Επιχειρησιακή Έρευνα
2η Σειρά Ασκήσεων

Χρυσικοπούλου Ειρήνη (3180208)
Σπανού Αρχοντούλα (3180173)

Άσκηση 1

(α.) Θέλουμε αλγόριθμο πιο απότομης κατάβασης όταν χρησιμοποιείται γραμμική παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων, όπου:
$L(y,\hat{y}) = (y-\hat{y})^2$ και $f_{\vec{w},b}(\vec{x}) = \vec{w}\vec{x}+b$

$$L(y, f_{\vec{w},b}(\vec{x})) = (y-(\vec{w}\cdot\vec{x}+b))^2$$

$$F(\vec{w},b) = \sum_{i=1}^{n} L(y^{(i)}, f_{\vec{w},b}(\vec{x})) = \sum_{i=1}^{n}\left[(y^{(i)}-(\vec{w}x^{(i)}+b))^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i-(\vec{w}\cdot x_i+b))^2$$

Ελέγχουμε αν η συνάρτηση του αθροίσματος είναι κυρτή.
Φυσικά και είναι κυρτή, καθώς είναι άθροισμα κυρτών συναρτήσεων και ως σύνθεση της $g(h(x))$, όπου $g(x)=x^2$ και $h(x) = y_i-\vec{w}x_i+b$, όπου η h είναι κυρτή όπως αναφέραμε παραπάνω ως άθροισμα κυρτών συναρτήσεων και η x^2 κυρτής ($f''(x)=2>0 \to$ κυρτή).
Επομένως, η συνάρτηση του αθροίσματος είναι κυρτή, που αυτό σημαίνει ότι η λύση που θα βρούμε είναι βέλτιστη.
Στην συνέχεια, θα βρούμε το διάνυσμα κλίσης:

$$(*_1)\quad \frac{dF(\vec{w},b)}{dw_j} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot(y^{(i)}-(\vec{w}x^{(i)}+b))\cdot(-x_j^{(i)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -2\cdot x_j^{(i)}\cdot(y^{(i)}-(\vec{w}\cdot x^{(i)}+b)).$$

$$(*_2)\quad \frac{dF(\vec{w},b)}{db} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot(y^{(i)}-(\vec{w}\cdot x^{(i)}+b))\cdot(-1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -2\,(y^{(i)}-(\vec{w}\cdot x^{(i)}+b))$$

Επομένως, έχουμε:

(*3) $w_{n+1}(j) = w_n(j) - t_n \frac{dF(\vec{w},b)}{dw_j}$ και $b_{n+1} = b_n - t_n \frac{dF(\vec{w},b)}{db}$

Αν αντικαταστήσουμε στην (*3) τις σχέσεις (*1) και (*2) θα έχουμε τα εξής:

$$w_{n+1}(j) = w_n(j) + \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot x_j^{(i)} (y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b))$$

$$b_{n+1} = b_n + \sum_{i=1}^{n} 2 (y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b))$$

Τα οποία λόγω κυρτότητας θα προσεγγίσουν την βέλτιστη λύση

Ο αλγόριθμος θα σταματάει όταν μηδενίζεται το διάνυσμα κλίσης, δηλαδή $|\nabla f(x_n)| < \varepsilon$.

άρα:

```
do {
    w_{n+1}(j) = w_n(j) + Σ_{i=1}^{n} 2·x_j^(i)·(y^(i) - (w·x^(i) + b))
    b_{n+1} = b_n + Σ_{i=1}^{n} 2·(y^(i) - (w·x^(i) + b))
} while |∇f(x_n)| < ε.
```

↳ οι εντολές αυτές θα εκτελούνται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο μηδενισμού διανύσματος

(β.)

Θέλουμε τον αλγόριθμο της πιο απότομης κατάβασης όταν χρησιμοποιείται LASSO regularization, δηλαδή επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$\sum_{i=1}^{n} L(y_i, f_{\vec{w},b}(\vec{x}(i))) + a \sum_{j=1}^{N} |w_j|, \quad a>0$$

Θέλουμε, λοιπόν, $\min \sum_{i=1}^{n} L(y_i, f_{\vec{w},b}(\vec{x}_{(i)})) + a \sum_{j=1}^{N} |w_j|$, όπου

$$F = \sum_{i=1}^{n} L(y_i, f_{\vec{w},b}(\vec{x}^{(i)})) + a \sum_{j=1}^{N} |w_j|, \quad a>0.$$

Η συνάρτηση F είναι κυρτή, καθώς είναι άθροισμα κυρτών συναρτήσεων, της $\sum_{i=1}^{n} L(y_i, f_{\vec{w},b}(\vec{x}^{(i)}))$ όπως το αποδείξαμε ότι είναι κυρτή στο ερώτημα (α) και της $a \cdot \sum_{j=1}^{N} |w_j|$ όπου είναι κυρτή.

Επομένως, έχουμε να βρούμε το διάνυσμα κλίσης:

$$(*_1) \quad \frac{dF}{dw_j} = \sum_{i=1}^{n} -2 \cdot x_j^{(i)} \cdot \left(y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b)\right) + a \cdot N$$

$$(*_2) \quad \frac{dF}{db} = \sum_{i=1}^{n} -2 \cdot \left(y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b)\right).$$

Επομένως, έχουμε:

$$(*_3) \quad w_{n+1}(j) = w_n(j) - t_n \cdot \frac{dF}{dw_j} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = b_n - t_n \cdot \frac{dF}{db}$$

Η σχέση $(*_3)$ γίνεται με τις σχέσεις $(*_1)$ και $(*_2)$:

$$w_{n+1}(j) = w_n(j) + t_n \cdot \sum_{i=1}^{n} 2 x_j^{(i)} \cdot (y(i) - \vec{w} \cdot x^{(i)} + b) + a \cdot N$$

και $$b_{n+1} = b_n + t_n \cdot \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b)).$$

τα οποία λόγω κυρτότητας θα προσεγγίζουν τη βέλτιστη λύση

Ο αλγόριθμος θα σταματάει μέχρι να μηδενίσει το διάνυσμα κλίσης. Δηλαδή $|\nabla f(x_n)| < \varepsilon$.

άρα:

do{

$w_{n+1}(j) = w_n + t_n \cdot \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot x_j \cdot (y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b)) + aN$;

$b_{n+1} = b_n + t_n \cdot \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y^{(i)} - (\vec{w} \cdot x^{(i)} + b))$;

}while $|\nabla f(x_n)| < \varepsilon$;

οι εντολές αυτές θα εκτελούνται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο του μηδενισμού διανύσματος κλίσης.

Άσκηση 2

$$\min 2\cdot x_1 + x_2^2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 + 4\cdot x_2$$

(α)

Έχουμε ως αρχική εκτίμηση $\vec{x_0} = (x_1, x_2) = (1, 1)$.
Με την μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης με ακριβή αναζήτηση γραμμής θα βρούμε την επόμενη εκτίμηση $\vec{x_1}$.
Έστω $f(x_1, x_2) = 2\cdot x_1^2 + x_2^2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 + 4\cdot x_2$.
Έχοντας την αρχική εκτίμηση βρίσκουμε το:

$x_1=1$, $x_2=1$

$$\delta_0 = -\nabla f(x_0) = -\nabla f(x_1, x_2) = -[4\cdot x_1 - 2\cdot x_2,\ 2\cdot x_2 - 2\cdot x_1 + 4]$$
$$= -[4\cdot 1 - 2\cdot 1,\ \cancel{2\cdot 1} - \cancel{2\cdot 1} + 4] = -[2, 4] \Leftrightarrow \boxed{\vec{\delta_0} = (-2, -4)}$$

Ο περιορισμός της f στην διεύθυνση $\vec{\delta_0} = (-2, -4)$ στο σημείο $(1, 1)$ είναι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα:

$$g(t) = f(\vec{x_0} + t\vec{\delta_0}) = f((1,1) + t\cdot(-2,-4)) = f(\underbrace{1-2t}_{x_1}, \underbrace{1-4t}_{x_2}) =$$
$$= 2\cdot(1-2t)^2 + (1-4t)^2 - 2\cdot(1-2t)\cdot(1-4t) + 4\cdot(1-4t) =$$
$$= 2\cdot(1-4t+4t^2) + (1-8t+16t^2) - 2\cdot(1-4t-2t+8\cdot t^2) + 4 - 16t =$$
$$= \cancel{2} - \cancel{8t} + 8t^2 + 1 - 8t + \cancel{16\cdot t^2} - \cancel{2} + \cancel{8t} + 4t - \cancel{16t^2} + 4 - 16t =$$
$$= 8\cdot t^2 - 20t + 5 \Leftrightarrow \boxed{g(t) = 8\cdot t^2 - 20t + 5}$$

Βρίσκουμε το σημείο μηδενισμού της 1ης παραγώγου:

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow (8t^2 - 20t + 5)' = 0 \Leftrightarrow 16t - 20 = 0 \Leftrightarrow 16t = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{t = \frac{5}{4}}$$

$g''(x) = 16 > 0$, επομένως κυρτή.

Επομένως, αφού η g είναι κυρτή και η παράγωγος της μηδενίζεται στο $t = \frac{5}{4}$, η ελάχιστη τιμή της f λαμβάνεται στην:

$$\vec{x_1} = \vec{x_0} + t\cdot\vec{\delta_0} = (1,1) + \frac{5}{4}\cdot(-2,-4) = \left(1 - \frac{2\cdot 5}{\cancel{4}_2},\ 1 - \frac{4\cdot 5}{\cancel{4}}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \vec{x_1} = (-\frac{3}{2}, -4) \longrightarrow$ η ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει η f, δηλαδή η βέλτιστη λύση !!!

CS Scanned with CamScanner

(B.)

Έχουμε ως αρχική εκτίμηση $\vec{x_0} = (x_1, x_2) = (1,1)$

Με την μέθοδο της (απλής) μεθόδου του Newton, θα βρούμε την επόμενη εκτίμηση $\vec{x_1}$.

Έστω $f(x_1,x_2) = 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2$

Αρχικά, υπολογίζουμε το διάνυσμα κλίσης:

$\nabla f(x_1,x_2) = [4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2,\ 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 + 4]$

Για το αρχικό σημείο $\vec{x_0} = (1,1)$ (αρχική εκτίμηση) το διάνυσμα κλίσης διαμορφώνεται ως εξής:

$\nabla f(x_1,x_2) = \nabla f(1,1) = [4 \cdot 1 - 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4] = [2,4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\nabla f(\vec{x_0}) = (2,4)}$

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τον εσσιανό πίνακα:

$Hf_{(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ Βρίσκουμε τον αντίστροφο του εσσιανού πίνακα $Hf_{(x_1,x_2)}$:

$H_{f(x_1,x_2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det H_{f(x_1,x_2)}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & +2 \\ +2 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{4 \cdot 2 - 4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως, η επόμενη εκτίμηση $\vec{x_1}$ θα είναι η εξής:

$\vec{x_1} = \vec{x_0} - H_f^{-1} \cdot \nabla f(\vec{x_0}) = (1,1) - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot [2,4] = [1,1] - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [2,4] =$

$= [1,1] - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [1,2] = [1,1] - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = [1-3,\ 1-5] = [-2,-4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x_1} = [-2,-4] = (-2,-4)$

Επομένως, αφού η συνάρτηση είναι κυρτή και το διάνυσμα κλίσης μηδενίζεται στο $(-2,-4)$, επομένως στο $\vec{x_1}$ λαμβάνεται η βέλτιστη τιμή.

Άσκηση 3

$$\min 2\cdot x_1 + x_2^2 + e^{-(x_1+x_2-1)}$$

(α.)

ν.δ.ο: η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή

Αρχικά, θα εξετάσουμε αν το σύνολο εφικτών σημείων είναι κυρτό σύνολο. Πράγμα που ισχύει καθώς μιλάμε για σημεία επιπέδου ($\in\mathbb{R}$). Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι κυρτό σύνολο.

Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τον εσσιανό πίνακα της αντικειμενικής συνάρτησης του προγράμματος:

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} e^{-(x_1+x_2-1)} & e^{-(x_1+x_2-1)} \\ e^{-(x_1+x_2-1)} & 2+e^{-(x_1+x_2-1)} \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$Hf(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} e^{-(x_1+x_2-1)}-\lambda & e^{-(x_1+x_2-1)} \\ e^{-(x_1+x_2-1)} & 2+e^{-(x_1+x_2-1)}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-(x_1+x_2-1)}-\lambda\right)\cdot\left(2+e^{-(x_1+x_2-1)}-\lambda\right) - e^{-2(x_1+x_2-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-(x_1+x_2-1)} + \cancel{e^{-2(x_1+x_2-1)}} - \lambda\cdot e^{-(x_1+x_2-1)} - \lambda\cdot 2 - \cancel{2e^{-(x_1+x_2-1)}} + \lambda^2 - \cancel{e^{-2(x_1+x_2-1)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \left(2+e^{-(x_1+x_2-1)}\right)\cdot\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\cdot\left(\lambda - \left(2+e^{-(x_1+x_2-1)}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda_2 = \underset{\vee\atop 0}{2} + \underset{\vee\atop 0}{e^{-(x_1+x_2-1)}} > 0$$

Αφού οι ιδιοτιμές λ_1,λ_2 είναι θετικές (≥ 0) αυτό σημαίνει ότι ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος.

Επομένως, αφού το πεδίο ορισμού είναι κυρτό σύνολο και ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος αυτό σημαίνει ότι το πρόγραμμα είναι κυρτό, άρα η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή!!!

Scanned with CamScanner

(Β.)

Η μέθοδος της πιο απότομης κατάβασης με οπισθοδρόμηση στην ουσία εκτελεί τα εξής βήματα:

1. Βρίσκει το διάνυσμα κλίσης στο αρχικό σημείο $\vec{x_0}$
2. Θέτει $\vec{d_0} = -\nabla f(\vec{x_0})$
3. Θέτει $t=1$.
4. Βρίσκει την επόμενη προσέγγιση $\vec{x_1} = \vec{x_0} + t \cdot \vec{d_0}$
5. Ελέγχει αν η συνθήκη:
$$f(\vec{x_1}) \le f(\vec{x_0}) + c \cdot \nabla f(\vec{x_0}) \cdot (\vec{x_1} - \vec{x_0})$$ ικανοποιείται?!
6. Αν ικανοποιείται, τότε το $\vec{x_1}$ είναι δεκτό
7. Αλλιώς, θέτει το $t = \frac{t}{2}$ και επιστρέφει στο βήμα 4.

