前言

引力乃人尽皆知，我们自蹒跚学步便与之相伴．没有支撑的物体因它而下坠，有支撑的物体因它而稳定．即便如此，生活中仍有许多驾驭引力的高手，比如轻松掷筐的篮球球员，亦或挥拍自如的羽毛球手．当然，他们大抵是不需要计算物理学的．鸟和羽毛球手都得借助气流，但它天生长有一对契合空气动力学的翼膀，高耸入云，更胜一筹．而气流在大范围上的无扰压强分布，仍需借引力来稳定，故结论稍显意外：引力虽可能使鸟儿丧命，但也正是引力使鸟儿脱身．

这皆拜引力所赐，它如此普遍，世界各族文明自古以来便在思索其缘由，并给出不同色彩的描述．面对落体运动，中国古代将其解释为物体趋于回归至它原本的地方．受哲学及逻辑学的启蒙，西方世界对引力的描述要更为精准一些．面对**自由落体** (free fall)，古希腊时期的 Aristotle 尝云，“置两物体于同一点释放，重的将率先落地”．公元 5 世纪，希腊哲学家 Ioannes Philoponus 记载了这样一个发现：各种物体在同一点都将以相同方式自由落体．这即对 Aristotle 学派所秉持的思想做出了挑战．16 世纪，意大利弥漫着复兴之息，Galileo 认为 Aristotle 的观点有难以弥补的漏洞：设两物体相互牵制，下落加速应该归因于谁？他利用斜坡和单摆实验发现下落距离正比于时间平方，且与其质量无关．按连续性思想并忽略不必要的阻力，其合理外推至自由落体．通过微积分的思想雏形，Galileo 认为在同一点的各种物体都以完全相同的方式加速，并于西欧致力于传播这一论点，得到广泛回应及讨论．

经数十年思想斗争，Newton 于 17 世纪末阐明了更为精确、足以统一天地的规律．出于宗教美学追求，当时已普遍承认 Kepler 三大定律：椭圆轨道、掠面恒速、周期关系．某行星的掠面恒速说明其绕恒星的角动量守恒，故若用 Newton 第二定律[1]描述行星所受的引力作用，则引力是有心力．进而椭圆轨道现象就可将引力大小确定到平方反比距离．此即 Newton 引力．以此又能自洽地给出周期关系．Newton 理论取得了巨大成功，但临近 20 世纪，它也遇到了一系列困难．把视线放到远距上，Newton 引力明显是超距的．Newton 断言平方反比律只是数学上的方便描述，但也难以提供更合理的解释了．欲解决超距作用，一种思想是想象周遭弥漫着媒介性质

[1]较早的英语文献会给人名添后缀（常为 -an）表示形容词和名词，如 Galilean, Newtonian, Jacobian．这些表达沿用至今，但对当代人物来说一般不再采取．为迎合时代，本书中这些旧时人物亦不添后缀．

的物质，用于传递相互作用．Faraday 称之为**场** (field)．自 18 世纪，经由 Gauss、Maxwell 等人对数学的发展，场逐渐作为一种物理实质而在物理学里占据一席．人们在研究电磁力时也尽力让表达式向平方反比律靠近，如 Coulomb 静电力，之后又用场论改写．类似地，Newton 引力场论如下：质量密度场 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 作为场源所激发的引力场为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = -G\int \rho(\boldsymbol{x}',t)\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3x',$$

上式是保守场，因此可直接用标量的**引力势** $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 指代，满足 $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. 注意 $r \neq 0$ 时 $\boldsymbol{\nabla}(1/|\boldsymbol{r}|) = -\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3 \neq \boldsymbol{0}$，若规定自然边界条件 $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\phi = 0$，则

