Fenomenología cuántica y relativista

Recordatorio de los marcos de referencia.

Mecánica clásica

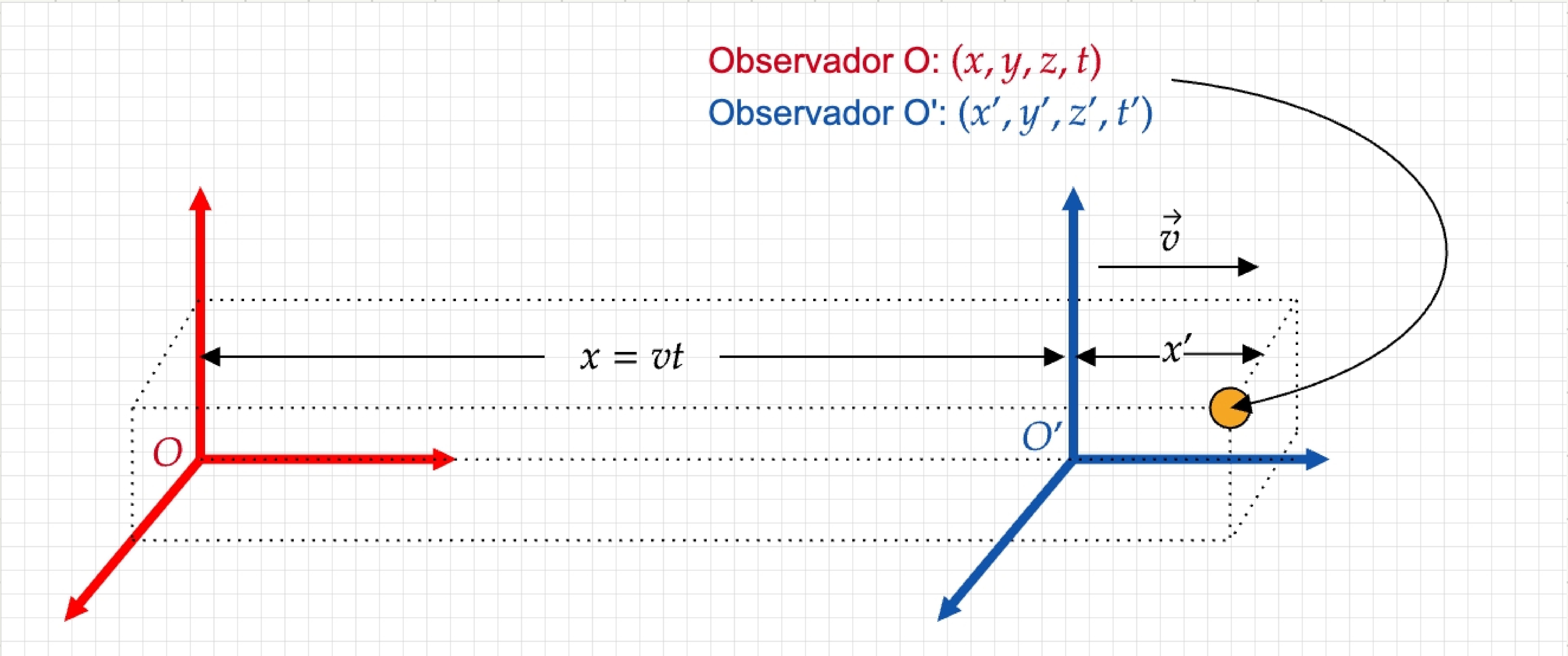
\# Consideramos marcos de referencia inerciales, es decir, aquellos en donde las leyes de Newton son válidas.

Supongamos un sistema de referencia S y otro S' de manera que S' se mueve en una dirección a velocidad constante.

Definimos un evento como la colección $(\vec{r}, t)$ en la que un fenómeno físico sucede. En particular supongamos que para el observador O el fenómeno sucedió en $(\vec{r}, t)$, para el observador del inercial en movimiento O' el evento sucedió en $(\vec{r}', t')$.

No obstante hay que tener una serie de consideraciones.

