VEM Theory Analysis

The Poincaré-Friedrichs inequality on polygon and its applications

Submitted by:

JGH Seminars

School of Mathematical Science

Shanghai Jiao Tong University in Shanghai

多角形上的Poincaré-Friedrichs不等式及其应用

Contents

1 多角形的Poincaré-Friedrichs不等式 **3**

2 函数逼近的误差估计 **8**

3 在VEM分析中的应用 **10**

1 多角形的Poincaré-Friedrichs不等式

由等价模定理可以推得

- Poincaré不等式:

$$\|v\|_{0,K} \leq C\big(|v|_{1,K} + |\int_K v(x)\mathrm{dx}|\big) \quad \forall \mathrm{v} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K});$$

- Friedrichs不等式:

$$\|v\|_{0,K} \leq C\big(|v|_{1,K} + |\int_{\partial K} v(x)\mathrm{ds(x)}|\big) \quad \forall \mathrm{v} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}).$$

上述两式是$p=2$的结果,进一步,我们可以得到更一般的结果.

$$\begin{cases} \|v\|_{L^p(K)} \leq C\big(|v|_{W^{1,p}(K)} + |\int_K v(x)\mathrm{dx}|\big) & \forall v \in W^{1,p}(K); \\ \|v\|_{L^p(K)} \leq C\big(|v|_{W^{1,p}(K)} + |\int_{\partial K} v(x)\mathrm{ds(x)}|\big) & \forall v \in W^{1,p}(K). \end{cases}$$

其中,$K \subset \mathbb{R}^2$是一个有界且连通的多角形区域和$1 \leq p \leq \infty$.

- 1.由紧性论证技巧可证明:$C = C(K)$,即正常数C 仅取决于K.
- 2.若K为三角形,可由**scaling-argument** 来获得一致估计.

问题: 当K为一般的多角形时,如何处理?即它需要满足什么要求时,可以得到一致估计?

下面,我们假设多角形K满足如下**性质P**:

性质 1 (P) *有以下三点:*
(1)存在K的正规三角剖分$\mathcal{T}_{h_K}(K)$,这里正规(shape-regularity), 意指,存在常数$C_r > 0$使

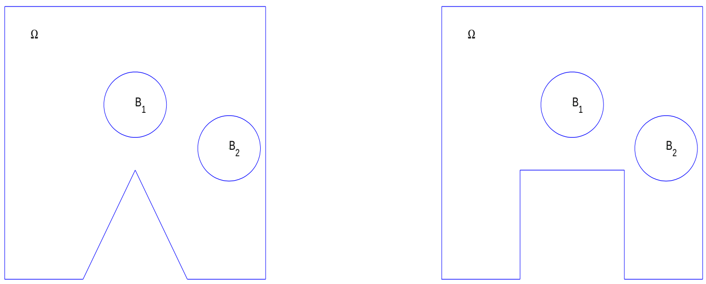
$$h_\tau/\rho_\tau \leq C_r < \infty, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_{h_K}(K),$$

且K的每条边必为$\mathcal{T}_{h_K}(K)$中某一单元τ之边;
(2)$\mathcal{T}_{h_K}(K)$中的单元个数是一致有界的,即$\#\mathcal{T}_{h_K}(K) \leq L$;
(3)在K中包含以半径为r的一个圆,且$h_K \lesssim r$, 其中生成的正常数C有界.

进一步,我们给出星形区域的定义,并给出两个例子来说明.

定义 1 (Star-shaped区域)

我们称区域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$*关于某个圆*$B$*(3 维为球)是星形的, 如果对于*$\forall x \in \Omega$,$\{x\} \cup B$ *的闭凸包还是*Ω*的子集.*



(a) Domain star-shaped with respect to B_1 but not B_2

(b) Domain which is not star-shaped with respect to any circle B

图 1: 星形区域的两个例子

从图1可以看出图1(a) 中的区域Ω是星形区域,而图1(b)中的区域Ω却不是星形区域.

