关于加工站‘垫刀’的机制建模及验证方式

本文由 [企鹅数据Penguin Statistics] @J 所撰写，@水晶泡芙工坊代发。

【J: 手机验证不了，说不了话我要死了 QAQ | （话说你能说话了也无法独立发出这贴呀 Orz）】。

1. 引言

在 [https://www.bilibili.com/video/av56232063/] 视频中，UP主提到了“垫刀”的技巧，展示了用合成站刷高级材料的潜在可能。如果此结果为真，那么当前的很多优化工具很可能会失效（因为大部分算法没有考虑加工站的额外产出）。为了确保当前优化工具的合理性，我们为 “垫刀” 进行了建模，并用一个相对较小的样本进行分析。得到了 ”目前并未发现 ‘垫刀’ 机制存在” 的结论。

2. 什么是 ‘垫刀’ ?

为了考察 ‘垫刀’ 机制，我们需要给‘垫刀’做出数学定义。加工站‘垫刀’的通俗说法是 —— 给定前 n 次加工没有触发加成，第$n+1$ 加工更有可能触发加成。假定我们记事件 A 为加工触发加成，事件 B_n 为之前 n 次加工均未触发加成，‘垫刀’即为 $P(A|B_n) \geq P(A)$, 即在 “之前n次加工均未触发加成(B_n)”的情况下，加工触发加成(A)” 的概率$P(A|B_n)$会高于普通的“加工触发加成(A)”的概率$P(A)$。

根据贝叶斯公式，我们有

$$P(A|B_n) = \frac{P(A, B_n)}{P(B_n)} \overset{\text{独立性}}{=} \frac{P(A)P(B_n)}{p(B_n)} = P(A)$$

若独立性假设成立（ ’当次加工触发加成‘的概率‘ 不受 ’之前的加工不触发加成‘ 影响 ），我们可以得到 $P(A|B_n) = P(A)$。所以‘垫刀‘问题的本质是在讨论此独立性假设是否成立，于是我们得到以下建模。

3. 关于独立性的建模

我们记单次加工触发加成为1,不触发加成为0，即可得到一个伯努利随机变量

$$X_t \sim Bernoulli(p) \Leftrightarrow P(A) = P(X_t = 1) = p,$$

p 为单次加工触发加成的概率。类似的，我们考虑 ‘存在垫刀机制下’ 的变量，我们记之前已有n 次未触发加成 & 当次加工触发加成为1,不触发为0, 即可得到一个伯努利随机变量

$$X_{t|n} \sim Bernoulli(p_n) \Leftrightarrow P(A|B_n) = P(X_t = 1|X_{t-1} = 0, \ldots, X_{t-n} = 0) = p_n$$

$n=1,2,3\ldots$ 为统一符号，我们额外定义 $p_0=p$, 即前0次连续未触发加成，当次触发加成的概率。 所以我们想要考察，是否存在 $p_0=p_1=p_2=\ldots=p_n$.

4. 对于p的考察方式

频率学派即考察序列出现的频率。比如对于 p_0, 我们考察 ‘加工触发加成次数’ 占 ‘总加工次数’ 的比例； 对于 $n=2$ 的情况，我们考察 ‘出现序列$[0,0,1]$的次数’ 占 ‘出现序列$[0,0]$ 的次数’ 的比例 $\frac{\#[0,0,1]}{\#[0,0]}$ ，即 ‘两次未加后加成’ 占 ‘两次未加成的比例 （ '#‘ 代表计数）。

$$p(A|B_2)=\frac{P(A,B_2)}{P(B_2)}=\frac{\#[0,0,1]/\text{总次数}}{\#[0,0]/\text{总次数}}=\frac{\#[0,0,1]}{\#[0,0]}$$

对于$n=3,4,\ldots$ 的情况，计算类似。

但由于个人不是很喜欢频率派做假设检验($p_0=p_1=p_2,\ldots$)时的 大样本量，反复试验（中心极限定理）解释/解释。所以我更倾向贝叶斯派。我们使用一个 'Beta-Bernoulli' conjugate。假设我们有 Bernoulli(p)-likelihood, Beta (a,b)-prior, 得到一个Beta的posterior$(a+\sum_i x_i, b+m-\sum_i x_i)$. 此处的 m 为总样本数，$\sum_i x_i$ 为其中触发加成的样本和。我们选用一个non-informative prior， $a=b=0.001$。对应的贝叶斯检验就是考察随机变量 $\Delta_{i,j}=p_i-p_j$ 是否在95%的 HPD (Highest Posterior Density) 区间内包含0.