Συγκεκριμένα, για $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + x_2^2 + e^{-(x_1 + x_2 - 1)}$ με αρχικό σημείο $(x_1, x_2) = (3,3)$ και συντελεστή $(c=0.8)$ έχουμε τα εξής:

```
import math
import numpy as np

def f(x):
    return 2*x[0] + x[1]**2 + math.exp(-x[0]-x[1]+1)

def gradient(x):
    return np.array([2-math.exp(-x[0] -x[1] +1),2*x[1]-math.exp(-x[0] -x[1] +1)])

def backtrackingS(x,c):
    t=1
    while f(x+t*(-1)*gradient(x)) > f(x) - c * t * np.inner(gradient(x), gradient(x)) :
        t = t/2
    print("t : ",t)
    return t

def steepest_descent():
    x=np.array([3,3])
    tt=backtrackingS(x,0.8)
    n = 1
    while (np.linalg.norm(tt*(-1)*(gradient(x))) > 1e-7):
        x = x + tt*(-1)*(gradient(x))
        print("επανάληψη : ", n , " " , "f(" , x , ") " , " = " , f(x))
        n= n + 1

#run
steepest_descent()
```

Τα αποτελέσματα του παραπάνω κώδικα είναι :

```
t :  0.125
επανάληψη :  1   f( [2.75084224 2.25084224] )   =  10.58626010371906
επανάληψη :  2   f( [2.50312784 1.69041728] )   =  7.904792453938173
επανάληψη :  3   f( [2.25825612 1.27294123] )   =  6.216455315830325
επανάληψη :  4   f( [2.01820158 0.96465139] )   =  5.104631348696323
επανάληψη :  5   f( [1.78541106 0.74069803] )   =  4.336835526290319
επανάληψη :  6   f( [1.56258354 0.582696  ] )   =  3.7828366873778188
επανάληψη :  7   f( [1.35235042 0.47678887] )   =  3.368453219222831
επανάληψη :  8   f( [1.15690351 0.41214475] )   =  3.049734243016977
επανάληψη :  9   f( [0.9776615  0.37986655] )   =  2.799024678139559
επανάληψη :  10   f( [0.81508689 0.3723253 ] )   =  2.5979018229354454
επανάληψη :  11   f( [0.66872463 0.38288171] )   =  2.433750312426611
επανάληψη :  12   f( [0.53743746 0.40587412] )   =  2.2979347257525164
επανάληψη :  13   f( [0.41972821 0.43669634] )   =  2.1845540194386306
επανάληψη :  14   f( [0.31402745 0.47182149] )   =  2.0894801910751317
επανάληψη :  15   f( [0.21887867 0.50871734] )   =  2.009668051689096
επανάληψη :  16   f( [0.13301834 0.54567768] )   =  1.9427254947651131
επανάληψη :  17   f( [0.05538393 0.58162384] )   =  1.8866788373699517
επανάληψη :  18   f( [-0.01491299  0.61592097] )   =  1.839854388881816
επανάληψη :  19   f( [-0.07862277  0.64823094] )   =  1.800817795504638
επανάληψη :  20   f( [-0.13639027  0.6784057 ] )   =  1.7683383610845478
επανάληψη :  21   f( [-0.1887797   0.70641485] )   =  1.7413632385707805
επανάληψη :  22   f( [-0.23629211  0.73229873] )   =  1.718995614917747
επανάληψη :  23   f( [-0.27937731  0.75613885] )   =  1.7004749997738666
επανάληψη :  24   f( [-0.31844185  0.77803959] )   =  1.6851591845111897
επανάληψη :  25   f( [-0.35385469  0.79811685] )   =  1.6725078578290997
επανάληψη :  26   f( [-0.38595135  0.81649098] )   =  1.6620679188075071
επανάληψη :  27   f( [-0.41503721  0.83328237] )   =  1.653460480942841
επανάληψη :  28   f( [-0.44139029  0.8486087 ] )   =  1.646369502244191
επανάληψη :  29   f( [-0.46526362  0.8625832 ] )   =  1.6405319326106729
επανάληψη :  30   f( [-0.48688745  0.87531357] )   =  1.6357292438285373
επανάληψη :  31   f( [-0.50647116  0.88690147] )   =  1.6317801964584384
επανάληψη :  32   f( [-0.52420512  0.89744214] )   =  1.6285346973649275
επανάληψη :  33   f( [-0.5402623   0.90702442] )   =  1.6258686079543574
επανάληψη :  34   f( [-0.55479981  0.91573081] )   =  1.6236793735101767
επανάληψη :  35   f( [-0.5679603   0.92363762] )   =  1.621882356346488
επανάληψη :  36   f( [-0.57987324  0.93081528] )   =  1.6204077684949485
επανάληψη :  37   f( [-0.59065609  0.9373286 ] )   =  1.619198112432803
επανάληψη :  38   f( [-0.60041542  0.94323713] )   =  1.6182060504303395
επανάληψη :  39   f( [-0.60924784  0.94859542] )   =  1.6173926341602538
επανάληψη :  40   f( [-0.61724096  0.95345345] )   =  1.616725836143559
επανάληψη :  41   f( [-0.62447418  0.95785687] )   =  1.6161793333837773
επανάληψη :  42   f( [-0.63101944  0.96184739] )   =  1.6157315012036797
επανάληψη :  43   f( [-0.63694194  0.96546304] )   =  1.615364581924029
```

```
επανάληψη :  44   f( [-0.64230074  0.96873848] )   =  1.6150639987074547
επανάληψη :  45   f( [-0.64714934  0.97170526] )   =  1.6148177897353038
επανάληψη :  46   f( [-0.65153617  0.97439212] )   =  1.6146161419929361
επανάληψη :  47   f( [-0.65550511  0.97682515] )   =  1.6144510074059295
επανάληψη :  48   f( [-0.65909588  0.97902809] )   =  1.614315786984843
επανάληψη :  49   f( [-0.66234444  0.98102251] )   =  1.6142050710793865
επανάληψη :  50   f( [-0.66528334  0.98282798] )   =  1.614114425884714
επανάληψη :  51   f( [-0.66794206  0.98446227] )   =  1.614040218044926
επανάληψη :  52   f( [-0.67034726  0.9859415 ] )   =  1.6139794706151238
επανάληψη :  53   f( [-0.67252309  0.98728029] )   =  1.61392974481947
επανάληψη :  54   f( [-0.6744914   0.98849191] )   =  1.613889043017793
επανάληψη :  55   f( [-0.67627195  0.98958838] )   =  1.613855729100509
επανάληψη :  56   f( [-0.67788264  0.99058059] )   =  1.6138284631991506
επανάληψη :  57   f( [-0.67933966  0.99147842] )   =  1.6138061481510637
επανάληψη :  58   f( [-0.68065766  0.99229082] )   =  1.6137878856117374
επανάληψη :  59   f( [-0.68184989  0.99302588] )   =  1.613772940083233
επανάληψη :  60   f( [-0.68292835  0.99369095] )   =  1.6137607094360922
επανάληψη :  61   f( [-0.68390389  0.99429268] )   =  1.6137507007563998
επανάληψη :  62   f( [-0.68478632  0.99483708] )   =  1.6137425105588692
επανάληψη :  63   f( [-0.68558453  0.9953296 ] )   =  1.6137358085788278
επανάληψη :  64   f( [-0.68630655  0.99577518] )   =  1.6137303244973382
επανάληψη :  65   f( [-0.68695965  0.99617829] )   =  1.6137258370697918
επανάληψη :  66   f( [-0.6875504   0.99654296] )   =  1.6137221652236762
επανάληψη :  67   f( [-0.68808476  0.99687286] )   =  1.613719160769448
επανάληψη :  68   f( [-0.68856812  0.99717129] )   =  1.6137167024326895
επανάληψη :  69   f( [-0.68900532  0.99744126] )   =  1.613714690968377
επανάληψη :  70   f( [-0.68940079  0.99768548] )   =  1.613713045161305
επανάληψη :  71   f( [-0.6897585  0.9979064] )   =  1.613711698552128
επανάληψη :  72   f( [-0.69008206  0.99810624] )   =  1.6137105967575112
επανάληψη :  73   f( [-0.69037473  0.99828701] )   =  1.6137096952766825
επανάληψη :  74   f( [-0.69063945  0.99845053] )   =  1.613708957696185
επανάληψη :  75   f( [-0.6908789   0.99859845] )   =  1.6137083542205857
επανάληψη :  76   f( [-0.69109549  0.99873225] )   =  1.613707860470008
επανάληψη :  77   f( [-0.6912914   0.99885328] )   =  1.6137074564960583
επανάληψη :  78   f( [-0.6914686   0.99896276] )   =  1.6137071259765103
επανάληψη :  79   f( [-0.69162888  0.99906179] )   =  1.6137068555562826
επανάληψη :  80   f( [-0.69177386  0.99915136] )   =  1.6137066343081568
επανάληψη :  81   f( [-0.691905    0.99923239] )   =  1.6137064532914818
επανάληψη :  82   f( [-0.69202361  0.99930568] )   =  1.613706305191073
επανάληψη :  83   f( [-0.6921309   0.99937197] )   =  1.6137061840217308
επανάληψη :  84   f( [-0.69222794  0.99943193] )   =  1.613706084886465
επανάληψη :  85   f( [-0.69231572  0.99948617] )   =  1.6137060037786628
επανάληψη :  86   f( [-0.69239512  0.99953523] )   =  1.6137059374202156
επανάληψη :  87   f( [-0.69246693  0.99957961] )   =  1.6137058831290698
επανάληψη :  88   f( [-0.69253189  0.99961975] )   =  1.6137058387108565
```

```
επανάληψη :  89   f( [-0.69259064  0.99965606] )   =  1.613705802370221
επανάληψη :  90   f( [-0.69264379  0.9996889 ] )   =  1.6137057726382737
επανάληψη :  91   f( [-0.69269185  0.99971861] )   =  1.6137057483132273
επανάληψη :  92   f( [-0.69273533  0.99974548] )   =  1.6137057284118326
επανάληψη :  93   f( [-0.69277466  0.99976978] )   =  1.6137057121296392
επανάληψη :  94   f( [-0.69281023  0.99979176] )   =  1.6137056988084828
επανάληψη :  95   f( [-0.69284241  0.99981165] )   =  1.6137056879098863
επανάληψη :  96   f( [-0.69287151  0.99982963] )   =  1.6137056789932935
επανάληψη :  97   f( [-0.69289784  0.9998459 ] )   =  1.6137056716982654
επανάληψη :  98   f( [-0.69292165  0.99986061] )   =  1.613705665729909
επανάληψη :  99   f( [-0.69294318  0.99987392] )   =  1.6137056608469589
επανάληψη :  100   f( [-0.69296266  0.99988596] )   =  1.6137056568520245
επανάληψη :  101   f( [-0.69298028  0.99989685] )   =  1.6137056535836127
επανάληψη :  102   f( [-0.69299622  0.9999067 ] )   =  1.6137056509095982
επανάληψη :  103   f( [-0.69301063  0.99991561] )   =  1.6137056487218842
επανάληψη :  104   f( [-0.69302367  0.99992367] )   =  1.6137056469320321
επανάληψη :  105   f( [-0.69303547  0.99993096] )   =  1.613705645467686
επανάληψη :  106   f( [-0.69304614  0.99993755] )   =  1.6137056442696491
επανάληψη :  107   f( [-0.69305578  0.99994351] )   =  1.6137056432894905
επανάληψη :  108   f( [-0.69306451  0.99994891] )   =  1.6137056424875857
επανάληψη :  109   f( [-0.69307241  0.99995379] )   =  1.613705641831518
επανάληψη :  110   f( [-0.69307955  0.9999582 ] )   =  1.6137056412947643
επανάληψη :  111   f( [-0.693086    0.99996219] )   =  1.6137056408556267
επανάληψη :  112   f( [-0.69309185  0.9999658 ] )   =  1.613705640496352
επανάληψη :  113   f( [-0.69309713  0.99996907] )   =  1.613705640202416
επανάληψη :  114   f( [-0.69310191  0.99997202] )   =  1.6137056399619363
επανάληψη :  115   f( [-0.69310623  0.99997469] )   =  1.613705639765191
επανάληψη :  116   f( [-0.69311014  0.99997711] )   =  1.6137056396042269
επανάληψη :  117   f( [-0.69311368  0.9999793 ] )   =  1.6137056394725358
επανάληψη :  118   f( [-0.69311688  0.99998127] )   =  1.6137056393647948
επανάληψη :  119   f( [-0.69311977  0.99998306] )   =  1.613705639276648
επανάληψη :  120   f( [-0.69312239  0.99998468] )   =  1.613705639204532
επανάληψη :  121   f( [-0.69312476  0.99998614] )   =  1.6137056391455311
επανάληψη :  122   f( [-0.6931269   0.99998746] )   =  1.6137056390972604
επανάληψη :  123   f( [-0.69312883  0.99998866] )   =  1.6137056390577684
επανάληψη :  124   f( [-0.69313059  0.99998974] )   =  1.6137056390254587
επανάληψη :  125   f( [-0.69313217  0.99999072] )   =  1.6137056389990247
επανάληψη :  126   f( [-0.6931336   0.99999161] )   =  1.6137056389773983
επανάληψη :  127   f( [-0.6931349   0.99999241] )   =  1.613705638959705
επανάληψη :  128   f( [-0.69313607  0.99999314] )   =  1.6137056389452293
επανάληψη :  129   f( [-0.69313713  0.99999379] )   =  1.6137056389333861
επανάληψη :  130   f( [-0.69313809  0.99999438] )   =  1.613705638923697
επανάληψη :  131   f( [-0.69313896  0.99999492] )   =  1.61370563891577
επανάληψη :  132   f( [-0.69313975  0.99999541] )   =  1.6137056389092845
επανάληψη :  133   f( [-0.69314046  0.99999584] )   =  1.613705638903979
```

```
επανάληψη :  134   f( [-0.6931411   0.99999624] )   =  1.6137056388996378
επανάληψη :  135   f( [-0.69314168  0.9999966 ] )   =  1.6137056388960862
επανάληψη :  136   f( [-0.6931422   0.99999692] )   =  1.6137056388931805
επανάληψη :  137   f( [-0.69314268  0.99999722] )   =  1.6137056388908033
επανάληψη :  138   f( [-0.69314311  0.99999748] )   =  1.6137056388888584
επανάληψη :  139   f( [-0.6931435   0.99999772] )   =  1.6137056388872675
επανάληψη :  140   f( [-0.69314385  0.99999794] )   =  1.6137056388859654
επανάληψη :  141   f( [-0.69314417  0.99999814] )   =  1.6137056388849005
επανάληψη :  142   f( [-0.69314446  0.99999832] )   =  1.6137056388840292
επανάληψη :  143   f( [-0.69314472  0.99999848] )   =  1.6137056388833164
επανάληψη :  144   f( [-0.69314495  0.99999862] )   =  1.6137056388827333
επανάληψη :  145   f( [-0.69314516  0.99999875] )   =  1.613705638882256
επανάληψη :  146   f( [-0.69314536  0.99999887] )   =  1.6137056388818656
επανάληψη :  147   f( [-0.69314553  0.99999898] )   =  1.6137056388815463
επανάληψη :  148   f( [-0.69314569  0.99999908] )   =  1.6137056388812847
επανάληψη :  149   f( [-0.69314583  0.99999917] )   =  1.613705638881071
επανάληψη :  150   f( [-0.69314596  0.99999925] )   =  1.6137056388808961
επανάληψη :  151   f( [-0.69314608  0.99999932] )   =  1.6137056388807531
επανάληψη :  152   f( [-0.69314618  0.99999938] )   =  1.613705638880636
επανάληψη :  153   f( [-0.69314628  0.99999944] )   =  1.6137056388805402
επανάληψη :  154   f( [-0.69314636  0.99999949] )   =  1.613705638880462
```

Επομένως, η βέλτιστη λύση με ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων με την χρήση του αλγορίθμου της πιο απότομης κατάβασης με οπισθοδρόμηση είναι : 1.6137056

(γ.)

