Sweepline Algorithmen - Linienschnitte

Paul Jungeblut

2. Juli 2014

Sweepline - Was ist das?

Sweepline

- Häufige Methode zum Lösen geometrischer Probleme
- Gesamte Ebene wird mit einer Linie gescannt (Scanline)
- Nur an bestimmten, wichtigen Punkten (Events) muss etwas getan werden

Beispiele

- Graham-Scan, Sweepline scannt um einen Punkt rotierend
- Closest-Pair, klassisch

Problemstellung

Aufgabe

- n Strecken in der Ebene, jeweils gegeben durch die beiden Endpunkte
- **Aufgabe:** Finde alle Schnittpunkte

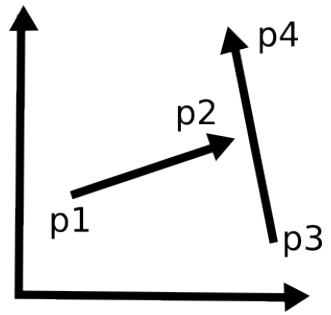
Vereinfachungen

- keine zwei End-/Schnittpunkte haben die gleiche x-Koordinate
- kein Endpunkt liegt auf einer anderen Strecke
- max. 2 Strecken schneiden sich in einem Punkt

Naiver Ansatz

Erinnerung

$$Schnitt(p_1, p_2, p_3, p_4) = ccw(p_1, p_2, p_3) \cdot ccw(p_1, p_2, p_4) \leq 0 \wedge ccw(p_3, p_4, p_1) \cdot ccw(p_3, p_4, p_2) \leq 0$$



Algorithmus

- Teste für je zwei Strecken, ob sie sich schneiden
- Berechne Schnittpunkt (LGS)
- Laufzeit: $O\left(n^2\right)$

Bentley–Ottmann Algorithmus

Idee

- Lasse Sweepline L von links nach rechts über die Ebene laufen.
- Zu jedem Zeitpunkt schneidet S eine Teilmenge der Strecken. Die vertikale Anordnung verändert sich dabei nur bei einem Schnittpunkt.
- Events sind
  - noch nicht gescannte Endpunkte
  - Schnittpunkte von Strecken, die in der vertikalen Anordnung nebeneinander liegen

Bentley–Ottmann Algorithmus

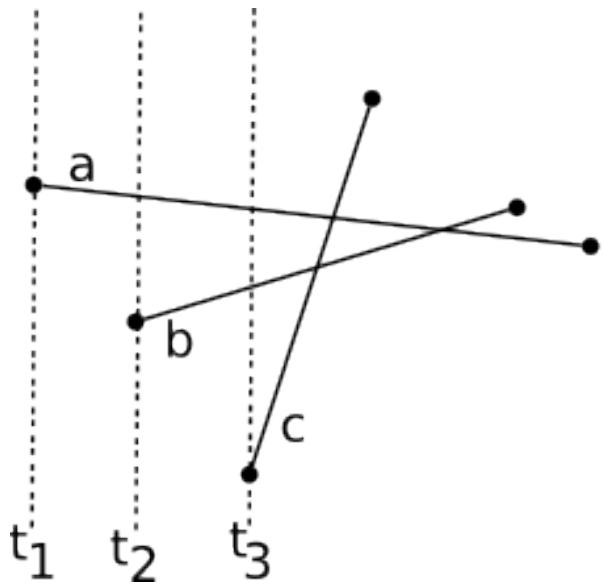
Algorithmus - Initialisierung

1. Erstelle Priority Queue pq für zukünftige Events, priorisiert nach x-Koordinate. pq enthält zu Beginn alle Endpunkte.
2. Erstelle Set T für vertikale Anordnung der Schnittpunkte zwischen den Strecken und der Sweepline. Sortierung nach y-Koordinate. Zu Beginn leer.
3. Solange pq nicht leer ist, entferne erstes Element aus pq. 3 Fälle treten auf:

Bentley–Ottmann Algorithmus

Linker Endpunkt einer Strecke s:

- Füge s in T ein.
- Suche Strecken r und t direkt über und unter s. Falls ihr Schnittpunkt als Event in pq liegt, entferne ihn.
- Falls s die Strecken r oder s schneidet, füge die Schnittpunkte in pq ein.

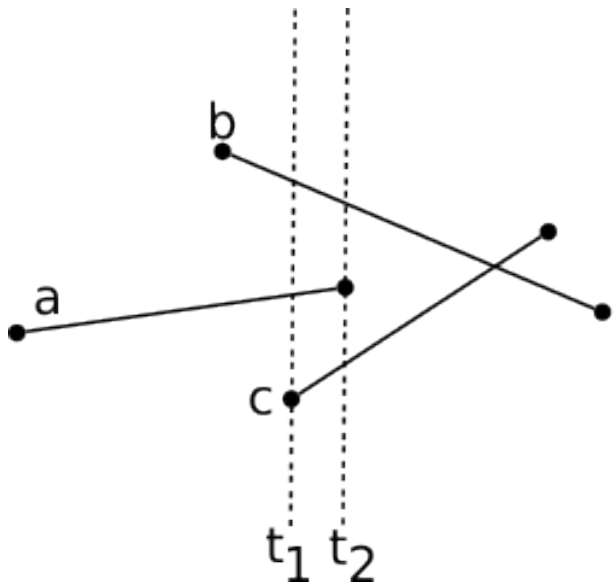


	t_1	t_2	t_3
T	a	a,b	a,b,c
pq	b1,c1, c2,b2, a1	c1,c2, ab,b2, a2	cb,c2, b2,a2

Bentley–Ottmann Algorithmus

Rechter Endpunkt einer Strecke s:

- Suche Strecken r und t direkt über und unter s. Falls sie sich noch schneiden, füge Schnittpunkt zu pq hinzu.
- Entferne s aus T.

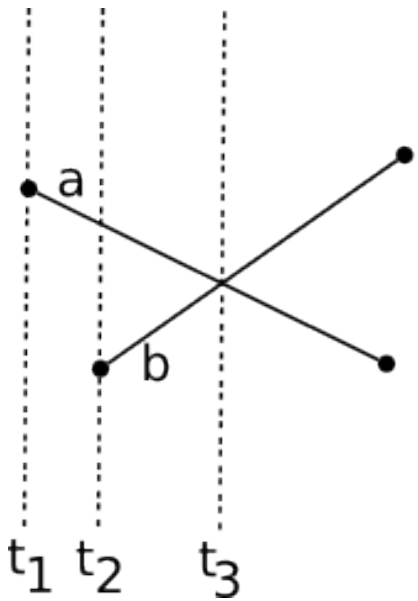


	t_1	t_2
T	b,a,c	b,c
pq	a2,c2, b2	bc,c2, b2

Bentley–Ottmann Algorithmus

Schnittpunk zweier Strecken s, t:

- Tausche Positionen von s und t in T.
- Finde Strecken o und u darüber und darunter. Entferne Schnittpunkte mit diesen, füge neue ein.



	t_1	t_2	t_3
T	a	a,b	b,a
pq	b1,ab, a2,b2	ab,a2, b2	a2,b2