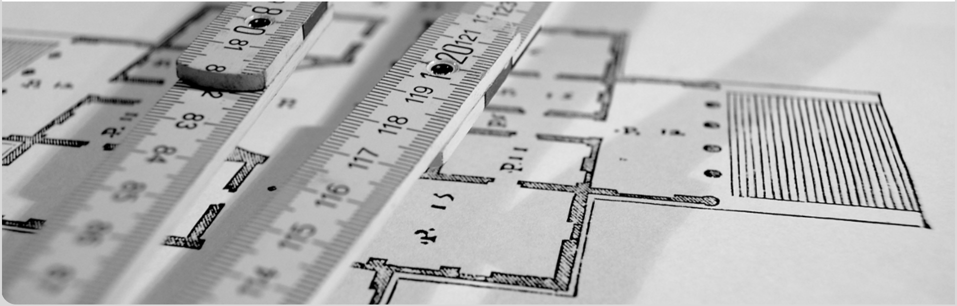
Karlsruher Institut für Technologie

Geometrie 2 - ICPC Praktikum SS14

29. Juni 2014

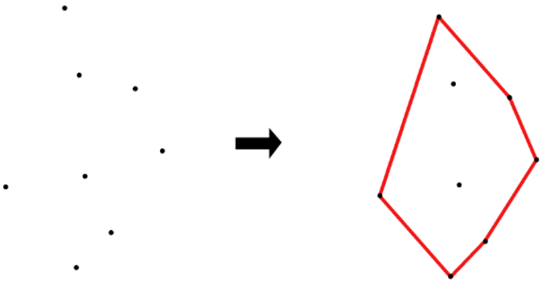
TOBIAS HORNBERGER · PAUL JUNGEBLUT · LENA WINTER



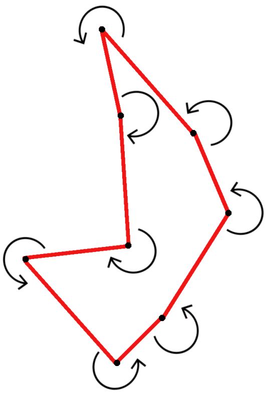
Problemstellung: Konvexe Hülle

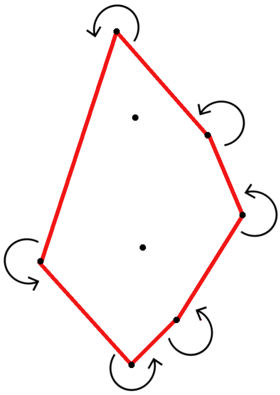
Problem

Gegeben sei eine Menge M von Punkten in der Ebene. Die konvexe Hülle von M ist die kleinste konvexe Menge, in der M enthalten ist.



Hüllen





Fazit

Konvexe Hüllen haben nur links Abbiegungen.

Idee: Graham Scan

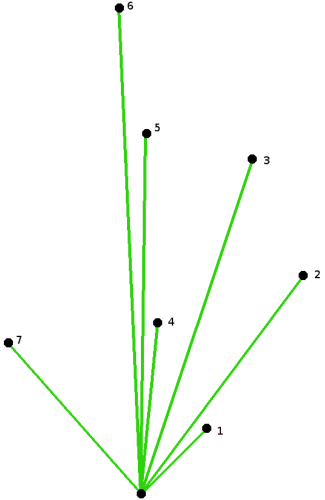
- Bestimme den untersten Punkt P_0
- Sortiere die Punkte nach Winkel relativ zu P_0
- Füge den Punkt mit dem größten Winkel der konvexen Hülle hinzu
- Nimm nun jeweils den Punkt mit dem kleinsten Winkel und überprüfe mit CCW:
  - liegt er links des Vektors $P_{k-1}\ P_k$ füge ihn der konvexen Hülle hinzu
  - liegt er rechts so entferne solange Punkte aus der Konvexen Hülle bis er links des letzten Vektors liegt
- Wurden alle Punkte betrachtet so hat man die konvexe Hülle gefunden.

