

# Chapter 1

## 经典引力场论

### 1.1 场论初步

#### 1.1.1 定域性

凭借经验，将空间中的研究对象称为**物质** (matter). 无论生活中还是学术里，人类总要对它们进行划分. 不妨将易察觉的日常物质称为**物体** (object). 物体受到相互作用的信息时将通过动量、能量的变化表达反馈. 假若只单独存在两个物体而周围无任何媒介，其间能量无法传递，故应设想除这些物体外还弥漫着一种不易察觉的物质，称为**场** (field)，物体与它相互作用，再由它间接作用于另一物体.

相互作用强度涉及关乎物体本性的某种取实数的物理量，称为**荷** (charge). 物体与场的相互作用大致体现为两方面：1. 场对具有相应荷的物体有相应的作用；2. 具有荷的物体本身可作为场源激发并影响场. 无论如何这避不开寻找对场的数学语言. 利用前者，设想一种**试验物** (test object)，首先可忽略体积、形变及自转，如质点、点电荷，其次最重要地，可忽略其自身产生的场对外场之干扰，这样就可通过测量试验物上的作用力来研究外场，并寻找该力与试验物的荷之联系. 每单位荷的对应作用力定义为**场强** (strength). 场强通常无关于该试验物，因此可良好地用作场的数学模型. 场强往往又能表为某个**势** (potential) 的某种导数，故场的数学描述即用场强或势场指代物理场本身. 当然，宏观物体也可用场去描述.

尽管空间是个已深入人心的概念，但它是不严格的. 我们不假思索地认为空间是指所有物质处于同一时刻的分布. 然而，我们实质总用信号感知周遭. 无论可见光还是神经元生物电，它们的传播速率是有限值. 考虑到，物理学实际研究的是各类**事件** (event)：类似于撰写记叙文，真实事件总发生在一段时间内并占据一定空间，但就质点而言可只用时刻和空间点确定. 而严格来讲，质点只能瞬间观测发生在自己身

上的事件，故此处的质点不能真正感受到周围的同时性。当然，这些信号依旧很快，以至于直到 Einstein 之前，人们都对同时性保有错觉。

我们必须约定俗成，以某种信号为基础给出同时的定义。一种方便的方式是规定任何时刻在任意参考系下，这种信号的速率测值是相同的，记作  $c$ 。进而，以某些足够小、稳定不受干扰的周期事件为基准，就可借助  $c$  定义长度单位。当今国际单位制正行此道： $^{133}\text{Cs}$  基态的两超精细能级之间跃迁辐射周期为  $1/9192631770\text{s}$ ；并约定使用光的速率作为  $c$ ，规定为  $299792458\text{m/s}$ 。因为在历史上，即使未使用当今单位制，且承认 Newton 意义的惯性参考系，人们仍然发现：光在任意惯性参考系下所测速率相同，这称为**光速不变**。实验精度极高，可认为光和  $^{133}\text{Cs}$  一样是稳定基准的合适候选。

这导致的遗憾是，光速成了不可逾越的壁垒。物质只能分为光速、低于光速和超光速（目前未发现）三类，不能从零加速至光速，也不能从超光速跨向低速。由于日常物质隶属低速领域，我们更愿意承认低速物质在任意时刻的连续性，进而确认某两个事件属于同一物质。比如，上一秒的“这个”苹果是否真的与下一秒的苹果是一个苹果呢？若其速率测值很低，可以认为是同一个。进一步，可讨论不同物体间的作用传递。信息需要物质载体，因此光速是信息传递的上限，这样我们才能讨论两个物体的关系，如因果律。总之，存在质点或光子能依次经历的两个事件称有**因果联系**。相互作用在场中的传递速率有限，这称为**定域性** (locality) 或**局域性**。

经典力学没有这种性质，Newton 引力就是典型的超距案例：他曾断言**平方反比律**处处成立<sup>1</sup>，即质量密度场  $\rho(\mathbf{x}, t)$  作为场源所激发的引力场为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -G \int \rho(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (1.1.1)$$

上式是保守场，因此可直接用标量的**引力势**  $\phi(\mathbf{x}, t)$  指代，满足  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ 。注意  $r \neq 0$  时  $\nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 \neq \mathbf{0}$ ，若规定自然边界条件  $\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \phi = 0$ ，则

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.1.2)$$

借助 Gauss 定律的思想，可知必导致**引力 Poisson 方程**

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.3)$$

若还原为场强表述，则 Poisson 方程等价于两个方程

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -4\pi G \rho(\mathbf{x}, t), \quad \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (1.1.4)$$

而物体受场作用体现在试验质点满足  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$ ，此即 Newton 引力场论的框架。上式与电磁学相似但又与其处境不同。在电磁学中，Coulomb 定律仅是静态解，电场、电

<sup>1</sup>历史上出现过诸多修正公式，如 Yukawa 势  $\phi \propto e^{-r/C}/r$  ( $C$  是常数)，但无论从实验精度还是理论简洁性上都是平方反比律占优。Yukawa 势更多用于量子场论。

势应分别记作  $\mathbf{E}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$ , 但 Newton 理论却是  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  形式, 这说明  $\mathbf{x}$  处  $t$  时的  $\mathbf{g}$  由空间各点在  $t$  时的  $\rho$  同时决定, 引力场传播无限快. 电磁学能自然地排除超距解, 因为还有涉及磁场、时间的方程参与约束. Newton 引力场论没有这种外援, 因为默平方反比律成立. 我们必须适当放弃平方反比律 (现在只作为近似结论), 保留引力更为深刻的性质, 留到 1.3.1 节讨论.

对于不具备因果连续性的事件也能定义速率. 比如, 电脑屏幕左侧出现的光点“移动”到右侧, 也可将短时间内其空间差距作为其速率. 只要适当编程, 这种速率就可轻松超越光速. 再比如, 在介质中, 光波各处出现相位偏移, 宏观上体现出一种表面效果, 看似可低于光速或超光速传播, 这种速度称为相速度. 至少按目前理论, 我们常讨论的“速度”是指那个以因果为前提的速度, 故自然默认低于光速. 特殊情况会专门指出.

### 1.1.2 时空

借助光信号给“同时”一个操作性定义. 无论实验技术发展如何, 光速的测量原理至今仍和 **Fizeau 程序**一致: 从坐标原点发射球面光波, 然后由放置在某处距离已知的镜子反射, 随后记录光回到原点的时间, 这样可计算光速. 注意, 其中约定光走匀速直线, 且任意方向上速率相同; 实验上尽量使距离和时间足够小. 当然, 按当今的国际单位制, 不需要再测量光速. 因此以上步骤更倾向于是在测距. 若任意时刻测距均相同, 就认为二者相对静止. 规定坐标原点是惯性的, 那么二者可同属一个惯性参考系. 进而, 只需约定“镜子反射光”和“原点发出光”、“原点接受光”的中间事件 (由  $^{133}\text{Cs}$  原子钟测量) 是同时的. 惯性参考系内任意质点, 均可按这种方式约定同时性, 因此可确定哪些事件处于同一时刻而构成“空间”. 因此比空间更严格的替代概念为**同时事件集**. 注意, 实验意义上, 光速的确只能理解为双程平均光速, 而非单向光速. 迄今为止, 单向光速从未被实验测量过; 也不可能实验测量, 除非找到光信号外的同时性的定义方式.

更普遍地, 可以考察所有事件的集合. 当然, 事件的排布也要像空间点一样规律排列. 比如, 以某惯性参考系为基准, 可以将各时刻的同时事件集按顺序堆叠起来. 给空间补上时间轴, 这就形成了一个**时空连续统** (spacetime continuum), 简称**时空**. 事件的理想模型对应**时空点**, 一般不严格区分二者. 尽管我们是从某惯性参考系出发构建了时空, 但由于存在不同的参考系选择, 因此更普遍的做法是默认存在一个抽象的 4 维**背景** (background), 其每一点的物理意义为事件.

通俗地说, 物理研究总要预设背景, 其由点连续地而非分立地分布而成, 进而采用坐标方法. 比如, Newton 力学的研究背景是  $\mathbb{R}^3$  空间, 并规定某个正交右手归一系是惯性的; 亦或更为抽象, 如热力学会研究压强、温度的相图. 在数学上, 背景被准确地定义为**拓扑空间** (topological space), 而带有坐标系的背景则称**流形** (manifold).

当然,物理上有点连续性、坐标变换光滑性的需求,应进一步对拓扑空间和流形提出要求,其细节暂不重要,本章皆用背景称呼之.

描述事件的确仍需坐标方法. 约定将时空点的 4 个坐标依次记作  $x^0, x^1, x^2, x^3$ . 右上角数字只是**指标** (index) 而非乘幂. 不必担心,在很多情况下是不会与乘幂相混淆的;实在冲突时只需额外注释. 规定  $x^0$  的物理意义是时间,而其余坐标对应空间坐标,无论坐标系选取如何. 通常还规定  $x^0$  轴正方向是时空的**未来**,反方向为**过去**. 比如,可以在某正交右手归一系  $\{x\}$  下规定

$$x^0 := ct, \quad x^1 := x, \quad x^2 := y, \quad x^3 := z. \quad (1.1.5)$$

其中给时间乘上速率常数以使量纲一致;默认光速不变,选择  $c$  最无歧义. 此后,本书多采用单位制使  $c = G = 1$  (细节见 1.6 节),则  $x^0 = t$ . 这样  $x^0, t$  都可称**坐标时**.

读者或许认为,可以通过叙述发生在一个点的一个事件来确定该点,即“此处何物发生何事”,而事件本身用其它自然语言叙述. 但这种方式只有对该事件的目击者才有意义,缺乏普遍的可传达性,而可传达性是科学数据的显著特点. 若该目击者试图把事件发生的位置转告一位调查者,或者试图为后代写下一段记录,则不得不用明确的坐标(如地球经纬度)或含蓄的坐标(如某栋大楼的正北一百米)来描述这一位置. 实质上,坐标给了我们确定点的操作程序,这是叙述性方法所做不到的. 叙述性方法只对那些有真实事件的地方才有效,但大多数地方是空的,没有任何真实事件发生过. 坐标空间是一个连续的、不可数的集合,而实际事件的集合是分离的、有限归纳的集合. 因此不可能认为这两种集合是等同的. 物理学更接受坐标方法.

初学者可将时空想象为所学过的  $x-t$  图. 设一张 2 维白纸  $\mathbb{R}^2$ , 其上选有某个正交右手归一系 (Descartes 系). 在绘制习惯上,常将坐标网格画成垂直、右手顺序、尺度均匀的. 这些几何概念则是基于生活意义,比如,默认绷紧直软绳呈直线、水面同重力方向垂直、人的右手三指顺序规定为右手. 更准确地,可以用 Lorentz 力确定 3 维空间中的正交和右手性,或者用宇称不守恒来确定右手性. 将某个正交右手归一系按此习惯绘制图像;对于时空,则将时间轴未来方向朝上,空间坐标系右手排列,就称以此系为**绘图基准**. 考察某个粒子. 不考虑突然解体或其余特殊情形,无论静止还是运动,粒子必须经历一系列相邻事件,

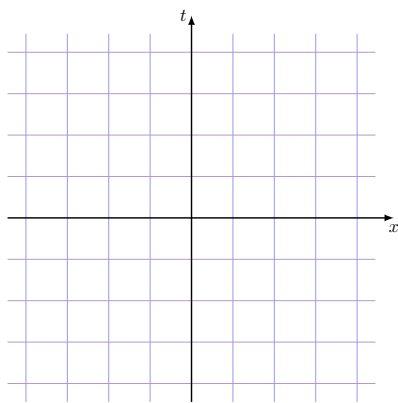


图 1.1: 2 维时空图

比如就某粒子的某时刻而言,它必然要延伸至邻域  $O \subset \mathbb{R}^2$  中. 尤其对物理上的客观微粒而言,常认为它足够“永生”,故其所经历的事件可尽可能延伸,总之,它在时空中将划过一条曲线. 粒子所经历的所有事件构成的曲线就称**世界线** (worldline).

一族世界线构成的集合  $\mathcal{C}$  称为**世界管** (worldtube). 通常世界管是 4 维的. 而空间曲线在时空中划过的世界管是 2 维曲面, 故可称**世界面** (worldsheet). 若世界线不交叉, 则称**线汇** (congruence), 换言之, 使  $\mathcal{C}$  所占时空范围内每一点都  $\exists! \alpha_i \in \mathcal{C}$  与之对应. 这或许让某些读者联想到宿命论或决定论, 毕竟世界线是该粒子的所有历史

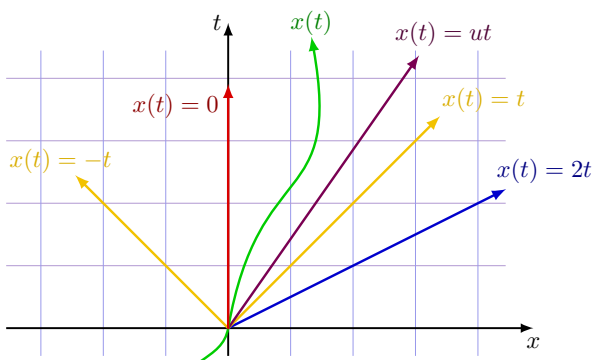


图 1.2: 世界线

和未来. 以后的学习中会接触量子理论对时空因果的影响: 量子观点认为粒子不可能同时确定动量与位置, 故经典的轨道模型不再适用, 世界线将被时空上的波函数替代. 现在仍期望先构建经典的相对论模型, 世界线仍是很好的概念. 凡示意时空及世界线的图就是**时空图** (spacetime diagram). 就一般的 4 维时空, 固然画不出直观图像, 但其实许多问题总能借助对称性, 使时空可“降维”, 通常省略部分空间维度.

所有这些概念看起来是显然的, 但事实并非如此, 因为时空的结构很可能非常怪异. 也许在大尺度上, 宇宙无法用  $\mathbb{R}^4$  描述, 长成某种高维球状; 在非常小的距离上, 比如在处理  $10^{-15}$  m 或  $10^{-25}$  m 时, 不可能建立起刚性足够强的参考系. 目前我们认为这是因为微观的量子性质, 但也或许存在更深刻的理由说明为何做不到这种事. Wheeler 认为, 在  $10^{-35}$  m 的亚核子尺度, 量子引力的涨落极其剧烈, 并有可能产生出一种奇怪的结构: 时空也许具有一种非常变态的模样, 充满“洞”和“泡泡”, 甚至不是连续统. 读者或许听说过 **Planck 长度**  $\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.6 \times 10^{-35}$  m, 其中  $\hbar = h/2\pi$  是约化 Planck 常数,  $h$  是 Planck 常数. 它实际上给出的是涨落的特征尺度. 即便如此, 我们仍然只能间接地探测变态性质, 那就是假设时空能用连续坐标描述. 在这种假设下, 我们才有机会用人类的方法描述变态性质. 当然, 若基于这一假设的理论是成功的, 就有理由相信, 至少在日常生活中时空的结构是良好的, 因为这些变态性质的尺度非常小. 对于更复杂的时空背景, 仍然希望某事件邻域的确也按顺序连续地标记坐标. 若无特别指出, 本节默认讨论问题的背景时空为  $\mathbb{R}^4$ .

### 1.1.3 拉氏理论

对粒子位置这种比较具象的概念,一般地可推广为**位形** (configuration),用以描述系统的空间分布或形状. 所有可能位形构成的集合称为**位形空间**,如粒子的位形空间就是  $\mathbb{R}^3$ . 时空就是事件的位形空间. **路径** (path) 是位形的演化,比如粒子的位置  $\mathbf{x}$  随时间  $t$  的运动曲线  $\mathbf{x}(t)$ . 世界线也即时空视角的路径. 一般地将路径记作  $q(\sigma)$ ,  $q$  可代表位形空间上的任何坐标 (包括矢量的形式), 而参数  $\sigma$  往往具有时间意义.

目前许多经典物理方程可以靠这样一种信念得到: 相互作用的实际规律总能使系统的**作用量**最小, 这称为**最小作用量原理** (principle of least action)<sup>1</sup>. 这一哲思最初由 18 世纪 Lagrange, Hamilton 等人发展: 给定某质点的初末位置  $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$ , 作用量若表为沿运动轨迹  $\mathbf{x}(t)$  的如下积分泛函<sup>2</sup>

$$S(\mathbf{x}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt, \quad L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - V(\mathbf{x}), \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2, \quad (1.1.6)$$

其中标量  $L$  称作**拉氏量** (Lagrangian),  $T$  是动能,  $V$  是保守势能, 就可推得 Newton 第二定律  $m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla V$ . 换言之, 这样设定的  $S(\mathbf{x}(t))$  就给出了关于  $\mathbf{x}(t)$  的经典力学方程. 可以看到, 改变拉氏量的表达就给出的一套不同理论. 一个系统通常具备相应的作用量, 它是路径的泛函  $S(q(\sigma))$ , 且总保为拉氏量积分的形式. 固定端点  $P, Q$  间的各种路径构成的集合  $\Omega_P^Q$  称为 **Fréchet 空间**, 故作用量严格来说是  $\Omega_P^Q$  上的函数. 注意, 未给出实际规律之前, 所考虑的路径可以非常任意, 比如质点的 Fréchet 空间可包括任意  $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$  间的曲线. 一般地对含  $N$  个粒子的系统, 设各粒子的位形  $q_i$ , 而  $q_i(\sigma)$  是用  $\sigma$  参数化的给定路径, 规定作用量总能表为

$$S(q_1(\sigma), \dots, q_N(\sigma)) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) d\sigma, \quad (1.1.7)$$

其中  $\dot{q}_i := dq_i/d\sigma$ . 或者简写为

$$S(q_i(\sigma)) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(q_i, \dot{q}_i) d\sigma, \quad (1.1.8)$$

但不再研究  $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \dots, \sigma)$ , 有两点考虑: 若承认 **Newton 决定性原理**——仅由位置和速度即可确定经典运动, 更高阶的导数就不会出现在方程中; 若承认物理规律不随“时间”变化,  $L$  就不应显含  $\sigma$ , 即默认  $\partial L/\partial \sigma = 0$ .  $L$  只通过  $q, \dot{q}$  的关系隐含时间. 按理来说, 只要给出  $q(\sigma)$ ,  $L$  就应能用  $\sigma$  表示, 似乎与  $\partial L/\partial \sigma = 0$  矛盾. 其实这涉及诸多符号混淆, 我们在第 8 章可一并解决. 简单来说, 在给出实际运动方程前我们并不知道  $q(\sigma)$ .

<sup>1</sup> 又称**稳恒** (stationary) **作用量原理**, 因为最小只是美学说法. 可填上负号使之变成“最大”, 甚至只要求导数为零, 故不一定在该处取最值, 甚至也非极值而是鞍点. 我们仅在分析解的稳定性时再关注最优化问题.

<sup>2</sup> 设函数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $A = \mathbb{R}^n$  时说明自变量可由  $n$  个独立实数描述, 称**自由度**为  $n$ . 函数的函数称为**泛函** (functional), 如曲线的线长. 曲线的点无限多, 因此泛函可视为函数在**无穷自由度**下的极限. 泛函的自变量称为**宗量**.

那么如何对泛函求导？假设对某一粒子，点  $q_i(\sigma_0), q_i(\sigma_1)$  间使得泛函取极值的曲线是  $q_i(\sigma)$ 。注意极值的含义就是取邻近自变量时因变量近似不变。考虑  $q_i(\sigma)$  的一条邻近曲线  $\hat{q}_i(\sigma)$ ，其参数式与原先的差是微小的  $\delta q_i = \hat{q}_i - q_i$ ，但要求端点不动，故有  $\delta q_i(\sigma_0) = \delta q_i(\sigma_1) = 0$ 。这个  $\delta$  记号就称为**变分** (variation)，泛函的这套运算称为**变分法**。极值曲线的变分所引起的泛函变分满足  $\delta S = 0$ ，即相对于路径变化是高阶无穷小。最小作用量原理就是要求实际路径是使  $\delta S = 0$  的  $q(\sigma) \in \Omega_P^Q$ ，这称为**正路或在壳** (on shell)，否则称**旁路或离壳** (off shell)。注意

$$\delta S = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) d\sigma - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(q_i, \dot{q}_i) d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \delta L d\sigma, \quad (1.1.9)$$

因此端点和参数  $t$  的不变使变分就像挪进了积分内一样。在极限  $\delta x \rightarrow 0$  下有

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

可见变分的代数运算与微分极为相似。其中的  $\delta \dot{q}_i$  不便于处理，注意

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{d\sigma}(q_i + \delta q_i) - \dot{q}_i = \frac{d}{d\sigma}(\delta q_i), \quad (1.1.10)$$

因此可交换顺序。变分法的关键是利用**分部积分法**，将一部分积分转化为**边界项**。这样，结合变分的边界限制就可消去边界项为

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i d\sigma = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{\sigma_0}^{\sigma_1} - \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \delta q_i \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\sigma = - \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i d\sigma,$$

代回去就可提出  $\delta q_i$  为

$$\delta S = \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i d\sigma = 0,$$

该式对任意变分  $\delta q_i$  成立，当且仅当括号恒为零，即

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1.11)$$

这称为 **Euler-Lagrange 方程**，简称 **E-L 方程**。请读者验证，取正交系，代入  $L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V, \sigma = t$  可计算得  $m \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ 。不过需强调，对简单的  $L$ ，才考虑直接计算相应偏微分再代入 E-L 方程；而更多时候会遇上更复杂的  $L$ ，这时我们采取上述流程直接变分，再用分部积分和变分限制消除边界项。基本上，我们会找各种理由消除边界项，则本书会经常省略积分域，少数情况才去讨论泛函变分的边界项。

类似地，场的定律即其所服从的运动方程，这涉及场的拉氏理论。下面与粒子情形进行类比。场的“位形”可取相应空间场，但场的“路径”应是空间场往时空

上的延伸, 即它正是时空上的任意场  $\psi(x)$ , 而“位形”是它在某同时事件集上的截取  $\psi_t(\mathbf{x}) := \psi(t, \mathbf{x})$ . 不妨考虑从离散的粒子系统逼近. 假设  $\mathbf{x}$  的自由度是有限的, 则空间场  $\psi(\mathbf{x}_i)$  形同位形  $q_i$ , 因此作用量为  $S = \int L(q_i, \dot{q}_i) dt$ . 坐标偏导常简记为  $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$ , 也可记作逗号形式:  $\partial_\mu \psi = \psi_{,\mu}$ .  $L$  涉及对  $i$  的求和, 其连续极限即对  $\mathbf{x}$  的积分:  $L = \int \mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu}) d^3x \Rightarrow S = \int \mathcal{L} d^4x$ .  $\mathcal{L}$  称为**拉氏密度**, 毕竟泛函宗量是  $\psi(x)$ , 故更彻底的做法是用时空坐标作为积分变量. 可见  $\mathcal{L}$  在场论中的地位和  $L$  在轨道理论中的地位几乎一致, 因此不加区分地称为拉氏量也是可以的.  $\psi$  及其时间导数  $\partial_t \psi$  来源于对  $q_i, \dot{q}_i$  的类比, 而空间导数可理解为场相邻单元间的势能.

同理, 默认许多理论能存在  $\mathcal{L}$  表述;  $\mathcal{L}$  一般不显含时空点的坐标  $x^\mu$ , 且至少含宗量的一阶导. 在粒子情形我们通过决定性原理排除高阶导, 但现在是关于时空坐标的导数, 且空间项有相互作用势的含义, 冒然排除高阶是激进且危险的做法. 一般地应写作

$$S(\psi(x)) = \int \mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu_1}, \dots, \psi_{,\mu_1 \dots \mu_k}) d^4x. \quad (1.1.12)$$

若  $\mathcal{L}$  至多含二阶导, 则类似可得场的 E-L 方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.1.13)$$

其中省略了求和号  $\sum_{\mu=0}^3$ . 再次强调, 上式只是在  $\mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu})$  的情形下之结论. 实操中我们总是直接计算变分.