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'.$$

借助 Gauss 定律的思想，可知必导致**引力 Poisson 方程**

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{x},t),$$

还原场强表述，则它等价为 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = -4\pi G\rho(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{0}$. 而物体受场作用体现在试验质点满足 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g}$，此即 Newton 引力场论的框架．由于是 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)$ 形式，这说明 $\boldsymbol{x}$ 处 t 时的 $\boldsymbol{g}$ 由空间各点在 t 时的 ρ 同时决定，引力场传播无限快．而在电磁学中，Coulomb 定律仅是静态解，电场、电势应分别记作 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})$. 电磁学能自然地排除超距解，因为还有涉及磁场、时间的方程参与约束．Newton 引力场论没有这种外援，因为默认平方反比律处处成立．可见场的引入不能根治矛盾，除非适当放弃平方反比律[1].

目前实验范围内，描述引力最成功的理论仍归于 Albert Einstein．他另辟蹊径，在 1915 年 11 月完成了其 8 年奋斗之终幕：

equation.jpeg

图：取自《引力的场方程》(*Die Feldgleichungen der Gravitation*)

Einstein 称之**广义相对论** (general relativity)．1919 年，Eddington 日全食实验验证了 Einstein 对光线曲折的关键结论．彼时欧洲正值战后阴霾，故实验结果被相继刊登在各大报章的头版，冠之“科学革命”．这的确是现代物理学的伟大胜利．诚然，新

[1]历史上出现过诸多修正公式，如 Yukawa 势 $\phi \propto \mathrm{e}^{-r/C}/r$（$C$ 是常数），但无论从精度还是简洁性上都是平方反比律占优．这种修改未命中要害．Yukawa 势更多用于量子场论．

符号自带神秘面纱，固然令人费解，败坏了大众印象．但我们不必妄自菲薄，无非是 Newton 理论需要微积分，而 Einstein 理论需要额外的几何学罢了．Einstein 方程仍类似于引力正比于物质的形式．它们都是人类漫漫长征的里程碑．所需的基本知识并非完全陌生，甚至一旦接受后，将发现 Einstein 的思想其实更自然、更简单．

想真正了解一套理论，仅仅知道方程还远不够．广义相对论与 20 世纪物理学所作的一些最蔚为奇观的预言相联系．读者多少在科普或艺术作品中，听说过这些现象：黑洞、奇点、平行宇宙、虫洞、宇宙膨胀……1915 年时，这些还未为人知，唯有人们懂得研究方程的动力学后才能发现．花费的时间长得惊人，这其中的艰辛事迹并不逊色于 Einstein 方程背后的孤勇奋斗．本书在聊物理话题时亦将对历史简要一瞥．目前，物理学能分析的的一般解往往只是简单解的微扰，所谓的宇宙监督假设、一般条件的奇点等问题都未得到普适解答．这些问题恰恰是一套理论意义和适用范围的基础考量．我们只能期望 Einstein 方程或其它理论，继续揭示出美丽的结构，帮助人类进一步认识世界．

谨以此段阐明本书之深度、广度．本书以理工类专业一年级的多元微积分、线性代数、普通物理学为基础，致力讲述引力、时空等话题，为理解前沿进展作准备．将尽可能刨析概念动机，搭建同旧知识之桥梁．本书划分为广义相对论、数值计算以及量子理论，附录提供数学知识以飨读者．仅为证明单个命题所需的知识也放于附录，供有兴趣的读者查阅．细节未必完整提供，未提供时将给出简介和参考资料．故最终，附录在深度上似乎要讲透现代微分几何，但广度上又不完整．此乃笔者故意为之．因为本书不是要向读者大肆摆弄概念，而是补充看懂前沿所最少必要的、作了严格定义的数学．本书看似未设习题，但实际上巧置省略，足当练习．给出概念、结论时或通过字体改变暗示，或带编号地引入．不都采用编号只是为行文流畅，以免让本就不易的内容雪上加霜，但代价是失去链接便利．这还是蛮重要的，因为定义、命题在文中一般只出现一次，难免要来回翻阅，故敬请读者不厌其烦．

夏草
2025 年 1 月