Idee: Graham Scan

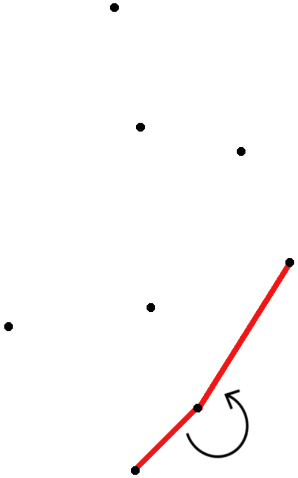
Sonderfälle

- Liegen drei Punkte auf einer Linie wird das als Linksknick interpretiert
- Haben zwei Punkte den gleichen Winkel so werden Sie lexikographisch sortiert.

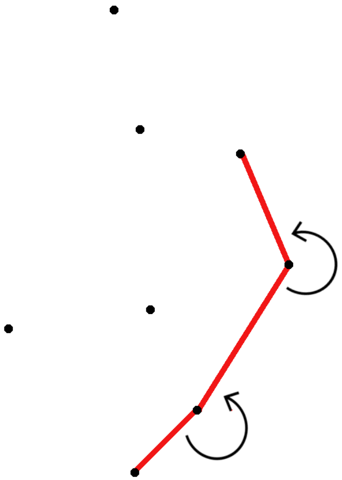
Beispiel



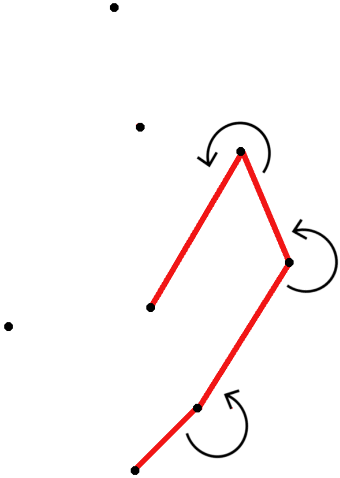
Beispiel



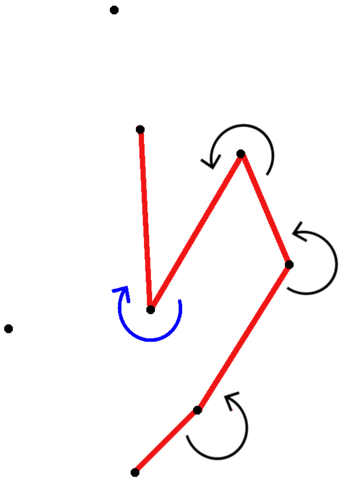
Beispiel



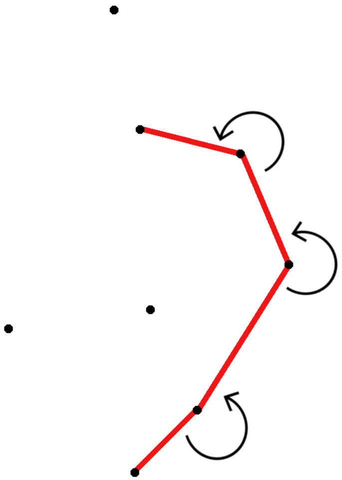
Beispiel



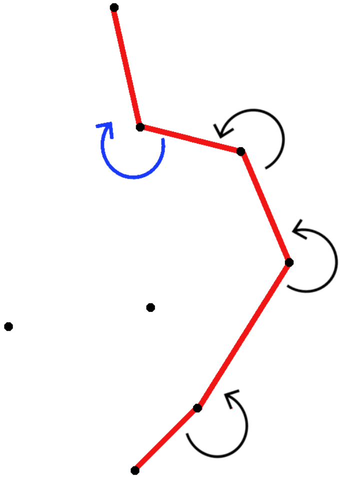
Beispiel



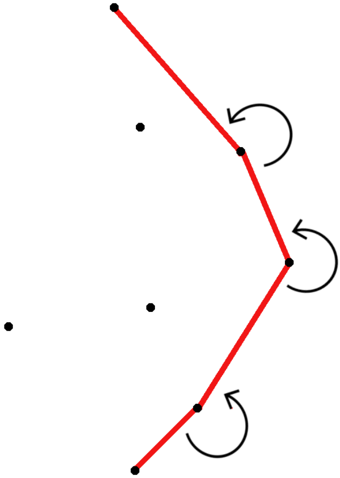
Beispiel



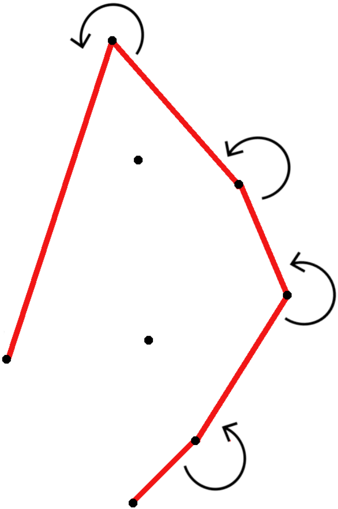
Beispiel



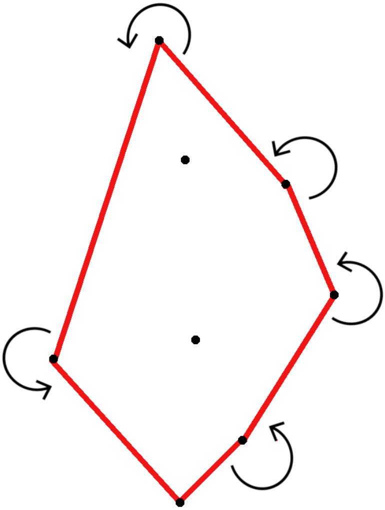
Beispiel



Beispiel



Beispiel



Problemstellung: Closed Pair

Geben: n Punkte auf einer Ebene
Gesucht: die beiden am nähesten zusammenliegenden Punkte

Naiver Ansatz

Mit Vollständiger Suche.

Alle Distanzen zwischen allen möglichen Punktpaaren ausrechnen und davon das Minimum wählen.
Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$

Idee: Divide and Conquer

Statt Vollständiger Suche: Divide & Conquer für eine Lösung in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit.

1. **Divide**:
   Sortieren der Punkte (Primär x-Koordinate, sekundär y-Koordinate).
   Aufteilen der Punktmenge in zwei Hälften
2. **Conquer**:
   Größe der Punktmengen:
   - $|\text{Punktmenge}| = 1$, return ∞
   - $|\text{PunktMenge}| = 2$, return Euklidische Distanz der beiden Punkte
3. **Combine**:
   Sei d_1 die kleinste Distanz innerhalb der Punktmenge A_1.
   Sei d_2 die kleinste Distanz innerhalb der Punktmenge A_2.
   Sei d_3 die kleinste Distanz von 2 Punkte aus jeweils A_1 und A_2.
   $\rightarrow$ Die kleinste Distanz innerhalb $A_1 \cup A_2$ ist $\min(s_1, s_2, s_3)$

Combine

Naiver Ansatz für Combine immer noch in Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Optimierbar!

Sei $d' = \min(d_1, d_2)$.

Für jeden Punkt in der unteren Punktmenge kann der nähere Punkt nur in einem Rechteck mit Breite d'und Höhe $2 * d'$ liegen

Beweisbar

Es gibt maximal 6 solche Punkte im Rechteck.

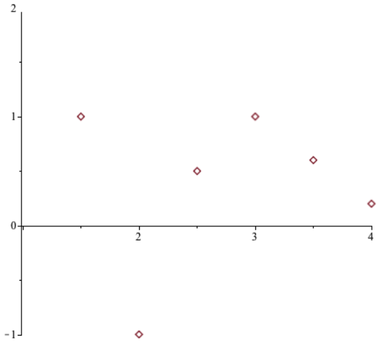
Ohne Beweis

$\Rightarrow$ Maximal $\mathcal{O}(6n)$ Operationen für Combine

$\Rightarrow$ **Gesamtlaufzeit:**

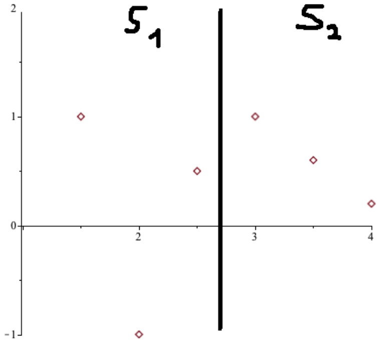
$T(n) = 2 * T(n/2) + \mathcal{O}(n)$, und es gilt: $T(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$