Η μέθοδος του Newton με οπισθοδρόμηση στην ουσία εκτελεί τα εξής βήματα:

1. Βρίσκει το διάνυσμα κλίσης στο αρχικό σημείο $\vec{x_0}$
2. Βρίσκει τον αντίστροφο του Εσσιανού πίνακα της f στο σημείο $\vec{x_0}$. ($Hf(\vec{x_0})^{-1}$).
3. Στην συνέχεια, θέτει $\vec{d_0} = -Hf(\vec{x_0})^{-1} \cdot \nabla f(\vec{x_0})$.
4. Θέτει $t=1$
5. Βρίσκει την επόμενη εκτίμηση-προσέγγιση $\vec{x_1} = \vec{x_0} + t\vec{d_0}$
6. Ελέγχει αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$f(\vec{x_1}) \le f(\vec{x_0}) + c \cdot \nabla f(\vec{x_0}) \cdot (\vec{x_1} - \vec{x_0}) \quad ?!$$

7. Αν ικανοποιείται, τότε το $\vec{x_1}$ είναι δεκτό
8. Αλλιώς, θέτει $t=\frac{t}{2}$ και επιστρέφει στο βήμα 5.

Συγκεκριμένα, για $f(x_1,x_2)=2x_1+x_2^2+e^{-(x_1+x_2-1)}$, με αρχικό σημείο $(x_1,x_2)=(3,3)$, και συντελεστή $(c=0.8)$ έλαβε τα εξής:

```python
import math
import numpy as np

def f(x):
    return 2*x[0] + x[1]**2 + math.exp(-x[0]-x[1]+1)

def gradient(x):
    return np.array([2-math.exp(-x[0] -x[1] +1),2*x[1]-math.exp(-x[0] -x[1] +1)])

def H_1(x):
    return (1/(2*math.exp(-x[0]-x[1]+1)))*np.array([[2+math.exp(-x[0]-x[1]+1),-math.exp(-x[0]-x[1]+1)],[-math.exp(-x[0]-x[1]+1),math.exp(-x[0]-x[1]+1)]])


def backtrackingN(x,c):
    t=1
    while f(x+t*(-1)*np.inner(gradient(x),H_1(x))) > f(x) - c * t * np.inner(gradient(x), gradient(x)) :
        t = t/2
    print("t : ",t)
    return t

def newton():
    x=np.array([3,3])
    tt=backtrackingN(x,0.8)
    n = 1
    while (np.linalg.norm(tt*(-1)*np.inner(gradient(x),H_1(x))) > 10**(-7)):
        x = x + tt*(-1)*np.inner(gradient(x),H_1(x))
        print("επανάληψη : ", n , " " , "f(" , x , ") " , " = " , f(x))
        n= n + 1

#run
newton()
```