注意, 以后总和指标运算打交道, 初学者可能会感到复杂但又需要习惯, 但通过关注分量本身可简化书写: 若某个指标一上一下成对出现, 则应对该指标求和, 但省略求和号书写. 此即 Einstein 提出的**求和约定**. 求和哑元称为**哑 (dummy) 标**, 又可称对该指标**缩并** (contraction); 留下的指标称**自由 (free) 指标**. 且**上标** (upper/raised indices) 和**下标** (lower indices) 位置一致, 称为**指标平衡**. 分母的上标看作分子的下标. 不与自由指标冲突的前提下哑标可任意替换. 时空指标一般取  $\mu, \nu$  等希腊字母, 遍及 0, 1, 2, 3; 空间指标取  $i, j$  等拉丁字母, 遍及 1, 2, 3.

代数理论保证求和约定的合理性, 比如一个因式中指标的确至多出现两次; 多个因式间可出现重复哑标对, 因为是加法关系; 一个因式可以出现多对哑标, 由乘法的交换、结合及分配律, 求和顺序是无所谓的, 这体现了我们关注其求和通项的精神.

在粒子情形, 边界项即函数作差, 而在高维情形中这就是 Gauss 定理 (见 2.7 节). 因此要想消除边界项, 可以有三类方法: 1. 若无任何条件, 可取无穷积分, 认为场在无穷远没有贡献 (被积项至少比  $1/r^2$  更快地趋于零) 或不存在边界; 2. 仅在  $\delta\psi = 0$  条件下, 可通过修改  $\mathcal{L}$  使其消除边界项; 3. 考虑积分域  $U$  时, 规定边界上任意阶都有  $(\delta\psi)_{,\mu_1 \dots \mu_k} = 0$  (比如认为  $U$  外的旁路  $\psi$  恒定地与边界一致), 这一更强的条件可使  $\mathcal{L}$  无论含多少阶导数都能消除边界项. 一般来说, 消除边界项总采取第三类理由. 总之, 物理学默认变分中的全微分项舍去.



### 1.1.4 对称性

对称性是当代物理的重要概念. 读者熟知动量、能量概念及其守恒, 现代观点下, 许多守恒量可解释为作用量对称性的结果. 在量子场论中, 对称性还可用于粒子分类、相互作用约束等.

称一个东西具有对称性, 字面意思即该东西长得很对称, 好比圆具有左右对称、旋转对称等, 其实质是圆在反射变换、旋转变换下长相没变. 作用量理论中, 我们考虑的是位形空间上的**点变换**. 描述一个点变换, 只需给定新旧点在同一坐标系下的坐标关系  $\tilde{q} = \phi(q)$ . 这说明点变换和坐标变换十分相似. 区别在于, 前者是点变、坐标系不变 (**主动观点**), 后者是点不变、坐标系变 (**被动观点**). 为教学方便, 常直接用坐标变换的语言讨论对称性. 但为避免混淆概念 (第 2 章讨论更复杂的对称性), 要明白其实质是点变换.

变换所构成的集合通常可以是群<sup>1</sup>. 比如沿  $x$  轴的任意平移变换表为  $\bar{x} = x + a$ , 记作  $\phi_a$ . 为使  $\{\phi_a | a \in \mathbb{R}\}$  是群, 只需规定群乘为  $\phi_a \phi_b := \phi_{a+b}$ , 这样  $\mathbb{R}$  的加法和乘法自动给出  $\phi_0$  为恒等变换,  $\phi_{-a}$  为  $\phi_a$  为逆元. 像这样, 可用实数作为表征参数的变换称为**单参变换**. 参数只取有限值时称**离散变换**, 比如反射变换只包含两种操作; 参数连续取值 (至少是区间  $I \subset \mathbb{R}$ ) 时称**连续变换**, 如平移、旋转按平移量、旋转角来描述可有无穷多种. 连续变换按  $\phi_a \phi_b := \phi_{a+b}$  定义群乘, 则称**单参群**.

若参数是小量, 则称**无穷小变换**, 连续变换视作一系列无穷小变换的累积. 严格做法是先取  $\alpha = \epsilon$ , 最后同除以  $\epsilon$  再令  $\epsilon \rightarrow 0$ . 这使我们能在“取极限前”就放心地将变换保留到一阶, 也即经常在理论计算中就开始做近似, 故常将无穷小变换记作  $\tilde{q} = q + \epsilon \xi(\sigma, q, \dot{q})$ . 若变换参数  $\alpha$  与时间参数无关, 则该变换称为**整体变换**, 否则称**局域变换**. 保持作用量不变的变换称为**对称变换**<sup>2</sup>, 或称作用量具有这种对称性, 即作用量在该变换下的形式不变. 在无穷小变换下不变就是**连续对称性**. 对于无穷小整体变换, 则称**连续整体对称性**. 以后可证著名的 **Noether 定理**: 若系统的作用量有连续整体对称性, 则当路径为正路时, 存在相应的守恒量.

一种办到连续整体对称性的方法是让  $L$  不显含这个变量, 因为假设对某个  $\kappa$  有  $\partial L / \partial \kappa = 0$ , 则相应对称变换  $\bar{\kappa} = h(\kappa)$  毫无意义. 以经典力学举例. 对某个粒子若有  $\partial L / \partial q = 0$ , 则其**正则动量**  $p := \partial L / \partial \dot{q}$  守恒, 因为根据 E-L 方程知

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

若  $q$  是某个线坐标, 则此即沿该方向的线动量守恒 (读者可验证  $L = T - V$  给出  $p = mu$ ), 对应**空间平移对称性**; 同理, 取某平面上的角坐标则给出沿法线的角动

<sup>1</sup>集合上若存在一个满足结合律的二元封闭运算, 且具有恒等元和逆元的存在性, 则这种集合称为**群** (group), 其元素称为**群元**, 该运算称为**群乘**.

<sup>2</sup>当然, 也可让二者只相差边界项 (称为**准不变性**), 因为它们给出相同正路. 细节留到第 8 章.

量守恒, 对应**空间各向同性**. 系统的**哈氏量** (Hamiltonian) 与  $L$  有如下 **Legendre 变换**的关系:

$$H := \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (1.1.14)$$

当  $\partial L / \partial t = 0$  时 (**时间平移对称性**), 可证其守恒性:

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0.$$

读者可验证  $H = 2T - L = T + V$ , 后者即机械能. 因为仅考虑保守作用, 则机械能等同总能量. 非保守力的实质是统计效应, 不在纯粹的经典力学范围中. Legendre 变换是一个更有优势的写法, 因为这帮助我们在一般理论的拉氏量下直接定义能量. 当然, 由于存在不同的  $L$  给出相同运动方程 (比如乘以常数或加上全导数项), 这样哈氏量不一定等于能量. 若只从守恒角度考量, 非要称任意哈氏量都能作为能量定义也可以. 总之, 不显含某个变量也能阐释守恒量的来源, 但如前文所述, 务必牢记对称变换的实质是点变换, 坐标变换只是其描述方式.

### 1.1.5 有效性

除研究质点外还可讨论**光子** (photon), 二者统称为**粒子** (particle). 当然, 高能物理学中的粒子一般指微观粒子. 当代理论中**质量**特指质点在相对静系所测得的质量. 质点又可称**有质粒子**. 由于光速不变, 光子不存在相对静系, 故光子没有甚至不可定义质量, 可称**无质粒子**. 在量子场论中, 微观粒子被解释为量子场的激发态. 电荷由 Fermi 子携带, 如质子, 电子, 夸克, 而相互作用媒介被解释为真空中本就一直存在的 Bose 子场. 因此“电荷激发电磁场”的新解释是电磁场受 Fermi 子场影响, 产生了光子, 并由光子传递相互作用. 电荷间的相互作用靠光子传递, 在低能情形表现为作用力. 故严格来说, 电磁场不依附于某个带电体, 将总的电磁场分解为由各“场源”所“激发”的部分是一种分析方法. 目前“场和粒子谁更基本”这个问题还没有明确答案, 只能说对不同情况, 两种模型及其各自的理论的便捷程度不同. 比如散射振幅理论中当然粒子模型更便捷, 甚至可以不引入场.

自己产生的场当然也会影响自己, 但经典理论在处理这类问题时存在严重矛盾 (如辐射阻尼). 量子电动力学通过电子自能图的重整化来解决电子的自相互作用, 虽然依旧不尽完美, 但至少知道, 症结在于点粒子模型导致**无穷大自能**. 实际上, 这类**自我指涉**问题在各种学科中都存在, 且目前均未获得完备的解决方案. 应当认为, 目前的理论都是某种尚未发掘的基本规律的低能情形, 所谓**低能**意味着理论中所涉及的**能标** (能量标度) 远小于某个数量级很大的值. 换言之, 现有理论可被视为**有效的** (effective). 只要意识到目前的理论及其概念都是近似的, 就可以给目前人类的科学

提供台阶. 所有理论都是错的, 但一些是有用的. 因此, 我们总是追求尽可能简单的理论, 但这并不意味着自然规律 (若有且能被人总结) 是简单的. 的确可能存在一种情况, 需要用高阶项去描述自然, 但科学总要进步, 只能先研究低能理论. 换言之, 从简美学纯粹是出于人为便利, 能迎合目前技术所能允许的实验即可.

研究各物质场间的相互作用, 就要用各对应的物理量来构建总作用量. 这一主题称为**耦合** (coupling). 目前除接受实验筛选, 没有先验原理支撑唯一的耦合方式. 以试验粒子和场的耦合为例. 有时可修改自由粒子作用量, 并保证无场时还原; 有时是“自由粒子作用量 + 外场与粒子的耦合项”的形式. 从有效性和对称性出发, 并依据该相互作用的实验特征, 所考虑的最简单耦合称为**最小** (minimal) **耦合**.

## 1.2 相对论初步

### 1.2.1 惯性系

坐标系和参考系是不同概念. 研究物理过程时, 我们是借助参考系来建立进一步的坐标系, 再用坐标进行观测与记录. 实际的参考物应是实验仪器或观测人员. 先抽象成理想的质点模型, 称为**观者** (observer), 其原则上只能对自身世界线上的事件做**直接观测**. 观测的基础是在空间、时间的测量工具 (尺子和钟), 方能对事件赋予坐标. 观者所持的钟称为**标准钟** (standard clock), 总规定它是均匀流逝、走时准确的, 实验上可取  $^{133}\text{Cs}$  原子钟. 其读数称为该观者的**固有时** (proper time).

欲对一定时空范围内的事件进行观测, 必须处处设置参照物或观者以形成参考系. 换言之, 若世界管内任意世界线都是观者世界线, 则该世界管就是参考系, 记作  $\mathcal{R}$ . 标准钟确保每个空间点上放置的钟是全同的, 但这只对其**走时率** (rate) 提出约束, 而对**初始设定** (setting) 即零点选取未做要求. 因而需要约定参考系中各钟的零点, 进而确定出坐标系. 同时事件集又可形象地称为**同时面** (simultaneity surface). “面”的称呼是因为它在 3 维时空图中可用一张 2 维曲面形象表示, 但准确地是**超曲面** (hypersurface), “超”旨在强调它实际是 3 维的. 一个自然的要求是规定各同时面与任意观者世界线正交, 此即**钟同步** (clock synchronization) 或**对钟**. 进而由各同时面确定出的坐标系是正交的. 借助该坐标系, 坐标时等于  $t$  的同时面可记作  $\Sigma_t$ , 进而又可将时空截取为一系列切片.

需要说明, 并非所有参考系都能办到良好的钟同步 (见第 2 章). 本节只讨论简单的惯性参考系. 规定**惯性观者**的观者世界线为直线, 以保证时间轴、空间轴的尺度均匀. 由惯性观者构成的线汇 (为保持平行, 不选世界管) 正是惯性参考系.

设某条惯性观者世界线  $G$ . 光从线上  $A$  处出发, 其轨迹不与之平行, 而到达另一平行惯性观者  $G'$  的  $B$  点, 经反射回到  $C \in G$ . 取  $AC$  中点  $D$ , 连接  $BD$ . 为了坐标单位均匀性和几何单位制, 默认  $BD$  和  $AD$  是绘图意义等长, 故反射光与入射光

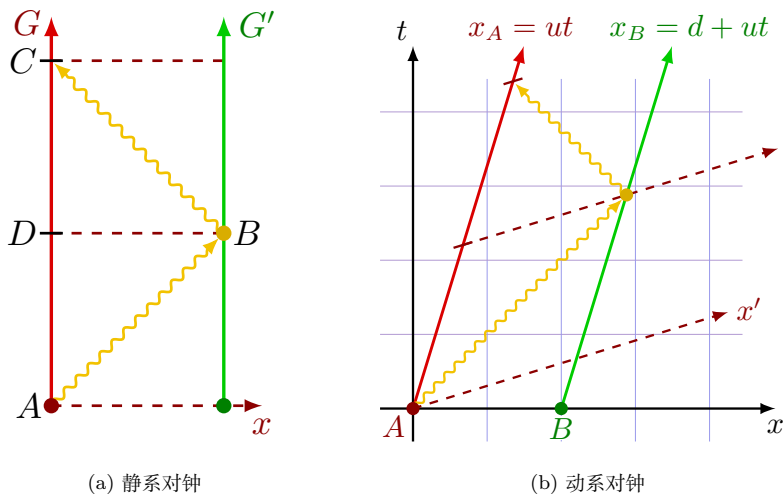


图 1.3: 对钟以确定正交同时面

总呈绘图意义垂直. 这样形成的坐标系称为**惯性坐标系**或 **Lorentz 系**. 进一步, 若欲以观者  $G$  为绘图基准, 即要求  $BD, AC$  呈绘图意义垂直, 只需使反射光与  $G$  夹角为绘图意义  $45^\circ$ , 结果如图 1.3(a). 以该系为基准, 研究一个运动惯性观者的对钟情况, 结果如图 1.3(b). 从图上看, 动系坐标轴不具备绘图意义垂直, 但由于约定同时面与观者的正交性, 我们可以扩大对垂直的直觉, 将这种情形视作时空图意义的正交. 惯性坐标系的时间轴与惯性参考系中某个惯性观者世界线相重合, 因此此二概念将紧密联系, 不必认真区分时可笼统称为**惯性系** (inertial frame). 当然, 除了对钟, 还可依靠观者和被观测物的信息交流. 比如, 可见光能给予人或相机以视觉图像, 这就涉及相对论视觉或图形学. 我们暂时只谈利用参考系的观测.

作某事件的同时面可投影得其坐标时. 设静系  $S$  和动系  $S'$ . 如图 1.4, 某事件的  $t$  坐标可做  $S$  系同时面截得, 而  $t'$  坐标可做  $S'$  系同时面截得. 所以在一个惯性系同时的一对不同事件在另一惯性系中不同时. 没办法把特定的同时面区别出来, 此即**同时的相对性**的直观图像. 相比于代数计算, 可见图像语言的优雅. 注意, 这些同时面直线实际上表示 3 维空间, 故同时面交点实际是 2 维平面, 其上任意两个事件被两个观者都看做同时.

约定  $t = t' = 0$  时  $S, S'$  的原点重合, 从而在经典观念中消除任何坐标时差异. 还可进一步约定正交空间轴重合而消除更多不必要差异. 如果  $S'$  相对于  $S$  以沿共同  $x, x'$  轴正方向运动 (速率记作  $u$ ), 这样  $y, z$  坐标总是一样的, 于是时空图形如 1.3(b). 再根据惯性系的**相对性原理**可证坐标变换为**二维 boost 变换** (普通教材称

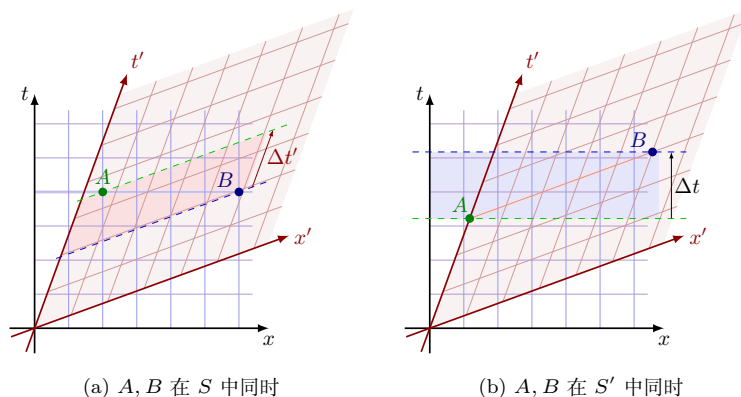


图 1.4: 同时的相对性

之 Lorentz 变换):

$$t' = \gamma(t - ux), \quad x' = \gamma(x - ut), \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \geq 1. \quad (1.2.1)$$

这里  $\gamma$  称为 **Lorentz 因子**. 由此发展出来的理论被 Lorentz 命名为**相对性理论** (the theory of relativity), 简称**相对论**. 当下主流称呼是**狭义相对论** (special relativity). boost 变换在低速极限下回到了经典力学的 **Galileo 变换**

$$t' = t, \quad x' = x - ut. \quad (1.2.2)$$

故只有当速度与光速可以比拟时, 经典力学和狭义相对论的差别才显示出来.

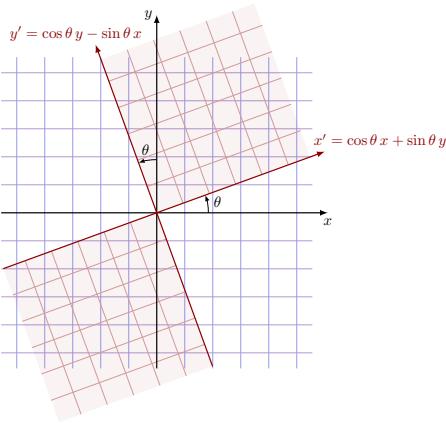
注意, 直线  $t' = 0$  ( $x'$  轴) 即  $t = ux$ , 同理  $t'$  轴就是  $t = (1/u)x$ , 可见动系的坐标轴总是关于  $45^\circ$  直线对称. 速率  $u$  代表动系的时间轴斜率. 以转动变换类比之, 相应的三角函数应替换为双曲函数. 定义**快度**  $\theta$  (不是绘图意义的倾角) 满足  $u =: \tanh \theta$ , 其中 “ $=:$ ” 表示 “记作”. 这样有  $\cosh \theta = \gamma$ ,  $\sinh \theta = \gamma u$ . “boost” 一词取时间轴上的推动之意, 但可见一个较好的称呼是**伪转动** (pseudo rotation):

$$t' = t \cosh \theta - x \sinh \theta, \quad x' = x \cosh \theta - t \sinh \theta. \quad (1.2.3)$$

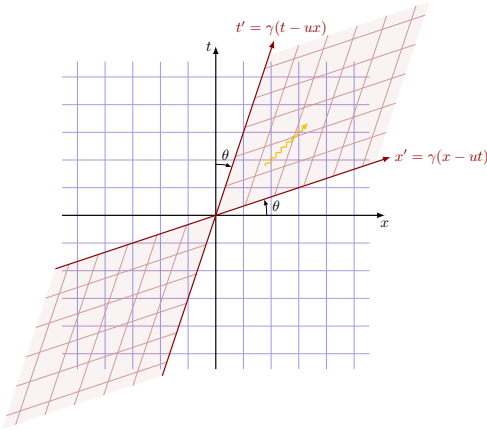
如图 1.5, 在生活中, 光速相对于我们较大, 因此图上的光线应当“下压”, 空间轴的变化并不明显, 可见我们退回到 Galileo 变换, 即大家都共用一个绝对时. 快度是一个比速度更简洁的概念. 比如, 设  $u_1 = \tanh \theta_1$  是  $B$  相对于  $A$  的速度, 而  $u_2 = \tanh \theta_2$  是  $C$  相对于  $B$  的速度, 则  $C$  相对于  $A$  的速度是

$$u = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2}, \quad (1.2.4)$$

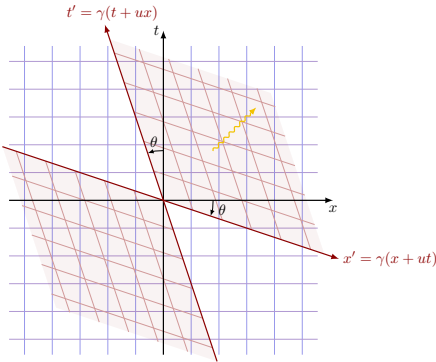
其中用到双曲正切函数的求和公式. 这正是相对论的**速度叠加公式**.



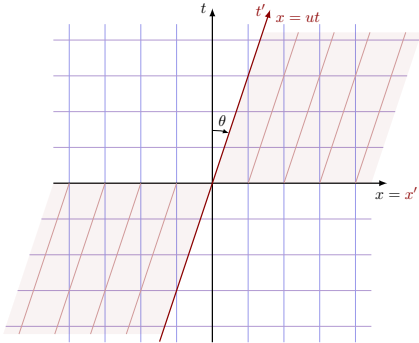
(a) 空间转动变换



(b) 时空伪转动变换



(c) 负方向伪转动



(d) Galileo 变换

图 1.5: 四类变换的图像直观

可以看到,一般的包括伪转动、转动、平移在内的各种变换总能写成

$$x'^{\mu} = x_0^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x_0^{\mu}, \Lambda^{\mu}_{\nu} \text{ 无关于 } x^{\mu}, \quad (1.2.5)$$

其中为了区分行列指标而将矩阵元的指标错开. 即它们都是仿射变换. 当  $x_0^{\mu} = 0$  时, 只剩下由  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  表征的线性变换.

### 1.2.2 Lorentz 变换

Minkowski 发现 (参见 [2]), 若令

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\eta_{\mu\nu}) := \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (1.2.6)$$

再对伪转动变换微分就可发现它在任意坐标系不变, 即  $ds^2 = ds'^2$ . 类比正交归一系的勾股定理

$$d\ell^2 := \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\delta_{ij}) := I, \quad (1.2.7)$$

其中  $\delta_{ij}$  称为 **Kronecker 符号**, 可将  $ds$  视作事件间的微小距离, 称**时空线元** (line element). 在 Newton 理论中, 我们是分开定义绝对时间长度  $d\tau := dt$  和空间长度  $d\ell$  的, 但上述洞察表明, 可直接给时空定义整体的长度  $ds$ .

现代观点将直接把相对论的重心放在线元不变性, 因为从它出发可反向得到狭义相对论的所有知识. 比如, 事件显然不能在任意惯性系中具有一致坐标时, 即必导致同时的相对性; 若在某系测得光速为  $\sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j} / dt = 1$ , 换言之  $0 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$ , 即光速不变; 其次我们不能区分各惯性系, 可体现相对性原理; 最重要的是, 可以证明伪转动变换. 设两套坐标系  $\{x\}, \{x'\}$ , 其间坐标变换是可逆函数  $x'^{\mu} = h^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . 通常考虑光滑坐标变换, 并混用符号地简写为  $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$ , 则任意点总有全微分和链式法则:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \quad (1.2.8)$$

其中  $(\partial x'^{\mu} / \partial x^{\nu})$  就是分析学里的 **Jacobi 矩阵**. 对于 Jacobi 矩阵元, 一般不用  $\partial_{\mu}$  等简记符. 进而, Lorentz 系间满足

$$\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = \eta_{\gamma\sigma} dx^{\gamma} dx^{\sigma} \iff \eta_{\gamma\sigma} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (1.2.9)$$

由此可证变换的仿射性:

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\epsilon}} = 0 \iff x'^{\mu} = x_0^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (1.2.10)$$

快速证明可见 (1.3.7) 式. 综上有

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\lambda} = \eta_{\sigma\lambda}, \quad \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}. \quad (1.2.11)$$

令  $y, z$  不变, 并根据  $x = ut$  对应  $x' = 0$  等条件可推出伪转动变换, 请读者试之. 所以满足上式的仿射变换称为 **Poincaré 变换**.

