Hva kommer på eksamen i TMA4101?

Studenter liker forutsigbarhet, og det er greit å vite om noen tingene som kommer på eksamen, slik at man kan brette opp ermene og gjøre en innsats og så være sikker på å få belønning for det. Noen av disse oppgavene kommer på eksamen, så om du lærer deg dem godt, bør det gå greit å stå.

1 - TALL

$\boxed{1}$ Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk m/n der m og n er hele tall.

$\boxed{2}$ Forklar hva et komplekst tall er, tegn wesselplanet, og utled regneregelen

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$\boxed{3}$ Vis at z og iz står vinkelrett på hverandre i wesselplanet.

$\boxed{4}$ Skriv opp aksiomene for kropp og vis at $(-1)\cdot(-1) = 1$.

2 - FUNKSJONER

$\boxed{1}$ Skriv opp definisjonen på den deriverte og bruk den til å vise at x^n har derivert nx^{n-1} dersom n er et naturlig tall.

$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på invers funksjon og vis at

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f er deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Tegn en figur som illustrerer denne derivasjonsregelen, og vis at

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\boxed{3}$ Faktoriser polynomet $x^2 + 2x + 2$.

3 - LIKNINGER

$\boxed{1}$ Gjør rede for Newtons metode, og forklar hvorfor iterasjonen blir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$\boxed{2}$ Gjør rede for fikspunktiterasjonen, og bruk sekantsetningen (altså Taylors teorem for $n = 0$) til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s mellom x_n og r slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

$\boxed{3}$ Skriv en kode som løser likningen $x = \cos x$ med fikspunkiterasjonen eller Newtons metode.

4 - FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$ Newtons avkjølingsproblem er gitt ved

$$\dot{T}(t) + \alpha\,(T(t) - T_K) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

der T er temperaturen i en ting som avkjøles eller varmes opp av omgivelsene, T_K er temperaturen til omgivelsene, og T_0 er temperaturen i tingen ved eksperimentets start. Vis at løsningen er

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}.$$

$\boxed{2}$ Forklar hvorden Eulers eksplisitte metode fungerer, og skriv opp metodens rekursjonslikning for fallskjermproblemet

$$\dot{v} = 1 - v^2 \quad v(0) = v_0.$$

5 - LINEÆRE LIKNINGSSYSTEMER

$\boxed{1}$ Finn koeffisientene til et tredjegradspolynom som går gjennom punktene $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$ og $(3,2)$.

$\boxed{2}$ Skriv opp formelen for 3×3-determinant. Forklar hva den regner ut, og hvordan du kan bruke svaret til å avgjøre om et lineært likningssystem (med tre likninger og tre ukjente) har entydig løsning.

6 - MATRISER

$\boxed{1}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Regn ut AB, BA, A^2, B^2 og $A + B$ eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening.

$\boxed{2}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Regn ut A^{-1} og bruk denne til å løse likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

7 - ANDRE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$ Løsningene til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

utgjør for alle kombinasjoner av b og c et todimensjonalt vektorrom, men løsningsformelen ser litt forskjellig ut alt etter verdien på $\sqrt{b^2 - 4c}$. Gjør rede for de tre tilfellene.

8 - VEKTORROM

$\boxed{1}$ Skriv opp definisjonen på lineær uavhengighet og vis at dersom

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er c_1, c_2,...,c_n entydig bestemt.

$\boxed{2}$ Et punkt har koodinatene $(4, 5, 3)$ i standardbasisen for $\mathbb{R}^3$. Finn koordinatene til dette punktet i basisen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

9 - LINEÆROPERATORER

$\boxed{1}$ Gjør rede for at dersom vi ønsker å finne egenverdiene til matrisen A, må vi løse likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på lineæroperator, og forklar at matrise-vektorproduktet er en lineæroperator. Illustrer med et fritt valgt regneeksempel.

10 - SYSTEMER AV DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

til et førsteordens system av differensiallikninger.

$\boxed{2}$ Finn alle løsninger til systemet

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_2 &= 2z_1 + 6z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_3 &= 2z_1 + 2z_2 + 6z_3 \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Skriv en pythonkode som løser Lokta-Volterra-systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - bxy \qquad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= -cy + dxy \qquad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

med Eulers eksplisitte metode.

11 - TAYLORS TEOREM

$\boxed{1}$ Utled Taylors teorem for $n = 1$ fra analysens fundamentalteorem.

$\boxed{2}$ Vis at dersom f'' eksisterer og $f'(r) \neq 0$, gjelder feilestimatet

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

for Newtons metode.

12 - INTEGRALET

$\boxed{1}$ Sannsynligheten for at en standardnormalfordelt stokastisk variabel Z havner mellom a og b i et forsøk, er arealet

$$P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Skriv en pythonkode som regner ut dette arealet ved riemannsummer.

$\boxed{2}$ Skriv en pythonkode som regner ut omkretsen av en ellipse med halvakser 1 og 2 ved trapesmetoden.

13 - REGULARITET

Oppgavene i dette kapitlet er stort sett å regne for ganske vanskelige, så jeg kommer ikke til å bruke dem til å hjelpe studenter over strykgrensen, men til andre ting, slik som å skille mellom A og B og slikt.

STUDIEPROGRAMSPESIFIKKE OPPGAVER

Poenget med disse emnene er jo at du skal skjønne hva matematikken kan brukes til, og derfor blir det en oppgave som er fagfeltspesifikk. I en slik oppgave kan du velge selv hva du vil gjøre. Jeg antar det beste er å velge en oppgave som passer studieprogrammet ditt. Det etterstrebes lik vanskelighetsgrad på oppgavene, og det vil komme LF, slik at vi ikke trenger å bruke forelesningstid på dem.

$\boxed{1}$ Velg en av oppgavene under:

MTELSYS, MTTK: Skriv opp aksiomene for boolsk algebra og vis at $x + x = x$.

MTTK, MTKJ: Skriv opp aksiomene for gruppe og vis at identitets- og inverselementene er entydige.