\# Para este tipo de sistemas consideramos/asumimos al tiempo como una variable absoluta



A partir del diagrama podemos expresar algunas relaciones entre S y S', las anteriores son

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \text{Transformaciones de Galileo.}$$

Un aspecto importante a considerar es que los fenómenos físicos observados por dos observadores deben coincidir, cuando esto sucede decimos que la ecuación es invariante ante Transformaciones de Galileo.

↳ Básicamente implica que el fenómeno físico es el mismo en S y S'.

Ejemplo 1:

La ley de Coulomb

$$\vec{F}_e = \sum_{i \neq j}^{n} K \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \hat{r}_{ij} \quad (*)$$

Probar que (*) es invariante ante T. de Galileo.

Para verificar la invarianza:

i) Calcular/encontrar la forma de (*) en S'

ii) Simplificar.

iii) Comparar con la forma de (*) en S

Sea
$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \rightarrow \vec{r}_i{}' = (x_i', y_i', z_i') = (x_i - vt, y_i, z_i)$$
$$\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j) \rightarrow \vec{r}_j{}' = (x_j', y_j', z_j') = (x_j - vt, y_j, z_j)$$

Comencemos con el término
$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{(x_j \cancel{-vt} - x_i \cancel{+vt}, y_j - y_i, z_j - z_i)}{\underbrace{|(x_j \cancel{-vt} - x_i \cancel{+vt}, y_j - y_i, z_j - z_i)|}_{(**) = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}}$$

$$= \frac{(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)}{|(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)|}$$

$$= \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

De manera análoga el término $\frac{1}{|\vec{r}_j' - \vec{r}_i'|^2} = \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

así

$$F_e = \sum_{i\neq j}^{n} K \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}\hat{r}_{ij} = \sum_{i\neq j}^{n} K \; q_i q_j \left(\frac{\hat{r}_{ij}'}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}\right)$$

de manera que $F_e = F_e'$ $\therefore$ F_e es invariante ante transformaciones de Galileo.

Ejercicio 1: Un caso extraño, la ecuación de onda.

$$\Box \phi = 0$$

sea $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}$.

Suponga el caso unidimensional $(\partial_{xx} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt})\phi = 0.$

i) Verifique que la ec. de onda <u>NO</u> es invariante ante transformaciones de Galileo.

$x' = x - vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$

Recordemos que $\partial_{xx} = \partial_x(\partial_x)$ y la regla de la cadena. $\frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\frac{dt}{ds}$

si $x = x(s)$ y $t = t(s)$.

En el caso de tener una derivada parcial.

y suponiendo $\phi(x', t')$

$$\frac{\partial \phi(x',t')}{\partial x} = \partial_x \phi(x',t') = \frac{\partial \phi}{\partial x'}\boxed{\frac{\partial x'}{\partial x}} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}\boxed{\frac{\partial t'}{\partial x}}$$

Calculemos $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1$ $\quad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} = 0$

así $\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x'}$ $\therefore$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$

Ahora calculemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}(-v) + \frac{\partial \phi}{\partial t'}(1) = \left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi$$

La segunda derivada.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

esperamos que $\square^2\phi = 0$ y $\square'^2\phi = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]$$

$$= \left(\partial x x' - \frac{1}{c^2}\partial x'x'\right) + \frac{2v}{c^2}\partial x't' + \frac{v^2}{c^2}\partial t't'$$

$$= \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\partial x'x' + \frac{v^2}{c^2}\partial t't' + \frac{2v}{c^2}\partial x't'$$

Por comparación $(\square^2\phi)_s \neq (\square^2\phi)_{s'}$ de manera que la ec. de onda NO es invariante ante transformaciones de Galileo.

Ejercicio 2: La longitud de línea

sea $ds^2 = \sum_i^n dx_i^2$, pruebe que ds^2 es invariante ante transformaciones de Galileo.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \sum_i dx_i\,\hat{e}_i$$

$$(ds^2)_{s'} = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$= (d(x - vt))^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (ds^2)_s.$$