命题 1 *若多角形*K*为星形区域(star-shaped domain)且相应圆的半径*r*满足*$h_K \lesssim r$*, 且*$\mathcal{T}_{h_K}(K)$*中的每一单元*τ*满足*$h_\tau \approx h_K$*,则显然*K*满足**性质1**.*

注 1 *在此,我们想说明一点:一方面,*$h_\tau \lesssim h_K$ *显然成立;另一方面,由*

$$L * \pi(\frac{h_\tau}{2}) \geq |K| \geq \pi r^2 \gtrsim \pi h_K^2$$

可得$h_K \lesssim h_\tau$*.*

正如下面的示意图所示,我们发现当多角形不满足性质1中(3)的条件$h_K \lesssim r$*时,由上述推导可知,我们无法得到*$h_\tau \approx h_K$*,进而无法得到*$|u - u_h|_{1,K}$*的一致估计.这进一步说明了性质1(3)的重要性!*

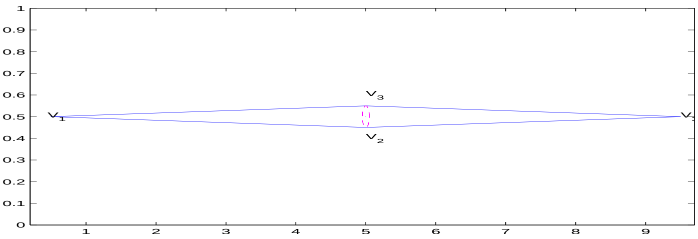


图 2: 不满足性质1中的第3条的多角形示意图

引理 1 *给定一个三角形单元τ,其满足$h_\tau/\rho_\tau \le C_r < \infty$,设$e$为$K$的任一边,则成立*

$$\|v\|_{0,p,K} \lesssim h_\tau^{-1}|v|_{1,p,K} + h_\tau^{2/p-1}|\int_e v\mathrm{ds}| \quad \forall \mathrm{v} \in \mathrm{W^{1,p}(K)}. \tag{1}$$

式中$1 \le p < \infty$.

由**scaling argument**和参考元上的Friedrichs不等式立知结果.

定理 1 (带几何尺度的Friedrichs不等式)

*假设多角形K满足**性质1**,则对任何$v \in W^{1,p}(K)$ 使$\int_{\partial K} v\mathrm{ds} = 0$,成立估计*

$$\|v\|_{L^p(K)} \lesssim h_K|v|_{1,p,K} \tag{2}$$

式中生成常数与h_K无关.

证明. 我们分以下几步给出证明.

step 1.设$h_K = diam(K) = 1$,故由$h_\tau \approx h_K$知$h_\tau \approx 1$.设∂K由N条边$e_1, e_2, \cdots, e_N$组成, 对任一边e,定义

$$A_e v = \frac{1}{|e|}\int_e v\mathrm{ds}.$$

则由条件$\int_{\partial K} v\mathrm{ds} = 0$知

$$\sum_{i=1}^N |e_i|A_{e_i}v = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{|e_i|}{|\partial K|}A_{e_i}v = 0.$$

进一步,有

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{L^p(K)} &= \|v - \sum_{i=1}^{N} \frac{|e_i|}{|\partial K|} A_{e_i} v\|_{L^p(K)} \\
&= \| \sum_{i=1}^{N} \frac{|e_i|}{|\partial K|} (v - A_{e_i} v)\|_{L^p(K)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{|e_i|}{|\partial K|} \|(v - A_{e_i} v)\|_{L^p(K)} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq N} \|(v - A_{e_i} v)\|_{L^p(K)}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

step 2. 记$w_i = v - A_{e_i} v$,$1 \leq i \leq N$.由定义知

$$
\|w_i\|_{L^p(K)} \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h_K}(K)} \|w_i\|_{L^p(\tau)} \leq L \|w_i\|_{L^p(\tau^*)} \tag{4}
$$

式中

$$
\|w_i\|_{L^p(\tau^*)} = \max_{\tau \in \mathcal{T}_{h_K}(K)} \|w_i\|_{L^p(\tau)}
$$

对于τ^*可以找到一列三角形单元$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l$使得$\tau_1 = \tau^*$,$\tau_l =$以$e_i$为边的三角形(可参考下面示意图),其中$\tau_j$和$\tau_{j+1}$的公共边为$f_j$,$1 \leq j \leq l-1$,则

