Fenomenología cuántica y relativista

y

Recordatorio de los marcos de referencia.

Mecánica clásica

Consideramos marcos de referencia inerciales, es decir, aquellos en donde las leyes de Newton son válidas.

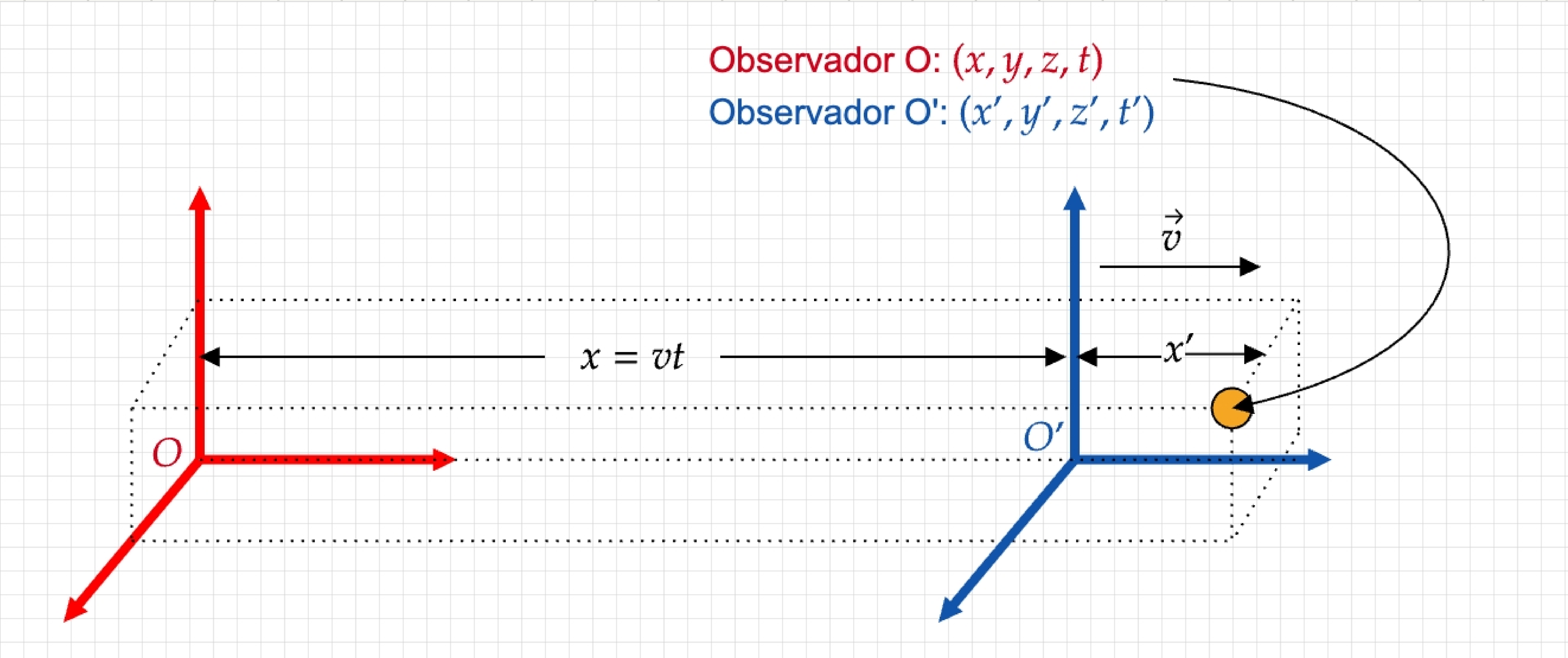
Supongamos un sistema de referencia S y otro S' de manera que S' se mueve en una dirección a velocidad constante.

Definimos un evento como la colección $(\vec{r}, t)$ en la que un fenómeno físico sucede. En particular supongamos que para el observador O el fenómeno sucedió en $(\vec{r}, t)$, para el observador del inercial en movimiento O' el evento sucedió en $(\vec{r}', t')$.

S.

No obstante hay que tener una serie de consideraciones

Para este tipo de sistemas consideramos / asumimos al tiempo como una variable absoluta



A partir del diagrama podemos expresar algunas relaciones entre S y S', las anteriores son

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \text{Transformaciones de Galileo.}$$

Un aspecto importante a considerar es que los fenómenos físicos observados por dos observadores deben coincidir, cuando esto sucede decimos que la ecuación es invariante ante Transformaciones de Galileo.