Beispiel



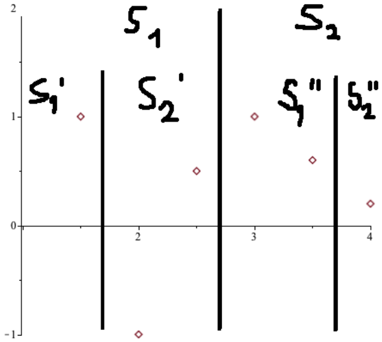
Ausgangslage

Beispiel



Rekursionsstufe 1: Divide

Beispiel



Rekursionsstufe 2: Divide

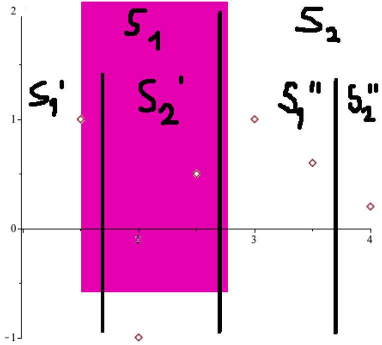
S_1' : ∞

S_2' : 1.58

S_1'' : 0.64

S_2'' : ∞

Beispiel



Pinkes Rechteck

Höhe: $2 * \min(\infty, 1.58)$

Breite: $\min(\infty, 1.58)$

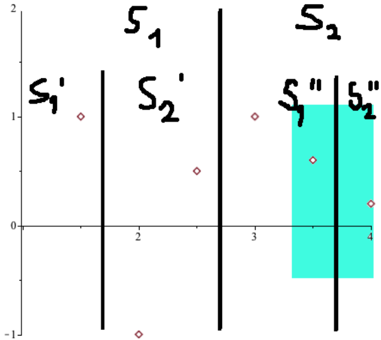
d_1' : ∞

d_2' : 1.58

d_3' : 1.58

$S_1 : \min(\infty, 1.58, 1.58) = 1.58$

Beispiel



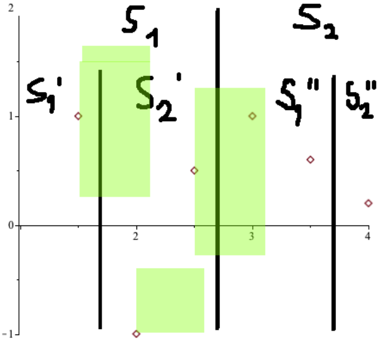
Türkises Rechteck

Höhe: $2 * \min(0.64, \infty)$
Breite: $2 * \min(0.64, \infty)$

d_1'' : 0.64
d_2'' : ∞
d_3'' : 0.64

$S_2 : \min(0.64, \infty, 0.64) = 0.64$

Beispiel



Rechtecke

Höhe: $2 * \min(1.64, 0.64)$

Breite: $2 * \min(1.64, 0.64)$

d_1'' : 1.64

d_2'' : 0.64

d_3'' : 0.707

Gesamt : $\min(1.64, 0.64, 0.707) = 0.64$

Closest Pair ist p_5 und p_6 mit Abstand 0.64

Sweepline - Was ist das?