此方法的好处是，由于估计对象 p 被假定为随机变量（而不是频率学派的p是一个数）。p 很自然的就有个对应的概率分布，我们就不用考虑频率学派基于CLT的那套的大样本，反复试验的问题。

[一个简单的贝叶斯解释以及Beta-Bernoulli conjugate请参考http://www2.stat.duke.edu/~rcs46/modern_bayes17/lecturesModernBayes17/lecture-1/01-intro-to-Bayes.pdf ， 【J : 我永远迷信贝叶斯.jpg】].

5. 基于小样本的实证

样本来源于 @水晶泡芙工坊，即本文代发者。我们在保持干员加成为75%的水平下，记录了80次加成结果。

使用频率学派的方式，我们考察n次保底，$n=0,1,\ldots 9$ 对应上文的$p(=p_0),p_1,\ldots,p_9$。汇报加成出现次数，总数，出货率（基于CLT的 $\frac{\sum_i x_i}{m}$) 和标准差 (基于CLT的 $\sqrt{\frac{\sum_i x_i}{m}(1-\frac{\sum_i x_i}{m})/m}$ ，结果如下

```
         加成次数  总数    出货率     标准差
0次保底         8    80   0.1000   0.0335
1次保底         8    70   0.1143   0.0380
2次保底         6    61   0.0984   0.0381
3次保底         5    54   0.0926   0.0394
4次保底         5    48   0.1042   0.0441
5次保底         4    43   0.0930   0.0443
6次保底         4    39   0.1026   0.0486
7次保底         4    35   0.1143   0.0538
8次保底         4    31   0.1290   0.0602
9次保底         3    27   0.1111   0.0605
```

可以看出所以出货率的差值均在1个标准差之内。没有证据说明存在'垫刀'的现象

使用贝叶斯学派的方式，我们汇报$\Delta_{i,j}$ 在 95% HPD区间的两端点，并检测是否区间包含0点。【注意到对角线均为 0 是因为此时对比的是这个分布于其本身，理所应当的$\Delta_{i,i} = 0.$】

```
# 左端点
     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
0  0.00 -0.11 -0.10 -0.09 -0.11 -0.10 -0.12 -0.14 -0.16 -0.14
1 -0.08  0.00 -0.09 -0.09 -0.11 -0.09 -0.11 -0.13 -0.16 -0.14
2 -0.10 -0.12  0.00 -0.10 -0.12 -0.11 -0.13 -0.15 -0.18 -0.16
3 -0.11 -0.13 -0.11  0.00 -0.13 -0.12 -0.14 -0.15 -0.18 -0.16
4 -0.11 -0.12 -0.10 -0.10  0.00 -0.11 -0.12 -0.14 -0.17 -0.15
5 -0.12 -0.13 -0.12 -0.11 -0.13  0.00 -0.15 -0.16 -0.19 -0.16
6 -0.11 -0.13 -0.12 -0.11 -0.14 -0.12  0.00 -0.16 -0.18 -0.16
7 -0.10 -0.12 -0.10 -0.11 -0.12 -0.11 -0.13  0.00 -0.18 -0.15
8 -0.10 -0.11 -0.10 -0.10 -0.11 -0.11 -0.13 -0.14  0.00 -0.15
9 -0.12 -0.13 -0.12 -0.11 -0.14 -0.12 -0.14 -0.16 -0.18  0.00

# 右端点
     0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
0 0.00 0.08 0.10 0.11 0.11 0.12 0.11 0.10 0.10 0.12
1 0.11 0.00 0.12 0.13 0.12 0.13 0.13 0.12 0.11 0.13
2 0.10 0.09 0.00 0.11 0.10 0.12 0.12 0.10 0.10 0.12
3 0.09 0.09 0.10 0.00 0.10 0.11 0.11 0.11 0.10 0.11
4 0.11 0.11 0.12 0.13 0.00 0.13 0.14 0.12 0.11 0.14
5 0.10 0.09 0.11 0.12 0.11 0.00 0.12 0.11 0.11 0.12
6 0.12 0.11 0.13 0.14 0.12 0.15 0.00 0.13 0.13 0.14
7 0.14 0.13 0.15 0.15 0.14 0.16 0.16 0.00 0.14 0.16
8 0.16 0.16 0.18 0.18 0.17 0.19 0.18 0.18 0.00 0.18
9 0.14 0.14 0.16 0.16 0.15 0.16 0.16 0.15 0.15 0.00

# 是否包含0点
```

```
     0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
0 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
1 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
2 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
3 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
4 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
5 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
6 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
7 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
8 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
9 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
```