Τα αποτελέσματα του παραπάνω κώδικα είναι :

```
t :  0.015625
επανάληψη :  1   f( [-1.59103622  2.96875    ] )   =  6.316830775339463
επανάληψη :  2   f( [-1.59024154  2.93798828] )   =  6.157569780348654
επανάληψη :  3   f( [-1.58858153  2.90770721] )   =  6.004382385785395
επανάληψη :  4   f( [-1.58614624  2.87789929] )   =  5.856964818459389
επανάληψη :  5   f( [-1.5830157   2.84855711] )   =  5.715036917650729
επανάληψη :  6   f( [-1.57926127  2.81967341] )   =  5.578339318712423
επανάληψη :  7   f( [-1.57494678  2.79124101] )   =  5.446631081955148
επανάληψη :  8   f( [-1.5701295   2.76325287] )   =  5.3196876826848785
επανάληψη :  9   f( [-1.56486094  2.73570204] )   =  5.19729929637051
επανάληψη :  10   f( [-1.55918754  2.7085817 ] )   =  5.079269326693315
επανάληψη :  11   f( [-1.55315128  2.68188511] )   =  4.965413134806861
επανάληψη :  12   f( [-1.54679018  2.65560566] )   =  4.855556936327713
επανάληψη :  13   f( [-1.54013874  2.62973682] )   =  4.749536838973302
επανάληψη :  14   f( [-1.53322831  2.60427218] )   =  4.647197998795438
επανάληψη :  15   f( [-1.52608744  2.57920543] )   =  4.548393876945239
επανάληψη :  16   f( [-1.51874217  2.55453034] )   =  4.45298558208615
επανάληψη :  17   f( [-1.51121627  2.53024081] )   =  4.360841286125275
επανάληψη :  18   f( [-1.50353146  2.50633079] )   =  4.2718357029957765
επανάληψη :  19   f( [-1.49570764  2.48279437] )   =  4.185849621898292
επανάληψη :  20   f( [-1.48776304  2.45962571] )   =  4.102769487777431
επανάληψη :  21   f( [-1.47971435  2.43681906] )   =  4.022487022932485
επανάληψη :  22   f( [-1.47157692  2.41436876] )   =  3.9448988845878192
επανάληψη :  23   f( [-1.46336483  2.39226925] )   =  3.869906354016108
επανάληψη :  24   f( [-1.45509102  2.37051504] )   =  3.7974150534466826
επανάληψη :  25   f( [-1.44676741  2.34910075] )   =  3.727334687525439
επανάληψη :  26   f( [-1.43840493  2.32802105] )   =  3.659578806541194
επανάληψη :  27   f( [-1.43001367  2.30727072] )   =  3.5940645890112224
επανάληψη :  28   f( [-1.42160291  2.28684461] )   =  3.530712641538292
επανάληψη :  29   f( [-1.41318119  2.26673767] )   =  3.4694468141228194
επανάληψη :  30   f( [-1.40475637  2.24694489] )   =  3.4101940293447806
επανάληψη :  31   f( [-1.39633569  2.22746138] )   =  3.3528841240275487
επανάληψη :  32   f( [-1.38792582  2.20828229] )   =  3.297449702165102
επανάληψη :  33   f( [-1.37953291  2.18940288] )   =  3.2438259980396302
επανάληψη :  34   f( [-1.37116261  2.17081846] )   =  3.1919507485822125
επανάληψη :  35   f( [-1.3628201   2.15252442] )   =  3.141764074137826
επανάληψη :  36   f( [-1.35451018  2.13451623] )   =  3.093208366890251
επανάληψη :  37   f( [-1.34623722  2.11678941] )   =  3.046228186284372
επανάληψη :  38   f( [-1.33800528  2.09933958] )   =  3.000770160854901
επανάληψη :  39   f( [-1.32981804  2.0821624 ] )   =  2.956782895933064
επανάληψη :  40   f( [-1.3216789   2.06525361] )   =  2.9142168867575684
επανάληψη :  41   f( [-1.31359096  2.04860902] )   =  2.8730244365643296
επανάληψη :  42   f( [-1.30555707  2.03222451] )   =  2.833159579271834
επανάληψη :  43   f( [-1.2975798  2.016096 ] )   =  2.79457800641643
επανάληψη :  44   f( [-1.28966152  2.0002195 ] )   =  2.7572369980249585
επανάληψη :  45   f( [-1.28180438  1.98459107] )   =  2.721095357141496
επανάληψη :  46   f( [-1.27401032  1.96920683] )   =  2.6861133477510335
επανάληψη :  47   f( [-1.26628109  1.95406298] )   =  2.652252635866177З
επανάληψη :  48   f( [-1.25861829  1.93915574] )   =  2.6194762335636312
επανάληψη :  49   f( [-1.25102334  1.92448143] )   =  2.587748445775758
επανάληψη :  50   f( [-1.24349751  1.91003641] )   =  2.5570348196590924
```

```
επανάληψη :  51   f( [-1.23604193  1.89581709] )   =  2.527302096376559
επανάληψη :  52   f( [-1.22865761  1.88181995] )   =  2.498518165143521
επανάληψη :  53   f( [-1.22134543  1.86804151] )   =  2.4706520193998323
επανάληψη :  54   f( [-1.21410615  1.85447836] )   =  2.4436737149809393
επανάληψη :  55   f( [-1.20694042  1.84112714] )   =  2.417554330170886
επανάληψη :  56   f( [-1.19984882  1.82798453] )   =  2.392265927528989
επανάληψη :  57   f( [-1.19283181  1.81504727] )   =  2.3677815173899823
επανάληψη :  58   f( [-1.18588976  1.80231216] )   =  2.3440750229448013
επανάληψη :  59   f( [-1.17902298  1.78977603] )   =  2.3211212468157845
επανάληψη :  60   f( [-1.1722317   1.77743578] )   =  2.2988958390461907
επανάληψη :  61   f( [-1.16551606  1.76528835] )   =  2.2773752664294467
επανάληψη :  62   f( [-1.15887617  1.75333071] )   =  2.2565367831086087
επανάληψη :  63   f( [-1.15231203  1.74155992] )   =  2.2363584023811764
επανάληψη :  64   f( [-1.14582364  1.72997305] )   =  2.216818869648618
επανάληψη :  65   f( [-1.1394109   1.71856722] )   =  2.197897636453905
επανάληψη :  66   f( [-1.13307368  1.70733961] )   =  2.1795748355539164
επανάληψη :  67   f( [-1.12681181  1.69628743] )   =  2.16183125697689
επανάληψη :  68   f( [-1.12062507  1.68540793] )   =  2.144648325018148
επανάληψη :  69   f( [-1.11451321  1.67469844] )   =  2.128008076130131
επανάληψη :  70   f( [-1.10847591  1.66415627] )   =  2.111893137665369
επανάληψη :  71   f( [-1.10251285  1.65377883] )   =  2.0962867074334453
επανάληψη :  72   f( [-1.09662368  1.64356354] )   =  2.0811725340352227
επανάληψη :  73   f( [-1.090808    1.63350786] )   =  2.0665348979396736
επανάληψη :  74   f( [-1.08506539  1.6236093 ] )   =  2.05235859327059
επανάληψη :  75   f( [-1.0793954  1.6138654] )   =  2.0386289102722235
επανάληψη :  76   f( [-1.07379757  1.60427375] )   =  2.025331618424588
επανάληψη :  77   f( [-1.06827142  1.59483198] )   =  2.0124529501806974
επανάληψη :  78   f( [-1.06281643  1.58553773] )   =  1.9999795852994655
επανάληψη :  79   f( [-1.05743208  1.5763887 ] )   =  1.9878986357493575
επανάληψη :  80   f( [-1.05211782  1.56738263] )   =  1.9761976311591345
επανάληψη :  81   f( [-1.0468731   1.55851727] )   =  1.9648645047932352
επανάληψη :  82   f( [-1.04169735  1.54979044] )   =  1.9538875800304416
επανάληψη :  83   f( [-1.03658997  1.54119996] )   =  1.9432555573255215
επανάληψη :  84   f( [-1.03155039  1.53274372] )   =  1.9329575016345182
επανάληψη :  85   f( [-1.02657798  1.52441959] )   =  1.9229828302852905
επανάληψη :  86   f( [-1.02167214  1.51622554] )   =  1.91332130127575
επανάληψη :  87   f( [-1.01683225  1.50815951] )   =  1.9039630019830922
επανάληψη :  88   f( [-1.01205766  1.50021952] )   =  1.8948983382680475
επανάληψη :  89   f( [-1.00734776  1.49240359] )   =  1.886118023958943
επανάληψη :  90   f( [-1.00270189  1.48470979] )   =  1.8776130707010226
επανάληψη :  91   f( [-0.99811941  1.4771362 ] )   =  1.8693747781571353
επανάληψη :  92   f( [-0.99359966  1.46968094] )   =  1.8613947245465101
επανάληψη :  93   f( [-0.989142    1.46234218] )   =  1.8536647575089111
επανάληψη :  94   f( [-0.98474577  1.45511808] )   =  1.8461769852820258
επανάληψη :  95   f( [-0.9804103   1.44800686] )   =  1.8389237681804467
επανάληψη :  96   f( [-0.97613495  1.44100675] )   =  1.8318977103651093
επανάληψη :  97   f( [-0.97191904  1.43411602] )   =  1.825091651892512
επανάληψη :  98   f( [-0.96776191  1.42733296] )   =  1.8184986610334948
επανάληψη :  99   f( [-0.9636629   1.42065588] )   =  1.8121120268517619
επανάληψη :  100   f( [-0.95962136  1.41408313] )   =  1.8059252520327551
επανάληψη :  101   f( [-0.95563662  1.40761309] )   =  1.7999320459538501
επανάληψη :  102   f( [-0.95170801  1.40124413] )   =  1.7941263179872158
```

```
επανάληψη :  103   f( [-0.9478349   1.39497469] )   =  1.7885021710270286
επανάληψη :  104   f( [-0.9440166   1.38880321] )   =  1.7830538952330615
επανάληψη :  105   f( [-0.94025248  1.38272816] )   =  1.7777759619829743
επανάληψη :  106   f( [-0.93654188  1.37674803] )   =  1.7726630180259433
επανάληψη :  107   f( [-0.93288416  1.37086135] )   =  1.7677098798305495
επανάληψη :  108   f( [-0.92927866  1.36506664] )   =  1.7629115281201184
επανάληψη :  109   f( [-0.92572475  1.35936247] )   =  1.7582631025889637
επανάληψη :  110   f( [-0.92222179  1.35374743] )   =  1.7537598967932444
επανάληψη :  111   f( [-0.91876914  1.34822013] )   =  1.7493973532103735
επανάληψη :  112   f( [-0.91536617  1.34277919] )   =  1.745171058461156
επανάληψη :  113   f( [-0.91201225  1.33742327] )   =  1.7410767386890391
επανάληψη :  114   f( [-0.90870677  1.33215103] )   =  1.737110255091085
επανάληψη :  115   f( [-0.9054491   1.32696117] )   =  1.7332675995954534
επανάληψη :  116   f( [-0.90223864  1.3218524 ] )   =  1.729544890680401
επανάληψη :  117   f( [-0.89907476  1.31682345] )   =  1.7259383693299597
επανάληψη :  118   f( [-0.89595687  1.31187309] )   =  1.7224443951216604
επανάληψη :  119   f( [-0.89288437  1.30700007] )   =  1.7190594424418113
επανάληψη :  120   f( [-0.88985666  1.3022032 ] )   =  1.7157800968240264
επανάληψη :  121   f( [-0.88687316  1.29748127] )   =  1.7126030514068356
επανάληψη :  122   f( [-0.88393328  1.29283313] )   =  1.7095251035063725
επανάληψη :  123   f( [-0.88103644  1.28825761] )   =  1.7065431513002685
επανάληψη :  124   f( [-0.87818208  1.28375358] )   =  1.7036541906190266
επανάληψη :  125   f( [-0.87536961  1.27931993] )   =  1.7008553118412797
επανάληψη :  126   f( [-0.87259848  1.27495556] )   =  1.6981436968894583
επανάληψη :  127   f( [-0.86986814  1.27065938] )   =  1.6955166163225295
επανάληψη :  128   f( [-0.86717803  1.26643033] )   =  1.692971426522569
επανάληψη :  129   f( [-0.8645276   1.26226735] )   =  1.6905055669720568
επανάληψη :  130   f( [-0.86191631  1.25816942] )   =  1.6881165576188855
επανάληψη :  131   f( [-0.85934364  1.25413553] )   =  1.6858019963261788
επανάληψη :  132   f( [-0.85680905  1.25016466] )   =  1.6835595564041208
επανάληψη :  133   f( [-0.85431201  1.24625584] )   =  1.681386984221085
επανάληψη :  134   f( [-0.85185202  1.24240809] )   =  1.6792820968914568
επανάληψη :  135   f( [-0.84942855  1.23862046] )   =  1.6772427800376277
επανάληψη :  136   f( [-0.8470411   1.23489202] )   =  1.6752669856237183
επανάληψη :  137   f( [-0.84468918  1.23122183] )   =  1.6733527298586874
επανάληψη :  138   f( [-0.84237228  1.22760899] )   =  1.6714980911665471
επανάληψη :  139   f( [-0.84008992  1.2240526 ] )   =  1.6697012082214961
επανάληψη :  140   f( [-0.83784161  1.22055178] )   =  1.6679602780458438
επανάληψη :  141   f( [-0.83562687  1.21710566] )   =  1.6662735541686853
επανάληψη :  142   f( [-0.83344524  1.21371338] )   =  1.6646393448433388
επανάληψη :  143   f( [-0.83129624  1.21037411] )   =  1.663056011321642
επανάληψη :  144   f( [-0.82917941  1.20708701] )   =  1.6615219661832523
επανάληψη :  145   f( [-0.8270943   1.20385128] )   =  1.6600356717181708
επανάληψη :  146   f( [-0.82504046  1.2006661 ] )   =  1.6585956383607583
επανάληψη :  147   f( [-0.82301744  1.19753069] )   =  1.6572004231735793
επανάληψη :  148   f( [-0.8210248   1.19444428] )   =  1.6558486283794605
επανάληψη :  149   f( [-0.81906211  1.19140609] )   =  1.6545388999402033
επανάληψη :  150   f( [-0.81712895  1.18841537] )   =  1.6532699261804442
επανάληψη :  151   f( [-0.81522487  1.18547137] )   =  1.652040436455207
επανάληψη :  152   f( [-0.81334948  1.18257338] )   =  1.6508491998597385
επανάληψη :  153   f( [-0.81150235  1.17972068] )   =  1.6496950239802604
επανάληψη :  154   f( [-0.80968308  1.17691254] )   =  1.6485767536843303
```

```
επανάληψη :  155   f( [-0.80789127  1.17414828] )   =  1.6474932699495288
επανάληψη :  156   f( [-0.80612652  1.17142721] )   =  1.6464434887292445
επανάληψη :  157   f( [-0.80438843  1.16874866] )   =  1.6454263598543697
επανάληψη :  158   f( [-0.80267663  1.16611197] )   =  1.6444408659697483
επανάληψη :  159   f( [-0.80099072  1.16351647] )   =  1.6434860215042657
επανάληψη :  160   f( [-0.79933034  1.16096152] )   =  1.642560871673503
επανάληψη :  161   f( [-0.7976951  1.1584465] )   =  1.6416644915139118
επανάληψη :  162   f( [-0.79608465  1.15597077] )   =  1.6407959849475013
επανάληψη :  163   f( [-0.79449862  1.15353373] )   =  1.639954483876066
επανάληψη :  164   f( [-0.79293665  1.15113476] )   =  1.6391391473040036
επανάληψη :  165   f( [-0.79139839  1.14877328] )   =  1.6383491604888156
επανάληψη :  166   f( [-0.7898835  1.1464487] )   =  1.6375837341184076
επανάληψη :  167   f( [-0.78839162  1.14416044] )   =  1.6368421035143315
επανάληψη :  168   f( [-0.78692243  1.14190793] )   =  1.636123527860144
επανάληψη :  169   f( [-0.78547559  1.13969062] )   =  1.6354272894540853
επανάληψη :  170   f( [-0.78405076  1.13750796] )   =  1.6347526929852976
επανάληψη :  171   f( [-0.78264763  1.13535939] )   =  1.6340990648328393
επανάληψη :  172   f( [-0.78126587  1.1332444 ] )   =  1.6334657523867688
επανάληψη :  173   f( [-0.77990516  1.13116246] )   =  1.632852123390597
επανάληψη :  174   f( [-0.7785652   1.12911305] )   =  1.632257565304427
επανάληψη :  175   f( [-0.77724568  1.12709565] )   =  1.6316814846881291
επανάληψη :  176   f( [-0.7759463   1.12510979] )   =  1.6311233066039126
επανάληψη :  177   f( [-0.77466675  1.12315494] )   =  1.6305824740376769
επανάληψη :  178   f( [-0.77340674  1.12123065] )   =  1.630058447338554
επανάληψη :  179   f( [-0.77216598  1.11933642] )   =  1.6295507036760553
επανάληψη :  180   f( [-0.77094418  1.11747179] )   =  1.6290587365142777
επανάληψη :  181   f( [-0.76974106  1.11563629] )   =  1.6285820551026167
επανάληψη :  182   f( [-0.76855635  1.11382947] )   =  1.6281201839824724
επανάληψη :  183   f( [-0.76738976  1.11205089] )   =  1.6276726625094404
επανάληψη :  184   f( [-0.76624103  1.11030009] )   =  1.6272390443904965
επανάληψη :  185   f( [-0.76510989  1.10857665] )   =  1.6268188972357023
επανάληψη :  186   f( [-0.76399607  1.10688014] )   =  1.6264118021239742
επανάληψη :  187   f( [-0.76289933  1.10521014] )   =  1.626017353182468
επανάληψη :  188   f( [-0.76181939  1.10356623] )   =  1.6256351571791556
επανάληψη :  189   f( [-0.76075601  1.10194801] )   =  1.6252648331281692
επανάληψη :  190   f( [-0.75970894  1.10035507] )   =  1.6249060119075172
επανάληψη :  191   f( [-0.75867794  1.09878703] )   =  1.6245583358887787
επανάληψη :  192   f( [-0.75766275  1.09724348] )   =  1.6242214585783998
επανάληψη :  193   f( [-0.75666316  1.09572405] )   =  1.6238950442702222
επανάληψη :  194   f( [-0.75567891  1.09422836] )   =  1.6235787677088989
επανάληψη :  195   f( [-0.75470979  1.09275604] )   =  1.623272313763844
επανάληψη :  196   f( [-0.75375555  1.09130673] )   =  1.622975377113392
επανάληψη :  197   f( [-0.75281599  1.08988006] )   =  1.6226876619388422
επανάληψη :  198   f( [-0.75189086  1.08847569] )   =  1.6224088816280786
επανάληψη :  199   f( [-0.75097997  1.08709325] )   =  1.6221387584884617
επανάληψη :  200   f( [-0.75008309  1.08573242] )   =  1.6218770234687032
επανάληψη :  201   f( [-0.7492      1.08439285] )   =  1.6216234158894407
επανάληψη :  202   f( [-0.74833051  1.08307421] )   =  1.6213776831822366
επανάληψη :  203   f( [-0.74747441  1.08177618] )   =  1.6211395806367388
επανάληψη :  204   f( [-0.74663149  1.08049843] )   =  1.6209088711557489
επανάληψη :  205   f( [-0.74580155  1.07924064] )   =  1.6206853250179414
επανάληψη :  206   f( [-0.74498439  1.0780025 ] )   =  1.6204687196480037
```

```
επανάληψη :  207   f( [-0.74417983  1.07678371] )   =  1.6202588393939574