从上式看出其形同正交矩阵. 回忆一下, 正交矩阵  $R^i_j$  满足保持矩阵  $I$  不变的同合同变换

$$R^T R = I \iff (R^T)_k^i \delta_{ij} R^j_l = \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{ij}.$$

其中注意矩阵转置满足  $(R^T)_k^i = R^i_k$ ; 矩阵乘法顺序涉及指标的相靠. 从正交右手归一系  $\{x\}$  出发, 只要坐标变换是保定向的, 即 Jacobi 行列式满足

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right) > 0, \quad (1.2.12)$$

则称新系  $\{x'\}$  也是右手系. 对上式取行列式有  $|R|^2 = 1$ . 当  $|R| = 1$  时它就是旋转变换, 当  $|R| = -1$  时就存在空间反射. 右手 Descartes 系间相差保定向旋转变换、原点平移, 它们都保持  $d\ell$  不变.

同理, 我们要扩大对正交矩阵的直觉, 考虑  $(\eta_{\mu\nu})$  这种带负号的单位阵. 以后, 凡满足  $|\Lambda|^2 = 1$  的矩阵  $\Lambda$  都称正交矩阵.  $\Lambda$  也代表“旋转”, 但无非是比空间旋转还多出“时空旋转”这一情形. 取 (1.2.11) 式  $\sigma = \lambda = 0$  就有

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \delta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1. \quad (1.2.13)$$

这里括号外的“2”当然就表示平方了. 可见我们能按  $\Lambda^0_0, |\Lambda|$  的符号将所有满足 (1.2.11) 的  $\Lambda$  分为四类.  $\Lambda^0_0$  的符号代表时间是否反演, 因此  $\Lambda^0_0 \geq 1$  的  $\Lambda$  称**正时的**. 只有正时的变换才保持时间轴的未来、过去方向.  $|\Lambda|$  的符号代表整个时空坐标系的右手性,  $|\Lambda| = 1$  时称**固有的** (proper). 进而可分为如表 1.1 所示的四种情形. 固

$\Lambda^0_0 \backslash  \Lambda $	$\geq 1$	$\leq -1$
1	正常时空	时空翻转
-1	空间反射	时间反演

表 1.1: 变换的四种分类

有、正时的线性 Poincaré 变换称为 **Lorentz 变换**<sup>1</sup>.

现在光速不变、相对性原理可整合为如下更严格的说法. 数学形式不变称为**协变性** (covariance). 表示物理定律的方程在 Lorentz 变换下保持协变性, 且与物质状态无关的标量常数保持同样的值, 比如  $c = 1, \pi/2$  和  $\hbar$ . 二者合称 **Lorentz 不变性** (invariance). 是的, 不仅要求 Lorentz 协变性, 还额外默认常数不变, 例如, 经典电

<sup>1</sup>又常用“齐次”“非齐次”分别指代线性和仿射, 故也可强调地称**正齐次 Lorentz 变换**.



磁理论虽然能将光解释为无源电磁波，但 Maxwell 方程的协变性只涉及其外观，还不能给出光速不变，除非将协变性提升为不变性。

量子场论教材常选择  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  以直接使  $ds^2 > 0$ 。定义号差 (signature) 为  $(\eta_{\mu\nu})$  的迹，则该选择的号差为  $-2$ ，戏称**西海岸**习惯。本书一般选择  $+2$  即**东海岸**习惯。更有甚者选择将时间分量排在最后作为第 4 分量，这样有  $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$  但并不影响号差。无论怎样这些选择纯粹只是习惯<sup>1</sup>。

线元在坐标变换下的不变性，可以通过主动观点理解为时空对称性，故物理学会直接称 Poincaré 变换构成的集合  $P$  为 **Poincaré 群**，而不区分该变换究竟是指坐标变换还是点变换。只包含时空平移的群称**时空平移群**。如果变换是线性的，则一种变换对应一种矩阵，故群乘可对应矩阵乘法，数学上称**广义正交群**，号差  $+2$  下记作  $O(1,3)$ ，这里前者指度规负项个数，后者指正项个数。因此  $P$  可视为  $O(1,3)$  和平移群所张成的，即数学上的半直积。可按正时和负时分为  $O^+(1,3)$  和  $O^-(1,3)$ 。 $O(1,3)$  的固有子群  $SO(1,3)$  称**狭义正交群**，正时且固有的子群称为 **Lorentz 群**  $SO^+(1,3)$ 。

正时性和固有性的之间不存在连续过渡，因此  $O(1,3)$  将分为四个连通分支<sup>2</sup>：而

$\Lambda^0_0 \backslash  \Lambda $	$\geq 1$	$\leq -1$
1	$SO^+(1,3)$	$SO^-(1,3)$
-1	$O^+(1,3) \setminus SO^+(1,3)$	$O^-(1,3) \setminus SO^-(1,3)$

表 1.2: 四个分支

每个分支间并不连通。显然若  $\Lambda^0_0 = 1$ ，则 Lorentz 变换实质只有固有的旋转作用，即空间部分是  $(R^i_j)$ ，而剩下的是恒等变换。固有空间旋转构成的集合是**空间转动群**  $SO(3)$ ，可视为  $SO(1,3)$  的子群。号差不改变实质也可体现在群论中：可证  $O(1,3), O(3,1)$  同构。

1.2.3 相对论动力学

设某条世界线在某个惯性系  $\{x\}$  下的参数式为  $x^\mu(\sigma)$ ，则其关于  $\sigma$  的**切矢** (tangent vector) 在该系的分量为  $T^\mu := dx^\mu/d\sigma$ 。在通常的空间中，线元由  $d\ell^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$  给出，进用积分定义而线长和矢量模长，而夹角  $\theta$  可借圆弧长和三角函数定义，最后按投影定义切矢的**内积** (inner product)，可证内积  $V \cdot W = |V||W| \cos \theta = \delta_{ij}V^i W^j$ 。在时空中，类似地推知内积可表为  $\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$ 。可用该式定义内积，而反

<sup>1</sup>也有一种可能有哲学区别的习惯，称 **Wick 技巧**：令  $x^0 = ict$  则  $ds^2 = \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ，这样线元仿佛还原回勾股定理，伪转动变换的确变成了  $x\text{-}ict$  平面的旋转变换。一般除讨论某些理论复结构方面的问题外不使用这种做法。  
<sup>2</sup>通俗地说，集合称为**连通的** (connected)，是指集合是一整块的，其任意两点存在完全位于集合中的连续路径。两个分离球体之并不是连通的，但二者都是其连通的子集，这称为**连通支集** (component) 或**连通分支** (branch)。

之给出线长和夹角, 这正是线性代数教材中推荐的逻辑. 规定相应的**对偶矢量** (dual vector) 为  $T_\mu := \eta_{\mu\nu} T^\nu$ , 内积就可紧凑写作  $V^\mu W_\mu = V_\mu W^\mu$ . 定义  $(\eta^{\mu\nu}) := (\eta_{\mu\nu})^{-1}$ , 即满足

$$\eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \eta_{\nu\lambda} \eta^{\lambda\mu} = \delta_\nu^\mu, \quad (1.2.14)$$

其中  $\delta_j^i$  也是 Kronecker 符号, 就还可对偶回去:  $T^\mu = \eta^{\mu\nu} T_\nu$ .  $(\eta_{\mu\nu})$  作为广义的单位阵, 易证明其逆为自身:  $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$ . 切矢的**模方**即  $(ds/d\sigma)^2 = T^\mu T_\mu$ . 内积为零则称两矢量**正交**.

在号差 +2 下, 切矢按模方为正、负或零, 分别称为**类空** (spacelike)、**类时** (time-like) 或**类光** (lightlike) 矢量. 光速不变要求  $ds^2 = 0$ , 故光子世界线的切矢一定类光. 类光矢量亦称**零模** (null) 矢量. 所有类光矢量之集  $C_N \subset T_p \mathbb{R}^{1,3}$  称为**光锥** (light cone). 任意两个事件  $p, q$  间的直线线长  $\sqrt{|\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu|}$  则称**距离或间隔**, 且可类似地分为三类. 注意 -2 号差习惯的模方符号刚好相反. 从三维 Cauchy-Schwartz 不

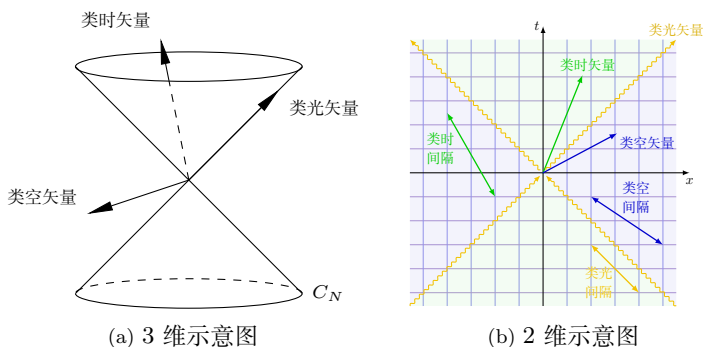


图 1.6: 光锥

等式可以看到, 若  $V^\mu$  类时, 而  $W^\nu$  是非零类时或类光矢量, 则当且仅当在任意按 Lorentz 变换 ( $\Lambda^0_0 > 0$ ) 相联系的惯性系中满足  $V^0 W^0 > 0$  时有  $V^\mu W_\mu < 0$ . 因此可在光锥及其内部定义等价关系, 称  $V^\mu, W^\nu$  具有相同的**时间指向**. 容易发现存在两种等价方式. 先任意规定其中一种是**指向未来的** (future directed) 矢量, 那另一种方式指定的矢量就称为**指向过去的** (past directed). 忽略掉零矢量, 光锥被分成了两部分, 即**未来光锥**和**过去光锥**. 一般而言, 只在讨论某些反演对称性时才考虑指向过去的惯性系. 类空矢量没有未来或过去的分类.

一般而言, 不考虑切矢模方符号变化的世界线 (这涉及无穷大的作用力), 因此世界线可类似分为三类. 假设世界线  $C$  是类时线. 其在两事件  $C(\tau_1), C(\tau_2)$  之间所经历的 (elapsed along) **固有时间**  $T(C) = \tau_2 - \tau_1$  是多少? 考虑某点  $p \in C$  处与之瞬间相对静止的惯性观者 (称**瞬时静止惯性观者**), 即  $p$  处切线  $G(t')$ . 二者在此处固

有时近似一致, 即  $d\tau = dt' = \sqrt{dt'^2 - dx'^2} \Rightarrow d\tau^2 = -ds^2$ . 故

$$T(C) = \int_C \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma, \quad \gamma = \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.2.15)$$

其中  $\sigma$  是  $C$  的任取参数. 这里总默认世界线是分段光滑的. 此即观者世界线的线长, 故  $\tau$  又称**线长参数**. 线性函数  $a\tau + b = \lambda$  统称**仿射参数** (affine parameter). 由于  $ds^2 = 0$ , 光对其世界线上的事件标记为一致坐标时, 即对光而言不能定义固有时. 光在物理意义上就不能作为观者. 通常按绘图意义的长度定义其仿射参数, 或用坐标时参数化, 这样就可以描述光子世界线. 观者首先得是一个质点, 走类时线.

对于类时线, 可取固有时为参数:

$$U^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.2.16)$$

称之为 **4 维速度**, 简称 **4-速**. 显然  $U_\nu U^\nu = -1$ , 可见 4-速模方在世界线上恒定. 同理, **4-加速**为

$$A^\mu := \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (1.2.17)$$

容易证明二者正交:  $A^\mu U_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (U^\mu U_\mu) = 0$ .

给出一个理论的关键在于写出拉氏量, 一般来说我们能按对称性、量纲等要求构造出来. 先考虑单个自由粒子. 代表物理规律的拉氏量是 Lorentz 不变的标量. 基本上, 我们只能找  $d\tau, m, c=1$  这种量来构造, 取  $S \propto m \int d\tau$ . 注意在  $u \ll 1$  时

$$m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt = m \int \sqrt{1 - u^2} dt \approx m \int \left(1 - \frac{u^2}{2}\right) dt,$$

其中常数不影响变分, 可见若想还原至经典力学的自由粒子动能, 只能取

$$L = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -m/\gamma, \quad S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt. \quad (1.2.18)$$

若想取参数为固有时  $\tau$ , 则默认是正路的固有时. 对于任何邻近旁路,  $\tau$  都非其固有时而只是纯粹的参数. 为何不能用每条路径自己的固有时来作参数? 因为变分的实质是像 (1.1.9) 式那样使参数本身与变分无关. 比如对有限积分域  $[P, Q]$ ,  $\Omega_P^Q$  中任意邻近旁路上所用参数的取值范围必须为同一区间, 若每条路径都用自己的固有时作参数就办不到. 既然该参数无论如何都只有数学意义, 我们取坐标时  $t$  就可避免这些讨论. 变分得到实际方程后, 再将 4-速模方  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1$  代入, 就相当于将  $x^\mu(t)$  重参化为  $x^\mu(\tau)$ . 许多书籍对如下现象都未解释或作出错误解释: 若用固有时  $\tau$  作参数, 则  $L = -m$ , 得不到任何方程, 故强行解释为需还原代数形式才能进行变分. 正确的解释是  $U^\mu U_\mu = -1$  只对正路成立, 其中参数  $\tau$  与固有时一致. 变分必须考虑邻近旁路, 有它们自己的不同于  $\tau$  的固有时, 因而沿这些旁路  $U^\mu U_\mu \neq -1$ . 由

$L = -m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$  可计算得  $\partial L/\partial\dot{x}^\kappa = m\eta_{\kappa\lambda}\dot{x}^\lambda$  和  $\partial L/\partial x^\kappa = 0$ , 则 E-L 方程在约去  $m$  并与  $\eta^{\mu\kappa}$  缩并后是  $\ddot{x}^\mu = 0$ , 也可重参化为

$$0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = A^\mu, \quad (1.2.19)$$

的确给出自由粒子的直线方程. 我们知道两点间直线最短, 但由于  $ds^2 = -d\tau^2$ , 故时空中的直线是使固有时最大而非最小, 即“长程线”. 对于分段光滑情形, 显然总能转化为分段直线情形, 故只需考虑三角情形, 而显然斜线的固有时短于竖线, 故结论仍成立. 曲线性质更差的情形见第 4 章.

定义 **3-速** 为  $u^i = dx^i/dt$ , 其对偶为  $u_i = \eta_{ij}u^j = \delta_{ij}u^j$ . 由模长  $u := \sqrt{u_i u^i}$ , 可计算知  $\partial u/\partial u^i = u_i/u$ , 故

$$p_i = \partial L/\partial u^i = \gamma m u_i \implies p^i = \gamma m u^i = m u^i + \frac{1}{2} m u^2 u^i + \cdots, \quad (1.2.20)$$

后者称为 **3-动量**, 并将  $\gamma$  按二项式定理展开. 可见若  $u \ll 1$ , 则 3-动量近似于经典动量  $m u^i$ , 即 3-动量给出了其相对论修正. 也可用 4-速  $U^\mu = dx^\mu/d\tau = \gamma \dot{x}^\mu$  得出相应动量, 注意  $L = m U^\mu U_\mu/\gamma = m U_\mu \dot{x}^\mu$ , 则

$$P_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu = m U_\mu \implies P^\mu = m U^\mu. \quad (1.2.21)$$

后者称为 **4-动量**. 易知  $p^2 := p_i p^i = m^2 u^2/(1 - u^2)$ , 则  $u = p/\sqrt{p^2 + m^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{p^2 + m^2}/m$ . 故在相对论中能量为<sup>1</sup>

$$E = p_i u^i - L = p u + m/\gamma = \sqrt{p^2 + m^2} = \gamma m = m + \frac{1}{2} m u^2 + \cdots, \quad (1.2.22)$$

经典动能  $(1/2)m u^2$  的出现表明  $(\gamma - 1)m$  是其相对论修正. 可见粒子即使静止也有能量, 也就应该能释放出来并得到应用. 对核能的开发已验证了这一点. 从上式立即看出**质壳 (mass-shell) 关系**  $E^2 = p^2 + m^2$ . 注意  $P^\mu$  恰好同时具备能量和动量意义, 即  $P^0 = \gamma m = E$ ,  $P^i = \gamma m u^i = p^i$ , 则一方面  $P^\mu P_\mu = -m^2$ , 另一方面  $P^\mu P_\mu = -E^2 + p^2$ , 故质壳关系实质代表 4-动量的模方恒等式.

对于光而言, 不能定义固有时和质量概念, 但默认其具有能量和动量. 一般借用量子理论的 de Broglie 关系来定义. 设光波频率  $\nu$ , 则其能量为  $E = h\nu$ . 而 3-动量为  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}$  为波矢. 4-动量仍为  $P^\mu = (E, \mathbf{p})$ .

### 1.2.4 典型相对论效应

狭义相对论有许多著名的运动学效应, 它们可从伪转动变换定量获得. 本节介绍的是如何从时空图直观并且同样定量地得到这些结果.

<sup>1</sup>  $E = \gamma m$  就是我们熟知的**质能方程** “ $E = mc^2$ ”, 但该语境下的 “ $m$ ” 是指动质量, 即  $m_k = \gamma m$ , 而称本书的质量  $m$  为静质量, 能量  $E$  为总能. 静能即本书  $E_0 = mc^2$ . 笔者遵循现代学术习惯, 只保留  $m, E$  两个概念. 故哪怕取  $c = 1$ , 严格来说也不能有“质量就是能量”这种说法. 但无论如何“静质量是静能”“动质量是总能”是可以的.

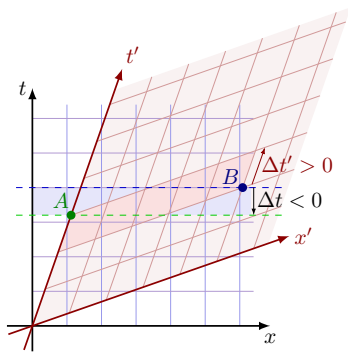


图 1.7: 类空间隔

若间隔类光或类时, 则各惯性系将一致认同两个事件的先后顺序, 因为 Lorentz 变换具有正时性. 但对于类空间隔, 其事件的坐标时差距可以在不同惯性系下取任意实数. 即存在一些观者判定两个事件同时, 另一些观者则断言  $p$  先于  $q$ , 剩下的观者反之. 这在图 1.4 和图 1.7 中一目了然. 类空间隔的事件先后次序没有意义. 类时或类光线统称**因果线** (causal curve), 能用因果线连接的事件正是具有因果联系的事件. 在  $\mathbb{R}^4$  中这等价于用类时间隔去连接. 数学上不妨设曲线分段光滑, 并使用高数里的中值定理即可. 比较间隔的方法是用双曲线校准. 令双曲线  $x^2 - t^2 = x_1^2$ , 其与  $x$  轴交于  $(t, x) = (0, x_1)$ . 双曲线上的点  $(t, x) = (x_1 \sinh \theta, x_1 \cosh \theta)$  与原点连线是类空间隔且恒定, 可用来比较类空间隔, 故称**类空校准线**. 从  $(0, x_1)$  至  $(t, x)$  扫过角度  $\theta$ , 易得扫过面积为  $x_1^2 \theta / 2$ , 可类比欧氏几何的圆. 同理推知**类时校准线**的结论.

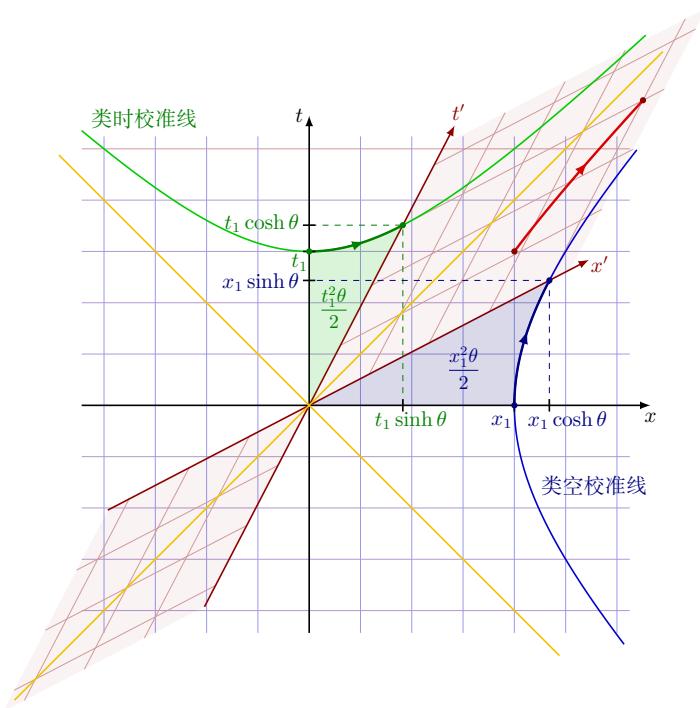


图 1.8: 校准线

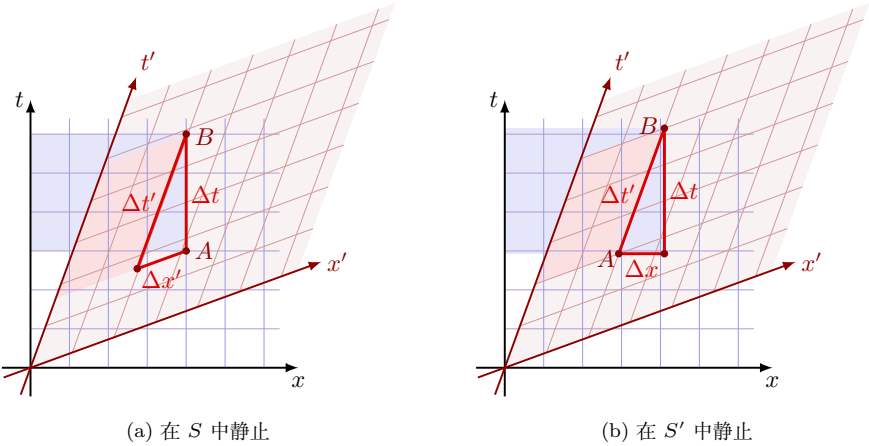


图 1.9: 钟慢效应

每个观者都认为其他的相对运动的时钟走时慢，比如与  $S'$  相对静止的质点经历其固有时  $\Delta t'$ ，则在  $S$  看来两个事件的时间差是  $\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$ ，这种现象称为**钟慢效应**或**时间膨胀**。这种效应是完全对称的，每个观者都认为其它的相对运动的时钟走时慢。用时空图的校准线便一目了然。例如，两个观者都看到  $S$  系原点上的时钟读数“0”，但直线  $t' = t_1$  与该时钟世界线 ( $t$  轴) 在  $(t, x) = (t_1, 0)$  下方的  $(t_1/\gamma, 0)$  相交。须强调，这种现象的物理意义是完全真实的。例如，在宇宙射线内发现的介子的寿命是如此之短，以至于即使以光速运动，它们穿透大气层所需时间也要比其通常寿命大几十倍。按理来说，其不可能到达地面，但其实还是可以到达，因为钟慢效应“使其保持年轻”，即在我们看来，其实际寿命比通常寿命长很多。

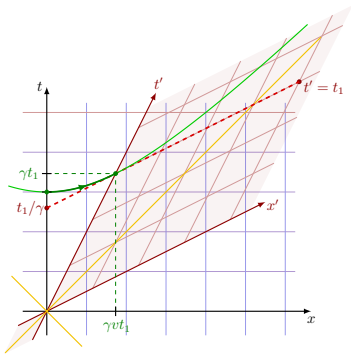


图 1.10:  $S'$  系的钟根据同时面  $t' = t_1, t' = 0$  认为  $S$  的钟慢

由于一般来说，不同的惯性观者对事件的同时性各抒己见，而测量一运动物体“长度”的唯一方法，就是要利用一把量尺“同时”测量物体两端；所以我们不应当诧异，不同的惯性观者所测量的长度和时间的确会不同。考虑一把沿  $S'$  系  $x'$  轴静置的测量尺子。在这个坐标系中它的“长度”是  $L'$ 。尺子两端的世界线是平行于  $t'$  轴的两条直线。若  $S$  观者在这些世界线上同时观测两个事件，则其所测的长度为  $L = L'/\gamma < L'$ ，即量尺在其运动方向上缩短了  $1/\gamma$  倍。这种现象称为**尺缩效应**或**长度收缩**。就像钟慢效应那样，尺缩效应完全对称且实在。沿  $S$  系  $x$  轴静置尺子的情况由时空图道尽。