↳ Básicamente implica que el fenómeno físico es el mismo en S y S'.

Ejemplo 1:

La ley de Coulomb

$$\vec{F}_e = \sum_{i \neq j}^{n} K \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \hat{r}_{ij} \quad (*)$$

Probar que (*) es invariante ante T. de Galileo.

Para verificar la invarianza:

i) Calcular/encontrar la forma de (*) en S'

ii) Simplificar.

iii) Comparar con la forma de (*) en S

Sea

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \rightarrow \vec{r}_i{}' = (x_i', y_i', z_i') = (x_i - vt, y_i, z_i)$$

$$\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j) \rightarrow \vec{r}_j{}' = (x_j', y_j', z_j') = (x_j - vt, y_j, z_j)$$

Comencemos con el término $\hat{r}_{ij} = \dfrac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} = \dfrac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \dfrac{(x_j - \cancel{vt} - x_i + \cancel{vt}, y_j - y_i, z_j - z_i)}{\underbrace{|(x_j - \cancel{vt} - x_i + \cancel{vt}, y_j - y_i, z_j - z_i)|}_{(**) = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}}$

$$= \frac{(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)}{|(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)|}$$

$$= \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

De manera análoga el término $\dfrac{1}{|\vec{r}_j' - \vec{r}_i'|^2} = \dfrac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

así

$$F_e = \sum_{i\neq j}^{n} K \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}\hat{r}_{ij} = \sum_{i\neq j}^{n} K \quad q_i q_j \left(\frac{\hat{r}_{ij}'}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}\right)$$

de manera que $F_e = F_e'$ $\therefore$ F_e es invariante ante transformaciones de Galileo.

Ejercicio 1: Un caso extraño, la ecuación de onda.

$$\Box \phi = 0$$

sea $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}$.

Suponga el caso unidimensional $\left(\partial_{xx} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right)\phi = 0$.

i) Verifique que la ec. de onda <u>NO</u> es invariante ante transformaciones de Galileo.

$x' = x - vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$

Recordemos que $\partial_{xx} = \partial_x(\partial_x)$ y la regla de la cadena. $\dfrac{d\phi}{ds} = \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)\dfrac{dx}{ds} + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)\dfrac{dt}{ds}$

si $x = x(s)$ y $t = t(s)$.

En el caso de tener una derivada parcial.

y suponiendo $\phi(x', t')$

$$\frac{\partial \phi(x',t')}{\partial x} = \partial_x \phi(x',t') = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\boxed{\frac{\partial x'}{\partial x}} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\boxed{\frac{\partial t'}{\partial x}}$$

Calculemos $\dfrac{\partial x'}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1$ $\quad \dfrac{\partial t'}{\partial x} = \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0$

así $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x'}$ $\quad\therefore\quad$ $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}$

Ahora calculemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}(-v) + \frac{\partial\phi}{\partial t'}(1) = \left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi$$

La segunda derivada.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - v\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

esperamos que $\square^2\phi = 0$ y $\square'^2\phi = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]$$

$$= \left(\partial x x' - \frac{1}{c^2}\partial x'x'\right) + \frac{2v}{c^2}\partial x't' + \frac{v^2}{c^2}\partial t't'$$

$$= \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\partial x'x' + \frac{v^2}{c^2}\partial t't' + \frac{2v}{c^2}\partial x't'$$

Por comparación $(\square^2\phi)_s \neq (\square^2\phi)_{s'}$ de manera que la ec. de onda NO es invariante ante transformaciones de Galileo.