由$h_{\tau_j}\approx 1$,引理1 和迹定理知

$$
\begin{aligned}
\|w_i\|_{L^p(\tau^*)} &= \|w_i\|_{L^p(\tau_1)} \\
&\lesssim |w_i|_{1,p,\tau_1} + |\int_{f_1} w_i \mathrm{ds}| && \text{(引理1)} \\
&\lesssim |w_i|_{1,p,\tau_1} + \|w_i\|_{L^p(f_1)} \\
&\lesssim |w_i|_{1,p,\tau_1} + \|w_i\|_{1,p,\tau_2} && \text{(迹定理)} \\
&\lesssim |w_i|_{1,p,\tau_1} + |w_i|_{1,p,\tau_2} + |\int_{f_2} w_i \mathrm{ds}| && (\tau_2\text{和}\tau_3\text{的公共边}f_2) \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{l-1} |w_i|_{1,p,\tau_j} + \|w_i\|_{1,p,\tau_l} && \text{(依此类推)} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{l} |w_i|_{1,p,\tau_j} && (\text{引理1 和}A_e v\text{ 定义}) \\
&\lesssim \big(\sum_{j=1}^{l} |w_i|^p_{1,p,\tau_j}\big)^{1/p}\big(\sum_{j=1}^{l} 1\big)^{\frac{p-1}{p}} && \text{(C-S不等式)} \\
&\lesssim l^{\frac{p-1}{p}} |w_i|_{1,p,K}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

由(3)-(5) 知

$$\|v\|_{L^p(K)} \lesssim |v|_{1,p,K} \tag{6}$$

step 3. 对于一般情形,作变量代换$x = h_K\hat{x}$,$K\to\hat{K}$, $diam(\hat{K})=1$,则由(6)立知结果(2). □

使用与定理1中类似的推导可得

定理 2 (带几何尺度的Poincaré不等式)
*假设多角形K满足**性质1**,则对任何$v\in W^{1,p}(K)$ 使$\int_K v\mathrm{ds}=0$,成立估计*

$$\|v\|_{L^p(K)} \lesssim h_K^{-1}|v|_{1,p,K} \tag{7}$$

式中$1\le p<\infty$,生成常数C与h_K无关.

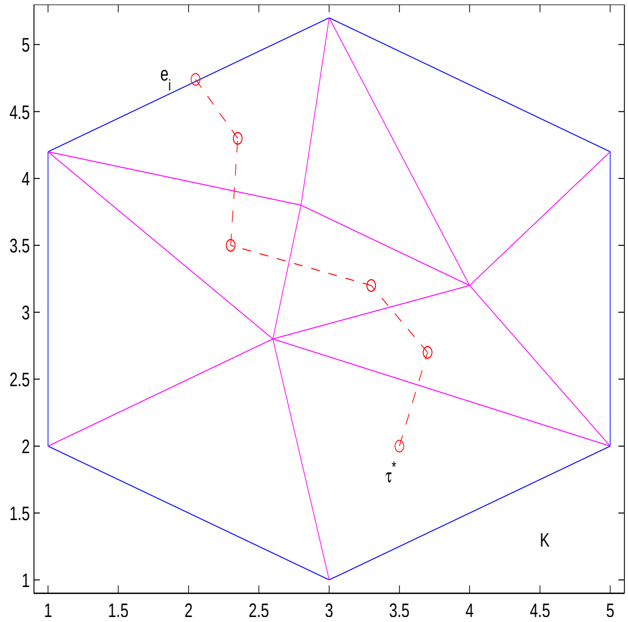


图 3: 多角形K作正规剖分后得到一系列子三角形

2 函数逼近的误差估计

本节,我们主要给出关于函数逼近的误差估计的两个定理.

定理 3 *假设多角形K满足**性质1**,则对$\forall v \in W^{1,p}(K)$, 存在$v_\pi \in P_k(K)$使*

$$|v - v_\pi|_{l,p,K} \lesssim h_K^{k+1-l} |v|_{k+1,p,K}, \quad 0 \le l \le k. \tag{8}$$

证明. *不妨设$h_K = 1$证明结果即可(对于一般情形,作变量代换$x = h_K \hat{x}$).*
找$v_\pi \in P_k(K)$使

$$\int_K \partial^\alpha (v - v_\pi) \mathrm{dx} = 0, \quad |\alpha| \le \mathrm{k}.$$

则由定理2知

$$\begin{aligned}\|v-v_\pi\|_{L^p(K)} &\lesssim |v-v_\pi|_{1,p,K}\\ &\lesssim |v-v_\pi|_{2,p,K}\\ &\lesssim \cdots\\ &\lesssim |v-v_\pi|_{k+1,p,K}\\ &\lesssim |v|_{k+1,p,K}.\end{aligned}$$

□

对于$\mathcal{T}_{h_K}(K)$,记

$$\overline{V}_{h_K}(K) := \{v\in C(\overline{K}) : v|_e \in P_k(e), \forall e\in \mathcal{T}_{h_K}(K)\}.$$