επανάληψη :  208   f( [-0.74338767  1.07558397] )   =  1.6200554753114382
επανάληψη :  209   f( [-0.74260773  1.07440297] )   =  1.6198584249547128
επανάληψη :  210   f( [-0.74183981  1.07324042] )   =  1.6196674921742273
επανάληψη :  211   f( [-0.74108373  1.07209604] )   =  1.6194824869204765
επανάληψη :  212   f( [-0.74033932  1.07096954] )   =  1.6193032250539992
επανάληψη :  213   f( [-0.73960639  1.06986064] )   =  1.6191295281613045
επανάληψη :  214   f( [-0.73888478  1.06876907] )   =  1.6189612233765485
επανάληψη :  215   f( [-0.73817431  1.06769455] )   =  1.6187981432087746
επανάληψη :  216   f( [-0.7374748   1.06663683] )   =  1.6186401253745473
επανάληψη :  217   f( [-0.7367861   1.06559562] )   =  1.6184870126358102
επανάληψη :  218   f( [-0.73610804  1.06457069] )   =  1.6183386526428027
επανάληψη :  219   f( [-0.73544045  1.06356178] )   =  1.6181948977818792
επανάληψη :  220   f( [-0.73478317  1.06256862] )   =  1.618055605028074
επανάληψη :  221   f( [-0.73413606  1.06159099] )   =  1.617920635802269
επανάληψη :  222   f( [-0.73349895  1.06062863] )   =  1.6177898558328137
επανάληψη :  223   f( [-0.73287168  1.05968131] )   =  1.6176631350214625
επανάληψη :  224   f( [-0.73225412  1.05874879] )   =  1.617540347313493
επανάληψη :  225   f( [-0.73164611  1.05783084] )   =  1.6174213705718732
επανάληψη :  226   f( [-0.7310475   1.05692723] )   =  1.6173060864553528
επανάληψη :  227   f( [-0.73045816  1.05603774] )   =  1.6171943803003566
επανάληψη :  228   f( [-0.72987793  1.05516215] )   =  1.617086141006557
επανάληψη :  229   f( [-0.72930668  1.05430024] )   =  1.6169812609260148
επανάληψη :  230   f( [-0.72874428  1.0534518 ] )   =  1.6168796357557762
επανάληψη :  231   f( [-0.72819058  1.05261662] )   =  1.6167811644338144
επανάληψη :  232   f( [-0.72764545  1.05179448] )   =  1.6166857490382172
επανάληψη :  233   f( [-0.72710877  1.05098519] )   =  1.6165932946895119
επανάληψη :  234   f( [-0.72658039  1.05018855] )   =  1.6165037094560375
επανάληψη :  235   f( [-0.7260602   1.04940435] )   =  1.616416904262262
επανάληψη :  236   f( [-0.72554807  1.04863241] )   =  1.6163327927999578
επανάληψη :  237   f( [-0.72504388  1.04787253] )   =  1.6162512914421416
επανάληψη :  238   f( [-0.7245475   1.04712452] )   =  1.616172319159698
επανάληψη :  239   f( [-0.72405881  1.0463882 ] )   =  1.6160957974405965
επανάληψη :  240   f( [-0.7235777   1.04566339] )   =  1.6160216502116262
επανάληψη :  241   f( [-0.72310404  1.0449499 ] )   =  1.615949803762568
επανάληψη :  242   f( [-0.72263773  1.04424755] )   =  1.615880186672725
επανάληψη :  243   f( [-0.72217865  1.04355619] )   =  1.6158127297397453
επανάληψη :  244   f( [-0.72172669  1.04287562] )   =  1.6157473659106552
επανάληψη :  245   f( [-0.72128174  1.04220569] )   =  1.615684030215044
επανάληψη :  246   f( [-0.72084369  1.04154622] )   =  1.6156226597003258
επανάληψη :  247   f( [-0.72041244  1.04089706] )   =  1.6155631933690178
επανάληψη :  248   f( [-0.71998788  1.04025805] )   =  1.61550557211797
επανάληψη :  249   f( [-0.71956991  1.03962902] )   =  1.6154497386794868
επανάληψη :  250   f( [-0.71915842  1.03900981] )   =  1.6153956375642806
επανάληψη :  251   f( [-0.71875332  1.03840028] )   =  1.6153432150062008
επανάληψη :  252   f( [-0.71835451  1.03780028] )   =  1.6152924189086821
επανάληψη :  253   f( [-0.71796189  1.03720965] )   =  1.6152431987928597
επανάληψη :  254   f( [-0.71757536  1.03662825] )   =  1.6151955057473
επανάληψη :  255   f( [-0.71719484  1.03605593] )   =  1.6151492923792907
επανάληψη :  256   f( [-0.71682023  1.03549256] )   =  1.6151045127676527
επανάληψη :  257   f( [-0.71645143  1.03493799] )   =  1.615061122417014
επανάληψη :  258   f( [-0.71608836  1.03439208] )   =  1.6150190782135103
```

```
επανάληψη :  259   f( [-0.71573094  1.03385471] )   =  1.6149783383818612
επανάληψη :  260   f( [-0.71537906  1.03332573] )   =  1.614938862443781
επανάληψη :  261   f( [-0.71503265  1.03280501] )   =  1.6149006111776856
επανάληψη :  262   f( [-0.71469163  1.03229243] )   =  1.61486354657965
επανάληψη :  263   f( [-0.7143559   1.03178786] )   =  1.6148276318255803
επανάληψη :  264   f( [-0.71402539  1.03129118] )   =  1.6147928312345634
επανάληψη :  265   f( [-0.71370002  1.03080225] )   =  1.614759110233355
επανάληψη :  266   f( [-0.71337971  1.03032097] )   =  1.6147264353219726
επανάληψη :  267   f( [-0.71306437  1.0298472 ] )   =  1.614694774040357
επανάληψη :  268   f( [-0.71275394  1.02938084] )   =  1.6146640949360727
επανάληψη :  269   f( [-0.71244833  1.02892177] )   =  1.614634367533009
επανάληψη :  270   f( [-0.71214747  1.02846986] )   =  1.6146055623010582
επανάληψη :  271   f( [-0.7118513   1.02802502] )   =  1.614577650626733
επανάληψη :  272   f( [-0.71155973  1.02758713] )   =  1.6145506047846991
επανάληψη :  273   f( [-0.71127269  1.02715608] )   =  1.614524397910191
επανάληψη :  274   f( [-0.71099012  1.02673177] )   =  1.6144990039722886
επανάληψη :  275   f( [-0.71071194  1.02631408] )   =  1.6144743977480196
επανάληψη :  276   f( [-0.71043809  1.02590293] )   =  1.6144505547972712
επανάληψη :  277   f( [-0.7101685   1.02549819] )   =  1.614427451438478
επανάληψη :  278   f( [-0.70990311  1.02509978] )   =  1.6144050647250685
επανάληψη :  279   f( [-0.70964184  1.0247076 ] )   =  1.614383372422642
επανάληψη :  280   f( [-0.70938464  1.02432154] )   =  1.6143623529868536
επανάληψη :  281   f( [-0.70913144  1.02394152] )   =  1.6143419855419892
επανάληψη :  282   f( [-0.70888218  1.02356743] )   =  1.614322249860203
επανάληψη :  283   f( [-0.70863681  1.02319919] )   =  1.6143031263414038
επανάληψη :  284   f( [-0.70839525  1.0228367 ] )   =  1.6142845959937637
επανάληψη :  285   f( [-0.70815745  1.02247988] )   =  1.6142666404148316
επανάληψη :  286   f( [-0.70792335  1.02212863] )   =  1.6142492417732364
επανάληψη :  287   f( [-0.70769289  1.02178287] )   =  1.6142323827909564
επανάληψη :  288   f( [-0.70746603  1.02144252] )   =  1.6142160467261404
επανάληψη :  289   f( [-0.70724269  1.02110748] )   =  1.614200217356463
επανάληψη :  290   f( [-0.70702283  1.02077767] )   =  1.6141848789629942
επανάληψη :  291   f( [-0.7068064   1.02045302] )   =  1.614170016314575
επανάληψη :  292   f( [-0.70659334  1.02013344] )   =  1.6141556146526728
επανάληψη :  293   f( [-0.70638359  1.01981886] )   =  1.614141659676712
επανάληψη :  294   f( [-0.70617711  1.01950919] )   =  1.614128137529856
επανάληψη :  295   f( [-0.70597385  1.01920436] )   =  1.6141150347852353
επανάληψη :  296   f( [-0.70577375  1.01890429] )   =  1.6141023384325996
επανάληψη :  297   f( [-0.70557677  1.01860891] )   =  1.6140900358653854
επανάληψη :  298   f( [-0.70538285  1.01831814] )   =  1.6140781148681869
επανάληψη :  299   f( [-0.70519196  1.01803192] )   =  1.6140665636046143
επανάληψη :  300   f( [-0.70500404  1.01775017] )   =  1.6140553706055294
επανάληψη :  301   f( [-0.70481905  1.01747283] )   =  1.6140445247576471
επανάληψη :  302   f( [-0.70463694  1.01719982] )   =  1.6140340152924912
επανάληψη :  303   f( [-0.70445767  1.01693107] )   =  1.6140238317756912
επανάληψη :  304   f( [-0.70428119  1.01666652] )   =  1.6140139640966138
επανάληψη :  305   f( [-0.70410746  1.01640611] )   =  1.614004402458315
επανάληψη :  306   f( [-0.70393644  1.01614976] )   =  1.613995137367805
επανάληψη :  307   f( [-0.70376808  1.01589742] )   =  1.6139861596266145
επανάληψη :  308   f( [-0.70360235  1.01564902] )   =  1.6139774603216543
επανάληψη :  309   f( [-0.7034392   1.01540451] )   =  1.6139690308163597
επανάληψη :  310   f( [-0.70327859  1.01516381] )   =  1.6139608627421071
```

```
επανάληψη :  311   f( [-0.70312048  1.01492688] )   =  1.6139529479899015
επανάληψη :  312   f( [-0.70296484  1.01469364] )   =  1.6139452787023167
επανάληψη :  313   f( [-0.70281163  1.01446406] )   =  1.6139378472656905
επανάληψη :  314   f( [-0.7026608   1.01423806] )   =  1.6139306463025596
επανάληψη :  315   f( [-0.70251232  1.01401559] )   =  1.6139236686643297
επανάληψη :  316   f( [-0.70236616  1.01379659] )   =  1.6139169074241737
επανάληψη :  317   f( [-0.70222228  1.01358102] )   =  1.6139103558701504
επανάληψη :  318   f( [-0.70208064  1.01336882] )   =  1.613904007498536
επανάληψη :  319   f( [-0.70194121  1.01315993] )   =  1.6138978560073631
επανάληψη :  320   f( [-0.70180395  1.01295431] )   =  1.613891895290161
επανάληψη :  321   f( [-0.70166883  1.01275189] )   =  1.613886119429889
επανάληψη :  322   f( [-0.70153582  1.01255265] )   =  1.6138805226930584
επανάληψη :  323   f( [-0.70140489  1.01235651] )   =  1.6138750995240378
επανάληψη :  324   f( [-0.70127599  1.01216344] )   =  1.6138698445395343
επανάληψη :  325   f( [-0.70114911  1.01197339] )   =  1.6138647525232457
επανάληψη :  326   f( [-0.7010242  1.0117863] )   =  1.61385981842068
επανάληψη :  327   f( [-0.70090124  1.01160214] )   =  1.6138550373341347
επανάληψη :  328   f( [-0.7007802   1.01142086] )   =  1.613850404517832
επανάληψη :  329   f( [-0.70066105  1.01124241] )   =  1.6138459153732043
επανάληψη :  330   f( [-0.70054375  1.01106674] )   =  1.6138415654443292
επανάληψη :  331   f( [-0.70042828  1.01089383] )   =  1.6138373504135013
επανάληψη :  332   f( [-0.70031462  1.01072361] )   =  1.6138332660969448
επανάληψη :  333   f( [-0.70020273  1.01055605] )   =  1.6138293084406587
επανάληψη :  334   f( [-0.70009258  1.01039112] )   =  1.6138254735163913
επανάληψη :  335   f( [-0.69998415  1.01022876] )   =  1.613821757517737
επανάληψη :  336   f( [-0.69987741  1.01006893] )   =  1.6138181567563568
επανάληψη :  337   f( [-0.69977234  1.0099116 ] )   =  1.6138146676583163
επανάληψη :  338   f( [-0.69966891  1.00975673] )   =  1.6138112867605356
επανάληψη :  339   f( [-0.69956709  1.00960429] )   =  1.6138080107073507
επανάληψη :  340   f( [-0.69946685  1.00945422] )   =  1.6138048362471809
επανάληψη :  341   f( [-0.69936819  1.0093065 ] )   =  1.6138017602292993
επανάληψη :  342   f( [-0.69927106  1.00916108] )   =  1.6137987796007054
επανάληψη :  343   f( [-0.69917544  1.00901794] )   =  1.6137958914030919
επανάληψη :  344   f( [-0.69908132  1.00887704] )   =  1.613793092769908
επανάληψη :  345   f( [-0.69898867  1.00873833] )   =  1.613790380923513
επανάληψη :  346   f( [-0.69889746  1.0086018 ] )   =  1.613787753172418
επανάληψη :  347   f( [-0.69880768  1.00846739] )   =  1.6137852069086134
επανάληψη :  348   f( [-0.69871929  1.00833509] )   =  1.6137827396049784
επανάληψη :  349   f( [-0.69863229  1.00820485] )   =  1.6137803488127735
επανάληψη :  350   f( [-0.69854664  1.00807665] )   =  1.6137780321592077
επανάληψη :  351   f( [-0.69846233  1.00795046] )   =  1.6137757873450835
επανάληψη :  352   f( [-0.69837934  1.00782623] )   =  1.6137736121425126
επανάληψη :  353   f( [-0.69829764  1.00770394] )   =  1.613771504392706
επανάληψη :  354   f( [-0.69821721  1.00758357] )   =  1.6137694620038283
επανάληψη :  355   f( [-0.69813804  1.00746508] )   =  1.613767482948923
επανάληψη :  356   f( [-0.69806011  1.00734844] )   =  1.613765565263898
επανάληψη :  357   f( [-0.69798339  1.00723362] )   =  1.613763707045577
επανάληψη :  358   f( [-0.69790787  1.00712059] )   =  1.6137619064498097
επανάληψη :  359   f( [-0.69783353  1.00700933] )   =  1.61376016168964
επανάληψη :  360   f( [-0.69776034  1.00689981] )   =  1.6137584710335335
επανάληψη :  361   f( [-0.6976883  1.006792 ] )   =  1.6137568328036573
επανάληψη :  362   f( [-0.69761739  1.00668588] )   =  1.6137552453742143
```

```
επανάληψη :  363   f( [-0.69754758  1.00658141] )   =  1.6137537071698298
επανάληψη :  364   f( [-0.69747886  1.00647857] )   =  1.613752216663987
επανάληψη :  365   f( [-0.69741122  1.00637735] )   =  1.6137507723775113
επανάληψη :  366   f( [-0.69734462  1.0062777 ] )   =  1.6137493728771029
επανάληψη :  367   f( [-0.69727907  1.00617961] )   =  1.6137480167739127
επανάληψη :  368   f( [-0.69721455  1.00608306] )   =  1.613746702722165
επανάληψη :  369   f( [-0.69715102  1.00598801] )   =  1.6137454294178197
επανάληψη :  370   f( [-0.6970885   1.00589444] )   =  1.613744195597279
επανάληψη :  371   f( [-0.69702694  1.00580234] )   =  1.6137430000361337
επανάληψη :  372   f( [-0.69696635  1.00571168] )   =  1.6137418415479452
επανάληψη :  373   f( [-0.6969067   1.00562244] )   =  1.613740718983071
επανάληψη :  374   f( [-0.69684799  1.00553459] )   =  1.6137396312275205
επανάληψη :  375   f( [-0.69679019  1.00544811] )   =  1.6137385772018518
επανάληψη :  376   f( [-0.69673329  1.00536298] )   =  1.613737555860098
επανάληψη :  377   f( [-0.69667728  1.00527919] )   =  1.6137365661887304
επανάληψη :  378   f( [-0.69662215  1.0051967 ] )   =  1.6137356072056517
επανάληψη :  379   f( [-0.69656788  1.0051155 ] )   =  1.6137346779592212
επανάληψη :  380   f( [-0.69651445  1.00503557] )   =  1.6137337775273113
επανάληψη :  381   f( [-0.69646186  1.00495689] )   =  1.6137329050163896
επανάληψη :  382   f( [-0.69641009  1.00487944] )   =  1.613732059560635
επανάληψη :  383   f( [-0.69635913  1.0048032 ] )   =  1.6137312403210764
επανάληψη :  384   f( [-0.69630896  1.00472815] )   =  1.6137304464847604
επανάληψη :  385   f( [-0.69625958  1.00465427] )   =  1.6137296772639442
επανάληψη :  386   f( [-0.69621096  1.00458155] )   =  1.613728931895315
επανάληψη :  387   f( [-0.69616311  1.00450996] )   =  1.6137282096392298
επανάληψη :  388   f( [-0.696116    1.00443949] )   =  1.613727509778984
επανάληψη :  389   f( [-0.69606963  1.00437012] )   =  1.6137268316200981
επανάληψη :  390   f( [-0.69602398  1.00430184] )   =  1.6137261744896292
επανάληψη :  391   f( [-0.69597905  1.00423463] )   =  1.6137255377355029
επανάληψη :  392   f( [-0.69593482  1.00416846] )   =  1.6137249207258664
επανάληψη :  393   f( [-0.69589128  1.00410333] )   =  1.6137243228484615
επανάληψη :  394   f( [-0.69584841  1.00403921] )   =  1.6137237435100154
επανάληψη :  395   f( [-0.69580622  1.0039761 ] )   =  1.6137231821356541
επανάληψη :  396   f( [-0.69576469  1.00391397] )   =  1.6137226381683303
επανάληψη :  397   f( [-0.6957238   1.00385282] )   =  1.613722111068271
επανάληψη :  398   f( [-0.69568356  1.00379262] )   =  1.613721600312442
επανάληψη :  399   f( [-0.69564394  1.00373336] )   =  1.613721105394028
επανάληψη :  400   f( [-0.69560494  1.00367502] )   =  1.613720625821931
επανάληψη :  401   f( [-0.69556655  1.0036176 ] )   =  1.6137201611202812
επανάληψη :  402   f( [-0.69552875  1.00356108] )   =  1.613719710827966
επανάληψη :  403   f( [-0.69549155  1.00350543] )   =  1.6137192744981719
επανάληψη :  404   f( [-0.69545493  1.00345066] )   =  1.613718851697941
επανάληψη :  405   f( [-0.69541888  1.00339675] )   =  1.6137184420077417
επανάληψη :  406   f( [-0.6953834   1.00334367] )   =  1.613718045021051
επανάληψη :  407   f( [-0.69534847  1.00329143] )   =  1.6137176603439536
επανάληψη :  408   f( [-0.69531408  1.00324   ] )   =  1.613717287594748
επανάληψη :  409   f( [-0.69528023  1.00318937] )   =  1.6137169264035705
επανάληψη :  410   f( [-0.69524691  1.00313954] )   =  1.6137165764120251
επανάληψη :  411   f( [-0.69521411  1.00309048] )   =  1.6137162372728306
επανάληψη :  412   f( [-0.69518183  1.0030422 ] )   =  1.6137159086494748
επανάληψη :  413   f( [-0.69515004  1.00299466] )   =  1.6137155902158802
επανάληψη :  414   f( [-0.69511875  1.00294787] )   =  1.613715281656081
```