Ejercicio 2: La longitud de línea

sea $ds^2 = \sum_i^n dx_i^2$, pruebe que ds^2 es invariante ante transformaciones de Galileo.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \sum dx_i\,\hat{e}_i$$

$$(ds^2)_{s'} = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$= (d(x-vt))^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (ds^2)_s.$$

Ejercicio 3: Un potencial de la forma $U(|\vec{r}_1|^2 - |\vec{r}_2|^2)$

$|\vec{r}_1|^2 - |\vec{r}_2|^2 =$

$$\vec{r}_1{}'\cdot\vec{r}_1{}' = |\vec{r}_1{}'|^2 = (x_1 - vt)^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$|\vec{r}_2{}'|^2 = (x_2 - vt)^2 + y_2 + z_2^2$$

$$|\vec{r}_1{}'|^2 - |\vec{r}_2{}'|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2vtx_1 + v^2t^2 - \left[x_2^2 - 2vx_2t + v^2t^2 - y_2^2 - z_2^2\right]$$

$$= x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 - 2vt(x_2 - x_1)$$

$$= (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + (z_1^2 - z_2^2) - 2vt(x_2 - x_1)$$

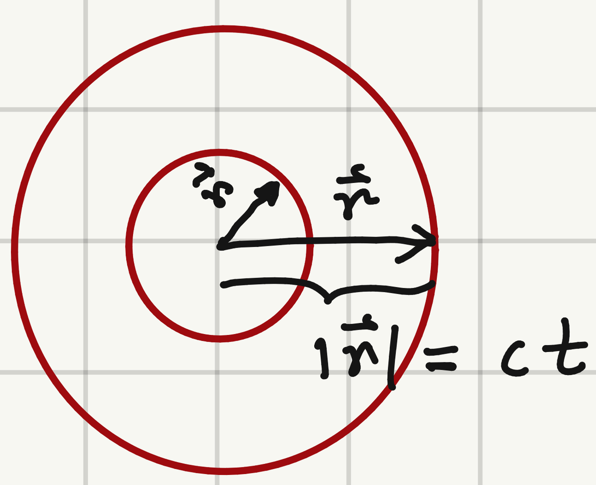
Postulados de Einstein.

i) Las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales,

ii) La velocidad de la luz es una constante universal (en el espacio libre)
La velocidad de la luz es independiente del movimiento relativo de los observadores.

Deducción de las T. de Lorentz

Consideremos el postulado (ii), además supongamos que estudiamos un "pulso" de luz esférico que se propaga a velocidad c.



Recordemos que la expresión algebraica de una esfera está dada por

$$\sum_i x_i^2 = r^2$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

y dado que el radio $r=ct$ en un inercial S

$$\sum_i x_i^2 - c^2t^2 = 0.$$

Ahora consideremos el caso endonde el puso se encuentra en un inercial S' que se mueve respecto de S a velocidad v.

Además recordemos que dados los elementos previos no podemos suponer que $t=t'$, pues esta conlleva a la separabilidad del espacio tiempo (Mecánica Clásica) y contradice el postulado (ii) pues en la relatividad Galileana la velocidad de la luz si depende del inercial.

Así, consideremos el pulso
$$S \left\{ \sum_i x_i^2 - c^2t^2 = 0 \right. \qquad S' \left\{ \sum_i (x_i')^2 - c^2(t')^2 = 0 \right.$$

Si suponemos que S' solo se mueve a lo largo de un eje con respecto de S esperamos que los otros ejes no presenten transformación alguna.

Podemos además proponer una transformación de la forma $\vec{x}' = A\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

y dado que $z'=z$ y $y'=y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

así;

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} t \\ t' &= a_{21} x + a_{22} t \end{aligned} \quad (*)$$

Sustituimos estas transformaciones en las expresiones de los pulsos.

$$x^2 = c^2 t^2 \quad (1)$$

$$\underbrace{(a_{11} x + a_{12} t)}_{x'}{}^2 = c^2 \underbrace{(a_{21} x + a_{22} t)}_{t'}{}^2 \quad (2)$$

Restando (2) de (1)

$$a_{11}^2 x^2 + a_{12}^2 t^2 + 2 a_{11} a_{12} x t - x^2 = c^2 \left[a_{21}^2 x^2 + a_{22}^2 t^2 + 2 a_{21} a_{22} t \right] - c^2 t^2$$

$$x^2 \left[a_{11}^2 - c^2 a_{21}^2 - 1 \right] + t^2 \left[a_{12}^2 + c^2 \left(1 - a_{22}^2\right) \right] + 2 \left(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \right) x t = 0$$

