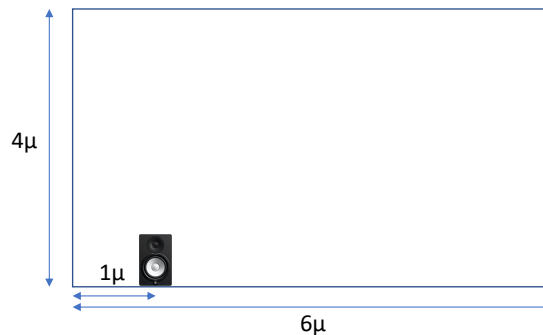


Επιχειρησιακή Έρευνα

1η Σειρά Ασκήσεων 3/4/21.

Παράδοση μέχρι και Παρασκευή 16/4/21

- (α') Δείξτε ότι για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g ισχύει $\max_x [f(x) + g(x)] \leq \max_x f(x) + \max_x g(x)$.
(β') Δώστε παράδειγμα συναρτήσεων f, g όπου $\max_x [f(x) + g(x)] \neq \max_x f(x) + \max_x g(x)$.
(γ') Δώστε παράδειγμα συναρτήσεων f, g όπου $\max_x [f(x) + g(x)] = \max_x f(x) + \max_x g(x)$.
- Έστω f, g κυρτές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι κυρτή.
- Σε ένα ορθογώνιο δωμάτιο 4 επί 6 μέτρων, έχει τοποθετηθεί ένα ηχείο όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α') Διατυπώστε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης για την εύρεση του σημείου στο δωμάτιο με τη μεγαλύτερη απόσταση από το ηχείο.
(β') Είναι το πρόβλημα που διατυπώσατε στο (α') κυρτό;
(γ') Λύστε το πρόβλημα με τη χρήση λογισμικού. Βρείτε το πιο απομακρυσμένο σημείο και την απόστασή του από το ηχείο.
- Θεωρήστε ότι έχετε στη διάθεσή σας ένα φωτοβολταϊκό σύστημα που παράγει έως 2000 kWh (κιλοβατώρες) ηλεκτρική ενέργεια το μήνα με κόστος 0.1 ευρώ/kWh. Μπορείτε επίσης να αγοράζετε ηλεκτρική ενέργεια από έναν πάροχο με κόστος 0.3 ευρώ/kWh. Εάν η συνολική ενεργειακή ανάγκη σας είναι 5000 kWh, πόση ενέργεια θα πρέπει να προέλθει από το φωτοβολταϊκό και πόση από τον πάροχο, ώστε να σας κοστίσει όσο το δυνατόν λιγότερο;
(α') Διατυπώστε ένα γραμμικό πρόγραμμα για τη λύση αυτού του προβλήματος.
(β') Λύστε το με τη χρήση λογισμικού. (Η λύση είναι προφανής – το ζητούμενο είναι η χρήση λογισμικού.)
(γ') Έστω ότι η παραγωγή (μη μηδενικής ποσότητας) ενέργειας από το φωτοβολταϊκό επιφέρει μηνιαίο κόστος συντήρησης 50 ευρώ, ενώ ο πάροχος έχει πάγιο μηνιαίο κόστος 30 ευρώ έστω και αν δεν καταναλώσετε καθόλου ενέργεια.
Διατυπώστε ένα μικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα για την ελαχιστοποίηση του κόστους.
- Είστε στο σούπερ μάρκετ και θέλετε να χρησιμοποιήσετε τον ελάχιστο αριθμό από πλαστικές σακούλες ώστε να μεταφέρετε τα 4 αντικείμενα που αγοράσατε, βάρους 1, 1, 1.5 και 2.5 κιλών. Θεωρήστε ότι κάθε σακούλα δε μπορεί να αντέξει πάνω από 4 κιλά.
Διατυπώστε το πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου αριθμού από σακούλες ως ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα.

6. Θεωρήστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2^2 - \log(x_1 + x_2 + 1) \\ \text{έτσι ώστε} \quad & e^{-x_1+4x_2} + x_2 \leq 2021 \\ & x_1 + x_2 > -1 \\ & \text{όπου } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι είναι κυρτό πρόγραμμα.

7. Διατυπώστε ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού την εύρεση της χρονικά συντομότερης διαδρομής για πεζούς που συνδέει τους αρχαιολογικούς χώρους της Ακρόπολης, τον Ναό του Ολυμπίου Διός, τη Βιβλιοθήκη του Αδριανού και το Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο, με οποιαδήποτε σειρά επίσκεψης. (Χρησιμοποιήστε τους χάρτες της Google ή κάποια παρόμοια υπηρεσία για την εύρεση των χρόνων μετάβασης μεταξύ αυτών των προορισμών.)
8. Θεωρήστε το ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{έτσι ώστε} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ & \text{όπου } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Διατυπώστε το ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού.