

前言

引力乃人尽皆知，我们自蹒跚学步便与之相伴。没有支撑的物体因它而下坠，有支撑的物体因它而稳定。即便如此，生活中仍有许多驾驭引力的高手，比如轻松掷筐的篮球球员，亦或挥拍自如的羽毛球手。当然，他们大抵是不需要计算物理学的。鸟和羽毛球手都得借助气流，但它天生长有一对契合空气动力学的翼膀，高耸入云，更胜一筹。而气流在大范围上的无扰压强分布，仍需借引力来稳定，故结论稍显意外：引力虽可能使鸟儿丧命，但也正是引力使鸟儿脱身。

这皆拜引力所赐，它如此普遍，世界各族文明自古以来便在思索其缘由，并给出不同色彩的描述。面对落体运动，中国古代将其解释为物体趋于回归至它原本的地方。受哲学及逻辑学的启蒙，西方世界对引力的描述要更为精准一些。面对**自由落体** (free fall)，古希腊时期的 Aristotle 尝云，“置两物体于同一点释放，重的将率先落地”。公元 5 世纪，希腊哲学家 Ioannes Philoponus 记载了这样一个发现：各种物体在同一点都将以相同方式自由落体。这即对 Aristotle 学派所秉持的思想做出了挑战。16 世纪，意大利弥漫着复兴之息，Galileo 认为 Aristotle 的观点有难以弥补的漏洞：设两物体相互牵制，下落加速应该归因于谁？他利用斜坡和单摆实验发现下落距离正比于时间平方，且与其质量无关。按连续性思想并忽略不必要的阻力，其合理外推至自由落体。通过微积分的思想雏形，Galileo 认为在同一点的各种物体都以完全相同的方式加速，并于西欧致力于传播这一论点，得到广泛回应及讨论。

经数十年思想斗争，Newton 于 17 世纪末阐明了更为精确、足以统一天地的规律。出于宗教美学追求，当时已普遍承认 Kepler 三大定律¹：椭圆轨道、掠面恒速、周期关系。行星绕恒星的掠面恒速说明其角动量守恒，用 Newton 第二定律描述行星所受的引力作用，则引力是有心力。进而椭圆轨道现象就可将引力大小确定到平方反比距离：质量密度场 $\mu(\mathbf{x}, t)$ 作为场源所激发的引力场为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -G \int \mu(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'.$$

上式是保守场，可直接用标量的**引力势** $\phi(\mathbf{x}, t)$ 指代，满足 $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ 。注意 $r \neq 0$ 时

¹较早的英语文献会给人名添后缀（常为 -an）表示形容词和名词，如 Galilean, Newtonian, Jacobian。这些表达沿用至今，但对当代人物来说一般不再采取。为迎合时代，本书中这些旧时人物亦不添后缀。

$\nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 \neq \mathbf{0}$, 若规定自然边界条件 $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi = 0$, 则

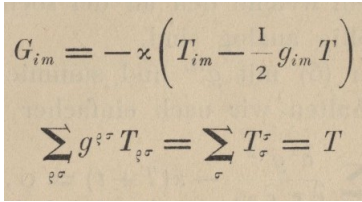
$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\mu(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

借助 Gauss 定律的思想, 可知必导致**引力 Poisson 方程**

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \mu(\mathbf{x}, t),$$

还原场强表述, 则它等价于 $\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -4\pi G \mu(\mathbf{x}, t), \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$. 而物体受场作用体现在试验质点满足 $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$. 这一理论取得了巨大成功, 但临近 20 世纪时遇到了一系列困难. 比如, Newton 引力明显是超距的: 由于是 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ 形式, 这说明 \mathbf{x} 处 t 时的 \mathbf{g} 由空间各点在 t 时的 μ 同时决定, 引力场传播无限快. 而在电磁学中, Coulomb 定律仅是静态解, 电场、电势应分别记作 $\mathbf{E}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$. 电磁学能自然地排除超距解, 因为还有涉及磁场、时间的方程参与约束. Newton 引力场论没有这种外援, 因为默认平方反比律处处成立. Newton 断言平方反比律只是数学上的方便描述, 但也难以提供更合理的解释了. 欲解决超距作用, 一种思想是想象周遭弥漫着媒介性质的物质, 用于传递相互作用, 即所谓**定域场**. 这一概念最初由 18 世纪 Faraday 提出, 经由 Gauss、Maxwell 等人对数学的发展, 定域场逐渐作为一种物理实质而占据一席. 实际上, 的确要适当放弃平方反比律, 才有可能得到引力的定域场论.