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2 a_{21}^2 &= 1 \\ c^2 a_{22}^2 - a_{12}^2 &= c^2 \end{aligned} \qquad a_{11} = a_{12}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &= 1 + c^2 a_{21}^2 \\ a_{22}^2 &= \frac{1}{c^2} \left[c^2 + a_{12}^2 \right] \end{aligned}$$

$$a_{11}^2 = a_{22}^2 \rightarrow 1 + c^2 a_{21}^2 = \frac{1}{c^2} \left[c^2 + a_{12}^2 \right]$$

$$\cancel{1} + c^2 a_{21}^2 = \cancel{1} + \frac{1}{c^2} a_{12}^2$$

$$c^2 a_{21}^2 = \frac{1}{c^2} a_{12}^2 \rightarrow c^4 a_{21}^2 = a_{12}^2 \rightarrow a_{12} = \pm c^2 a_{21}$$

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} t \\ t' &= a_{21} x + a_{22} t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= a_{11} x + a_{12} t \\ x &= \underbrace{- \frac{a_{12}}{a_{11}}}_{v} t \end{aligned}$$

$$x' = a_{11} \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}} t \right)$$

$$x' = a_{11} \left(x - v t \right)$$

$$\frac{1}{c^2} a_{12} = a_{21}$$

$$t' = \frac{1}{c^2} a_{12} x + a_{22} t$$

$$a_{11} = a_{22}$$

$$= a_{11} \left(\frac{1}{c^2} \frac{a_{12} x}{a_{11}} + t \right)$$

$$t' = a_{11} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$x' = a_{11} (x - vt)$$

$$t' = a_{11} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$a_{11}^2 = 1 + \frac{v^2}{c^2} a_{11}^2$$

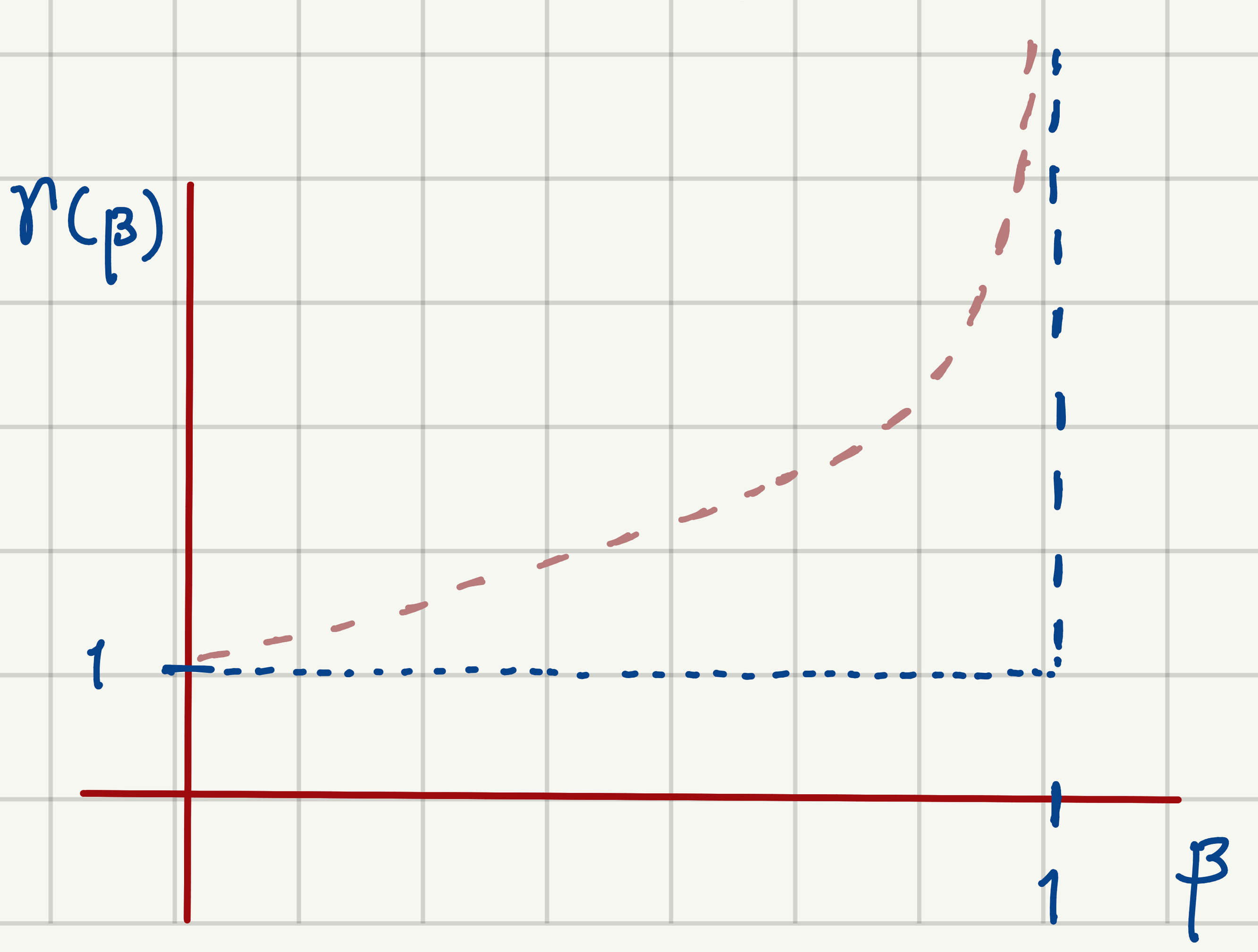
$$a_{11}^2 - \frac{v^2}{c^2} a_{11}^2 = 1$$