επανάληψη : 415   f([-0.69508796 1.00290181])   = 1.6137149826639086
επανάληψη : 416   f([-0.69505764 1.00285647])   = 1.6137146929426898
επανάληψη : 417   f([-0.6950278   1.00281184])   = 1.6137144122049496
επανάληψη : 418   f([-0.69499842 1.0027679])   = 1.6137141401721284
επανάληψη : 419   f([-0.6949695   1.00272465])   = 1.6137138765743038
επανάληψη : 420   f([-0.69494103 1.00268208])   = 1.6137136211499237
επανάληψη : 421   f([-0.69491301 1.00264017])   = 1.6137133736455467
επανάληψη : 422   f([-0.69488542 1.00259892])   = 1.6137131338155897
επανάληψη : 423   f([-0.69485827 1.00255831])   = 1.6137129014220857
επανάληψη : 424   f([-0.69483154 1.00251834])   = 1.613712676234446
επανάληψη : 425   f([-0.69480523 1.00247899])   = 1.6137124580292328
επανάληψη : 426   f([-0.69477932 1.00244025])   = 1.6137122465899367
επανάληψη : 427   f([-0.69475383 1.00240213])   = 1.6137120417067614
επανάληψη : 428   f([-0.69472873 1.00236459])   = 1.6137118431764168
επανάληψη : 429   f([-0.69470402 1.00232765])   = 1.6137116508019163
επανάληψη : 430   f([-0.6946797   1.00229128])   = 1.6137114643923816
επανάληψη : 431   f([-0.69465576 1.00225548])   = 1.613711283762853
επανάληψη : 432   f([-0.69463219 1.00222023])   = 1.6137111087341065
επανάληψη : 433   f([-0.69460899 1.00218554])   = 1.613710939132476
επανάληψη : 434   f([-0.69458616 1.00215139])   = 1.6137107747896788
επανάληψη : 435   f([-0.69456368 1.00211778])   = 1.6137106155426526
επανάληψη : 436   f([-0.69454155 1.00208469])   = 1.6137104612333895
επανάληψη : 437   f([-0.69451976 1.00205211])   = 1.6137103117087823
επανάληψη : 438   f([-0.69449832 1.00202005])   = 1.613710166820471
επανάληψη : 439   f([-0.69447721 1.00198849])   = 1.6137100264246957
επανάληψη : 440   f([-0.69445643 1.00195742])   = 1.6137098903821552
επανάληψη : 441   f([-0.69443598 1.00192683])   = 1.6137097585578666
επανάληψη : 442   f([-0.69441585 1.00189672])   = 1.6137096308210332
επανάληψη : 443   f([-0.69439603 1.00186709])   = 1.6137095070449143
επανάληψη : 444   f([-0.69437652 1.00183792])   = 1.6137093871066983
επανάληψη : 445   f([-0.69435731 1.0018092])   = 1.6137092708873826
επανάληψη : 446   f([-0.69433841 1.00178093])   = 1.613709158271654
επανάληψη : 447   f([-0.6943198 1.0017531])   = 1.6137090491477755
επανάληψη : 448   f([-0.69430148 1.00172571])   = 1.6137089434074745
επανάληψη : 449   f([-0.69428344 1.00169875])   = 1.6137088409458356
επανάληψη : 450   f([-0.69426569 1.0016722])   = 1.613708741661197
επανάληψη : 451   f([-0.69424822 1.00164607])   = 1.6137086454550487
επανάληψη : 452   f([-0.69423102 1.00162035])   = 1.6137085522319357
επανάληψη : 453   f([-0.69421408 1.00159504])   = 1.6137084618993627
επανάληψη : 454   f([-0.69419741 1.00157011])   = 1.6137083743677023
επανάληψη : 455   f([-0.69418101 1.00154558])   = 1.6137082895501067
επανάληψη : 456   f([-0.69416486 1.00152143])   = 1.6137082073624205
επανάληψη : 457   f([-0.69414896 1.00149766])   = 1.6137081277230982
επανάληψη : 458   f([-0.69413331 1.00147426])   = 1.6137080505531223
επανάληψη : 459   f([-0.6941179   1.00145122])   = 1.613707975775926
επανάληψη : 460   f([-0.69410273 1.00142855])   = 1.6137079033173163
επανάληψη : 461   f([-0.6940878   1.00140623])   = 1.6137078331054013
επανάληψη : 462   f([-0.69407311 1.00138425])   = 1.6137077650705174
επανάληψη : 463   f([-0.69405864 1.00136263])   = 1.6137076991451615
επανάληψη : 464   f([-0.6940444   1.00134133])   = 1.6137076352639241
επανάληψη : 465   f([-0.69403039 1.00132038])   = 1.6137075733634232
επανάληψη : 466   f([-0.69401659 1.00129975])   = 1.613707513382242

```
επανάληψη :  467   f( [-0.694003    1.00127944] )   =  1.6137074552608692
επανάληψη :  468   f( [-0.69398963  1.00125945] )   =  1.613707398941637
επανάληψη :  469   f( [-0.69397647  1.00123977] )   =  1.6137073443686676
επανάληψη :  470   f( [-0.69396351  1.0012204 ] )   =  1.6137072914878146
επανάληψη :  471   f( [-0.69395076  1.00120133] )   =  1.6137072402466106
επανάληψη :  472   f( [-0.69393821  1.00118256] )   =  1.6137071905942157
επανάληψη :  473   f( [-0.69392585  1.00116408] )   =  1.613707142481366
επανάληψη :  474   f( [-0.69391368  1.00114589] )   =  1.6137070958603255
επανάληψη :  475   f( [-0.69390171  1.00112799] )   =  1.6137070506848374
επανάληψη :  476   f( [-0.69388992  1.00111036] )   =  1.6137070069100803
επανάληψη :  477   f( [-0.69387831  1.00109301] )   =  1.6137069644926219
επανάληψη :  478   f( [-0.69386689  1.00107593] )   =  1.6137069233903771
επανάληψη :  479   f( [-0.69385565  1.00105912] )   =  1.6137068835625652
επανάληψη :  480   f( [-0.69384458  1.00104257] )   =  1.6137068449696705
επανάληψη :  481   f( [-0.69383368  1.00102628] )   =  1.613706807573402
επανάληψη :  482   f( [-0.69382296  1.00101025] )   =  1.6137067713366569
επανάληψη :  483   f( [-0.6938124   1.00099446] )   =  1.6137067362234816
επανάληψη :  484   f( [-0.693802    1.00097892] )   =  1.6137067021990386
επανάληψη :  485   f( [-0.69379177  1.00096363] )   =  1.6137066692295696
επανάληψη :  486   f( [-0.6937817   1.00094857] )   =  1.6137066372823636
επανάληψη :  487   f( [-0.69377179  1.00093375] )   =  1.6137066063257235
επανάληψη :  488   f( [-0.69376203  1.00091916] )   =  1.6137065763289355
επανάληψη :  489   f( [-0.69375242  1.0009048 ] )   =  1.6137065472622378
επανάληψη :  490   f( [-0.69374297  1.00089066] )   =  1.6137065190967916
επανάληψη :  491   f( [-0.69373366  1.00087674] )   =  1.613706491804652
επανάληψη :  492   f( [-0.6937245   1.00086304] )   =  1.613706465358741
επανάληψη :  493   f( [-0.69371548  1.00084956] )   =  1.6137064397328196
επανάληψη :  494   f( [-0.6937066   1.00083628] )   =  1.613706414901463
επανάληψη :  495   f( [-0.69369786  1.00082322] )   =  1.6137063908400349
επανάληψη :  496   f( [-0.69368925  1.00081036] )   =  1.6137063675246621
επανάληψη :  497   f( [-0.69368078  1.00079769] )   =  1.6137063449322118
επανάληψη :  498   f( [-0.69367245  1.00078523] )   =  1.6137063230402693
επανάληψη :  499   f( [-0.69366424  1.00077296] )   =  1.613706301827114
επανάληψη :  500   f( [-0.69365616  1.00076088] )   =  1.6137062812716991
επανάληψη :  501   f( [-0.69364821  1.00074899] )   =  1.6137062613536308
επανάληψη :  502   f( [-0.69364038  1.00073729] )   =  1.6137062420531467
επανάληψη :  503   f( [-0.69363268  1.00072577] )   =  1.613706223351098
επανάληψη :  504   f( [-0.69362509  1.00071443] )   =  1.6137062052289295
επανάληψη :  505   f( [-0.69361762  1.00070327] )   =  1.613706187668661
επανάληψη :  506   f( [-0.69361027  1.00069228] )   =  1.61370617065287
επανάληψη :  507   f( [-0.69360304  1.00068146] )   =  1.6137061541646738
επανάληψη :  508   f( [-0.69359592  1.00067081] )   =  1.6137061381877145
επανάληψη :  509   f( [-0.6935889   1.00066033] )   =  1.61370612270614
επανάληψη :  510   f( [-0.693582    1.00065002] )   =  1.6137061077045902
επανάληψη :  511   f( [-0.69357521  1.00063986] )   =  1.6137060931681813
επανάληψη :  512   f( [-0.69356852  1.00062986] )   =  1.6137060790824909
επανάληψη :  513   f( [-0.69356194  1.00062002] )   =  1.6137060654335442
επανάληψη :  514   f( [-0.69355546  1.00061033] )   =  1.6137060522077988
επανάληψη :  515   f( [-0.69354908  1.0006008 ] )   =  1.6137060393921334
επανάληψη :  516   f( [-0.6935428   1.00059141] )   =  1.6137060269738326
επανάληψη :  517   f( [-0.69353662  1.00058217] )   =  1.6137060149405755
επανάληψη :  518   f( [-0.69353053  1.00057307] )   =  1.6137060032804238
```

```
επανάληψη :  519   f( [-0.69352454  1.00056412] )   =  1.6137059919818084
επανάληψη :  520   f( [-0.69351865  1.0005553 ] )   =  1.6137059810335193
επανάληψη :  521   f( [-0.69351284  1.00054663] )   =  1.6137059704246948
επανάληψη :  522   f( [-0.69350713  1.00053808] )   =  1.6137059601448087
επανάληψη :  523   f( [-0.69350151  1.00052968] )   =  1.6137059501836621
επανάληψη :  524   f( [-0.69349597  1.0005214 ] )   =  1.6137059405313723
επανάληψη :  525   f( [-0.69349052  1.00051325] )   =  1.6137059311783624
επανάληψη :  526   f( [-0.69348516  1.00050523] )   =  1.6137059221153534
επανάληψη :  527   f( [-0.69347988  1.00049734] )   =  1.613705913333353
επανάληψη :  528   f( [-0.69347468  1.00048957] )   =  1.613705904823648
επανάληψη :  529   f( [-0.69346956  1.00048192] )   =  1.613705896577796
επανάληψη :  530   f( [-0.69346452  1.00047439] )   =  1.6137058885876159
επανάληψη :  531   f( [-0.69345957  1.00046698] )   =  1.61370588084518
επανάληψη :  532   f( [-0.69345468  1.00045968] )   =  1.6137058733428067
επανάληψη :  533   f( [-0.69344988  1.0004525 ] )   =  1.613705866073053
επανάληψη :  534   f( [-0.69344515  1.00044543] )   =  1.613705859028706
επανάληψη :  535   f( [-0.6934405   1.00043847] )   =  1.613705852202776
επανάληψη :  536   f( [-0.69343591  1.00043162] )   =  1.613705845588492
επανάληψη :  537   f( [-0.6934314   1.00042487] )   =  1.613705839179291
επανάληψη :  538   f( [-0.69342696  1.00041823] )   =  1.6137058329688139
επανάληψη :  539   f( [-0.69342259  1.0004117 ] )   =  1.6137058269508993
επανάληψη :  540   f( [-0.69341829  1.00040527] )   =  1.6137058211195767
επανάληψη :  541   f( [-0.69341405  1.00039893] )   =  1.6137058154690604
επανάληψη :  542   f( [-0.69340988  1.0003927 ] )   =  1.6137058099937442
επανάληψη :  543   f( [-0.69340578  1.00038656] )   =  1.6137058046881965
επανάληψη :  544   f( [-0.69340174  1.00038052] )   =  1.6137057995471527
επανάληψη :  545   f( [-0.69339776  1.00037458] )   =  1.613705794565512
επανάληψη :  546   f( [-0.69339384  1.00036873] )   =  1.6137057897383327
επανάληψη :  547   f( [-0.69338999  1.00036297] )   =  1.6137057850608252
επανάληψη :  548   f( [-0.69338619  1.00035729] )   =  1.6137057805283486
επανάληψη :  549   f( [-0.69338246  1.00035171] )   =  1.6137057761364058
επανάληψη :  550   f( [-0.69337878  1.00034622] )   =  1.6137057718806402
επανάληψη :  551   f( [-0.69337517  1.00034081] )   =  1.613705767756829
επανάληψη :  552   f( [-0.6933716   1.00033548] )   =  1.6137057637608807
επανάληψη :  553   f( [-0.6933681   1.00033024] )   =  1.6137057598888307
επανάληψη :  554   f( [-0.69336465  1.00032508] )   =  1.613705756136838
επανάληψη :  555   f( [-0.69336125  1.00032   ] )   =  1.6137057525011793
επανάληψη :  556   f( [-0.6933579  1.000315 ] )   =  1.6137057489782483
επανάληψη :  557   f( [-0.69335461  1.00031008] )   =  1.613705745564549
επανάληψη :  558   f( [-0.69335137  1.00030523] )   =  1.6137057422566952
επανάληψη :  559   f( [-0.69334818  1.00030046] )   =  1.6137057390514047
επανάληψη :  560   f( [-0.69334504  1.00029577] )   =  1.6137057359454974
επανάληψη :  561   f( [-0.69334195  1.00029115] )   =  1.613705732935892
επανάληψη :  562   f( [-0.6933389  1.0002866] )   =  1.6137057300196023
επανάληψη :  563   f( [-0.69333591  1.00028212] )   =  1.6137057271937352
επανάληψη :  564   f( [-0.69333296  1.00027771] )   =  1.6137057244554869
επανάληψη :  565   f( [-0.69333006  1.00027337] )   =  1.6137057218021407
επανάληψη :  566   f( [-0.6933272  1.0002691] )   =  1.6137057192310642
επανάληψη :  567   f( [-0.69332439  1.0002649 ] )   =  1.6137057167397064
επανάληψη :  568   f( [-0.69332162  1.00026076] )   =  1.613705714325596
επανάληψη :  569   f( [-0.69331889  1.00025668] )   =  1.6137057119863372
επανάληψη :  570   f( [-0.69331621  1.00025267] )   =  1.6137057097196092
```

```
επανάληψη :  571   f( [-0.69331357  1.00024872] )   =  1.6137057075231638
επανάληψη :  572   f( [-0.69331097  1.00024484] )   =  1.613705705394821
επανάληψη :  573   f( [-0.69330841  1.00024101] )   =  1.6137057033324695
επανάληψη :  574   f( [-0.69330589  1.00023725] )   =  1.6137057013340637
επανάληψη :  575   f( [-0.69330341  1.00023354] )   =  1.6137056993976202
επανάληψη :  576   f( [-0.69330097  1.00022989] )   =  1.613705697521218
επανάληψη :  577   f( [-0.69329857  1.0002263 ] )   =  1.6137056957029954
επανάληψη :  578   f( [-0.6932962   1.00022276] )   =  1.6137056939411487
επανάληψη :  579   f( [-0.69329387  1.00021928] )   =  1.6137056922339297
επανάληψη :  580   f( [-0.69329158  1.00021586] )   =  1.6137056905796447
επανάληψη :  581   f( [-0.69328932  1.00021248] )   =  1.6137056889766523
επανάληψη :  582   f( [-0.6932871   1.00020916] )   =  1.6137056874233624
επανάληψη :  583   f( [-0.69328492  1.00020589] )   =  1.6137056859182337
επανάληψη :  584   f( [-0.69328277  1.00020268] )   =  1.6137056844597728
επανάληψη :  585   f( [-0.69328065  1.00019951] )   =  1.6137056830465333
επανάληψη :  586   f( [-0.69327856  1.00019639] )   =  1.6137056816771123
επανάληψη :  587   f( [-0.69327651  1.00019332] )   =  1.6137056803501515
επανάληψη :  588   f( [-0.69327449  1.0001903 ] )   =  1.6137056790643345
επανάληψη :  589   f( [-0.6932725   1.00018733] )   =  1.6137056778183856
επανάληψη :  590   f( [-0.69327054  1.0001844 ] )   =  1.6137056766110685
επανάληψη :  591   f( [-0.69326861  1.00018152] )   =  1.6137056754411852
επανάληψη :  592   f( [-0.69326672  1.00017869] )   =  1.6137056743075753
επανάληψη :  593   f( [-0.69326485  1.00017589] )   =  1.6137056732091142
επανάληψη :  594   f( [-0.69326301  1.00017315] )   =  1.6137056721447118
επανάληψη :  595   f( [-0.6932612   1.00017044] )   =  1.6137056711133124
επανάληψη :  596   f( [-0.69325942  1.00016778] )   =  1.6137056701138923
επανάληψη :  597   f( [-0.69325766  1.00016516] )   =  1.61370566914546
επανάληψη :  598   f( [-0.69325594  1.00016258] )   =  1.6137056682070554
επανάληψη :  599   f( [-0.69325424  1.00016003] )   =  1.6137056672977468
επανάληψη :  600   f( [-0.69325257  1.00015753] )   =  1.6137056664166318
επανάληψη :  601   f( [-0.69325092  1.00015507] )   =  1.6137056655628368
επανάληψη :  602   f( [-0.6932493   1.00015265] )   =  1.6137056647355146
επανάληψη :  603   f( [-0.6932477   1.00015026] )   =  1.6137056639338443
επανάληψη :  604   f( [-0.69324613  1.00014792] )   =  1.6137056631570303
επανάληψη :  605   f( [-0.69324459  1.00014561] )   =  1.6137056624043022
επανάληψη :  606   f( [-0.69324306  1.00014333] )   =  1.6137056616749132
επανάληψη :  607   f( [-0.69324157  1.00014109] )   =  1.6137056609681395
επανάληψη :  608   f( [-0.69324009  1.00013889] )   =  1.6137056602832802
επανάληψη :  609   f( [-0.69323864  1.00013672] )   =  1.6137056596196555
επανάληψη :  610   f( [-0.69323721  1.00013458] )   =  1.613705658976607
επανάληψη :  611   f( [-0.6932358   1.00013248] )   =  1.6137056583534972
επανάληψη :  612   f( [-0.69323442  1.00013041] )   =  1.613705657749707
επανάληψη :  613   f( [-0.69323306  1.00012837] )   =  1.613705657164638
επανάληψη :  614   f( [-0.69323171  1.00012636] )   =  1.6137056565977097
επανάληψη :  615   f( [-0.69323039  1.00012439] )   =  1.6137056560483596
επανάληψη :  616   f( [-0.69322909  1.00012245] )   =  1.6137056555160425
επανάληψη :  617   f( [-0.69322781  1.00012053] )   =  1.6137056550002307