Sweepline

- Häufige Methode zum Lösen geometrischer Probleme
- Gesamte Ebene wird mit einer Linie gescannt (Scanline)
- Nur an bestimmten, wichtigen Punkten (Events) muss etwas getan werden

Beispiele

- Graham-Scan, Sweepline scannt um einen Punkt rotierend
- Closest-Pair, klassisch

Problemstellung

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

- *n* Strecken in der Ebene, jeweils gegeben durch die beiden Endpunkte
- **Aufgabe:** Finde alle Schnittpunkte

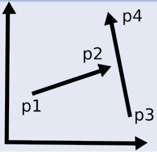
Vereinfachungen

- keine zwei End-/Schnittpunkte haben die gleiche x-Koordinate
- kein Endpunkt liegt auf einer anderen Strecke
- max. 2 Strecken schneiden sich in einem Punkt

Naiver Ansatz

Erinnerung

$$\begin{aligned} Schnitt(p_1, p_2, p_3, p_4) = \\ & ccw(p_1, p_2, p_3) \cdot ccw(p_1, p_2, p_4) \leq 0 \wedge \\ & ccw(p_3, p_4, p_1) \cdot ccw(p_3, p_4, p_2) \leq 0 \end{aligned}$$



Algorithmus

- Teste für je zwei Strecken, ob sie sich schneiden
- Berechne Schnittpunkt (LGS)
- Laufzeit: $O\left(n^2\right)$

Bentley–Ottmann Algorithmus

Karlsruher Institut für Technologie

Idee

- Lasse Sweepline L von links nach rechts über die Ebene laufen.
- Zu jedem Zeitpunkt schneidet S eine Teilmenge der Strecken. Die vertikale Anordnung verändert sich dabei nur bei einem Schnittpunkt.
- Events sind
  - noch nicht gescannte Endpunkte
  - Schnittpunkte von Strecken, die in der vertikalen Anordnung nebeneinander liegen

Bentley–Ottmann Algorithmus

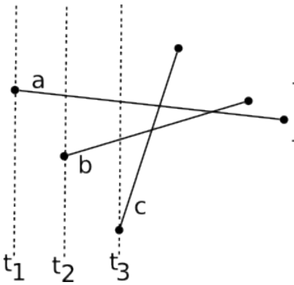
Algorithmus - Initialisierung

1. Erstelle Priority Queue *pq* für zukünftige Events, priorisiert nach x-Koordinate. *pq* enthält zu Beginn alle Endpunkte.
2. Erstelle Set *T* für vertikale Anordnung der Schnittpunkte zwischen den Strecken und der Sweepline. Sortierung nach y-Koordinate. Zu Beginn leer.
3. Solange *pq* nicht leer ist, entferne erstes Element aus *pq*. 3 Fälle treten auf:

Bentley–Ottmann Algorithmus

Linker Endpunkt einer Strecke s:

- Füge s in T ein.
- Suche Strecken r und t direkt über und unter s. Falls ihr Schnittpunkt als Event in pq liegt, entferne ihn.
- Falls s die Strecken r oder s schneidet, füge die Schnittpunkte in pq ein.

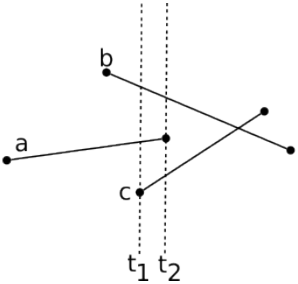


	t_1	t_2	t_3
T	a	a,b	a,b,c
pq	b1,c1, c2,b2, a1	c1,c2, ab,b2, a2	cb,c2, b2,a2

Bentley–Ottmann Algorithmus

Rechter Endpunkt einer Strecke *s*:

- Suche Strecken *r* und *t* direkt über und unter *s*. Falls sie sich noch schneiden, füge Schnittpunkt zu *pq* hinzu.
- Entferne *s* aus *T*.

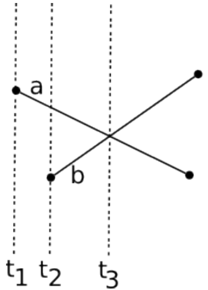


	t_1	t_2
T	b,a,c	b,c
pq	a2,c2, b2	bc,c2, b2

Bentley–Ottmann Algorithmus

Schnittpunk zweier Strecken s, t:

- Tausche Positionen von s und t in T.
- Finde Strecken o und u darüber und darunter. Entferne Schnittpunkte mit diesen, füge neue ein.



	t_1	t_2	t_3
T	a	a,b	b,a
pq	b1,ab, a2,b2	ab,a2, b2	a2,b2