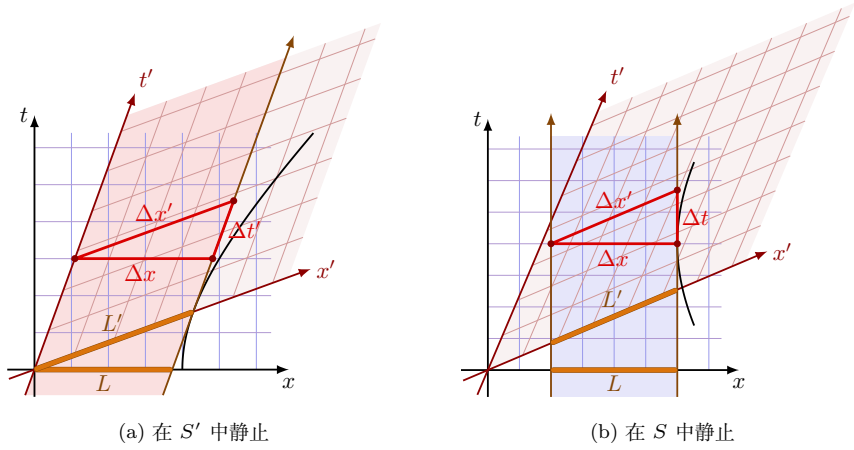


图 1.11: 尺缩效应

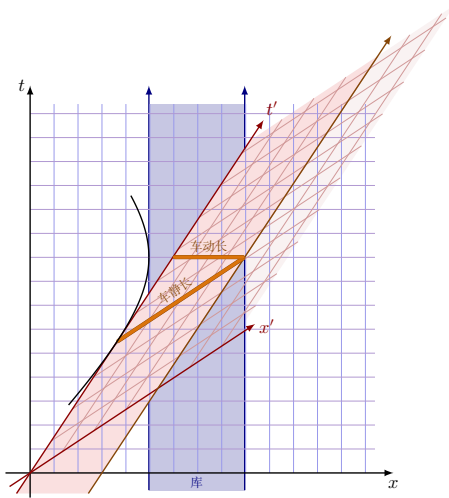


图 1.12: 汽车匀速进库

尺缩效应导致了有趣的**车库佯谬**<sup>1</sup>。设汽车与车库静长相等。汽车朝库匀速前进，司机认为动库变短、不能放下，司库认为动车收缩、放下有余。二者矛盾吗？不妨设车库无后墙（类似于隧道洞口），画图时借用校准曲线以保证车和库有相等静长。由图易见，以司库所在惯性系的同时面衡量，车短于库；以司机所在惯性系的同时面衡量，车长于库。两人观点都对，因为同时性的相对性导致结论的相对性。“到底放下还是放不下？”这种问题没有意义，正如在尺缩问题中“到底哪把尺子较长”亦无意义。我们若真要“比较”，能让各位意见一致的做法只能是都放入静系中去。从因果角度来理解将更便于在脑海里建立物理图像。“车尾接触入口”“车头接触

出口”两个事件没有因果联系，故二人观点都对。我们在脑海中，不假思索地以为有因果联系，这个错觉来源于火车的车身。但在相对论中没有严格的刚体，只能将车身各质元的恒定高速运动理解为独自的、互相影响很小的。当然，现实生活中没有这么长且如此高速的火车，相互作用能在车头车尾间迅速传递，的确具有因果联系。当车库有坚硬后墙时，车头固然撞墙停止。但撞墙信息以相互作用纵波传至车身各部分

<sup>1</sup>英语为 ladder paradox，由 Rindler 提出，最初是借梯子和谷仓 (barn) 举例的；还可用火车和隧道。

皆需时间，只当车尾获悉后整个车身才能停住，因而汽车将缩至比司库期初所测长度更短的程度。这时的确在谁看来都装得下。设材料性质理想，使信息传递为光速且质点获悉信号后立即停止，读者不妨在图上补出撞车后的时空图。

最后，著名的**孪生佯谬** (twin paradox) 就是说，设一对双胞胎从某时空点分离，并回合于另一时空点，则惯性运动者将年长于非惯性运动者。前文已直接证明了这一点。图 1.13 给出了三角情形，也可理解为，折线的同时面在  $B$  处发生突变，因此惯性观者多出了图中阴影部分的时间差。结论是不能交换的，因为不能将相对性原理滥用于非惯性系和惯性系间；而实际情形中，两人非质点，因此走惯性运动较为舒适，而走非惯性运动将感受到巨大的加速度，使相对论现象足够明显的物理量达光速级。

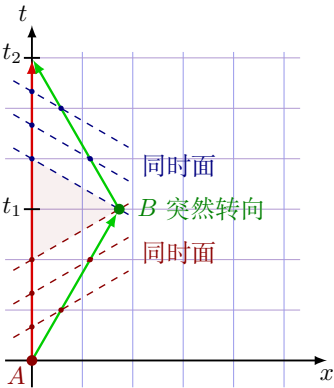


图 1.13: 孪生佯谬

## 1.3 广义相对论

### 1.3.1 惯性系的存在性

前文都在谈狭义相对论，但对惯性系存在性的考虑，承袭的仍是 Newton 体系的思维，即认为存在一个整体静止系（绝对时空），则相对其匀速的物体可作为惯性系，而具有加速度的物体不能充当惯性系。然而，并无任何先验原理帮助我们确定绝对时空在哪，即谁与其相对静止以充当绝对参考。

**理想惯性系**必须远离所有物质，使之不受外界作用；坐标可无限延伸，故又称**整体惯性系**。物质间皆存在引力，且可在长程上传递，这称为引力的**万有性**。因此，严格来说不存在真正的惯性系。然而，在实验上，Newton 定律一定程度适用于地面系，可见惯性系仍是有用概念。问题出在哪里？原来，惯性系可以且只能局域建立。

宏观物质间的相互作用以引力为主，而物体在仅受引力作用时有 **Galileo 性**，即外引力场下，任意试验质点在同一时空点所受加速度相同（由任意坐标系测量），与内部结构及组成无关。Newton 对 Galileo 性的解释如下。 $\mathbf{f} = m_I \ddot{\mathbf{x}}$  定义的质量  $m_I$  是**惯性质量**。Mach 提出了一种测量性定义：承认动量守恒并规定好某一物体的质量数值，使二者产生相互作用（如碰撞），根据加速度比值便可测得另一物体的质量。而  $\mathbf{f} = m_G \mathbf{g}$  定义的质量  $m_G$  是**引力质量**或**引力荷**。联立有  $\ddot{\mathbf{x}} = (m_G/m_I)\mathbf{g}$ ，说明 Galileo 性即指比例  $m_G/m_I$  与物质本身无关，重新定义  $G, m_G$  还可使此二概念不再区分： $m_I = m_G \Rightarrow \mathbf{g} = \ddot{\mathbf{x}}$ 。

设想一部足够小、无自转的封闭电梯  $B$ ，其内部一位乘客  $A$  与之共同自由落体，



二者相对加速度近似为零，则乘客将感到失重。可见，对任意自由落体质点  $A$  而言，总存在局域坐标系  $B$ ，使  $A$  相对于  $B$  系的动力学像是在理想惯性系中一样。这种坐标系称为相应质点的**局域惯性系**。Newton 是靠绝对系测量  $B$  的加速度，判定它是非惯性系。撇开绝对系的概念，在  $B$  系中做任何局域的力学实验结果都是等效的，故无法分辨。换言之，即使  $B$  系中出现惯性力，也会与引力局域上抵消，故参考系的惯性性在局域上不可物理观测。

Einstein 于 1907 年察觉到这一等效性<sup>1</sup>。尽管 Galileo 性是谈及质点的，但他坚信包括电磁、量子在内的任何实验都应如此。他称之为**等效原理** (equivalence principle)。容易想象，在局域电梯里打开手电筒，光相对电梯将按一定频率走直线，进而在地球上光只能弯曲且频率发生变化，便能定性预言光在引力场中的偏折、红移。任何我们所规定的惯性系，其实均是局域惯性系。Newton 的所谓绝对运动不是相对于绝对系的运动，而是相对于局域惯性系的运动。

现在再研究可多大程度上建立局域惯性系。对于两相距足够远的时空点，引力加速度一般不同。将一水球置于某足够大电梯中，其不同部分受力不均，可观察到相对形变现象，表现为水平挤压和竖直拉伸，这就是**潮汐效应**。邻近质元间相对形变力也称**潮汐力** (tidal force)，相对加速度称**潮汐加速度**。可见，理想的局域惯性系只建立在自由落体质点的世界线上。当然，只要在设备精度内未观测到潮汐，就可认为是实验意义的局域惯性系。若物质集团的尺度较大，密度较稀疏，则外引力场较弱，潮汐现象不明显，因此能近似为局域惯性系的时空区域很大。比如，地球、太阳系、银河系能作为局域惯性系的范围应依次增大。现在，理想的整体惯性系只视作局域惯性系在无引力场下延伸的极限。综上，实验意义的局域惯性系的范围由外引力场强弱决定。

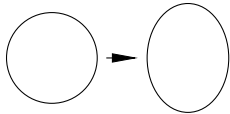


图 1.14: 潮汐效应

引力场强就是试验质点的加速度，加速度又正恰是运动学概念，仅涉及时空坐标。任何物体在引力场中将齐步地运动，这种无关个性的集体行为，暗示着引力甚至直接是时空的自身性质。进而，总可将其中一者抽象为另一研究对象的背景坐标系，即局域惯性系。由于涉及运动的坐标系，局域惯性系的建立必将完整涉及 4 个坐标，故必须使用时空模型。之后就要尝试用 4 维时空描述引力。

1.3.2 度规

先考虑试验粒子在外场中的运动。由于已承认等效原理，因此试验粒子的**最小引力耦合** (minimal gravitational coupling) 只要求在局域惯性系中还原回狭义相对论。

<sup>1</sup>顺便提一句，Newton 这个天才是知道这件事的：“无论诸物体彼此间以何种方式运动，若它们被沿着平行线的相等加速力所推动，则它们都将继续彼此间的运动，遵循的方式就如同没有那些力作用一样。”——《原理》，推论 VI “运动定律” [1]。Newton 用这个推论来计算太阳系中月球的复杂运动。在地球系下，惯性力和太阳引力在良好近似下相互抵消，那么月球就遵循一个 Kepler 轨道。

设某个自由落体质点的世界线  $G(\tau)$ , 在其局域惯性系  $\{\xi\}$  中可表为  $\xi^\alpha(\tau)$ , 则

$$\delta \int d\tau = \delta \int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta} = 0 \implies \tilde{A}^\alpha = \frac{d\tilde{U}^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (1.3.1)$$

常考虑任意其它坐标系  $\{x\}$ , 有

$$0 = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

注意 Jacobi 矩阵的互逆性:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (1.3.2)$$

故可通过与  $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$  缩并<sup>1</sup>消去系数  $\partial \xi^\alpha / \partial x^\mu$ , 得引力场中质点的运动方程

$$0 = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.3.3)$$

称  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  为 **Christoffel 符号**, 简称**克氏符**. 同理, 固有时满足

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} := \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (1.3.4)$$

称  $g_{\mu\nu}$  为**时空度规**或 **Lorentz 度规**, 简称**度规** (metric). 光属于电磁或量子实验的内容, 也符合等效原理. 虽然光速不变要求光子世界线上  $d\tau^2 = 0$ , 但仍可取仿射参数  $\lambda := \xi^0$ , 并同理得

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (1.3.5)$$

可见,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  具有引力场强的意义.

度规与克氏符之间有代数联系. 为构造克氏符定义式 (1.3.3), 应对度规定义式 (1.3.4) 求坐标偏导:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}, \quad (1.3.6)$$

其中注意  $\eta_{\alpha\beta,\lambda} = 0$ . 为从中提出克氏符, 做指标轮换便可合并同类项. 注意任意坐标下有  $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$  (Fubini 定理), 因此有对称性  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ . 根据定义知  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . 做轮换  $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \mu$  再消元得  $g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma} = 2g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . 希望存在逆矩阵  $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$  使我们可移项. 而度规定义式是从  $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\mu\nu}$  的合同变换, 保持了可逆性. 称  $g^{\mu\nu}$  为**度规逆**. 两边与  $g^{\sigma\lambda}$  缩并再将  $\alpha$  换回  $\lambda$  就有

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (1.3.7)$$

因此可从度规计算出克氏符.  $g_{\mu\nu}$  具有引力势的意义.

<sup>1</sup> 不同于普通代数等式有乘除消项的说法, 指标运算中, 必须理解为是用缩并得到  $\delta_\nu^\mu$  以消项.

也可通过一般坐标系下的作用量得到运动方程. 由等效原理知

$$\delta \int \sqrt{-g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (1.3.8)$$

由  $L = -\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$  可计算得  $\partial L/\partial\dot{x}^\kappa = g_{\kappa\lambda}\dot{x}^\lambda$  和  $\partial L/\partial x^\kappa = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\kappa}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ , 则 E-L 方程是

$$\ddot{x}^\lambda + \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(2g_{\kappa\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \implies \ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \quad (1.3.9)$$

最后一步是  $\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$  对称导致  $2g_{\kappa\nu,\mu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = (g_{\kappa\mu,\nu} + g_{\kappa\nu,\mu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ . 再重参数化即可.

$\{x\}$  取为与场源相对静止的坐标系将更方便, 称之为**场源静系**, 比如地面系或某个无穷远观者 (所尽可能构造的坐标系). 常可假设场源静系之外的引力场较弱, 则可近似为惯性系的余地很大. 换言之, 场源静系是一个相对较大的局域惯性系, 只不过并非  $G(\tau)$  的局域惯性系. 在场源无质量的极限下, 该系为理想惯性系. 根据如上方程, 引力作用现解释为在场源静系中, 存在非零克氏符, 进而存在非零  $g_{\mu\nu,\lambda}$ . 故  $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ . 若  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , 则粒子的运动为直线, 说明没有引力. 故现在  $\eta_{\mu\nu}$  只视作  $g_{\mu\nu}$  在无引力时的极限, 称为**闵氏度规**, 相应时空称**闵氏时空**. 闵氏度规相当于狭义相对论的线元不变性, 从而快速证明 Poincaré 变换的仿射性: 任意理想惯性系下克氏符全零, 则  $\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} = 0$ . 总之, 引力场可由时空度规描述.

度规决定一套数学意义的几何学. 前文提过, 线长、夹角这些几何概念都可从  $\eta_{\mu\nu}$  中导出. 这意味着欧式几何 (对应  $\delta_{ij}$ ) 现降级为一种选择, 而非保守派所认为的绝对真理. 因为完全可构造不同于勾股定理的定义, 除了时空上的  $\eta_{\mu\nu}$ , 还可有双曲几何  $d\ell^2 = (dx^2 + dy^2)/(1 - x^2 - y^2)$ , 当接近  $x^2 + y^2 < 1$  边缘时, 该线元相较于欧氏线元会越来越大, 但它除平面几何第五公理外符合其余公理. 公理的特征是可替代性, 故这说明第五公理不能由其余公理推出, 而只能作为欧氏几何的约束. 并且, 一旦确立好某个二次型, 则二次型始终保持. 前文关于等效原理的坐标变换已体现这一点. 故 Gauss 建议将任意空间中的线元按二次型的方式定义, 这称为 **Gauss 假设**, 而排除比如  $d\ell = (|dx|^3 + |dy|^3)^{1/3}$ . 本书谈及几何学总采取此平方假设. 综上, 引力可表为时空的几何效应. Lorentz 度规给出 **Lorentz 几何**. 闵氏度规给出 **闵氏几何**. Poincaré 和 Riemann 都尝试过仅用空间几何构建引力理论, 但未能成功. 引力的几何理论的关键就在于补上时间这一维. 时间维度对引力亦有贡献.

### 1.3.3 广义不变性

物理学很早就开始使用标量、矢量等来书写物理量, 自场论语言发展后还使用了标量场和矢量场. 在  $\mathbb{R}^3$  中我们总是用一个有向线段或一个箭头来看待矢量, 并用一个像 **A** 这样的粗体字母或  $\vec{A}$  这样的箭头标注来表示. 这一观点不仅使我们对矢量有一个很好的直观图像, 并且当我们要涉及矢量的、特别是包括旋度和矢量积分

的恒等式, 这种表述直观且简洁, 而将其展开为分量语言就略显笨拙些. 但实际上, 矢量总是需要和其分量联系起来:  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ , 其中  $\{\mathbf{e}_i\}$  是坐标系的基底. 每一矢量都用其基底去定义, 但这又将涉及基底的定义问题. 因此在以前的学习中, 我们只能以数组的方式定义矢量及其基底, 如  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ .

更重要的是, 在相对论中, 坐标系具有参考系测量的含义. 实验者不能直接去测量一个抽象的矢量, 而只能测量分量, 这些信息通过仪器被提取成实验数据. 相对论的关键就在于研究坐标变换后, 物理量的分量如何变. 物理学当然默认这个物理量自身不受坐标系影响 (**坐标冗余性**), 但不仅如此, 还可要求在分量语言上保持**广义协变性**. 理由如下: 在狭义相对论中, 若做 Lorentz 变换, 则位矢分量  $x^\mu$  的变换就是坐标变换  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ , 保持 Lorentz 协变性; 我们希望同一个 4-速在任意惯性系的测值都是  $dx^\mu/d\tau$  的形式, 因此变换关系仍是  $U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$ ; 任意变换局域来看近似于线性变换, 则可继续期望在任意坐标系下定义  $dx^\mu/d\tau$  的形式, 而根据全微分关系, 4-速的确是广义协变的:

$$U'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} U^\nu; \quad (1.3.10)$$

为保持描述同一条自由落体轨迹, 我们需要  $ds^2$  在任意坐标系的不变性, 因此

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\gamma\sigma} dx'^\gamma dx'^\sigma \iff g'_{\gamma\sigma} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}. \quad (1.3.11)$$

推而广之的概念称为**张量** (tensor). 该名称最初由 Cauchy 提出, 他在研究弹性力学时意识到, 一点处质元与质元的作用力很难只由一个矢量数组取描述, 而似乎需要用到多维矩阵. 一个  $(k, l)$  **型张量** (简称  $(k, l)$ -**张量**) 是指满足如下**张量变换律**的量:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{\rho_1 \dots \rho_k}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\rho_k}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}}, \quad (1.3.12)$$

可记忆为是满足指标平衡的 Jacobi 矩阵元乘积, 这样就可快速写出公式.  $(k + l)$  叫作张量的**阶数**.

注意, 常习惯于先把张量分量的上指标写完, 再错开地写下指标. 部分量子场论教材选择统一使用下指标而只强调求和约定 “总共重复两次”, 更有甚者不区分指标顺序. 这在讨论更深刻问题时出现缺陷, 建议只在特殊情况采取简化. 比如  $\delta^\mu_\nu$  是考虑到  $I$  是对称矩阵. 而克氏符没有错开指标书写是考虑到一般不会混淆, 且它其实不是张量:

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}, \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

可见多出一项.  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  是坐标系自身信息. 尽管如此, 在有引力场时,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  却能体现绝对的引力现象, 这是因为  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  只能在局域惯性系中全零, 不可能找到整体的坐标系使  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  处处为零.

规定称式 (1.3.10) 这种变换为**逆变的** (contravariant), 按这种方式变换的矢量称为**逆变矢量** (contravector), 故上指标又称**逆变指标**. 而变换与之互逆的矢量:

$$\omega'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \omega_j, \quad (1.3.14)$$

则称为**协变矢量** (covector), 下指标可称**协变指标**. 这一称呼与“协变性”有区别, 后者是指方程的形式不变. 没有物理方程“逆变性”的说法. 约定像内积  $\eta_{\mu\nu}$  那样用  $g_{\mu\nu}$  完成逆变矢量和协变矢量之间的对偶. 称它们互为**度规对偶**的.

(0,0)-张量就是不变标量.  $(n,0)$ ,  $(0,n)$  型分别称  $n$  阶**逆变**、**协变张量**, 比如逆变矢量是 1 阶逆变张量, 协变矢量是 1 阶协变张量; 度规是对称、非退化的 2 阶协变张量; Kronecker 符号是 2 阶张量. 由张量的变换律, 若存在坐标系使其分量为零, 其在任何坐标系下分量都为零, 故不论何型都称**零张量**.

张量的基本运算性质如下: 1. 张量的直接拼凑称为**张量积**<sup>1</sup>, 结果仍然是张量, 比如将  $T^\mu$  和  $S_{\lambda\sigma}$  拼成  $T^\mu S_{\lambda\sigma}$ , 其变换式只是将各自的 Jacobi 矩阵元按实数的规律乘起来; 2. 张量的缩并仍是张量, 因为变换式只是消去一对 Jacobi 矩阵元; 3. 若干张量线性相加仍是张量.

称  $T^{\dots}$  是张量, 准确是想称其分量的等价类  $[T^{\dots}] = \{T^{\dots}, T'^{\dots}, \dots\}$  是张量. 虽然这在物理和计算上没有问题, 但似乎还是缺了些什么. 我们期望的是如果有分量, 就应该有某种数学对象, 使得分量是这一数学对象在不同坐标系下的不同转述. 换言之, 我们还是希望能像以前所学的  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$  形式那样去表述矢量, 换一组基底就可给出另一组分量. 鉴于对切矢图像的充分观察, Cartan 率先给出了这一数学对象的构造, 称为**映射语言**, 我们在第 2 章系统介绍. 但是, 这套框架是比较抽象的. 很多人因为其语言的优雅性, 成为了 Cartan 及其后世的信徒, 常常声称其优势在于“一点都无需直接借助坐标”, 即 Cartan 关于矢量的定义是“几何”的、“坐标无关”的. 这一论断当然过分夸张. 这种所谓的“坐标无关”, 我们要给出准确陈述: **坐标独立性** (coordinate independence) 或**坐标选择无关**, 也即物理上的坐标冗余性. 物理学对所使用的数学工具有要求的, 我们总要把理论计算与实验结果相比较, 这样坐标方法必不可少. 最重要的是, 并非所有参于张量运算的高指标量都是张量, 常称**赝张量**, 如克氏符. 对于赝张量, 映射语言需要将其强行定义为“坐标系依赖的张量”, 非常累赘, 分量语言反而成了聪明的选择. 只有遇到歧义或能简化推导时, 我们才讨论严格的映射语言.

Einstein 想要借由广义协变性发展出一套坐标选择无关的理论, 以尽可能排除人

<sup>1</sup>电动力学、量子力学中的**并矢** (dyadic) 就是张量积, 如  $\mathbf{AB}$ ,  $|\psi\rangle\langle\phi|$  等.

为因素. 但协变性对约束引力理论是不够的, 事实上还需要不变性. 首先, 将 Lorentz 不变性中的常数不变推广到所谓的**绝对对象** (absolute object), 即与物质状态无关的各种量, 除了常数  $c = G = 1, \hbar/2$ , 最重要的是还包括更高指标的, 比如 Jacobi 矩阵元  $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ . 与物质状态有关而可变的称**动力学对象** (dynamical object), 例如粒子的位置和动量、场的场强和能量密度等. 给定任何物理方程, 按定义总能把其中的量分为这两类. **广义不变性**就是说, 任何物理定律有广义协变性, 且方程中的绝对对象在任意坐标变换下相同, 就能决定了哪些绝对对象才可以出现于方程中. Jacobi 矩阵元这种一定是绝对对象的项就不能出现了. 一个描述物理定律的方程必须是指标平衡的张量方程, 才可在坐标变换下消除 Jacobi 矩阵元, 进而一种坐标系对应方程的一种表达, 并保持广义不变性, 不会同时出现两种坐标系符号.

广义不变性所提出的要求当然高于 Lorentz 不变性.  $c = 1, \hbar$  和  $\eta_{\mu\nu}$  有资格成为 Lorentz 不变性下的绝对对象, 但  $\eta_{\mu\nu}$  不能在任意坐标变换下严格不变, 它可变成某个  $g_{\mu\nu}$ . 在引力理论中, 由于  $g_{\mu\nu}$  必须出现, 我们只能期望  $g_{\mu\nu}$  是动力学对象, 它所满足的某个方程才能有广义不变性. 结合等效原理, 我们知道这是物质源产生引力场的定量关系, 称为**引力场方程**或**场方程**. Einstein 称这套引力理论为**广义相对论** (general relativity), 这也是当今的主流称呼. 当然, 最初他认为“广义相对”一词来自广义协变性, 但现在看来是来自等效原理和广义不变性. 为避免歧义, Wheeler 很早就提议将该理论称为**几何动力学** (geometrodynamics) 以强调其本质, 即与物质相互作用的动力学几何.

### 1.3.4 初步分析

为简化张量的代数运算, 需关注指标的对称性. 对赓张量和张量都可定义

$$T_{\dots(\mu_1 \dots \mu_k)\dots} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{\dots\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(k)} \dots}, \quad (1.3.15)$$

$$T_{\dots[\mu_1 \dots \mu_k]\dots} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma T_{\dots\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(k)} \dots}, \quad (1.3.16)$$

其中  $S_k$  是全体  $(1 \dots k)$  排列之集;  $\sigma \in S_k$  为偶排列时  $\text{sgn } \sigma = 1$ , 否则为  $-1$ ;  $\sigma(k)$  为  $\sigma$  的第  $k$  项. 上式分别称为  $T_{\dots}$  的**对称部分**和**反称部分**. 对两个指标, 我们在代数学中就学过矩阵的对称、反称分解, 比如

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda + \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda, \quad \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda = \frac{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda}{2}, \quad \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda = \frac{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda}{2}, \quad (1.3.17)$$

对上标定义同理. 上下标之间的对称、反称性要用度规升降后再讨论. 有时会横跨地标注, 如  $V^{[\mu} W^{\nu]}$ ,  $F_{(\mu|\sigma\lambda|\nu)}$  都标记在了  $\mu, \nu$  指标. 这套“圆方括号”指标系统的具

体性质如下. 缩并时两种括号都有传递性, 如

$$T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} S^{\mu_1 \cdots \mu_k} = T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} S^{(\mu_1 \cdots \mu_k)} = T_{\mu_1 \cdots \mu_k} S^{(\mu_1 \cdots \mu_k)}; \quad (1.3.18)$$

嵌套括号时, 同种子括号可随意添删, 但异种子括号会直接为零, 如

$$T_{[\mu_1 \cdots [\mu_m \cdots \mu_n] \cdots \mu_k]} = T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}, \quad T_{[\mu_1 \cdots (\mu_m \cdots \mu_n) \cdots \mu_k]} = 0. \quad (1.3.19)$$

这两条证明不难, 可以留给读者. 由此还可推出异种括号缩并为零, 如

$$T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} S^{[\mu_1 \cdots \mu_k]} = 0; \quad (1.3.20)$$

对三个以上指标只能  $T_{\mu_1 \cdots \mu_k} \neq T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} + T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ , 但仍可在**全对称**或**全反称**时有

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_k} = T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} \Rightarrow T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} = 0, \quad T_{\mu_1 \cdots \mu_k} = T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \Rightarrow T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} = 0. \quad (1.3.21)$$

今后会经常遇到某些指标具有对称、反称性, 这往往是物理量的具体定义导致的. 因此本段讨论将简化大量运算.

正如运动方程是关于  $x^\mu(\tau)$  的常微分方程, 场方程是关于  $g_{\mu\nu}(x)$  的偏微分方程, 并且根据广义不变性, 它应是张量方程, 其中的张量由度规及其导数构造. 该方程应来自于某个作用量. 尽管可在局域惯性系中消除引力, 但作为物理规律的作用量是不能在局域惯性系中失去耦合性的, 它必须是广义不变的标量. 可以考虑用张量缩并获得标量. 这种张量必须直接代表引力强弱, 它不能是  $g_{\mu\nu}$  级的, 因为可用局域惯性系消为  $\eta_{\alpha\beta}$ ; 也不能是  $g_{\mu\nu,\lambda}$  级的, 因为其可表为克氏符, 在一点处可取局域惯性系使其为零. 这意味着至少要考虑二阶导的构造, 故最终场方程至少是二阶的. 按有效性思想, 先考虑有且仅有二阶的情形; 且注意 Newton 引力论在低精度实验中是成立的, 故广义相对论必须囊括这一理论, 而 Poisson 方程恰好也是二阶的.

需要注意, 在高维空间中也总存在**测地系**<sup>1</sup>使得  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  且  $g_{\mu\nu,\lambda} = 0$ . 注意这并不显然, 我们在四维时空中是用等效原理理解它的. 考虑  $x^\mu(x')$  形式的函数 (而非反之) 以迎合度规的协变变换. 以某点  $p$  为某系  $\{x\}$  原点, 并不妨设变换不改原点, 则总能表为

$$x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} x'^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} x'^\alpha x'^\beta + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma} x'^\alpha x'^\beta x'^\gamma + \cdots. \quad (1.3.22)$$

将偏导系数记作  $A^\mu_\alpha, B^\mu_{\alpha\beta}, C^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ .  $A^\mu_\alpha$  的独立分量数为  $n^2$ , 而  $g_{\mu\nu}$  的独立分量数为  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ . 由  $2n \geq n+1$ ,  $A^\mu_\alpha$  能自由调节所有的  $g_{\mu\nu}$  至  $\eta_{\mu\nu}$ . 进而, 为排除掉  $g_{\mu\nu}$  的改变使  $g_{\mu\nu,\lambda}$  改变的那部分干扰, 要考虑能在  $p$  点保持  $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  的坐标变换. 只需取  $A^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha$  即可:

$$x^\mu = x'^\mu + \frac{1}{2} B^\mu_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta + \cdots.$$

<sup>1</sup>数学上, 这说明 Gauss 假设总能导出高维几何的局部平直性.

注意  $B_{\alpha\beta}^\mu = B_{(\alpha\beta)}^\mu$ , 则独立分量数为  $n\binom{n+1}{2}$ , 而  $g_{\mu\nu,\lambda}$  的独立分量数为  $\binom{n+1}{2}n$ , 二者相等, 则  $B_{\alpha\beta}^\mu$  恰好能自由调节所有的  $g_{\mu\nu,\lambda}$  至零. 进而地, 在某测地坐标  $\{\xi\}$  基础上, 总能找到无限多测地坐标, 它们形如

$$\zeta = \xi_0^\mu + \Lambda^\mu_\alpha \xi^\alpha + \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\gamma}^\mu \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma + \dots, \quad (1.3.23)$$

其中  $\xi_0^\mu, \Lambda^\mu_\alpha$  等无关于  $\xi^\alpha$ , 即只要求  $A_\alpha^\mu$  是 Poincaré 变换且  $B_{\alpha\beta}^\mu = 0$ , 从而保持测地系性质.

情况在二阶时发生改变. 为排除掉  $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}$  改变所带来的干扰, 考虑能在  $p$  点保持  $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu,\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda}$  的坐标变换, 只需取  $A_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu$  且  $B_{\alpha\beta}^\mu = 0$ :

$$x^\mu = x'^\mu + \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\gamma}^\mu x'^\alpha x'^\beta x'^\gamma + \dots$$

而  $C_{\alpha\beta\gamma}^\mu = C_{(\alpha\beta\gamma)}^\mu$ , 独立分量数为  $n\binom{n+2}{3}$ , 而  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa} = g_{(\mu\nu),(\lambda\kappa)}$ , 独立分量数为  $\binom{n+1}{2}^2$ . 可见,  $C_{\alpha\beta\gamma}^\mu$  最多只能自由调节  $n\binom{n+2}{3}$  种  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$ , 并剩下

$$\binom{n+1}{2}^2 - n\binom{n+2}{3} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad (1.3.24)$$

因此总存在  $n^2(n^2-1)/12$  种不受  $C_{\alpha\beta\gamma}^\mu$  选择的影响的  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$  (或线性组合). 若我们想构造基于  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$  的张量, 我们只能使用这些进行线性组合, 因为张量变换律只包括  $A_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu$  而不涉及  $C_{\alpha\beta\gamma}^\mu$ . 这样当所构造的张量非零时, 不会消除掉所有的  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$ .

### 1.3.5 Levi-Civita 联络

直接用偏导数构造张量是麻烦的, 我们要考虑一种保持张量性的导数. 对任意张量, 只要在局域惯性系  $\{\xi\}$  中写出它的定义, 再利用张量变换律寻找其它坐标系下的表述即可. 比如 4-速在任意坐标系的表达是

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \tilde{U}^\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (1.3.25)$$

但对 4-加速来说情况就微妙许多:

$$A^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \tilde{A}^\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\tilde{U}^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} U^\mu \right) = \frac{dU^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu. \quad (1.3.26)$$

故  $dU^\lambda/d\tau$  只有 Lorentz 协变性而无广义协变性. 我们将 4-加速理解为对 4-速求一种保持广义协变性的导数, 这种导数只在局域惯性系中才还原为  $d\tilde{U}^\alpha/d\tau$ . 不妨记  $D/d\tau$ , 即

$$A^\lambda = \frac{DU^\lambda}{d\tau} = \frac{dU^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu. \quad (1.3.27)$$



$D$  称为**绝对微分**或**协变微分**，日文所翻译的**共变**或许更无歧义。 $D/d\tau$  称为**沿线协变导数**。换言之  $D/d\tau$  总保持其作用对象的广义协变性，而只在局域惯性系中还原回  $d/d\tau$ 。自由落体方程现在可简单写作  $A^\mu = 0$ 。当没有引力时，自由落体方程的解为直线方程，但是克氏符仍可以非零，只要选择非惯性系就可办到这一点。

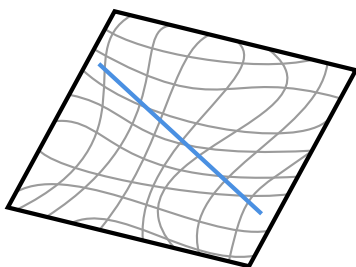


图 1.15:  $\mathbb{R}^2$  任意坐标系及直线

相应于  $d/d\tau$  可按全微分关系表为若干坐标偏导  $\partial_\nu$  的线性组合，对  $D/d\tau$  而言亦有**协变导数**  $\nabla_\mu$  的概念<sup>1</sup>。一般只讨论张量的协变导数。比如对逆变矢量  $V^\mu$  而言有  $DV^\mu/d\tau =: \nabla_\nu V^\mu dx^\nu/d\tau = U^\nu \nabla_\nu V^\mu$ ，即

$$V^\mu{}_{;\nu} = \nabla_\nu V^\mu := \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} V^\sigma = V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} V^\sigma, \quad (1.3.28)$$

这里类似地也有分号简记法。常把多出的克氏符项称为对偏导数的“协变性修正”。协变导数的优势是无需借助于曲线及其参数，但劣势是某点的  $V^\mu{}_{;\nu}$  要求  $V^\mu$  在该点邻域都有定义，而沿线求导只要求曲线上的邻域有定义。其它张量的协变导数仍可从局域惯性系按张量变换律推出，但更简单地可从如下事实出发：首先，就标量  $f$  而言，由全微分或链式法则可知，偏导已有广义协变性，故

$$f_{;\nu} = f_{,\nu}; \quad (1.3.29)$$

其次，从局域惯性系的偏导可知，任意协变导数应具有 **Leibniz 法则**，便可从标量、逆变矢量的协变导数及 Leibniz 法则推出一般情形。首先就协变矢量而言，构造标量  $V^\mu \omega_\mu$ ，则对任意  $V^\mu$  有  $(V^\mu \omega_\mu)_{;\nu} = (V^\mu \omega_\mu)_{,\nu}$ ，用 Leibniz 法则拆项并代入矢量协变导数定义有  $V^\mu \omega_{\mu;\nu} + \omega_\mu \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma = V^\mu (\omega_{\mu;\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu\sigma} \omega_\sigma) = V^\mu \omega_{\mu;\nu}$ ，因此

$$\omega_{\mu;\nu} = \omega_{\mu,\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \omega_\sigma. \quad (1.3.30)$$

<sup>1</sup>量子场论也有协变导数概念，记作  $D_\mu$ ，但定义在表面上略有差异，其间联系待第 7 章。

按此方法可得  $(k, l)$ -张量的协变导数为

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l; \lambda} = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l, \lambda} + \sum_{i=1}^k \Gamma_{\lambda \sigma}^{\mu_i} T^{\mu_1 \cdots \sigma \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} - \sum_{j=1}^l \Gamma_{\lambda \nu_j}^{\sigma} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \sigma \cdots \nu_l}. \quad (1.3.31)$$

在记忆时注意, 此即先填上一个偏导, 再对所有指标依次添加相应的克氏符修正项 (正负取决于指标上下), 并满足指标平衡.

式 (1.3.6) 说明度规的协变导数为零:

$$g_{\mu\nu;\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - g_{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} = 0, \quad (1.3.32)$$

称为**度规适配性** (metric-compatibility). 进而可直接在任意坐标系下证明  $A^\mu, U^\nu$  正交:  $A^\mu U_\mu = \frac{1}{2} \frac{D}{d\tau} (g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu) = 0$ .

数学上称满足  $DV^\mu/d\tau = 0$  的逆变矢量  $V^\mu$  在做**平行移动** (parallel transport) 或 **Levi-Civita 移动**. 切矢  $T^\mu = dx^\mu/d\sigma$  沿其自身平行移动的曲线称为**测地线** (geodesic), 即

$$T^\mu \nabla_\mu T^\lambda = 0. \quad (1.3.33)$$

上式称为**测地线方程**. 可见自由落体运动就是引力度规下的测地线. 假设  $V^\mu, W^\nu$  沿某条线平行移动, 其内积的沿线求导满足

$$\frac{D}{d\tau} (V^\mu W_\mu) = V^\mu W^\nu \frac{Dg_{\mu\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu} W^\nu \frac{DV^\mu}{d\tau} + g_{\mu\nu} V^\mu \frac{DW^\nu}{d\tau} = 0,$$

说明内积恒定. 就单个  $V^\mu$  而言说明模方恒定, 的确可看作一种“平行移动”.

设定时空上的逆变矢量场是给各时空点赋予其相应的逆变矢量, 一个逆变矢量是绑定于一点的, 故任意两点  $p, q$  处各自的逆变矢量本无关联. 然而给定某  $p, q$  间之曲线, 可通过矢量的平行移动, 将两个切空间联系起来. 因此  $\nabla_\nu$  又被称为**联络** (connection). 第 2 章会教授一般的联络定义, 每种联络都有相应的**联络系数**  $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ , 相应测地线用  $U^\nu \hat{\nabla}_\nu U^\mu = 0$  定义. 设**挠率** (torsion) 为  $T^\lambda_{\mu\nu} := 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda$ , 它靠着克氏符作差消除了这一项, 故是张量. 按式 (1.3.3) 定义的联络系数满足  $T^\lambda_{\mu\nu} = 0$ , 这种联络准确地称为**无挠** (torsion-free) **联络**. 度规适配的无挠联络称为 **Levi-Civita 联络**. 由此二条件可证联络系数正是克氏符, 故 Levi-Civita 联络存在且唯一. 广义相对论研究**无挠时空**, 进而该联络必须是 Levi-Civita 联络. 一是出于方便, 二是每一时空点都有局域的 Lorentz 不变性. 若要求还要涵盖局域的平移对称性, 即总地要求局域 Poincaré 对称性, 需要考虑有挠联络. 这仍能遵循等效原理, 因为测地线方程中  $U^\mu U^\nu = U^{(\mu} U^{\nu)}$ , 只要求对称部分  $\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda$  等于 (1.3.3) 式也仍使粒子在引力下走测地线.

### 1.3.6 潮汐与曲率

考虑二阶协变导数, 但暂不清楚将它作用于何物, 因此要回到物理学. 相比于单条测地运动, 潮汐现象必须在足够大邻域内, 等效原理不再适用. 这意味着, 若寻求一个尽可能简单的定义, 那么该张量场在一点就应具备潮汐意义. 设物质由连续介质描述, 它在时空上延伸为一个类时世界管, 如图 1.16. 每条世界线都可成为观者, 进而构成参考系, 称为该介质的**共动系**. 一般假定共动系可按某种方式约定各观者的固有时初始设定.

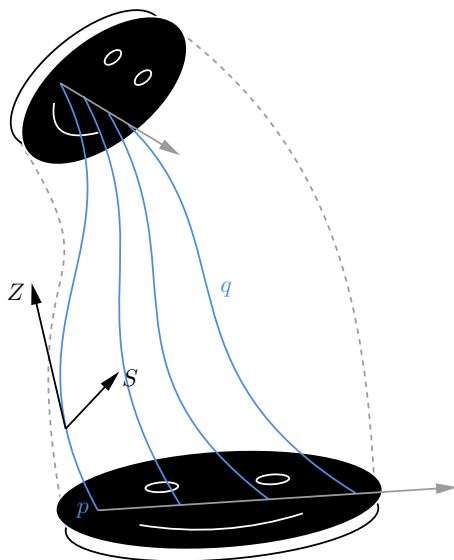


图 1.16: 测地偏离

对任意坐标系  $\{x\}$ , 各观者的坐标式都是  $x^\lambda(\tau)$  形式, 4-速为  $Z^\lambda = dx^\lambda/d\tau$  形式. 研究相对加速度, 只需取某个观者为基准, 称为**基准观者** (fiducial observer). 而它邻域内的测地线称为**邻居** (neighbor). 若基准观者  $p$  记作  $x^\lambda(\tau)$ , 则某邻居  $q$  的坐标式可记作  $x^\lambda(\tau) + \delta x^\lambda(\tau)$ , 其中  $\delta x^\lambda =: \epsilon S^\lambda$  代表微小间距,  $S^\lambda$  称为**偏离矢量** (separation vector). 故只需研究某个偏离矢量沿基准观者世界线的二阶协变导数. 假设其内部的相互作用较弱, 则各质元仅受外场作用而走各自的测地线. 这样, 世界管就成了所谓的**测地管**. 则二者的运动方程为

$$\frac{dZ^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_p Z^\mu Z^\nu = 0, \quad (1.3.34)$$

$$\frac{dZ^\lambda}{d\tau} + \epsilon \frac{d^2 S^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_q \left( Z^\mu + \epsilon \frac{dS^\mu}{d\tau} \right) \left( Z^\nu + \epsilon \frac{dS^\nu}{d\tau} \right) = 0. \quad (1.3.35)$$

将  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_q$  按  $p$  展开为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_q = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_p + \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda|_p \delta x^\kappa = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_p + \epsilon \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda|_p S^\kappa, \quad (1.3.36)$$

现在就可省去时空点下标. 将两式相减并略去高阶有

$$\frac{d^2 S^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda Z^\mu Z^\nu S^\kappa - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dS^\mu}{d\tau} Z^\nu, \quad (1.3.37)$$

则  $S^\lambda$  沿测地线的二阶协变导数为 (注意勿先展开内部, 以避免对克氏符求导)

$$\begin{aligned} \frac{D^2 S^\lambda}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \frac{DS^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{DS^\mu}{d\tau} Z^\nu \\ &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dS^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda S^\kappa Z^\mu \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left( \frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\mu S^\kappa Z^\sigma \right) Z^\nu \\ &= \frac{d^2 S^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\mu,\nu}^\lambda Z^\mu Z^\nu S^\kappa + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dS^\mu}{d\tau} Z^\nu + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda S^\kappa \frac{dZ^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\kappa\sigma}^\mu Z^\sigma Z^\nu S^\kappa \\ &= (\Gamma_{\kappa\mu,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda) Z^\mu Z^\nu S^\kappa - \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda S^\kappa \Gamma_{\mu\sigma}^\nu Z^\mu Z^\sigma + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma Z^\mu Z^\nu S^\kappa \\ &= R_{\mu\nu\kappa}^\lambda Z^\mu Z^\nu S^\kappa, \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

其中

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda := -2\Gamma_{\mu[\nu,\kappa]}^\lambda + 2\Gamma_{\sigma[\nu}\Gamma_{\kappa]\mu}^\sigma. \quad (1.3.39)$$

式 (1.3.38) 称为**测地偏离** (geodesic deviation) **方程**.  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$  是  $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$  级的, 且确实是张量, 因为 (1.3.38) 的式左是协变导数, 式右  $Z^\mu, S^\kappa$  是逆变矢量. 这称为**潮汐张量**, 表征潮汐形变程度, 亦即度规的非闵程度: 只需取某个惯性系使克氏符处处为零, 进而潮汐张量在该系和任意坐标系都为零.

数学上称作 **Riemann 内禀曲率** (intrinsic curvature) 或**曲率**, 曲率为零时称度规为**平直的** (flat), 非零时称**弯曲的** (curved), 物理学可以借用这些词而称**时空曲率**, 时空分为**平直时空**和**弯曲时空**. 下面解释这些称呼的意义. 我们预先规定欧氏空间是生活意义的平直, 以它为绘图基准可判断某条线、某张面的弯曲. 考虑一个球面, 其上任意切矢沿自身平移所得测地线即过球心的大圆. 设从赤道某两处垂直延伸两条大圆弧, 它们的间距逐渐缩短并交于极点. 在一张平面上, 初态平行的直线不可能改变间距. 另一方面, 按如下操作可计算球面上的线元: 先用球坐标  $\{r, \theta, \phi\}$  改写欧氏度规为

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.3.40)$$

当然, 此处  $\Omega$  不是微积分学的立体角 (solid angle), 立体角满足的是  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . 再取  $r = R$  就有所谓的**球面度规**  $d\ell^2 = R^2 d\Omega^2$ , 由此可计算球面曲率不为零. 像这样, 约定背景空间中**嵌入** (imbedded) **曲面**的长度是用背景度规衡量的, 这称为背景度规的**诱导** (induce) **度规**. 可见度规在非欧或非闵时, 内禀曲率非零而使测地间隔

变化. 但内禀曲率其实只由度规和坐标系计算而来, 甚至无需嵌入某个高维背景来定义度规和曲率——对于 4 维时空, 我们就只能抛弃嵌入思想来想象它. 内禀曲率只反应内禀的弯曲程度而与曲面本身无关: 球面在内禀意义下弯曲, 但圆柱面在内禀意义下平直 (借柱坐标发现诱导度规平直), 尽管它在直观上弯曲. 数学上, 描述圆柱面这种对象的弯曲程度就需要嵌入思想, 称为**外 (extrinsic) 曲率**. 一个直观理解是, 凡能连续地展平的曲面, 尽管外曲率可不为零, 但内禀曲率为零; 真正不可连续展平的曲面内禀曲率、外曲率都非零. 读者可观察纸塑地球仪是如何尝试将平面纸张大致贴合球面的.

现在就可给出实验意义的局域惯性系的定量标准. 测地线  $G(\tau)$  的弯曲使线上曲率不能处处为零, 故局域惯性系只能保证  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  严格在线上为零. 实际上, 假若在邻域  $U$  内等于零, 则借助邻域按 (1.3.39) 式计算曲率, 则显然在线上处处为零且与坐标系无关, 矛盾. 故只要邻域足够大, 时空的弯曲便可体现, 此即数学上对局域惯性系的要求. 然而, 从操作层面, 观者  $G$  往往又需借助时空邻域进行实验, 好在只要  $U$  尺寸远小于时空的曲率半径<sup>1</sup>, 同时也远小于对曲率半径的测量精度时, 这样即使时空范围未严格至测地线, 但曲率也不会被实验观测到. 以圆为例, 微小弯曲圆弧可用该处相切的平直线段近似代替, 尽管该处曲率的确不为零. 当然, 若实验范围较大或仪器精度够高, 还是可以测量潮汐并确定曲率张量, 见 5.1 节.

场源与曲率的关系要在低速、弱场下还原为 Poisson 方程. 取测地管的共动系  $\{\xi\}$ , 不妨规定固有时零点形成的超曲面处处与  $S^\kappa$  相切. 显然  $\tilde{Z}^\mu = \delta_0^\mu$  且  $\tilde{S}^0 = 0$ . 根据定义显然有反称性

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu[\nu\kappa]}, \quad (1.3.41)$$

测地偏离方程在共动系下写作

$$\frac{D^2 S^\lambda}{d\tau^2} = -R^\lambda_{\mu\kappa\nu} Z^\mu S^\kappa Z^\nu \implies \frac{d^2 \tilde{S}^i}{dt^2} = -\tilde{R}^i_{0j0} \tilde{S}^j. \quad (1.3.42)$$

设每条测地线足够低速, 故共动系成为了惯性系. 这样  $\tilde{S}^i$  可以理解为在同一时间测量质元间的相对加速度<sup>2</sup>. 在惯性系中, Newton 引力理论给出

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} = -\tilde{\partial}^i \phi, \quad \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \epsilon \frac{d^2 \tilde{S}^i}{dt^2} = -\tilde{\partial}^i \phi - \epsilon \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}^i \phi \tilde{S}^j, \quad (1.3.43)$$

其中右侧是按相同理由将附近的  $\tilde{\partial}^i \phi$  展开到一阶. 用 Poisson 方程就可得到  $\tilde{R}^\sigma_{0\sigma 0} = \tilde{R}^i_{0i0} \approx \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}^i \phi = 4\pi\rho$  (几何制), 其中注意反称性给出  $R^\mu_{\nu 00} = 0$ , 进而  $R^\sigma_{0\sigma 0} = R^i_{0i0}$ . 可见

$$R_{\mu\nu} := R^\sigma_{\mu\sigma\nu} \quad (1.3.44)$$

<sup>1</sup>经典力学中曲线可视为一系列圆周运动, 半径便是曲率半径; 曲面曲率可用球面去衡量. 此概念可推至高维.

<sup>2</sup>一般的  $S^\kappa$  十分任意而不一定满足对钟的正交要求.

很有意义,  $\tilde{R}_{00}$  在 Newton 条件下近似为  $4\pi\rho$ , 数学上称之为 **Ricci 曲率**, 它当然也是张量.

### 1.3.7 何以选择曲率

为何选择用 Riemann 曲率描述引力? 实际上, Riemann 曲率具备各种性质, 使其是唯一可由度规二阶导线性组合而成的张量.

时空的 Riemann 曲率的分量有  $4^4 = 256$  之多, 但它具有若干性质, 使其许多分量往往重复或为零. 首先前文已提过反称性 (1.3.41) 式, 其次是所谓的 **Ricci 循环恒等式** (cyclic identities)

$$R^\lambda_{[\mu\nu\kappa]} = 0. \quad (1.3.45)$$

证明只需默认无挠性, 并运用取测地系的技巧 (其中  $\tilde{R}^\lambda_{\mu\nu\kappa} = -2\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu[\nu,\kappa]}$ ).

此外, **降指标 Riemann 曲率**  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} := g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\kappa}$  是一个常用概念, 它与原先  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$  有等价的独立分量数, 因此有时也称 Riemann 曲率. 它使我们能看到更多性质, 如反称性

$$R_{\lambda\kappa\mu\nu} = R_{[\lambda\kappa]\mu\nu}. \quad (1.3.46)$$

直接证明它亦可从无挠性和测地系入手. 由此可知  $R_{\mu\nu}$  是  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$  唯一非平凡缩并, 另两种缩并是平凡的:

$$R^\sigma_{\mu\nu\sigma} = -R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = -R_{\mu\nu}, \quad R^\sigma_{\sigma\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g^{(\lambda\sigma)} R_{[\lambda\sigma]\mu\nu} = 0.$$

最后是前一对指标和后一对指标的对称性:

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}. \quad (1.3.47)$$

同理默认无挠性并取测地系即可. 包括式 (1.3.41) 在内的这四条性质是我们能得到的所有代数性质了.

由  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu[\nu\kappa]}$  可知 Ricci 恒等式还有如下形式:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} + R^\lambda_{\nu\kappa\mu} + R^\lambda_{\kappa\mu\nu} = 0. \quad (1.3.48)$$

注意, 上式若存在相同指标, 则总与另三条性质重复, 故常考虑指标各不相同的非平凡 Ricci 恒等式. 假设时空维数是  $n$ , 显然至少要两个不同指标才有非零分量. 给定  $a, b$ , 由反称性知只有  $R_{abab}$ ; 给定  $a, b, c$ , 由反称性和对称性知有  $R_{abac}, R_{abbc}, R_{acbc}$  三类; 给定  $a, b, c, d$ , 前一对指标选完就确定了后一对, 由对称性知选法有  $R_{abcd}, R_{acbd}, R_{adb c}$ , 但给定两个就能按非平凡 Ricci 恒等式确定第三者, 故独立分量有两类. 最后乘上各自组合数, 则独立分量数共为

$$\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

可见它恰好具有  $n^2(n^2 - 1)/12$  个独立分量, 用完了所有可用的  $g_{\mu\nu, \lambda\kappa}$ . 故能线性构造出的张量有且仅有 Riemann 曲率.

对于四维时空, Riemann 曲率只有 20 个独立分量. 但 20 个分量或许在处理上仍然不便, 我们可用缩并将 Riemann 曲率进行压缩从而保留有用数据. 前文已说明, 初步缩并的唯一有用结果是 Ricci 曲率. 根据  $R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ , 立即有对称性

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\nu\sigma\mu} = R_{\nu\mu} \implies R_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)}. \quad (1.3.49)$$

这样可有进一步的非平凡缩并

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu. \quad (1.3.50)$$

这称为 **Ricci 曲率标量**, 即  $R_{\mu\nu}$  的迹. 虽然这不是唯一能从  $g_{\mu\nu}, R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$  得到的非平凡标量 (见 2.6 节), 但确实是足够简单的一个.

除了上述纯代数性质之外, Riemann 曲率还满足一个重要的微分恒等式:

$$R^\lambda{}_{\mu[\sigma\nu;\kappa]} = 0, \quad (1.3.51)$$

这称为 **Bianchi 恒等式**. 可直接用无挠性和测地系证明之.

由  $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda{}_{\mu[\nu\kappa]}$  可知 Bianchi 恒等式还有如下形式:

$$R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu;\kappa} + R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa;\sigma} + R^\lambda{}_{\mu\kappa\sigma;\nu} = 0. \quad (1.3.52)$$

对上式缩并  $\lambda, \sigma$  再用  $g^{\mu\kappa}$  升指标, 且注意  $g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\kappa\nu} = R^\kappa{}_{\lambda\kappa\nu} = R_{\lambda\nu}$ , 则

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \implies \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{\nabla_\nu R}{2} \implies \nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = 0.$$

可以定义

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \implies \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.53)$$

这称为 **Einstein 张量**. 还可有

$$G := g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\mu R = -R \implies R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G. \quad (1.3.54)$$

协变导数对标量场的作用和梯度无异. 协变导数与所作用的张量的某一指标缩并, 称为**时空散度**或**散度**. 故上式说明  $R_{\mu\nu}$  的散度正比于  $R$  的梯度, 或者  $G_{\mu\nu}$  无散; 而  $G_{\mu\nu}$  的迹是  $R$  之负.

### 1.3.8 引力场方程

现在已有一个足够简单的  $g_{\mu\nu, \lambda\kappa}$  级的 Ricci 标量. 我们考虑用它来构造引力场的作用量. 先考虑无物质源耦合的自由引力场. 取局域惯性系  $\{\xi\}$ . 最简单的选择是

$$S(g_{\mu\nu}(x)) = \int R d^4\xi, \quad (1.3.55)$$

变换到任意坐标系时,  $R$  严格不变, 体元具有变换  $d^4x = J d^4\xi$ , 而  $J$  其实能用度规行列式表示. 记度规在  $\{x\}$  系的行列式是  $g := \det(g_{\mu\nu})$ . 对  $g_{\mu\nu}$  的定义取行列式有

$$g = \det\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\right) \det(\eta_{\alpha\beta}) = J^{-2} \det(\eta_{\alpha\beta}), \quad (1.3.56)$$

则

$$\text{sgn } g = \det(\eta_{\alpha\beta}) = -1 \implies J^{-1} = \sqrt{-g} \implies S = \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.3.57)$$

这里  $\text{sgn}$  表示取符, 并不妨假设坐标变换保持右手性. 可见  $g$  虽与坐标选择有关, 但在变换下一定保号, 即引力度规的行列式总是负的 (无关号差). 规定**适配体元**  $D^4x$  只在局域惯性右手系  $\{\xi\}$  中表为  $d^4\xi$ , 就有  $D^4x = \sqrt{-g} d^4x$ .

现在考虑变分. 由于  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , 为简便运算, 我们选择对  $g^{\mu\nu}$  而非  $g_{\mu\nu}$  变分:

$$\delta S = \int \left( \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{R}{2\sqrt{-g}} \delta g + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (1.3.58)$$

首先计算  $\delta g$ . 首先可证线性代数中的 Jacobi 公式:

$$\partial_\lambda g = \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\sigma\nu, \lambda} = \frac{\partial(g\delta_\sigma^\mu)}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\mu\nu, \lambda} = g^{*\gamma\mu} \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\mu\nu, \lambda} = g g^{\gamma\mu} \delta_\gamma^\nu g_{\mu\nu, \lambda} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu, \lambda},$$

其中  $(g^{*\mu\nu})$  是  $(g_{\mu\nu})$  的伴随, 具有性质  $g\delta_\sigma^\mu = g_{\sigma\gamma} g^{*\gamma\mu}$  和  $g^{*\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$ . 注意伴随 (转置) 矩阵元是相应代数余子式, 当然有  $\partial g^{*\gamma\mu} / \partial g_{\sigma\nu} = 0$ . 故同理有

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.3.59)$$

其中第二步是因为由  $\delta_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}$  可得  $0 = g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\lambda}$ .

其次计算  $\delta R_{\mu\nu}$ . 取局域惯性系, 则

$$\delta \tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi^\sigma} \left( \delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left( \delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\sigma \right) = \nabla_\sigma (\delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma) - \nabla_\beta (\delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\sigma),$$

注意, 虽然克氏符不是张量, 但克氏符变分是张量 (作差消去非协变部分), 故上式是广义不变的, 即任意坐标系下有

$$\delta R_{\mu\nu} = 2 \nabla_{[\lambda} \delta \Gamma_{\nu]\mu}^\lambda, \quad (1.3.60)$$



有时称为 **Palatini 公式**. 于是 (1.3.58) 式中  $\delta R_{\mu\nu}$  项为

$$\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} D^4 x = 2 \int \nabla_{[\lambda} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu] \mu}^{\lambda}) D^4 x = 2 \int \nabla_{\lambda} (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]}) D^4 x. \quad (1.3.61)$$

这是边界项, 舍去后有 (常用 “ $\simeq$ ” 标注)

$$\delta S \simeq \int \left( \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{R}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) d^4 x = \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x,$$

而  $\sqrt{-g} \neq 0$ , 因此  $G_{\mu\nu} = 0$ . 这等价于

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = 0, \quad (1.3.62)$$

称为**真空方程** (vacuum field equation). 闵氏度规显然是一个解.

随后考虑物质场对引力场的耦合. 考虑最小耦合: 设物质场与引力场的耦合项为  $\mathcal{L}_M$ , 并与自由引力场的部分直接相加为

$$S = \int (R\sqrt{-g} + \alpha \mathcal{L}_M) d^4 x, \quad (1.3.63)$$

其中引入的系数  $\alpha$  称为**耦合强度**, 无非是为了给理论参数更多自由余地.

先考虑单个质点. 物理上常用 **Dirac  $\delta$  函数** 描述质点系的密度分布:

$$\delta(x - x_0) := \begin{cases} +\infty, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0; \end{cases} \quad \int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (1.3.64)$$

因此引力场与它的最小耦合为

$$\int \mathcal{L}_M d^4 x = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} dt = - \iint m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \delta^4(x - \gamma(\tau)) dt d^4 x.$$

对  $g_{\mu\nu}$  变分有

$$\delta \int \mathcal{L}_M d^4 x = \frac{1}{2} \iint m \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} \frac{d\gamma^\nu}{d\tau} \delta^4(x - \gamma(\tau)) \delta g_{\mu\nu} d\tau d^4 x.$$

如果定义

$$\delta \int \mathcal{L}_M d^4 x = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \quad T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.3.65)$$

则

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \int P^\mu U^\nu \frac{\delta^4(x - \gamma(\tau))}{\sqrt{-g}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{-g}} P^\mu \frac{d\gamma^\nu}{dt} \delta^3(x - \gamma(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{P^\mu P^\nu}{E} \delta^3(x - \gamma(t)). \end{aligned} \quad (1.3.66)$$

可见  $T^{00} = T_{00} = \rho_{EM}$  即能量密度,  $T^{i0} = T^{0i} = \rho_{EM}u^i$  即动量密度或能流密度, 而  $T^{ij} = \rho_{EM}u^iu^j$  即动流密度或应力张量. 因此,  $T^{\mu\nu}$  称为物质场源的 **4-动流密度或能动张量** (energy-momentum tensor). 对于质点系, 同理可知只需按各  $\gamma_n$  的  $P_n^\mu, E_n$  求和即可. 对无相互作用、质量守恒的质点系, 连续介质极限称为**尘埃** (dust). 设  $\rho$  是在共动系测量到的质量密度分布, 称为**固有质量密度**;  $U^\mu$  是物质的 4-速场. 据此定义可知  $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$ .

同理对  $g^{\mu\nu}$  的变分为

$$\delta \int \mathcal{L}_M d^4x = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.3.67)$$

代入到原作用量中有

$$\delta S \simeq \int (G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa := \alpha/2.$$

再确定  $\kappa$  的具体值. 弱场条件下  $\sqrt{-g} \approx 1$ . 低速条件下共动系近似为场源静系, 则  $R_{\mu\nu}Z^\mu Z^\nu = R_{00} \approx 4\pi\rho$ . 共动系中有  $\tilde{Z}^\mu = \delta_0^\mu, \tilde{Z}_\mu = -\delta_{\mu 0}$ , 则  $T_{\mu\nu}Z^\mu Z^\nu = \tilde{T}_{00} = \tilde{T}^{00} = \rho$ . 进而  $T := g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -T^{00} = -\rho$ . 由前文知  $R = -G = -\kappa T$ , 代入场方程中有  $4\pi\rho - \frac{1}{2}(-1)\kappa\rho = \kappa\rho$ , 则

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \kappa = 8\pi. \quad (1.3.68)$$

这称为 **Einstein 方程**, 是引力场方程的最小耦合情形. 通常又喜欢对作用量同除  $2\kappa$  而称  $\frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g} d^4x$  为 **Einstein-Hilbert 作用量**. 由  $R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$  可知

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\kappa T = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (1.3.69)$$

称为 Einstein 方程的**反迹** (trace-reversed) 表达. 真空方程可视作  $T_{\mu\nu} = 0$  的情形.

由  $G_{\mu\nu}$  的无散性可知  $T_{\mu\nu}$  无散:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.70)$$

取  $\nu = 0$  即能量局域守恒, 取  $\nu = i$  即动量局域守恒. 将尘埃的能动张量代入有  $U^\nu \nabla_\mu (\rho U^\mu) + \rho U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0$ , 与  $-U_\nu$  缩并可得到

$$\nabla_\mu (\rho U^\mu) - \rho U_\nu U^\mu \nabla_\mu U^\nu = \nabla_\mu (\rho U^\mu) - \frac{1}{2} \rho U^\mu \nabla_\mu (U_\nu U^\nu) = \nabla_\mu (\rho U^\mu) = 0. \quad (1.3.71)$$

进而

$$\rho U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0 \implies U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0, \quad (1.3.72)$$

故尘埃共动系中每一观者都走测地线. 对单质点而言也即运动方程.

### 1.3.9 黑洞简介

真空方程已经能够描述非常多的引力现象. 这是因为场源往往限制在很小的区域内, 而外部区域真空, 可作为试验粒子被允许运动的范围. 若假设某场源的外引力场极弱中, 以场源静止系为参考, 设场源位于原点极小区域内, 我们以后可以求得产生的引力场为

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.3.73)$$

其中  $M$  是场源质量, 而空间坐标采用球坐标. 此即 **Schwarzschild 度规**, 也是广义相对论第一个涉及引力的解析解. 上式采用的坐标系称为 **Schwarzschild 系**. 可以看到, 在足够远处它将还原为闵氏度规, 而坐标系作为场源静系逐渐延伸为整体惯性系, 因此时空的确是**渐近平直的** (asymptotically flat).

Schwarzschild 度规具有**奇异性或奇性** (singularity). 奇性通常指一些数值的发散, 比如度规分量, 包括度规逆矩阵分量的发散 (即度规行列式  $g$  为零). 该度规显然在  $r = 0, 2M$  都存在奇性, 我们依次研究.

曲面  $r = 2M$  是等  $r$  面, 即取  $f = x^1 = r$ , 则法矢可取其梯度  $n^\mu = \partial^\mu f$ . 观察其模方

$$n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} \delta_\nu^1 \delta_\mu^1 = g^{11} = 1/g_{11} = 1 - 2M/r,$$

可见  $r > 2M$  时  $n^\mu$  类空, 与其正交且的未来切矢必类时, 故称超曲面  $r = C$  类时;  $r < 2M$  时  $n^\mu$  类时, 同理称  $r = C$  类空; 而在视界  $r = 2M$  上,  $n^\mu$  类光, 称  $r = C$  类光. 其物理意义是,  $r > 2M$  的类时超曲面上与光锥相交, 这说明光可自由穿梭; 然而  $r < 2M$  的类空超曲面位于光锥之外,  $r = 2M$  的类光超曲面刚好切于光锥, 故光只能进入而不能逃脱. 可见,  $r = 2M$  就仿佛是由光锥面构成的.

假设某个静态观者的世界线为  $r = r_0$ , 根据  $U^\mu U_\mu = -1$  可知其 4-速为  $U^\mu = (1 - 2M/r)^{-1/2} \delta_0^\mu$ . 可见保持类时性的条件是  $r > 2M$ . 由前文也可知, 光至多只能沿  $r = 2M$  传播, 而任何质点的宿命皆在光锥之内, 因此观者只可静止于  $r > 2M$ . 而  $r < 2M$  内的任何光线都无法逃出曲面  $r = 2M$ , 内部事件无法直接向外传递. 综上,  $r = 2M$  被称为**静界** (static surface)、**事件视界** (event horizon) 或简称**视界**. Wheeler 将视界半径超过其自身半径的星体称为**黑洞** (black hole). 目前已观测到这种星体. 视界所包围的时空区域称为**黑洞区域**, 视界又可称为黑洞表面. 若星体的斥力不能与引力抗衡, 则质量将无限坍缩至近乎一点  $r = 0$ , 而视界内极为空旷.

读者可经过冗长但思路简洁的计算后, 得到如下的 **Kretschmann 标量**

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (1.3.74)$$

上式在  $r = 0$  发散. 这问题其实很严重, 因为我们只是框定一堆物质, 便使得光滑的时空上戳出一个“洞”, 令人难以接受.  $r = 0, 2M$  两处的奇性在此体现出区别: 上



图 1.17: 电影 *Interstellar* 中黑洞 Gargantua 被设定为一颗古老的巨型旋转黑洞, 周围绕有的尘埃等物质称为**吸积盘** (accretion disk). 黑洞背对观众处的吸积盘所发的光受引力影响, 而绕过了黑洞并射向观众, 故其视觉上仿佛包裹了视界.

式在  $r = 2M$  有意义. 既然曲率在  $r = 2M$  处并不奇异, 那就有可能找到一种坐标系使得度规分量不再发散 (待第 3 章). 该过程一般称为**消除度规奇性**, 因而将度规分量在视界处的奇性称为**坐标奇性或假奇性**. 相较而言,  $r = 0$  处的奇性就称为**时空奇性或真奇性**, 因为曲率发散的事实与坐标系无关. 这个点就叫做**奇点**<sup>1</sup>.

### 1.3.10 经典电磁场的引力耦合

可以看到, 引力荷的范畴从质量扩展到能量, 物质与引力场的耦合被解释为能量的携带. 电中性物质场主要靠质量和动量贡献能量 (不讨论结合能等), 但电磁系统还能靠电荷和电流贡献能量.

先考虑无引力耦合的电磁场, 即时空为闵氏时空, 并默认取惯性系. 可以期望经典电磁场能用 4 维矢量场描述. 电磁场强  $E^i, B^i$  六个信息不能直接用一个矢量涵盖, 除非考虑其势: 给定电标势  $\phi$  和磁矢势  $\mathbf{a}$  就确定了  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a}, \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{a}$ . 这样可按  $\phi =: A^0, a^i =: A^i$  凑成 **4-势**  $A^\mu$ . 耦合项的系数即耦合强度, 根据荷的定义可知即粒子电荷  $q$ . 在非共动系中, 可同时测量到电荷和电流, 因此为适用于任意惯性系, 必须同时包括  $q$  和粒子 4-速  $U^\mu$  的贡献. 进而, 粒子与电磁场的最小耦合项显然是内积  $A_\mu U^\mu$ , 并与自由粒子作用量相加:

$$S = \int (-m + qA_\mu U^\mu) d\tau, \quad (1.3.75)$$

<sup>1</sup>英文亦是 singularity. 为表述性质和地点两种概念, 中文语境里可区分使用. 但注意奇点不一定仅位于空间点.

先发挥物理学家特有的意识流计算:  $P_\mu \propto \partial(A_\nu U^\nu)/\partial U^\mu = A_\mu$ , 进而  $dP_\mu/d\tau \propto \partial_\nu A_\mu U^\nu$ , 故预料此即运动方程的形式. 第二项的变分为

$$\begin{aligned} \delta \int A_\mu U^\mu d\tau &= \int \left( \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu U^\mu + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \right) d\tau \\ &\simeq \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) U^\nu \delta x^\mu d\tau = \int F_{\mu\nu} U^\nu \delta x^\mu d\tau, \end{aligned}$$

其中  $F_{\mu\nu} := 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$  称**电磁张量**. 变分结果为

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (1.3.76)$$

注意  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  的分量写法为  $\varepsilon_{ijk} A^j B^k$ .  $\varepsilon_{ijk}$  称为 **Levi-Civita 符号**, 若  $(ijk) \in S_n$ , 则  $\varepsilon_{ijk} = \text{sgn}(ijk)$ , 否则为零. 且可证明

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon^{kmn} = 2\delta_{[i}^m \delta_{j]}^n = 2\delta_i^{[m} \delta_j^{n]}, \quad (1.3.77)$$

进而由定义 (注意  $A_0 = -\phi, A_i = \delta_{ij} a^j$ ) 可知

$$E_i = F_{i0}, \quad B_i = \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k = \varepsilon_{ijk} \partial^{[j} A^{k]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \Leftrightarrow F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k. \quad (1.3.78)$$

可使用矩阵表示为

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.79)$$

它确实有场强之意义. 取  $f^i = m\dot{u}^i$  可看出该运动方程正是  $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ . 称  $qF^\mu{}_\nu U^\nu$  为 **4-Lorentz 力**. 类似地, 欲直接得 3 维表述可用惯性坐标时  $t$  作为参数, 位形空间取同时面  $\Sigma_t$ , 这样可表为  $L = -m\sqrt{1-u^2} - q\phi + qu_i a^i$ , 对  $x^i$  变分可同样得到 Lorentz 力定律. 可见最小耦合项迫使场强成为 4-速的线性变换. 从定义立即得到一个微分恒等式

$$F_{[\mu\nu],\lambda} = 2A_{[[\nu,\mu],\lambda]} = 2A_{[\nu,(\mu,\lambda)]} = 0, \quad (1.3.80)$$

这已给出 Maxwell 方程组中的  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  和  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ . 也可从  $A^\mu U_\mu = 0$  出发, 由  $F_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0$  通过分配律理解其反称性.

