delta S = S_f - S_i = 0 - (-1) = +1$  e  $\Delta I_3 = I_{3,f} - I_{3,i} = -1 + 1/2 - 0 = -1/2$ . Mettendo insieme tutto torna:

$$\Delta Q = 0 = -1/2 + 0 + 1/2 = 0$$

## 9.4 Esercizi

- Calcolo il numero di protoni contenuti in  $20 \cdot 10^3$  ton d'acqua. In una molecola d'acqua ci sono 10 protoni. Una molecola d'acqua pesa 18 grammi mole. Ciò vuol dire che in  $20 \cdot 10^9$  g ci sono

$$\frac{20 \cdot 10^9}{18} = 1111111111 \text{ mol}$$

In una mole ci sono un numero di Avogadro di molecole e se ciascuna molecola ha in se 10 protoni:

$$1111111111 \cdot N_A \cdot 10 = 6.69 \cdot 10^{33} \text{ protoni}$$

- Si, è corretto dire che le interazioni nucleari sono invarianti per lo scambio  $p \rightarrow n$  o  $n \rightarrow p$  perché a livello nucleare ciò che varia è solo l'energia di legame: quindi differiscono solo per interazione coulombiana.
- Ci sono da calcolare un po' di rapporti tra sezioni d'urto, quindi dopo aver stimato gli stati finali e iniziali vado a calcolare gli elementi di matrice. Ne faccio solo uno per esempio. Calcolo:

$$\frac{Br(\Delta^+ \rightarrow n\pi^+)}{Br(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)}$$

Guardo i singoli isospin in notazione  $|I, I_3\rangle$  e calcolo il processo sopra: lo stato iniziale quindi è semplicemente, in notazione  $|I, I_3\rangle$  pari a  $\Delta^+ =$

$| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ . Per quello finale, fatto di due particelle, vanno usati i coefficienti di Clebsch-Gordan. Si ha, in notazione  $|I_1, I_{1,3}\rangle \otimes |I_2, I_{2,3}\rangle$  uno stato finale pari a  $|1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . Quindi, riscrivendo dalla notazione  $|I_1, I_2, I_{1,3}, I_{2,3}\rangle = |1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\rangle$  alla notazione

$$|I_{tot}, I_{3,tot}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$$

da cui l'elemento di matrice

$$\langle n\pi^+ | H_{fi} | \Delta^+ \rangle = \frac{H_{fi}}{3}$$

Ripetendo quanto fatto per il processo sotto, giungo al rapporto:

$$\frac{1}{3} \frac{3}{2} H_{fi} = \frac{H_{fi}}{2}$$

4. Verifico la regola di Gell-Mann Nishijima e calcolo l'ipercarica per tutte le particelle coinvolte.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu$$

Calcolo  $\Delta I_3 = I_{3,f} - I_{3,i} = 0 - 1 = -1$ , l'isospin è violato e quindi si tratta di un decadimento mediato dalle interazioni deboli. Calcolo  $\Delta Q = 0 - (+1) = -1$ , perciò la regola di G-N è verificata  $\Delta(Q - I_3) = 0$ . Poi verifico anche che in questo caso l'ipercarica corrisponda con la carica adronica  $Q = I_3 + \frac{1}{2}B$  dove  $B = 0$  perché è un mesone e quindi  $Q = I_3 = +1$ .

Un altro caso:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

Qui,  $\Delta Q = 1$  (Attenzione, l'elettrone è un leptone e noi parliamo di carica adronica!) e  $\Delta I_3 = I_{3,f} - I_{3,i} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ . Quindi la regola di Gell-Mann e Nishijima è verificata:  $\Delta(Q - I_3) = 0$ . Calcolo inoltre le ipercariche che in questo caso sono cariche adroniche perché le particelle hanno stranezza nulla.  $Q_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = +1$  (numero barionico pari a 1 perché il protone un fermione). Per il neutrone invece  $Q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$ . Tutto torna.