επανάληψη :  618   f( [-0.69322655  1.00011865] )   =  1.6137056545004116
επανάληψη :  619   f( [-0.69322531  1.0001168 ] )   =  1.6137056540160901
επανάληψη :  620   f( [-0.69322409  1.00011497] )   =  1.6137056535467855
επανάληψη :  621   f( [-0.69322289  1.00011317] )   =  1.613705653092032
επανάληψη :  622   f( [-0.69322171  1.00011141] )   =  1.6137056526513784
```

```
επανάληψη :  623   f( [-0.69322054  1.00010967] )   =  1.613705652224388
επανάληψη :  624   f( [-0.6932194   1.00010795] )   =  1.6137056518106365
επανάληψη :  625   f( [-0.69321827  1.00010626] )   =  1.6137056514097141
επανάληψη :  626   f( [-0.69321716  1.0001046 ] )   =  1.6137056510212224
επανάληψη :  627   f( [-0.69321606  1.00010297] )   =  1.6137056506447764
επανάληψη :  628   f( [-0.69321499  1.00010136] )   =  1.6137056502800025
επανάληψη :  629   f( [-0.69321393  1.00009978] )   =  1.6137056499265383
επανάληψη :  630   f( [-0.69321289  1.00009822] )   =  1.613705649584034
επανάληψη :  631   f( [-0.69321186  1.00009668] )   =  1.6137056492521495
επανάληψη :  632   f( [-0.69321085  1.00009517] )   =  1.613705648930555
επανάληψη :  633   f( [-0.69320985  1.00009369] )   =  1.613705648618932
επανάληψη :  634   f( [-0.69320887  1.00009222] )   =  1.613705648316971
επανάληψη :  635   f( [-0.69320791  1.00009078] )   =  1.6137056480243728
επανάληψη :  636   f( [-0.69320696  1.00008936] )   =  1.613705647740847
επανάληψη :  637   f( [-0.69320603  1.00008797] )   =  1.6137056474661118
επανάληψη :  638   f( [-0.69320511  1.00008659] )   =  1.613705647199895
επανάληψη :  639   f( [-0.6932042   1.00008524] )   =  1.6137056469419329
επανάληψη :  640   f( [-0.69320331  1.00008391] )   =  1.6137056466919688
επανάληψη :  641   f( [-0.69320244  1.0000826 ] )   =  1.613705646449755
επανάληψη :  642   f( [-0.69320157  1.00008131] )   =  1.6137056462150516
επανάληψη :  643   f( [-0.69320072  1.00008004] )   =  1.6137056459876251
επανάληψη :  644   f( [-0.69319989  1.00007878] )   =  1.6137056457672505
επανάληψη :  645   f( [-0.69319906  1.00007755] )   =  1.6137056455537084
επανάληψη :  646   f( [-0.69319825  1.00007634] )   =  1.6137056453467877
επανάληψη :  647   f( [-0.69319745  1.00007515] )   =  1.6137056451462826
επανάληψη :  648   f( [-0.69319667  1.00007397] )   =  1.6137056449519944
επανάληψη :  649   f( [-0.69319589  1.00007282] )   =  1.6137056447637301
επανάληψη :  650   f( [-0.69319513  1.00007168] )   =  1.6137056445813032
επανάληψη :  651   f( [-0.69319438  1.00007056] )   =  1.6137056444045328
επανάληψη :  652   f( [-0.69319365  1.00006946] )   =  1.6137056442332431
επανάληψη :  653   f( [-0.69319292  1.00006837] )   =  1.6137056440672646
επανάληψη :  654   f( [-0.69319221  1.0000673 ] )   =  1.6137056439064321
επανάληψη :  655   f( [-0.6931915   1.00006625] )   =  1.6137056437505866
επανάληψη :  656   f( [-0.69319081  1.00006522] )   =  1.6137056435995731
επανάληψη :  657   f( [-0.69319013  1.0000642 ] )   =  1.613705643453242
επανάληψη :  658   f( [-0.69318946  1.0000632 ] )   =  1.6137056433114478
επανάληψη :  659   f( [-0.6931888   1.00006221] )   =  1.6137056431740504
επανάληψη :  660   f( [-0.69318815  1.00006124] )   =  1.613705643040913
επανάληψη :  661   f( [-0.69318751  1.00006028] )   =  1.6137056429119037
επανάληψη :  662   f( [-0.69318688  1.00005934] )   =  1.6137056427868943
επανάληψη :  663   f( [-0.69318626  1.00005841] )   =  1.6137056426657608
επανάληψη :  664   f( [-0.69318565  1.0000575 ] )   =  1.6137056425483836
επανάληψη :  665   f( [-0.69318504  1.0000566 ] )   =  1.6137056424346456
επανάληψη :  666   f( [-0.69318445  1.00005572] )   =  1.613705642324434
επανάληψη :  667   f( [-0.69318387  1.00005484] )   =  1.6137056422176397
επανάληψη :  668   f( [-0.6931833   1.00005399] )   =  1.6137056421141565
επανάληψη :  669   f( [-0.69318273  1.00005314] )   =  1.613705642013882
επανάληψη :  670   f( [-0.69318218  1.00005231] )   =  1.6137056419167168
επανάληψη :  671   f( [-0.69318163  1.0000515 ] )   =  1.6137056418225642
επανάληψη :  672   f( [-0.69318109  1.00005069] )   =  1.6137056417313307
επανάληψη :  673   f( [-0.69318056  1.0000499 ] )   =  1.613705641642926
επανάληψη :  674   f( [-0.69318004  1.00004912] )   =  1.6137056415572626
```

```
επανάληψη :  675   f( [-0.69317953  1.00004835] )   =  1.613705641474255
επανάληψη :  676   f( [-0.69317902  1.0000476 ] )   =  1.6137056413938213
επανάληψη :  677   f( [-0.69317852  1.00004685] )   =  1.6137056413158815
επανάληψη :  678   f( [-0.69317803  1.00004612] )   =  1.6137056412403583
επανάληψη :  679   f( [-0.69317755  1.0000454 ] )   =  1.6137056411671766
επανάληψη :  680   f( [-0.69317708  1.00004469] )   =  1.6137056410962642
επανάληψη :  681   f( [-0.69317661  1.00004399] )   =  1.6137056410275503
επανάληψη :  682   f( [-0.69317615  1.00004331] )   =  1.613705640960967
επανάληψη :  683   f( [-0.6931757   1.00004263] )   =  1.613705640896448
επανάληψη :  684   f( [-0.69317525  1.00004196] )   =  1.6137056408339296
επανάληψη :  685   f( [-0.69317481  1.00004131] )   =  1.6137056407733499
επανάληψη :  686   f( [-0.69317438  1.00004066] )   =  1.6137056407146484
επανάληψη :  687   f( [-0.69317396  1.00004003] )   =  1.613705640657767
επανάληψη :  688   f( [-0.69317354  1.0000394 ] )   =  1.613705640602649
επανάληψη :  689   f( [-0.69317313  1.00003879] )   =  1.6137056405492403
επανάληψη :  690   f( [-0.69317272  1.00003818] )   =  1.6137056404974872
επανάληψη :  691   f( [-0.69317232  1.00003758] )   =  1.613705640447339
επανάληψη :  692   f( [-0.69317193  1.000037  ] )   =  1.6137056403987458
επανάληψη :  693   f( [-0.69317154  1.00003642] )   =  1.6137056403516592
επανάληψη :  694   f( [-0.69317116  1.00003585] )   =  1.6137056403060324
επανάληψη :  695   f( [-0.69317079  1.00003529] )   =  1.6137056402618206
επανάληψη :  696   f( [-0.69317042  1.00003474] )   =  1.6137056402189793
επανάληψη :  697   f( [-0.69317006  1.00003419] )   =  1.6137056401774665
επανάληψη :  698   f( [-0.6931697   1.00003366] )   =  1.6137056401372407
επανάληψη :  699   f( [-0.69316935  1.00003313] )   =  1.6137056400982623
επανάληψη :  700   f( [-0.693169    1.00003262] )   =  1.6137056400604926
επανάληψη :  701   f( [-0.69316866  1.00003211] )   =  1.6137056400238936
επανάληψη :  702   f( [-0.69316832  1.0000316 ] )   =  1.6137056399884295
επανάληψη :  703   f( [-0.69316799  1.00003111] )   =  1.6137056399540652
επανάληψη :  704   f( [-0.69316767  1.00003062] )   =  1.6137056399207663
επανάληψη :  705   f( [-0.69316735  1.00003015] )   =  1.6137056398884997
επανάληψη :  706   f( [-0.69316703  1.00002968] )   =  1.6137056398572338
επανάληψη :  707   f( [-0.69316672  1.00002921] )   =  1.6137056398269372
επανάληψη :  708   f( [-0.69316642  1.00002876] )   =  1.61370563979758
επανάληψη :  709   f( [-0.69316612  1.00002831] )   =  1.613705639769133
επανάληψη :  710   f( [-0.69316582  1.00002786] )   =  1.6137056397415679
επανάληψη :  711   f( [-0.69316553  1.00002743] )   =  1.613705639714858
επανάληψη :  712   f( [-0.69316524  1.000027  ] )   =  1.6137056396889757
επανάληψη :  713   f( [-0.69316496  1.00002658] )   =  1.613705639663896
επανάληψη :  714   f( [-0.69316468  1.00002616] )   =  1.6137056396395941
επανάληψη :  715   f( [-0.69316441  1.00002575] )   =  1.6137056396160456
επανάληψη :  716   f( [-0.69316414  1.00002535] )   =  1.6137056395932272
επανάληψη :  717   f( [-0.69316388  1.00002496] )   =  1.6137056395711165
επανάληψη :  718   f( [-0.69316361  1.00002457] )   =  1.6137056395496912
επανάληψη :  719   f( [-0.69316336  1.00002418] )   =  1.61370563952893
επανάληψη :  720   f( [-0.6931631  1.0000238] )   =  1.613705639508813
επανάληψη :  721   f( [-0.69316286  1.00002343] )   =  1.6137056394893194
επανάληψη :  722   f( [-0.69316261  1.00002307] )   =  1.6137056394704303
επανάληψη :  723   f( [-0.69316237  1.00002271] )   =  1.613705639452127
επανάληψη :  724   f( [-0.69316213  1.00002235] )   =  1.6137056394343912
επανάληψη :  725   f( [-0.6931619  1.000022 ] )   =  1.613705639417205
επανάληψη :  726   f( [-0.69316167  1.00002166] )   =  1.613705639400552
```

```
επανάληψη :  727   f( [-0.69316144  1.00002132] )   =  1.6137056393844151
επανάληψη :  728   f( [-0.69316122  1.00002099] )   =  1.6137056393687788
επανάληψη :  729   f( [-0.693161    1.00002066] )   =  1.613705639353627
επανάληψη :  730   f( [-0.69316078  1.00002034] )   =  1.6137056393389453
επανάληψη :  731   f( [-0.69316057  1.00002002] )   =  1.6137056393247187
επανάληψη :  732   f( [-0.69316036  1.0000197 ] )   =  1.613705639310933
επανάληψη :  733   f( [-0.69316016  1.0000194 ] )   =  1.613705639297575
επανάληψη :  734   f( [-0.69315995  1.00001909] )   =  1.6137056392846312
επανάληψη :  735   f( [-0.69315975  1.0000188 ] )   =  1.6137056392720888
επανάληψη :  736   f( [-0.69315956  1.0000185 ] )   =  1.6137056392599352
επανάληψη :  737   f( [-0.69315936  1.00001821] )   =  1.6137056392481581
επανάληψη :  738   f( [-0.69315917  1.00001793] )   =  1.6137056392367464
επανάληψη :  739   f( [-0.69315899  1.00001765] )   =  1.6137056392256885
επανάληψη :  740   f( [-0.6931588   1.00001737] )   =  1.6137056392149738
επανάληψη :  741   f( [-0.69315862  1.0000171 ] )   =  1.613705639204591
επανάληψη :  742   f( [-0.69315844  1.00001683] )   =  1.61370563919453
επανάληψη :  743   f( [-0.69315827  1.00001657] )   =  1.6137056391847813
επανάληψη :  744   f( [-0.69315809  1.00001631] )   =  1.6137056391753346
επανάληψη :  745   f( [-0.69315792  1.00001606] )   =  1.6137056391661808
επανάληψη :  746   f( [-0.69315775  1.00001581] )   =  1.613705639157311
επανάληψη :  747   f( [-0.69315759  1.00001556] )   =  1.6137056391487161
επανάληψη :  748   f( [-0.69315743  1.00001532] )   =  1.6137056391403877
επανάληψη :  749   f( [-0.69315727  1.00001508] )   =  1.6137056391323175
επανάληψη :  750   f( [-0.69315711  1.00001484] )   =  1.6137056391244975
επανάληψη :  751   f( [-0.69315695  1.00001461] )   =  1.6137056391169202
επανάληψη :  752   f( [-0.6931568   1.00001438] )   =  1.6137056391095776
επανάληψη :  753   f( [-0.69315665  1.00001416] )   =  1.6137056391024627
επανάληψη :  754   f( [-0.6931565   1.00001393] )   =  1.6137056390955686
επανάληψη :  755   f( [-0.69315636  1.00001372] )   =  1.6137056390888882
επανάληψη :  756   f( [-0.69315621  1.0000135 ] )   =  1.6137056390824147
επανάληψη :  757   f( [-0.69315607  1.00001329] )   =  1.613705639076142
επανάληψη :  758   f( [-0.69315593  1.00001308] )   =  1.613705639070064
επανάληψη :  759   f( [-0.6931558   1.00001288] )   =  1.6137056390641742
επανάληψη :  760   f( [-0.69315566  1.00001268] )   =  1.6137056390584672
επανάληψη :  761   f( [-0.69315553  1.00001248] )   =  1.613705639052937
επανάληψη :  762   f( [-0.6931554   1.00001229] )   =  1.6137056390475784
επανάληψη :  763   f( [-0.69315527  1.00001209] )   =  1.6137056390423858
επανάληψη :  764   f( [-0.69315514  1.0000119 ] )   =  1.6137056390373543
επανάληψη :  765   f( [-0.69315502  1.00001172] )   =  1.6137056390324787
επανάληψη :  766   f( [-0.6931549   1.00001154] )   =  1.6137056390277542
επανάληψη :  767   f( [-0.69315478  1.00001136] )   =  1.6137056390231765
επανάληψη :  768   f( [-0.69315466  1.00001118] )   =  1.6137056390187405
επανάληψη :  769   f( [-0.69315454  1.000011  ] )   =  1.6137056390144422
επανάληψη :  770   f( [-0.69315443  1.00001083] )   =  1.613705639010277
επανάληψη :  771   f( [-0.69315431  1.00001066] )   =  1.6137056390062412
επανάληψη :  772   f( [-0.6931542  1.0000105] )   =  1.6137056390023303
επανάληψη :  773   f( [-0.69315409  1.00001033] )   =  1.6137056389985407
επανάληψη :  774   f( [-0.69315398  1.00001017] )   =  1.6137056389948685
επανάληψη :  775   f( [-0.69315388  1.00001001] )   =  1.6137056389913105
επανάληψη :  776   f( [-0.69315377  1.00000985] )   =  1.6137056389878626
επανάληψη :  777   f( [-0.69315367  1.0000097 ] )   =  1.6137056389845215
επανάληψη :  778   f( [-0.69315357  1.00000955] )   =  1.6137056389812843
```

```
επανάληψη :  779   f( [-0.69315347  1.0000094 ] )   =  1.6137056389781472
επανάληψη :  780   f( [-0.69315337  1.00000925] )   =  1.6137056389751074
επανάληψη :  781   f( [-0.69315327  1.00000911] )   =  1.6137056389721618
επανάληψη :  782   f( [-0.69315318  1.00000897] )   =  1.6137056389693079
επανάληψη :  783   f( [-0.69315308  1.00000883] )   =  1.613705638966542
επανάληψη :  784   f( [-0.69315299  1.00000869] )   =  1.6137056389638622
επανάληψη :  785   f( [-0.6931529   1.00000855] )   =  1.6137056389612654
επανάληψη :  786   f( [-0.69315281  1.00000842] )   =  1.613705638958749
επανάληψη :  787   f( [-0.69315272  1.00000829] )   =  1.613705638956311
επανάληψη :  788   f( [-0.69315264  1.00000816] )   =  1.6137056389539481
επανάληψη :  789   f( [-0.69315255  1.00000803] )   =  1.6137056389516589
επανάληψη :  790   f( [-0.69315247  1.0000079 ] )   =  1.6137056389494402
επανάληψη :  791   f( [-0.69315239  1.00000778] )   =  1.6137056389472906
επανάληψη :  792   f( [-0.6931523   1.00000766] )   =  1.6137056389452074
επανάληψη :  793   f( [-0.69315222  1.00000754] )   =  1.6137056389431892
επανάληψη :  794   f( [-0.69315215  1.00000742] )   =  1.6137056389412332
επανάληψη :  795   f( [-0.69315207  1.00000731] )   =  1.613705638939338
επανάληψη :  796   f( [-0.69315199  1.00000719] )   =  1.6137056389375015
επανάληψη :  797   f( [-0.69315192  1.00000708] )   =  1.6137056389357223
επανάληψη :  798   f( [-0.69315184  1.00000697] )   =  1.6137056389339979
επανάληψη :  799   f( [-0.69315177  1.00000686] )   =  1.613705638932327
επανάληψη :  800   f( [-0.6931517   1.00000675] )   =  1.613705638930708
επανάληψη :  801   f( [-0.69315163  1.00000665] )   =  1.613705638929139
επανάληψη :  802   f( [-0.69315156  1.00000654] )   =  1.613705638927619
επανάληψη :  803   f( [-0.69315149  1.00000644] )   =  1.613705638926146
επανάληψη :  804   f( [-0.69315142  1.00000634] )   =  1.6137056389247184
επανάληψη :  805   f( [-0.69315136  1.00000624] )   =  1.6137056389233353
επανάληψη :  806   f( [-0.69315129  1.00000614] )   =  1.613705638921995
επανάληψη :  807   f( [-0.69315123  1.00000605] )   =  1.6137056389206963
επανάληψη :  808   f( [-0.69315116  1.00000595] )   =  1.6137056389194377
επανάληψη :  809   f( [-0.6931511   1.00000586] )   =  1.6137056389182185
επανάληψη :  810   f( [-0.69315104  1.00000577] )   =  1.6137056389170368
επανάληψη :  811   f( [-0.69315098  1.00000568] )   =  1.613705638915892
επανάληψη :  812   f( [-0.69315092  1.00000559] )   =  1.6137056389147824
επανάληψη :  813   f( [-0.69315086  1.0000055 ] )   =  1.6137056389137074
επανάληψη :  814   f( [-0.6931508   1.00000542] )   =  1.6137056389126656
επανάληψη :  815   f( [-0.69315075  1.00000533] )   =  1.6137056389116562
επανάληψη :  816   f( [-0.69315069  1.00000525] )   =  1.6137056389106779
```