再考虑电磁场与场源的耦合.  $A^\mu$  的运动方程应至少二阶, 故自由电磁场的作用量必须出现  $F_{\mu\nu}$ , 最简单的构造是  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , 而无需额外与  $A^\mu$  缩并. 对  $A_\nu$  变分有

$$\delta \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x = 2 \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x = 4 \int F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) d^4x \simeq -4 \int \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x.$$

而耦合项是  $q \int A_\mu U^\mu d\tau$  或推广为连续荷电介质. 同理借共动系得到固有电荷密度  $\rho_{e0}$ . 电荷量、粒子数不因惯性系变换改变, 但体积会因为尺缩效应而变为  $\frac{1}{\gamma}$  倍, 故任意惯性系中有  $q = \int \gamma \rho_{e0} d^3x$ . 再由  $\gamma = dt/d\tau$ , 耦合项可改写为  $\int A_\mu J^\mu d^4x$ , 其中  $J^\mu = \rho_{e0} U^\mu$  称为 **4-电流密度**. 对  $A^\mu$  的变分是  $\int J^\mu \delta A_\mu d^4x$ , 故

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu, \quad (1.3.81)$$

其中耦合强度由电磁、光学实验测定, 并采取单位制使  $4\pi\epsilon_0 = 1$  (细节见 1.6 节). 这给出了 Maxwell 方程组的  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e$  和  $\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j}$ . 显然 4-电流密度无散:

$$\partial_\mu J^\mu = -\frac{1}{4\pi} \partial_{(\nu} \partial_{\mu)} F^{[\mu\nu]} = 0, \quad (1.3.82)$$

此即电荷守恒  $\partial_t \rho_e + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

或许有读者发现, 其实只要  $A^\mu$  是  $F^{\mu\nu}$  的势, 则  $A^\mu + \partial^\mu f$  也是  $F^{\mu\nu}$  的势:

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} + 2\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} f = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f). \quad (1.3.83)$$

这称为  $A^\mu$  的**规范自由性** (gauge freedom). 为消除这一不必要的自由度, 可约定

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.3.84)$$

这称为 **Lorenz 规范**<sup>1</sup>. 这种  $A^\mu$  总是存在的, 因为对任意  $\partial^\mu A_\mu \neq 0$  的  $A^\mu$ , 总可构造  $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$  且  $\partial^\mu \partial_\mu f = -\partial^\mu A_\mu$ , 即可有  $\partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0$ . 而  $\partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  也即电动力学中的 d'Alembert 算子  $\square$ , 和 3 维空间中的 Laplace 算子  $\nabla^2$  一样, “ $\square f = \text{常数}$ ” 的非零解不仅存在, 而且甚多.

利用  $A^\mu$  和 Lorenz 规范, 可将 Maxwell 方程组写作一条:

$$-4\pi J_\nu = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \square A_\nu. \quad (1.3.85)$$

此即 **d'Alembert 方程**. 而 Maxwell 方程的另一条  $F_{[\mu\nu, \lambda]} = 0$  自动由定义满足.

最后看最小引力耦合的情况, 并可取任意坐标系. 根据等效原理, 粒子的运动方程遵循

$$\delta \int (-m + q A_\mu U^\mu) d\tau = 0 \implies \frac{DP^\mu}{d\tau} = q F^\mu{}_\nu U^\nu, \quad (1.3.86)$$

其中注意指标升降都在  $g_{\mu\nu}$  下. 电磁场的运动方程遵循

$$\delta \int \left( -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\nu J^\nu \right) \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies \nabla_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu. \quad (1.3.87)$$

<sup>1</sup> 指丹麦物理学家 Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891). 当然它又是 Lorentz 协变的, 所以也可叫做 Lorentz 规范. 二人名字的发音相同, 容易混淆, 需要注意 Lorentz 是荷兰的物理学家, 相对论的奠基者之一.

而  $F_{\mu\nu}$  的定义和联络无挠性自动在任意坐标系给出  $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$ , 进而

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0. \quad (1.3.88)$$

便依旧有电荷守恒

$$\nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (1.3.89)$$

我们尝试写出弯曲时空中 d'Alembert 方程. 首先可用无挠性证明

$$2\nabla_{[\nu}\nabla_{\kappa]}V^\lambda = R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}V^\mu, \quad 2\nabla_{[\nu}\nabla_{\kappa]}\omega_\mu = -R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}\omega_\lambda, \quad (1.3.90)$$

数学教材也常用上式作为曲率定义. 计算时注意无挠性导致  $\nabla_{[\nu}\nabla_{\kappa]}(V^\mu\omega_\mu) = 0$ , 便可推导任意一式. 进而

$$-4\pi J_\nu = \nabla^\mu\nabla_\mu A_\nu - \nabla^\mu\nabla_\nu A_\mu = \nabla^\mu\nabla_\mu A_\nu - (\nabla_\nu\nabla^\mu A_\mu - g^{\kappa\mu}R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu}A_\lambda),$$

注意  $g^{\mu\kappa}R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -g^{\mu\kappa}R_{\mu\lambda\kappa\nu} = -R_{\lambda\nu}$ , 且 Lorenz 规范从局域惯性系出发的变换结果为  $\nabla^\mu A_\mu = 0$ , 则

$$-4\pi J_\nu = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda. \quad (1.3.91)$$

其中  $\square_g := \nabla^\mu\nabla_\mu$  称为 **Laplace-Beltrami 算子**.  $g_{\mu\nu}$  出现在克氏符中, 以上都是  $g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$  的耦合方程.

电磁场作用量对  $g^{\mu\nu}$  变分为

$$-\frac{1}{16\pi}\delta\int F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}\sqrt{-g}d^4x = -\frac{1}{8\pi}\int\left(g^{\sigma\lambda}F_{\nu\lambda}F_{\mu\sigma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}\right)\delta g^{\mu\nu}D^4x,$$

故能动张量为

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda}\right), \quad (1.3.92)$$

可计算知  $T = 0$ . 以闵氏时空举例, 电磁场在惯性系中所测得的能量密度为  $T^{00} = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$ ; 能流或动量密度为  $T^{i0} = -T_{i0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i/4\pi$ , 也即 Poynting 矢量; 动流密度或应力张量为  $T^{ij} = -(E^i E^j + B^i B^j)/4\pi + T^{00}\delta^{ij}$ . 上式的散度为

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -F_{\nu\lambda}J^\lambda. \quad (1.3.93)$$

它只在无源时守恒, 这是因为还未加上荷电系统的部分. 考虑点电荷系, 即带电  $q_n$  的质点系, 可以证明其能动张量的散度为

$$\nabla_\nu\sum_n\frac{P_n^\mu P_n^\nu}{E_n}\frac{\delta^3(x-x_n)}{\sqrt{-g}} = \sum_n q_n F^\mu{}_\lambda \frac{dx_n^\lambda}{dt}\frac{\delta^3(x-x_n)}{\sqrt{-g}} = F^\mu{}_\lambda J^\lambda. \quad (1.3.94)$$

$F^\mu{}_\lambda J^\lambda$  称为 **4-Lorentz 力密度**. 故电磁场和荷电系统的总能动张量是守恒的.

### 1.3.11 规范自由与双曲性

$g_{\mu\nu}$  的独立分量有  $\binom{4+1}{2} = 10$  个, 而仔细观察一下 Einstein 方程, 任取坐标系  $\{x\}$  把分量显式地展开, 可发现 Einstein 方程是关于  $g_{\mu\nu}(x)$  的二阶非线性偏微分方程组, 求解它需要给定边界条件. 但即使给定边界条件, 还不能完全确定  $g_{\mu\nu}$  的具体表达. 比如对于真空方程, 由于自动满足 Bianchi 恒等式  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ , 独立方程实际为  $10 - 4 = 6$  个, 不足以确定度规所有分量. 额外的自由性实际来自于广义协变性. 若  $g_{\mu\nu}(x)$  是一个解, 则可通过坐标变换  $\{x\} \rightarrow \{x'\}$  得到

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\sigma\lambda}(x(x')) \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}(x') \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}(x').$$

然而场方程是广义协变的, 因此直接用  $x$  去替换函数  $g'_{\mu\nu}(x')$  中的  $x'$ , 得到的  $g'_{\mu\nu}(x)$  本就可作为  $\{x\}$  系下  $g_{\mu\nu}(x)$  之外一个新解. 以 Schwarzschild 度规为例:

$$g_{00}(r) = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{11}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22}(r) = r^2, \quad g_{33}(r, \theta) = r^2 \sin^2 \theta.$$

其余均为零. 坐标变换由  $x'(x)$  或  $x(x')$  给出. 所谓的**各向同性坐标系**  $\{t', r', \theta', \phi'\}$  满足

$$t = t', \quad r = r' \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2, \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi'. \quad (1.3.95)$$

进而 Schwarzschild 度规表为

$$\begin{aligned} g'_{00}(r') &= -\left(\frac{1 - M/2r'}{1 + M/2r'}\right)^2, & g'_{11}(r') &= \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4, \\ g'_{22}(r') &= \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 r'^2, & g'_{33}(r', \theta') &= \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 r'^2 \sin^2 \theta'. \end{aligned}$$

直接用  $\{t, r, \theta, \phi\}$  替换, 计算出来仍有  $R_{\mu\nu} = 0$ . 总之, 即使固定坐标系, 各度规解之间只能确定到相差一个可用  $\{x\}$  系表述的函数. 虽然没有发生什么坐标变换, 但该函数的意义来自于坐标变换, 其独立个数为 4, 说明了  $g_{\mu\nu}$  自由性的来源. 完全确定  $g_{\mu\nu}$  需补充额外 4 个方程, 称为**坐标条件**, 其任务本就是消除广义协变性带来的自由度, 故当然不能是广义协变的等式.

对于有源方程, 逻辑上自然想到是给定  $T_{\mu\nu}$  后求解  $g_{\mu\nu}$ , 但实际上,  $T_{\mu\nu}$  的确切定义也需要  $g_{\mu\nu}$  给定 (比如  $U^\mu U_\mu = -1$ ). 换言之, 一般  $g_{\mu\nu}$  同时出现于  $G_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$  中. 因此整个方程的未知量除了  $g_{\mu\nu}$ , 实际上还包括描述物质场的物理量 (比如电磁场的  $F_{\mu\nu}$ ). 故 Bianchi 恒等式 (即  $T_{\mu\nu}$  无散) 并不自动满足, 而要视作额外约束. 以尘埃为例, 未知量  $g_{\mu\nu}, \rho, U^\mu$  总共有  $10 + 4 + 1 = 15$  个. 另一方面, Einstein 方程、坐标条件和 4-速归一化提供了  $10 + 4 + 1 = 15$  个独立方程.

Einstein 曾为此困扰而企图放弃广义协变性. 他提出所谓的**空穴论证** (hole argument). 设某时空区域内无物质 (空穴), 但存在由外部物质产生的引力场. 取“坐



标变换函数”在穴外为恒等变换，在穴内任意，则这说明外部确定的物质分布仍无法决定穴内引力场。关键在于勿以为二者的物理性质不同。新解  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  的实质是同一度规  $g_{\mu\nu}$  在其它坐标系下的值  $g'_{\mu\nu}$  被强行搬到现有坐标系下：

$$\begin{aligned}\text{坐标系: } & \{\{x\}, \{x'\}, \{x''\} \cdots\}, \\ \text{旧度规 } g_{\mu\nu}: & \{g_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu}, g''_{\mu\nu} \cdots\}, \\ \text{新度规 } \tilde{g}_{\mu\nu}: & \{g'_{\mu\nu}, g''_{\mu\nu}, \cdots\},\end{aligned}$$

从如上对应关系可看出，这是由广义协变性的主动观点转述造成的误解。若非要用主动观点，认为产生了新引力场，我们可以认为它们在物理上是等价的。类似于电磁学的规范自由性，这也被许多学者称为**广义相对论的规范自由性**。更通俗的理解是被动观点，直接认为二者就是同一引力场，而坐标系是冗余的。由于一开始解方程是从任意坐标系入手的，因此坐标条件可理解为是用于挑选出特定坐标系。换言之，主动观点认为坐标条件是度规的**规范固定** (gauge fixing) 条件，而被动观点认为坐标条件是约束坐标系的。

Einstein 后来也意识到坐标冗余性。由于空穴论证中假设的坐标变换只发生在真空区域中（但有引力场），因而他开始讨论时空、坐标系在无物质时的存在性。最终他提出各种可观测事件都归结为世界线的交叉点，物理理论是在预言这些交叉的分布。现在称为**点重合** (point coincidence) **原理**，物理预言在这种表述下当然不应与坐标系有关。在量子层面 Pauli 不相容似乎与之矛盾，只要将这种重合性理解为通过相互作用交换信息即可。当然，点重合其实还有更多的哲学意义未发掘，而这或许对量子引力的提出有帮助。Kretschmann 进一步提出**拓扑原理**，即物质间的关系是拓扑性质的，不要勿认为坐标系未动而产生新引力场，实质上是真实引力场、物质、时空都被一齐拖拽。在现实中看来，只是坐标系相对我们发生变动，我们自己未动。这实际上讨论的就是主被动观点的区别。

一种常见的坐标条件是

$$\square_g x^\lambda = 0 \iff g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (1.3.96)$$

展开计算可知等价性。这称为**波坐标条件**或**谐和** (harmonic) **坐标条件**，因为数学上  $\square_g f = 0$  的解  $f$  称为谐和函数。采用上述条件，可经过稍微冗长的计算发现 Einstein 方程呈  $\square_g g_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\lambda})$  的形式，其中  $N_{\mu\nu}$  是度规及其一阶导的非线性表达式。偏微分方程常见类型有椭圆型方程（如 Poisson 方程）、抛物型方程（如热传导方程）和双曲型方程（如波动方程）。考虑到 Lorentz 度规的号差，该方程组属于数学上的**拟线性** (quasilinear) **波动方程**。

方程的双曲性带来两个重要话题。第一是 Cauchy 适定问题，也即动力学问题。**适定性**是指给定适当的初值条件，必存在唯一的解。**初值条件**是指某  $t$  时刻同时面

上的  $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,t}$ . 换言之, 给定初值后, 研究场方程能否确定时空度规的未来演化. 由 Bianchi 恒等式, 可得

$$\partial_t G^{\mu 0} = -\partial_i G^{\mu i} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} G^{\mu\lambda}. \quad (1.3.97)$$

式右不含度规的三阶及更高阶时间偏导, 故  $G^{\mu 0}$  至多只含  $g_{\mu\nu,t}$ , 即  $G^{\mu 0} = \kappa T^{\mu 0}$  用以约束  $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,t}$  初值. 而动力学方程只有  $G^{ij} = \kappa T^{ij}$ , 以确定  $g_{ij,tt}$ . 最后  $g_{0\mu,tt}$  由坐标条件确定即可. 第二是引力波. Einstein 本人在 1918 年就关注到方程的波动性, 并认为存在波动解. 在以后章节中, 我们会证明其存在性, 并说明其传播速度为光速.

### 1.3.12 再谈最小耦合

等效原理给出了最小引力耦合的方式. 可以看到, 许多弯曲时空中的方程, 似乎都是将其平直情形做如下直接替换:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu, \quad d \rightarrow D,$$

故许多人将最小引力耦合理解为这种所谓的**最小替换** (minimal replacement). 但必须指出这是不一定成立的, 比如  $-4\pi J_\nu = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda$  就并非从  $\square A_\mu = -4\pi J_\mu$  直接替换. 关键在于二阶及以上的协变导数将带来曲率效应, 这不能用任何坐标系消除. 能满足广义不变性的方程是很多的, 不能冒然只做最小替换而图高枕无忧. 企图从局域惯性系转化到一般坐标系的关键在于, 导数内所作用的量全部是广义不变的张量, 显然  $\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu)$  括号内的  $\partial_\nu A_\mu$  并不满足. 在一阶导时, 可轻松保证导数作用的量是张量, 故最小替换适用. 这才是能从最小引力耦合推出最小替换的实质关键.

也有人将等效原理及其最小耦合理解为: 若一个方程在平直情形时成立, 则在弯曲情形也成立. 这也是不一定的. 的确, 协变导数在平直时空的惯性系中表为偏导数. 但曲率在平直情形直接为零, 因此加上曲率额外项的方程也将符合这句话, 比如  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \alpha \nabla_\mu (F^{\mu\nu} R) = -4\pi J^\nu$ . 但等效原理指的是, 利用局域惯性系来描述真实引力场, 这样才能排除  $\nabla_\mu (F^{\mu\nu} R)$ . 一定切记, 这些张量和协变导数的定义是从局域惯性系中, 做广义坐标变换得来.

或许有读者指出, 具有曲率项的正确方程 (如  $-4\pi J_\nu = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda$ ) 也并不在局域惯性系中退回狭义相对论. 对此, 我们进一步指出最不容易混淆的正确理解: 将最小耦合应用于一开始的作用量上. 因为作用量始终是广义不变的标量, 不涉及坐标变换等麻烦的过程, 最小耦合只是引入了协变体元  $\sqrt{-g} d^4x$ . 故其实并不需要用局域惯性系去讨论一个物理方程, 而只需要讨论最原始的作用量.

当然, 并不一定要把等效原理、最小耦合奉为教条. 若在量子理论中非要讨论诸如  $\nabla_\mu (F^{\mu\nu} R)$  的曲率项, 可认为是在量子领域适当地放弃等效原理. 但在经典理论的视角下, 这些项的数量级太小, 且目前实验精度无法达到 (尤其是微弱的曲率), 故等效原理仍被默认. 总之, 包括等效原理在内, 最终都要接受实验的考验.

## 1.4 其它引力理论

### 1.4.1 宇宙学

之前讨论的时空都是理想孤立系统，但我们有更大的野心——用时空模型来代表整个宇宙会怎样呢？观测结果建议，大尺度上宇宙是**均匀** (homogeneous) 且**各向同性的** (isotropic). 这使我们不能用非零密度  $\rho$  和常数场强  $\nabla\phi$  求解 Poisson 方程，因为在无限充斥的物质场中，试图计算某点场强时要涉及全空间体积分，而这种积分是反常的，其结果取决于有限域趋于无穷的方式. 方式不同可得到“为零”或“发散”的结果. 因此 Newton 引力论是很难发展出宇宙学的. 但广义相对论允许我们研究均匀各向同性的解及其扰动.

宇宙学的早期发展毫无疑问是 Einstein 带头. 当时占统治地位的观点是静态宇宙. 这使得 Einstein 为强行凑出静态解而修改场方程. 注意除了选择  $R$ ，还可注意  $\int \sqrt{-g} d^4x$  本身就已广义不变，故可考虑

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_M d^4x, \quad (1.4.1)$$

由于  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ ，结果是

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.4.2)$$

其中  $\Lambda$  称为**宇宙学常数** (cosmological constant). 根据具体的宇宙模型以及观测结果，可以确定其数值. 当然，在假设静态的情况下也能强行计算其值. 但现代观点自 Hubble 开始普遍认为宇宙是**膨胀的** (expanding). 比如，**FLRW 解**就是膨胀宇宙的一阶近似. 在膨胀模型下可不引入  $\Lambda$ ，故 Einstein 认为添加  $\Lambda$  是其“一生中所犯的最大错误”. 1970 年代，Hawking 证明了膨胀宇宙在时间上回溯可到达奇点，这被称为**宇宙大爆炸** (the big bang). 1990 年代的理论及观测显示，只有将  $\Lambda$  重新写进来才能解释宇宙的**加速膨胀**，其结果为  $\Lambda = 1.1056 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ . 对通常的分析，这个数值太小，远不及  $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  项的贡献，故会被忽略掉. 目前这一项被解释为**暗能量** (dark energy) 的贡献. 在量子场论中，能具备这一性质的概念只有真真空能，然而两套理论给出的  $\Lambda$  数值相差数量级很大.

### 1.4.2 Mach 原理

Newton 为了解释绝对空间的存在性，提出了所谓的**水桶实验**. 将一盛有清水的水桶静置，并用一根长绳悬吊（图中略去）使桶可以靠绳索的扭力而转动；随后，尽可能使桶很快地加速旋转至某一角速度  $\omega$  并保持. 起初，桶相对于我们旋转，但（大部分）水由于惯性仍将保持静止，并且液面是平坦的；待桶的运动通过摩擦力传导

至水，使水开始渐渐地随桶旋转，液面逐渐凹陷. 在某个时刻，水和桶都将以  $\omega$  旋转，即相对静止，液面凹陷呈抛物面状——用等势面可算出液面方程在柱坐标系下为  $z = \omega^2 r^2 / 2|g|$ ；尽可能很快地停止旋转，这个时候水由于惯性仍然要旋转一会儿才会静止，液面仍然凹陷. 虽说本质是思想实验，但其可行性还是挺大的：Newton 本人就声称“已经做过实验”，并对该结果表示肯定. 什么原因使液面凹陷？从经验

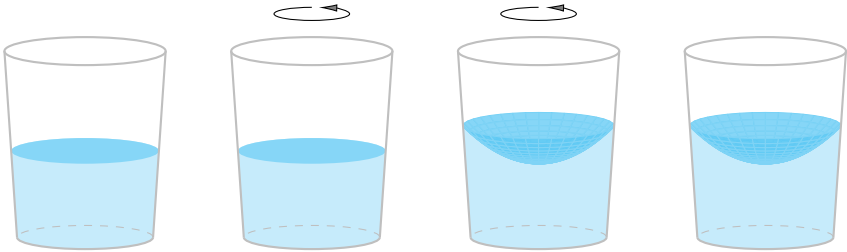


图 1.18: 水桶实验

中知道是水在相对于某个参考系旋转，进而产生了离心作用，但这个参考系是谁呢？起初水相对于环绕它的桶在旋转，随后水与桶一同旋转而相对静止的，但液面是凹陷的. 因此，产生凹陷的旋转不是相对于水桶的旋转. Newton 认为这是相对于绝对空间的旋转. 水面的凹陷是水的绝对运动的效果，通过凹陷程度可以测得其“绝对角速度”. Newton 认为如果水在其中旋转会凹陷，则这个参考系就是绝对空间.

19 世纪末，Mach 提出水并非相对于某种绝对介质旋转，而是相对于宇宙的全部物质组分，即星空背景. 水凹陷是水的惯性效果，故 Mach 认为惯性需要在物质的相对运动中体现，或者物体惯性受到周围物质分布的影响. 这称为 **Mach 原理**，尽管是一条模糊的定性描述. 准确地说，Mach 将桶参考系中所出现的惯性力理解为一种星空背景对水的作用，作用的强度体现为物体惯性，其大小与周围星空背景的质量及相对加速有关. 比如，若周围物质很稀疏，就很难找到参照来判断一颗弹性球是否旋转，那么即使其旋转起来也不会形变. 这似乎与引力很相似，但在实验上很难验证. 因为反之需要加速周遭极大量的物质，绕着水桶旋转并观察水是否凹陷，尽管似乎直觉上应产生同样效果.

