Karlsruher Institut für Technologie

Tutorium 2

Algorithmen I SS 14

Institut für Theoretische Informatik

Übungsblatt 1.

Übungsblatt 2?

Rekurrenz Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

$$n \in 2^m \text{ für } m \in \mathbb{N}_0$$

Vorgehen

1. Lösung raten...
2. Beweisen, dass die Lösung stimmt

Substitutieren und Einsetzen

Umformung:

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \text{ mit } T(1) = 1$$
$$T(2^m) = 2 * T(2^{m-1}) + 2^m \text{ mit } T(1) = 1$$
$$S(m) = 2 * S(m-1) + 2^m \text{ mit } S(0) = 1$$

Ausrechnen der ersten Werte:

$$\begin{aligned}
S(0) &= T(2^0) = T(1) = 1 \\
S(1) &= T(2^1) = T(2) = 2*1+2 = 4 \\
S(2) &= T(2^2) = T(4) = 2*(2*1+2)+4 = 12 \\
S(3) &= T(2^3) = T(8) = 2*(2*(2*1+2)+4)+8 = 32 \\
S(4) &= T(2^4) = T(16) = 2*(2*(2*(2*1+2)+4)+8)+16 = 70
\end{aligned}$$

Lösung raten

$$S(m) = 2 * S(m-1) + 2^m \text{ mit } S(0) = 1$$

$$S(0) = 1 = 2^0$$
$$S(1) = 2 * 1 + 2 = 2^1 + 2^1 = 2^2$$
$$S(2) = 2 * (2 * 1 + 2) + 4 = 2^3 + 2^2$$
$$S(3) = 2 * (2 * (2 * 1 + 2) + 4) + 8 = 2^4 + 2 * 2^3$$
$$S(4) = 2 * (2 * (2 * (2 * 1 + 2) + 4) + 8) + 16 = 2^5 + 3 * 2^4$$

Durch scharfes Hinsehen erkennen wir eine mögliche Lösung:

$$S(m) = 2^{m+1} + (m-1) * 2^m$$

Beweis der Lösung durch völlständige Induktion.

Beweis durch vollständige Induktion

IA: $S(0) = T(2^0) = T(1) = 1$
IV: $S(m) = 2^{m+1} + (m-1) * 2^m$
IS: m $\rightarrow m+1$

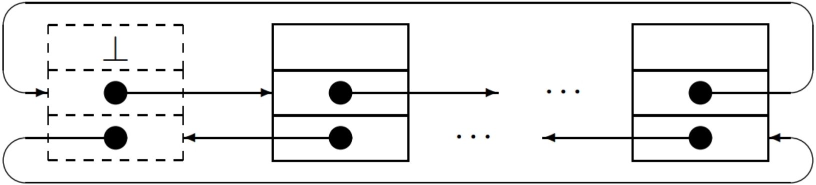
$$\begin{aligned} S(m+1) &= 2 * S(m) + 2^{m+1} && (1) \\ &= 2 * (2^{m+1} + (m-1) * 2^m) + 2^{m+1} && (2) \\ &= 2^{m+2} + (m-1) * 2^{m+1} + 2^{m+1} && (3) \\ &= 2^{m+2} + m * 2^{m+1} && (4) \end{aligned}$$

Zurück nach T(n) rechnen für Finale Lösung:
$T(n) = S(\log_2 n) = 2^{\log_2 n+1} * (\log_2 n - 1) * 2^{\log_2 n}$

Listen

```
Class Item of Element:
    e : Element
    next : Pointer to Item
    prev : Pointer to Item
```

```
Class List of Element:
    h = Item(⊥,
        h,
        h)
```



Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang
- Einfügen am Ende
- Element finden
- Element entfernen (mit Verweis auf Element)
- Zusammenfügen zweier Listen
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende
- Element finden
- Element entfernen (mit Verweis auf Element)
- Zusammenfügen zweier Listen
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden
- Element entfernen (mit Verweis auf Element)
- Zusammenfügen zweier Listen
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

Karlsruher Institut für Technologie

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element)
- Zusammenfügen zweier Listen
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

Karlsruher Institut für Technologie

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element) $\mathcal{O}(1)$
- Zusammenfügen zweier Listen
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element) $\mathcal{O}(1)$
- Zusammenfügen zweier Listen $\mathcal{O}(1)$
- Zugriff auf das k-te Element
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element) $\mathcal{O}(1)$
- Zusammenfügen zweier Listen $\mathcal{O}(1)$
- Zugriff auf das k-te Element $\mathcal{O}(n)$
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle)
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element) $\mathcal{O}(1)$
- Zusammenfügen zweier Listen $\mathcal{O}(1)$
- Zugriff auf das k-te Element $\mathcal{O}(n)$
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle) $\mathcal{O}(1)$
- Länge der Liste bestimmen