Επομένως, η βέλτιστη λύση με ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων με την χρήση του αλγορίθμου του Newton με οπισθοδρόμηση είναι : 1.6137056

Άσκηση 4

Θέλουμε να βρούμε την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων (0,0,0). Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$\min \sqrt{(0-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} \Rightarrow \boxed{\min \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ έτσι ώστε:

$x+3y+2z=5 \Leftrightarrow x+3y+2z-5=0$

$x,y,z \in \mathbb{R}-\{0\}$

Στην ουσία είναι σαν να ελαχιστοποιούμε το $x^2+y^2+z^2$. Επομένως, θα "εστιάσουμε" πάνω στην ελαχιστοποίηση της $x^2+y^2+z^2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Lagrange.

Η Λαγκρανζιανή που προκύπτει είναι η εξής:

$$L(x,y,z;\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\cdot(x+3y+2z-5)$$

Τώρα, θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη λύση, άρα θα μηδενίσουμε το διάνυσμα κλίσης της Λαγκρανζιανής δηλαδή μερικές παραγώγους:

$$\nabla L(x,y,z;\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+3\lambda=0 \\ 2z+2\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\lambda}{2} \\ y=-\frac{3\lambda}{2} \\ z=-\frac{2\lambda}{2} \end{cases}$$

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ικανοποιείται η εξής συνθήκη:

$$x+3y+2z=5 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2}+3\cdot\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{2\lambda}{2}\right)=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2}-\frac{9\lambda}{2}-2\lambda=5 \Leftrightarrow -\lambda-9\lambda-4\lambda=10 \Leftrightarrow -14\lambda=10 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-\frac{10}{14}}$$

Επομένως, η βέλτιστη λύση θα είναι η εξής:

$$x=-\frac{\lambda}{2}=\left[\frac{\frac{10}{14}}{2}\right]=\frac{10}{14\cdot 2}=\frac{5}{14}$$

$$y=-\frac{3\lambda}{2}=\left[\frac{3\cdot\frac{10}{14}}{2}\right]=\frac{3\cdot 10}{14\cdot 2}=\frac{15}{14}$$

$$z=-\left(-\frac{10}{14}\right)=\frac{10}{14}$$

$$x=\frac{5}{14},\ y=\frac{15}{14},\ z=\frac{10}{14}$$

Άσκηση 5

Τρόπος ανάθεσης 10 αιτήσεων/δευτερόλεπτο στους 3 web servers, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ισχύς που συνολικά καταναλώνεται σε όλους τους servers.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης ως εξής:

$$\min 2\cdot x_1^2 + x_2^2 + 3\cdot x_3^2 \quad \text{έτσι ώστε:}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \; (\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3-10=0)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Lagrange.

Η Λαγκρανζιανή που προκύπτει είναι η εξής:

$$L(x_1,x_2,x_3;\lambda) = 2\cdot x_1^2 + x_2^2 + 3\cdot x_3^2 + \lambda\cdot(x_1+x_2+x_3-10)$$

Τώρα, θέλουμε να μηδενίσουμε την κλίση της Λαγκρανζιανής ώστε να βρούμε τη βέλτιστη λύση, δηλαδή:

$$\nabla L(x_1,x_2,x_3;\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot x_1 + \lambda = 0 \\ 2 x_2 + \lambda = 0 \\ 6 x_3 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\lambda}{4} \\ x_2 = -\dfrac{\lambda}{2} \\ x_3 = -\dfrac{\lambda}{6} \end{cases}$$

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ικανοποιείται η εξής συνθήκη:

$$x_1+x_2+x_3 = 10 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{6} = 10 \Leftrightarrow \frac{-3\lambda-6\lambda-2\lambda}{12} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11\lambda = 120 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{120}{11}}$$

Επομένως, η βέλτιστη λύση θα είναι:

$$x_1 = -\frac{\lambda}{4} = -\left[\frac{-\frac{120}{11}}{\frac{4}{1}}\right] = \frac{120}{11\cdot 4} = \frac{30}{11}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2} = -\left[\frac{-\frac{120}{11}}{\frac{2}{1}}\right] = \frac{120}{11\cdot 2} = \frac{60}{11}$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{6} = -\left[\frac{-\frac{120}{11}}{\frac{6}{1}}\right] = \frac{120}{11\cdot 6} = \frac{20}{11}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{30}{11},\; x_2 = \frac{60}{11},\; x_3 = \frac{20}{11}$$

Scanned with CamScanner