Einstein 也曾受到这一原理的启发，而去寻找惯性和引力的关系，最后抓住了等效原理. 但实际上，等效原理给出的是新答案，即水是相对于局域惯性系运动. 换言之，广义相对论已通过等效原理回答了这一问题. Einstein 起初以为广义相对论符合 Mach 原理，但现在看来显然不符合. 且当代观点更多认为 Mach 原理至少在现有实验条件下是错误的. 相反，等效原理受到支持的验证就多得多. 若非要认为惯性起源于相互作用的话，由于局域惯性系是由外引力场决定的，因此可认为凹陷现象是水和引力场之间的互动造就的. 但这其实涉及**惯性起源**这一非常深刻的话题，人类其

实至今未能解决. 目前用广义相对论回答“怎么办”是完全可行的, 而“为什么”则是留给科学哲学.

1960 年代, Brans 和 Dicke [3] 提出了一个接近 Mach 原理愿景的引力理论. 首先注意, 在地球的某个自由落体电梯中, 等效原理解释是电梯与乘客加速度一致, 而 Mach 原理解释是乘客的地球引力与星空背景的作用抵消. Newton 理论给出的地球引力为  $a = Gm/r^2$ . 假设星空背景有某种宇观质量  $M$  和半径  $R$ , 并施加相同  $a$ , 根据量纲分析可知数量级上  $\frac{Gm}{r^2} \sim \frac{Rm}{Mr^2}$  (取几何制), 因此  $\frac{1}{G} \sim \frac{M}{R}$ . 一种理解是  $\frac{M}{R}$  由理论给出, 而质量分布由广义相对论场方程的某个边界条件给出. 还有一种是局部观察的  $G$  (或场源质量) 是随时空点变化的, 其值由附近的质量分布决定. 假设  $G$  是某个标量场的函数. 首先想到 Ricci 标量, 但它含有度规一阶导, 随着与场源距离  $r$  的增大, 它比  $1/r$  减小得还快. 这种标量主要由附近质量分布决定, 而非远处物质. 因此, 我们需要一个独立于度规以外的新标量场  $\phi$ , 但二者都用于描述引力场. 假设理论是线性的, 则前文表明乘客的惯性力贡献应是引力常数的倒数, 即  $\phi \sim \frac{1}{G}$ . 进而自由引力场加上标量场的作用量为

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left( \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.4.3)$$

其中  $\omega$  是耦合参数,  $\frac{\omega}{\phi}$  是为了使  $\omega$  无量纲, 并且还引入了  $\Lambda(\phi)$  代表可变的宇宙学常数. 这就是**标量-张量理论**. 准确地说, 是  $\phi$  的平均值  $\langle \phi \rangle$  象征  $1/G$ .

先对  $g^{\mu\nu}$  变分, 则

$$\begin{aligned} 16\pi \delta S = & \int \phi (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) D^4x + \int \Lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} D^4x \\ & - \int \frac{\omega}{\phi} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) \delta g^{\mu\nu} D^4x, \end{aligned}$$

重点关注其中  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]})$ . 由于乘了  $\phi$ , 不能直接当做边界项丢掉, 而要进一步用  $\delta g^{\mu\nu}$  表示克氏符变分. 直接用协变导数  $\partial_\mu g^{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g^{\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g^{\nu\sigma} = 0$  计算出克氏符. 变分有  $\nabla_\mu \delta g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + g^{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ . 用  $g^{\kappa\mu}$  升指标, 进行  $\kappa, \sigma, \lambda$  轮换后加减消项, 再缩并移项就有

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\frac{1}{2} (g_{\kappa\mu} \nabla_\nu \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\kappa\nu} \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\kappa} \nabla^\lambda \delta g^{\sigma\kappa}). \quad (1.4.4)$$

进而与  $g^{\mu\nu}$  缩并再取反称有

$$2g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]} = g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta g^{\mu\lambda}, \quad (1.4.5)$$

将该结果用于分部积分：

$$\begin{aligned}
 2 \int \phi \nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]}) D^4 x &\simeq -2 \int g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]} \nabla_\lambda \phi D^4 x \\
 &= - \int (g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\lambda \phi - \nabla_\mu (\delta g^{\mu\lambda}) \nabla_\lambda \phi) D^4 x \\
 &\simeq \int (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi - \delta g^{\mu\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda \phi) D^4 x \\
 &= \int (g_{\mu\nu} \square_g \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} D^4 x.
 \end{aligned}$$

故引入物质场后的结果为

$$G_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\phi} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square_g \phi), \quad (1.4.6)$$

并注意其迹为

$$-R + 4 \frac{\Lambda}{\phi} = \frac{8\pi}{\phi} T - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{3}{\phi} \square_g \phi. \quad (1.4.7)$$

再对  $\phi$  变分：

$$16\pi \delta S = \int \left( R - 2 \frac{d\Lambda}{d\phi} \right) \delta \phi D^4 x - \int \left( \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{d\omega}{d\phi} \delta \phi + \omega \delta \left( \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \right) D^4 x,$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int \delta \left( \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) D^4 x &= \int \left( -\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi + \frac{2}{\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \delta \phi \right) D^4 x \\
 &\simeq \int \left( -\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi - 2 \nabla_\mu \left( \partial^\mu \phi \frac{1}{\phi} \right) \delta \phi \right) D^4 x \\
 &= \int \left( -\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi - \frac{2}{\phi} \square_g \phi \delta \phi + \frac{2}{\phi^2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \delta \phi \right) D^4 x \\
 &= \int \left( \frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{2}{\phi} \square_g \phi \right) \delta \phi D^4 x.
 \end{aligned}$$

进而

$$R - 2 \frac{d\Lambda}{d\phi} - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square_g \phi = 0.$$

利用 (1.4.7) 式替换掉  $R$  可得

$$(3 + 2\omega) \square_g \phi + 4\Lambda - 2\phi \frac{d\Lambda}{d\phi} - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{d\omega}{d\phi} = 8\pi T. \quad (1.4.8)$$

具体地，考虑  $d\omega/d\phi = 0$  和  $\Lambda = 0$ ，则

$$S_G = -\frac{1}{16\pi} \int (\phi R - \omega \phi^{-1} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1.4.9)$$

进而

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square_g \phi), \quad (1.4.10)$$

$$\square_g \phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T. \quad (1.4.11)$$

这就是 **Brans-Dicke 理论**. 可见若  $\omega \rightarrow \infty$ , 则  $\phi$  没有贡献, 退回广义相对论. 根据论文 [4] 的结果, 从 Schwarzschild 解的角度来看, 对于非常大的  $\omega$ , 那么现有实验精度下, 广义相对论和 Brans-Dicke 理论就已不可分辨. 既然如此就选择广义相对论. 截止到 2003 年, 飞往土星的 Cassini 飞船的 Doppler 跟踪 (tracking) [5] 的测量结果为  $\omega > 40000$ , 即目前观测还是更倾向于广义相对论.

### 1.4.3 量子引力

量子理论会考虑各种修正. 一个涉及宇宙暴胀的理论是  $f(R)$  **理论**, 其中自由引力场的作用量为

$$S = \int f(R) \sqrt{-g} d^4 x. \quad (1.4.12)$$

记标量场  $f_R := df(R)/dR$ . 对其变分有

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left( f_R \delta R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) D^4 x \\ &= \int \left( f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} D^4 x + 2 \int f_R \nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]}) D^4 x \\ &= \int \left( f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square_g f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R \right) \delta g^{\mu\nu} D^4 x, \end{aligned}$$

加上物质场的贡献, 最终结果为

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square_g f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.4.13)$$

可以证明,  $f(R)$  的作用实际上相当于引入额外标量场. 我们以后再谈细节.

还可考虑  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\sigma\kappa} R^{\mu\nu\sigma\kappa}$  等 **Gauss-Bonnet 项**:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4 x + \int (\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \beta R^2 + \gamma R_{\mu\nu\sigma\kappa} R^{\mu\nu\sigma\kappa} + \cdots) \sqrt{-g} d^4 x \\ &+ \int \left( -\frac{1}{2} (1 + \gamma R) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) + \cdots \right) \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

甚至包括更高阶导数, 其中耦合强度都是  $\hbar$  量级的极小值, 第三项是由某个标量场  $\phi$  充当的物质耦合项. 一般在日常尺度下可不考虑量子效应.

还可考虑有挠时空,  $g_{\mu\nu}, T^\lambda_{\mu\nu}$  一齐作为引力场的基本物理量. 这种理论发展为 **引力规范理论**, 典型地如 **Einstein-Cartan 理论**. 这些理论多采用了更为数学、但

实质等价于  $g_{\mu\nu}, T^\lambda_{\mu\nu}$  形式的语言, 故暂时只扼要介绍. 其中 2 阶情形的最一般的规范理论作用量为

$$\begin{aligned}
 S_G = - \int \left( \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + a_1 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + a_2 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \\
 \left. + a_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\mu\beta\nu} + b_1 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + b_2 R_{\alpha\beta} R^{\beta\alpha} \right. \\
 \left. + c_1 T_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha\beta\gamma} + c_2 T_{\alpha\beta\gamma} T^{\beta\gamma\alpha} + c_3 T^\beta_{\alpha\beta} T_\gamma{}^{\gamma\alpha} \right) D^4 x.
 \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

其中  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  是一般的有挠 **Riemann 曲率**, 前一对指标与后一对指标没有对称性, 前一对指标也没有反称性. 但 Ricci 张量仍按  $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$  定义. 其中的指标升降均在  $g_{\mu\nu}$  下.

我们甚至不排除更高维时空的存在. 通常, 我们会考虑给 4 维时空补充更多的空间维度, 将 4 维中的相互作用视作高维物理过程的效果, 且这若干维度会蜷缩起来, 剩下我们经验中看到的维度. 比如, 曾经 Einstein 企图用同一套几何来描述经典引力和经典电磁作用, 而提出统一场论的概念. 后来, **Kaluza-Klein 理论** 通过 5 维时空及其对称性部分解释了引力和电磁力的来源. Wheeler 对此表示“几何动力学”拓展到其它相互作用是有希望的. 20 世纪末, **弦论** (string theory) 继承了高维几何的衣钵, 利用极小对象“弦”部分地得到了广义相对论、量子场论的结果. 此外还有企图构建背景无关量子场论的**圈量子引力** (loop quantum gravity)、研究非交换几何的 **CLCB 理论**, 它们皆只部分地回答了量子引力的疑难. 目前前沿话题还包括引力同统计物理、信息论的联系, 诸如**熵力理论**、**黑洞信息学**, 以及受场论和凝聚态影响的**超对称理论**. 人们还提出了许多理论, 我们以后再详细学习.

引力是目前已知相互作用中最弱的. 两个质子之间的静电斥力比它们之间的引力大  $1.2 \times 10^{36}$  倍. 这意味着即使各种量子引力理论层出不穷, 但以当代技术, 仍然很难直接做实验以获取有效数据. 目前多用宇宙学观测所得到早期宇宙的数据来筛选理论. “大一统理论”通常指沿标准模型的思路, 将强相互作用同电弱作用统一的尝试. 狭义上的量子引力理论只涉足引力量子化问题, 广义的量子引力理论或许是人们所希望的“万物理论”.

## 1.5 推导 Lorentz 变换 \*

本节旨在补上任意 Lorentz 变换的代数证明. 由于重点只在矩阵的行列指标, 故本节将上标都写作下标以简化运算.

根据相对性原理, 对  $\Lambda$  的分类同样适用于相应  $\Lambda^{-1}$ . 当然, 亦可直接证明之. 注意  $|\Lambda^{-1}| = |\Lambda|^{-1}$ , 我们只需证明  $(\Lambda^{-1})_{00} = \Lambda_{00}$ . 欲用  $\Lambda$  表示  $\Lambda^{-1}$ . 由式 (1.2.11) 有

$$\eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})_{\mu\sigma} = \eta_{\sigma\lambda} \Lambda_{\lambda\nu}, \tag{1.5.1}$$



进而

$$(\Lambda^{-1})_{\lambda\sigma} = \eta_{\mu\sigma} \Lambda_{\mu\nu} \eta_{\nu\lambda}. \quad (1.5.2)$$

此即用  $\Lambda$  表示  $\Lambda^{-1}$  的方法, 取其  $\sigma = \lambda = 0$  就有  $(\Lambda^{-1})_{00} = \Lambda_{00} = (\Lambda^T)_{00}$ .

下面用  $\{x\}, \{x'\}$  的相对速度表示 Lorentz 变换. 我们说  $S'$  系相对于  $S$  的速度是  $u_i = dx_i/dt$ , 是指  $S'$  任意的相对静止的世界线在  $S$  下测得的速度分量都是  $u_i$ . 显然这等价于研究  $S'$  系的空间原点运动. 反之, 设  $S$  系的空间原点在  $S'$  下测得  $u'_i = dx'_i/dt'$ . 先考虑  $S'$  的空间原点, 其世界线始终满足  $dx'_i = 0$ , 则  $dx_\lambda = (\Lambda^{-1})_{\lambda 0} dx'_0$ , 故  $\Lambda_{00} = (\Lambda^{-1})_{00} = dt/dt'$ ,  $(\Lambda^{-1})_{i0} = u_i dt/dt'$ , 据式 (1.5.1) 有  $\eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})_{\mu\sigma} (\Lambda^{-1})_{\nu\lambda} = \eta_{\sigma\lambda}$ , 取  $\sigma = \lambda = 0$  有  $(\Lambda_{00})^2 = 1 + \delta_{ij} (\Lambda^{-1})_{i0} (\Lambda^{-1})_{j0}$ . 再结合正时条件有  $\Lambda_{00} = (\Lambda^{-1})_{00} = \gamma$ , 以及  $(\Lambda^{-1})_{i0} = \gamma u_i$ , 其中  $u := \sqrt{u_i u_i}$ . 再考虑  $S$  的空间原点, 类似地有  $\Lambda_{00} = dt'/dt$ ,  $\Lambda_{i0} = u'_i dt'/dt = \gamma u'_i$ , 以及

$$u'_i u'_i = u_i u_i = u^2. \quad (1.5.3)$$

这看似是显然的, 但现在要作为经过证明的结论. 不过, 这是用  $u'_i$  表示  $\Lambda$ , 固然渴望用  $u_i$  直接表示. 对 (1.5.2) 其余  $\sigma, \lambda$  值讨论有  $(\Lambda^{-1})_{i0} = -\Lambda_{0i}$ ,  $(\Lambda^{-1})_{0i} = -\Lambda_{i0}$ , 以及  $(\Lambda^{-1})_{ij} = (\Lambda^T)_{ij}$ . 可得  $\Lambda_{0i} = (\Lambda^T)_{i0} = -\gamma u_i$ .

还差  $\Lambda_{i0}, \Lambda_{ij}$ . 尝试用  $u_i$  表示  $u'_i$ . 取 (1.2.11) 式  $\sigma = 0, \lambda = k$  (反之亦可), 有

$$\delta_{ij} \Lambda_{i0} \Lambda_{jk} = \Lambda_{00} \Lambda_{0k} \implies \Lambda_{jk} u'_j = -\gamma u_k. \quad (1.5.4)$$

同理取  $\eta_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma\mu} \Lambda_{\lambda\nu} = \eta_{\sigma\lambda}$  的  $\sigma = 0, \lambda = k$  有

$$\Lambda_{kj} u_j = -\gamma u'_k. \quad (1.5.5)$$

故只需关注  $\Lambda_{ij}$ . 对此更直观表示方法是利用空间旋转矩阵  $R$ . 若两个坐标系仅差一个旋转变换, 则二者仍是相对静止的, 相对论的动力学效应不会体现. boost 变换实质就是指这类允许有任意方向相对速度的 Lorentz 变换, 但保持空间坐标轴相互平行. 此前我们只给了保持  $y' = y, z' = z$  的特殊情形. boost 变换是“时空旋转”, 故任意 Lorentz 变换应可表为一个 boost 变换和一个空间旋转的复合 (因此不一定有  $u_i = -u'_i$ ). 为找到  $R$ , 注意总可假设  $R_{ij} =: \Lambda_{ij} + S_{ij}$ , 其中  $\Lambda_{ij}$  的符号取正是为迎合固有条件. 由于  $R_{ij}$  满足

$$\delta_{ik} R_{ij} R_{kl} = \delta_{jl}, \quad R_{ij} u_j = -u'_i, \quad R_{ij} u'_i = -u_j. \quad (1.5.6)$$

取 (1.2.11) 式  $\sigma = j, \lambda = l$  有  $\delta_{ik} \Lambda_{ij} \Lambda_{kl} = \delta_{jl} + \gamma^2 u_j u_l$ , 结合式 (1.5.4), (1.5.5) 以及上式, 经过一些繁琐计算后可得  $S_{ij} = \frac{\gamma-1}{u^2} u'_i u_j$ , 综上任意 Lorentz 变换可表为

$$\Lambda_{00} = \gamma, \quad \Lambda_{0i} = -\gamma u_i, \quad \Lambda_{i0} = -\gamma R_{ij} u_j, \quad \Lambda_{ij} = R_{ij} + \frac{\gamma-1}{u^2} R_{ik} u_k u_j. \quad (1.5.7)$$

取  $R_{ij} = \delta_{ij}$  就可得任意 boost 变换

$$\Lambda_{00} = \gamma, \quad \Lambda_{0i} = \Lambda_{i0} = -\gamma u_i, \quad \Lambda_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\gamma - 1}{u^2} u_i u_j. \quad (1.5.8)$$

再令  $u_2 = u_3 = 0$  就有  $\Lambda_{11} = \Lambda_{00} = \gamma, \Lambda_{01} = \Lambda_{10} = -\gamma u_1$ , 即二维 boost 变换.

## 1.6 单位制转换 \*

物理学是关乎实验测量的学科, 讨论物理量的单位是极为重要的. 在国际制 (SI) 中, 我们认为时间、空间乃不同物理量, 自然不会谈及 “1s 等于多少 m” 这种看似奇怪的问题. 但在相对论中, 这个问题很有意义, 因为时空乃统一的概念. 考虑令  $c = 1$  使  $x^0 = t$ , 国际制下  $c$  近似为  $3 \times 10^8$  m/s, 故这件事相当于

$$1 \text{ s} = 3 \times 10^8 \text{ m}.$$

这不会与国际制有任何冲突, 因为在国际制中不会谈及 “1s 等于多少 m” 这种问题. 这是国际制中一个可以利用的自由度. 引力理论常涉及引力常量, 把它们的数值都取为 1, 即

$$c = G = 1, \quad (1.6.1)$$

可简化大量公式的书写, 这就是**几何单位制** (system of geometrized units), 简称**几何制** (SG). 在国际制中  $G$  近似等于  $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg})$ , 因此该操作相当于

$$1 \text{ kg} = \frac{6.67 \times 10^{-11}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ m},$$

可见这利用的是国际制的另一自由度. 几何制便统一了长度、质量和时间的量纲. 不涉及引力的量子理论经常使用如下的**自然单位制** (system of natural units), 简称**自然制** (SN):

$$c = \hbar = 1, \quad (1.6.2)$$

这里  $\hbar$  在国际制中近似等于  $6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ . 然而在计算物理量的数值时几何制就不再方便, 因此我们要研究物理量、物理公式如何从几何制转换到其它单位制. 一般来讲, 所研究物理量在当前单位制是带上量纲的. 比如, 几何制下粒子物理常用 eV 作为质量单位, 因为质能方程在几何制下统一了质量和能量量纲. 欲将质量单位从几何制还原为国际制, 无非是在问 eV 等于多少 kg. 首先都转化到常用单位来, 即

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

代入几何制定义有

$$1 \text{ eV} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg}.$$

若所研究物理量在当前单位制只是一个无量纲数, 则有可能它在其它单位制中有无量纲. 比如定义直接告诉我们  $c$  在几何制中无量纲. “真正无量纲”的量在任何单位制下都无量纲, 因此不受单位转换的影响, 如精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

代入自然制定义得  $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1/137$ , 这说明兼容自然制和精细结构常数的同时仍有自由度可利用. 令

$$c = \hbar = \epsilon_0 = 1, \quad (1.6.3)$$

因而  $e = \sqrt{4\pi/137}$ . 由  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  得  $\mu_0 = 1$ . 如上规定就称为 **Heaviside-Lorentz 单位制**, 简称 **HL 制** (SHL), 其下不用再写出 Maxwell 方程中的常数. 几何制和自然制还可共同构成 **Planck 制** (SP), 这在量子引力理论中用得更多. 广义相对论常一齐使用几何制和 **Gauss 单位制**, 以便于引力和电磁学理论的书写:

$$c = G = 4\pi\epsilon_0 = 1, \quad (1.6.4)$$

统称**几何 Gauss 制**. 其中  $\epsilon_0$  是真空介电常数 (vacuum permittivity). 进而根据光速  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  可知真空磁导率 (vacuum permeability) 为  $\mu_0 = 4\pi$ .

当研究物理公式在不同单位制的转换时, 最便捷的做法不是如上这样分析单位, 而是分析量纲, 即根据量纲补充缺失的常数. 比如, 在几何制下的 Schwarzschild 度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

欲转换为国际制. 注意几何制的定义是  $c = G = 1$ , 使时间  $[T]$ 、长度  $[L]$ 、质量  $[M]$  为相同量纲, 这也是与国际制仅有的差距. 我们只需在国际制下分析量纲, 然后补上  $c, G$  即可.  $c$  的国际制量纲为  $[T]^{-1}[L]$ .  $G$  的国际制量纲为  $[T]^{-2}[L]^3[M]^{-1}$ . 研究系数  $g_{11}$ , 它在国际制无量纲.  $\frac{M}{r}G^\alpha c^\beta$  的量纲为  $[T]^{-2\alpha-\beta}[L]^{3\alpha+\beta-1}[M]^{1-\alpha}$ . 因此

$$-2\alpha - \beta = 3\alpha + \beta - 1 = 1 - \alpha = 0 \implies \alpha = 1, \beta = -2.$$

$g_{00}$  同理, 故可得

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

用相同方法可得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad U^\mu U_\mu = -c^2, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}, \quad \dots$$

方法皆完全相同. 其中注意  $[\epsilon_0] = [T]^4[L]^{-3}[M]^{-1}[I]^2$  ( $[I]$  为电流量纲), 而从几何 Gauss 制到国际制的过程是补充  $c, G, 4\pi\epsilon_0$ . 再通常将  $c$  去掉而引入  $\mu_0 = 1/c^2\epsilon_0$ .

另外，有必要说明这样一种思想：有别于传统认知，物理公式应当视作“数”的公式而非“量”的公式。具体细节放入附录 A 中。简单来说，正如定义  $x^0 = ct$  一样，定义新单位制下某个物理量为旧单位制中的对应物理量乘以相应常数，这样物理方程中就再也不会出现该常数，因为它全部被收进了新定义里，比如，将  $G$  收进场源质量里，并不影响其它任何物理量的计算；重新定义  $t' = ct$ ，其单位同距离单位彻底一致，时间和距离“共享”同一单位，因而  $c = 1$  是真正的“数”。不过从单位转换的角度看，这些数据并不需要收进任何一个物理量中，而是直接收进单位的相对关系里。

# 参考文献

- [1] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, 1687, Eng: *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (California, University of California Press, 1999). (document), 1
- [2] Einstein A. et al. (1958) *The Principle of Relativity*. New York: Dover. 1.2.2
- [3] Brans C. H, Dicke R. H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Phys. Rev., 1961, 124: 925-935. 1.4.2
- [4] Bhabra A, Sarkar K. *On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory*. Gen. Rel. Grav., 2005, 37: 2189-2199. 1.4.2
- [5] Will C M. *The confrontation between general relativity and experiment living*. Rev. Rel., 2014, 17: 4. 1.4.2
- [6] Will, Clifford M. 2018. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [7] Ohanian H C, Ruffini R. 2013. *Gravitation and Spacetime*(3rd Edition). Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Weinberg S. 1971. *Gravitation and Cosmology(Principles and Applications of the General Theory of Relativity)*, WILEY.