$$a_{11}^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] = 1$$

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Definamos $\gamma = a_{11}$ y $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



$$\lim_{\beta \to 0} \gamma(\beta) = 1$$

$$\lim_{\beta \to 1} \gamma(\beta) = \text{indefinido.}$$

$$a_{11}^2 = 1 + c^2 a_{21}^2$$

$$a_{11}^2 = 1 + c^2 \left[\frac{1}{c^2} a_{12} \right]^2$$

$$a_{11}^2 = 1 + \frac{1}{c^2} a_{12}^2$$

$$a_{11}^2 = 1 + \frac{v^2}{c^2} a_{11}^2$$

$$v = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$(a_{11} v)^2 = (-a_{12})^2$$

$$a_{12}^2 = a_{11}^2 v^2$$

Ejercicio: Verifica que la ec. de onda unidimensional es invariante ante T. de Lorentz.

$$\Box^2 \phi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \left(\partial_{xx} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right)\phi = 0.$$

Considere $\phi(x',t')$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x',t') = \frac{\partial\phi(x',t')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x',t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\partial_t[\phi(x',t')] = \frac{\partial\phi(x',t')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\phi(x',t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \qquad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{v}{c^2}\gamma$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\gamma \qquad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$$

$$\partial_x(\phi(x',t')) = \partial_{x'}[\phi(x',t')]\gamma + \partial_{t'}[\phi(x',t')]\left(-\frac{v}{c^2}\gamma\right)$$

$$\partial_t(\phi(x',t')) = \partial_{x'}[\phi(x',t')](-v\gamma) + \partial_{t'}[\phi(x',t')]\gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\gamma\frac{\partial}{\partial t'} \; ; \; \frac{\partial}{\partial t} = -v\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\right]$$

$$\partial_{x'x'}\phi - \frac{1}{c^2}\partial_{t't'} =$$

$$= \gamma^2\left[\partial_{x'x'} + \frac{v^2}{c^4}\overset{*}{\partial_{t't'}} - 2\frac{v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'}\right] - \frac{\gamma^2}{c^2}\left[\partial_{t't'} + v^2\partial_{x'x'} - 2v\,\partial_{x'}\partial_{t'}\right]$$

$$= \gamma^2\left\{\partial_{x'x'} - \frac{v^2}{c^2}\partial_{x'x'} + \frac{v^2}{c^4}\partial_{t't'} - \frac{1}{c^2}\partial_{t't'} + \cancel{2\frac{v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'} - 2\frac{v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'}}\right]$$

$$= \gamma^2 \left\{ \partial_{x'x'} \underbrace{\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]}_{\gamma^2} + \frac{1}{c^2} \partial_{t't'} \underbrace{\left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right]}_{-\gamma^2} \right\}$$

$$= \partial_{x'x'} - \frac{1}{c^2} \partial_{t't'}$$

$$\therefore \quad \left(\partial_{x'x'} - \frac{1}{c^2} \partial_{t't'} \right) \phi = 0$$