可以看出所以区间都包含0点，说明贝叶斯方式的结论与频率学派方式的结论一致，并没有证据说明‘垫刀’方式存在。

所以运算基于R，代码（附注释）与样本以附件形式上传。【J：我代码有点不太好，出了虫子请见谅Orz】

6. 总结

本文的目的在于提供一个思路和方式来考察‘垫刀’这一现象是否存在，从而支持各种优化工具的可行性（如果‘垫刀’存在，应用于优化方法的合成公式矩阵以及定价方式可能都要根据 ‘用低成本素材垫刀 + 高等级素材加成 ’的刷素材方式重新计算）。【J：以及我们现在没有血亏！ www】

基于当前的数据，无论是频率学派方式还是贝叶斯派方式，我们都没有找到支持存在‘垫刀’现象的证据。当然，这并不能直接证明‘垫刀’这种现象不存在，我们依然在继续搜集数据来检验这一现象，而且希望数据越多越好。【正如我们并不能因为看到1000000只白鸽子，就说明其他颜色的鸽子不存在一样，我们不打算否定‘垫刀’存在的可能性。我们的思路更像是，【用大量样本都得不到支撑‘垫刀’的证据】来说明‘垫刀’不会对我们的加工产生太大的影响】。

还有就是，玄学出货有时候也挺令人开心的，各位多科塔相信自己想相信的事情，玩得开心就好 www

附录

```
# 以下均为R code，不知道为什么传不了真是抱歉 QAQ
# 我好菜啊.jpg --- by J
# 读取数据
library(readxl)
MS <- read_excel("MS.xlsx")
# 提取出货序列
q = as.matrix(MS[,3])
```

```r
# 记录 n = 0, ... 9, 10种情况
p = matrix(0,10,2)

# n = 0 时, 即 总加成/总样本
p[1,1] = sum(q)
p[1,2] = length(q)

# n = 1,...,9
for( n in 1:9){
  # 考虑到单次序列长度, 调整样本
  # e.g.  n = 2时, 如果 79和80次是 [0,0]
  #      我们没法考察81次的 [0,0,1] or [0,0,0]
  for( i in 1:(80-n-1) ){
    # 查看连续 n 次为出货的情况
    # e.g. n = 1 时, 即 [0] 为总样本序列,  [0,1] 为加成序列
    #      n = 2 时, 即 [0,0] 为总样本序列,  [0,0,1] 为加成序列
    if( sum(q[(i:(i+n-1))]) == 0){
      # 记录样本序列数
      p[(n+1),2] = p[(n+1),2]+1
      # 查看是否有加成序列
      if( q[(i+n)] == 1 ){
        # 记录加成序列
        p[(n+1),1] = p[(n+1),1]+1
      }
    }
  }
}

# 频率派方式
p = cbind(p,matrix(0,10,2))
p[,3] = p[,1]/p[,2]
p[,4] = sqrt( p[,3]*(1-p[,3])/p[,2])
rownames(p) = c('0次保底','1次保底','2次保底','3次保底','4次保底','5次保底',
                '6次保底','7次保底','8次保底','9次保底')
colnames(p) = c('加成次数','总数','出货率','标准差')
# 结果矩阵
round(p,4)


# 贝叶斯方式
# 为保证可重复性, 确定seed
set.seed(1234)
# 为计算 \Delta_{i,j} 采样
samples = matrix(0,10000,10)
for( i in 1:10){
  samples[,i] = rbeta( 10000 , 0.001 + p[i,1], 0.001 + p[i,2] - p[i,1])
```

```
}

# 记录HPD interval
library(MCMCpack)
L = matrix(0,10,10)
U = matrix(0,10,10)
rownames(L) = 0:9
rownames(U) = 0:9
colnames(L) = 0:9
colnames(U) = 0:9
for( i in 1:10){
  for(j in 1:10){
    L[i,j] = HPDinterval( as.mcmc( samples[,i] - samples[,j]))[1]
    U[i,j] = HPDinterval( as.mcmc( samples[,i] - samples[,j]))[2]
  }
}

# 结果矩阵
round(L,2)
round(U,2)
(L*U)<=0
```