Laufzeiten für Operationen auf Listen

- Einfügen am Anfang $\mathcal{O}(1)$
- Einfügen am Ende $\mathcal{O}(1)$
- Element finden $\mathcal{O}(n)$
- Element entfernen (mit Verweis auf Element) $\mathcal{O}(1)$
- Zusammenfügen zweier Listen $\mathcal{O}(1)$
- Zugriff auf das k-te Element $\mathcal{O}(n)$
- Aufteilen einer Liste in zwei (mit Verweis auf Stelle) $\mathcal{O}(1)$
- Länge der Liste bestimmen $\mathcal{O}(n)$

Aufgabe zu Listen

Implementiert folgende Operationen für eine doppelt verkettete, *sortierte* Liste in Pseudocode:

1. *insert(e)* (Einfügen des Elements e an die richtige Stelle)
2. *findFirst(e)* (Erstes Vorkommen von e in der Liste)
3. *remove(e)* (Entfernen des Elements e aus der Liste)

Amortisierte Analyse

- gemittelter Aufwand für eine Sequenz von Operationen im Worst-case
- Kosten einer Operation gering, auch wenn eine einzelne Operation kostspielig ist
- keine Einbeziehung von Wahrscheinlichkeiten
- Beispiel: unbounded Arrays

Konto-Methode

für jede Operation:

- $\hat{c}_i$ **amortisierte Kosten**
- c_i **tatsächliche Kosten**
- $\hat{c}_i \geq c_i \Rightarrow$ Guthaben einzahlen
- $\hat{c}_i \leq c_i \Rightarrow$ Guthaben abheben
- Konto darf **nie** negativ werden
    - $\forall n \in \mathbb{N} : c + \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$

Beispiel: Unbounded Arrays

- falls ein Feld mit n Elementen durch **reallocate** verkleinert oder vergrößert wird, müssen n Elemente kopiert werden $\Rightarrow$ n Tokens müssen vorhanden sein
- amortisierte Kosten:
  - **push**: 3 Tokens
    - 1 Token: Einfügen des Elements
    - 2 Tokens: Konto
  - **pop**: 2 Tokens
    - 1 Token: Löschen des Elements
    - 1 Token: Konto

Beispiel: Unbounded Arrays

- Anfangszustand nach **reallocate**:
  - n Elemente, kein Guthaben vorhanden

- Sequenz von **push**-Operartionen:
  - **reallocate** wird nach n **push**-Operartionen aufgerufen
  - Guthaben: $2n$ Tokens
  - **reallocate**-Aufruf: $2n$ Elemente werden kopiert $\rightarrow$ genug Tokens

- Sequenz von **pop**-Operationen:
  - **reallocate** wird nach $\frac{n}{2}$ **pop**-Operartionen aufgerufen
  - Guthaben: $\frac{n}{2}$ Tokens
  - **reallocate**-Aufruf: $\frac{n}{2}$ Elemente werden kopiert $\rightarrow$ genug Tokens

Kreativaufgabe (a)

Entwickelt eine Datenstruktur mit folgenden Eigenschaften:

- *pushBack* und *popBack* in $\mathcal{O}(1)$
- Zugriff auf das k-te Element in $\mathcal{O}(\log n)$

Jeweils für Worst-Case und nicht amortisiert. Speicherallokation ist dabei immer in $\mathcal{O}(1)$.

Kreativaufgabe (b)

Karlsruher Institut für Technologie

Jetzt umgekehrt:

- *pushBack* und *popBack* in $\mathcal{O}(\log n)$
- Zugriff auf das k-te Element in $\mathcal{O}(1)$

Jeweils für Worst-Case und nicht amortisiert. Speicherallokation ist dabei immer in $\mathcal{O}(1)$.

Is it worth the time?

HOW LONG CAN YOU WORK ON MAKING A ROUTINE TASK MORE EFFICIENT BEFORE YOU'RE SPENDING MORE TIME THAN YOU SAVE?
(ACROSS FIVE YEARS)

HOW MUCH TIME YOU SHAVE OFF \ HOW OFTEN YOU DO THE TASK	50/DAY	5/DAY	DAILY	WEEKLY	MONTHLY	YEARLY
1 SECOND	1 DAY	2 HOURS	30 MINUTES	4 MINUTES	1 MINUTE	5 SECONDS
5 SECONDS	5 DAYS	12 HOURS	2 HOURS	21 MINUTES	5 MINUTES	25 SECONDS
30 SECONDS	4 WEEKS	3 DAYS	12 HOURS	2 HOURS	30 MINUTES	2 MINUTES
1 MINUTE	8 WEEKS	6 DAYS	1 DAY	4 HOURS	1 HOUR	5 MINUTES
5 MINUTES	9 MONTHS	4 WEEKS	6 DAYS	21 HOURS	5 HOURS	25 MINUTES
30 MINUTES		6 MONTHS	5 WEEKS	5 DAYS	1 DAY	2 HOURS
1 HOUR		10 MONTHS	2 MONTHS	10 DAYS	2 DAYS	5 HOURS
6 HOURS				2 MONTHS	2 WEEKS	1 DAY
1 DAY					8 WEEKS	5 DAYS