E_K:$\overline{V}_{h_K}(K)$相应的k次Lagrange插值算子.
对$\forall v\in H^{k+1}(K)$,记$w=I_K v$,由以下条件确定:

$$\begin{cases}\Delta w = \Delta v_\pi \in P_{k-2}(K) & \textit{in} \quad K;\\ \quad w = E_K v \in B_k(\partial K) & \textit{on} \quad \partial K.\end{cases} \tag{9}$$

显然$w=I_K v\in V_k(K)$. (9)即

$$\begin{cases}\Delta(w-v_\pi)=0 & \textit{in} \quad K;\\ \quad w-v_\pi = E_K v - v_\pi & \textit{on} \quad \partial K.\end{cases} \tag{10}$$

由能量最小原理知

$$|w-v_\pi|_{1,K} \le |E_K v - v_\pi|_{1,K} \le |E_K v - w|_{1,K} + |w-v_\pi|_{1,K}$$

进一步,有

$$\begin{aligned}|v-I_K v|_{1,K} &= |v-w|_{1,K}\\ &\le |v-v_\pi|_{1,K} + |w-v_\pi|_{1,K} && (\pm v_\pi)\\ &\le |v-v_\pi|_{1,K} + |E_K v - v_\pi|_{1,K}\\ &\le 2|v-v_\pi|_{1,K} + |v-E_K v|_{1,K} && (\pm v)\\ &\le 2[|v-v_\pi|_{1,K} + |v-E_K v|_{1,K}]\\ &\lesssim h_K^k |v|_{k+1,K}. && ((8)\text{ 和}E_K v\text{ 定义})\end{aligned} \tag{11}$$

由定理1知

$$\begin{aligned}\|I_Kv - E_Kv\|_{0,K} &= \|w - E_Kv\|_{0,K}\\ &\lesssim h_K|w - E_Kv|_{1,K}\\ &\lesssim h_K^k|v|_{k+1,K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v - I_Kv\|_{0,K} &\leq \|v - E_Kv\|_{0,K} + \|I_Kv - E_Kv\|_{0,K} \qquad (\pm E_Kv)\\ &\lesssim h_K^{k+1}|v|_{k+1,K}\end{aligned}$$

对$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)$,定义:

$$(I_hv)(x) := (I_Kv)(x) \quad x \in K.$$

定理 4 *假设多角形K满足**性质1**,则对$\forall v \in H^{k+1}(K)$, 有$I_hv \in V_h$,且成立*

$$\begin{cases} |v - I_hv|_{1,K} \lesssim h_K^k|v|_{k+1,K};\\ \|v - I_hv\|_{0,K} \lesssim h_K^{k+1}|v|_{k+1,K}.\end{cases} \tag{12}$$

由(9)-(11),立即可得(12).

3 在VEM分析中的应用

FEM: 找$u \in V := H_0^1(\Omega)$使

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

VEM: 找$u_h \in V_h$使

$$a_h(u_h, v) = f_h(v) \quad \forall v \in V_h.$$

式中$V_h \subset V$.

由第一Strang引理知

$$
\begin{aligned}
|u-u_h|_{1,\Omega} &\lesssim |u-I_hu|_{1,\Omega} + \sup_{v\in V_h} |a(I_hu,v)-a_h(I_hu,v)|/|v|_{1,\Omega} + \|f-f_h\|_{-1,\Omega} \\
&\quad (\text{由}a(u_\pi,v)=a_h(u_\pi,v),\text{其中分片}u_\pi\in\mathbb{P}_k) \\
&\lesssim |u-I_hu|_{1,\Omega} + |I_hu-u_\pi|_{1,\Omega} + \|f-f_h\|_{-1,\Omega} \\
&\quad (\text{由}|a(I_hu-u_\pi,v)-a_h(I_hu-u_\pi,v)| \le C|I_hu-u_\pi|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}) \\
&\lesssim |u-I_hu|_{1,\Omega} + |u-u_\pi|_{1,\Omega} + \|f-f_h\|_{-1,\Omega} \\
&\quad (\text{由}I_hu-u_\pi=(I_hu-u)+(u-u_\pi)\text{及三角不等式}) \\
&\lesssim h^k|u|_{k+1,\Omega} + h^k|u|_{k+1,\Omega} + h^k|f|_{k-1,\Omega} \\
&\quad (\text{由定理4,定理3和}k\ge 2\text{时}) \\
&\lesssim \mathcal{O}(h^k).
\end{aligned}
$$