目前实验范围内, 描述引力最成功的理论仍归于 Albert Einstein. 他另辟蹊径, 在 1915 年 11 月完成了其 8 年奋斗之终幕:



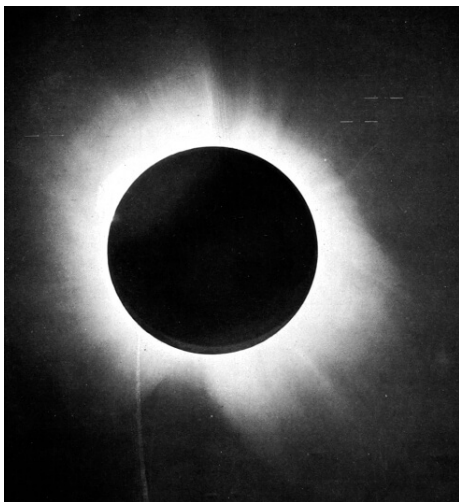
$$G_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$

$$\sum_{\tau} g^{\tau\tau} T_{\tau\tau} = \sum_{\tau} T_{\tau\tau} = T$$

图: 取自《引力的场方程》(*Die Feldgleichungen der Gravitation*)

Einstein 称之**广义相对论** (general relativity). 1919 年, Eddington 日全食实验验证了光线曲折的关键结论. 彼时欧洲正值战后阴霾, 故实验结果被相继刊登在各大报章的头版, 冠之“科学革命”. 这的确是现代物理学的伟大胜利. 诚然, 新符号自带神秘面纱, 固然令人费解, 败坏了大众印象. 但我们不必妄自菲薄, 无非是 Newton 理论需要微积分, 而 Einstein 理论需要额外的几何学罢了. Einstein 方程仍类似于引力正比于物质的形式. 它们都是人类漫漫长征的里程碑. 所需的基本知识并非完全陌生, 甚至一旦接受后, 将发现 Einstein 的思想其实更自然、更简单.

想真正了解一套理论, 仅仅知道方程还远不够. 广义相对论与 20 世纪物理学所作的一些最蔚为奇观的预言相联系. 读者多少在科普或艺术作品中, 听说过这些现



图：Eddington 日全食实验结果

象：黑洞视界、平行宇宙、虫洞、宇宙膨胀、暗物质、信息熵……1915 年时，这些还未为人知，唯有人们理解方程的动力学后才能发现。花费的时间长得惊人，这其中的艰辛事迹并不逊色于 Einstein 的孤勇奋斗。本书聊物理时亦将对历史简要一瞥。目前，物理学能分析的一般解往往只是简单解的微扰，所谓的宇宙监督假设、一般条件的奇点等问题都未得到普适解答。这些问题恰恰是一套理论意义和适用范围的基础考量。我们只能期望后续理论，继续揭示出美丽的结构，帮助人类进一步认识世界。

谨以此段阐明本书之深度、广度。本书以理工类专业一年级的多元微积分、线性代数、普通物理学为基础，致力讲述引力、时空等话题，为理解前沿进展作准备。将尽可能剖析概念动机，搭建新旧知识之桥梁。本书划分为广义相对论、数值计算以及量子理论，附录提供数学知识以飨读者。仅为证明单个命题所需的知识也放于附录，供有兴趣的读者查阅。细节未必完整提供，未提供时将给出简介和参考资料。故最终，附录在深度上似乎要讲透现代微分几何，但广度上又不完整。此乃笔者故意为之。因为本书不是要向读者大肆摆弄概念，而是补充看懂前沿所最少必要的、作了严格定义的数学。本书看似未设习题，但实际上巧置省略，足当练习。给出概念、结论时或通过字体改变暗示，或带编号地引入。不都采用编号只是为行文流畅，以免让本就不易的内容雪上加霜，但代价是失去链接便利。这固然重要，因为定义、命题在文中一般只出现一次，难免要来回翻阅，故敬请读者不厌其烦。

夏草

2025 年 3 月

参考文献

- [1] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, 1687, Eng: *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (California, University of California Press, 1999). 1
- [2] Einstein A. et al. (1958) *The Principle of Relativity*. New York: Dover. 1.2.1
- [3] Brans C. H, Dicke R. H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Phys. Rev., 1961, 124: 925-935. 1.4.2
- [4] Bhabra A, Sarkar K. *On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory*. Gen. Rel. Grav., 2005, 37: 2189-2199. 1.4.2
- [5] Will C M. *The confrontation between general relativity and experiment living*. Rev. Rel., 2014, 17: 4. 1.4.2
- [6] Will, Clifford M. 2018. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge: Cambridge University Press. 5.1
- [7] Ohanian H C, Ruffini R. 2013. *Gravitation and Spacetime*(3rd Edition). Cambridge: Cambridge University Press. 5.1
- [8] Weinberg S. 1971. *Gravitation and Cosmology (Principles and Applications of the General Theory of Relativity)*, WILEY.