

Tutorium 3

Algorithmen I SS 14

Institut für Theoretische Informatik



Übungsblatt 2.

- direkte Adressierung (Array) teilweise unpraktikabel
 - bei großen Mengen $M \Rightarrow$ Array der Größe $|M|$
 - wenn tatsächlich gespeicherte Schlüsselmengen $|K| \ll |M| \Rightarrow$ Hashtabellen
- $\Theta(|K|)$ statt $\Theta(|M|)$
- Laufzeit im Average-Case nur $\mathcal{O}(1)$
 - direkte Adressierung $\mathcal{O}(1)$ auch im Worst-Case
- Slot eines Elements k wird durch die Hashfunktion $h(k)$ bestimmt
 \Rightarrow „gute“ Hashfunktion entscheidend für die Laufzeit

- Worstcase:
 - alle Schlüssel in einem Slot
 - $\Theta(n)$
- Best-Case
 - jeweils nur einen Schlüssel pro Slot
 - $\mathcal{O}(1)$
- Average-Case, mit
 - gleichmäßigem Hashing
 - doppelt verkettete Listen zur Kollisionsauflösung
 - Anzahl der Slots proportional zur Anzahl der einzufügenden Elemente
 - $\mathcal{O}(1)$

- verkettete Listen:
 - hinter jedem Tabellenslot steht eine verkettete Liste
 - die Liste muss nach dem gesuchten Element abgesucht werden
- lineare Suche
 - $h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$
 - die Liste muss nach dem gesuchten Element abgesucht werden

Gegeben sei die Hashfunktion:

$$H(k) = (k + 3) \bmod 11$$

Mit einer zugehörigen 11 Einträge großen Hashtabelle

Einfügen der Elemente $\langle 70, 71, 66, 97, 82, 15, 93, 40, 19, 76 \rangle$

- 1 Für Hashing mit verketteten Listen
- 2 Für Hashing mit Linearer Suche

Mit Verketteten Listen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	97	76	66	nil	nil	nil	15	93	nil	40
nil	nil	nil	nil				70	82		nil
							nil	71		
								nil		

Mit Linearer Suche:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
93	97	40	66	19	76		70	71	82	15

- ① Bestimme die Anzahl von Hashtabellenzugriffen für beide Hashing Varianten
- ② Bestimme die zu erwartenden Kosten für eine erfolgreiche Suche wenn die Wahrscheinlichkeiten der Suche eines Datums gleich verteilt sind
- ③ Bestimme den Speicherverbrauch für die beiden Hashing Varianten
 - ein Maschinenwort pro Zeiger, Element und Nullzeiger (Ende einer Liste)

Hashtabellenzugriffe

- mit Listen: $|\text{Einfügeoperationen}| = 10$
- mit linearer Suche:
 $|\text{Einfügeoperationen}| + |\text{Hashings auf bereits belegte Werte}| = 10 + 17 = 27$

Erwartete Kosten

- mit Listen: $\frac{\text{Traversierung aller Listen in der Tabelle}}{|\text{eingefügte Elemente}|} = \frac{14}{10}$
- mit linearer Suche: $\frac{\text{Hashtabellenzugriffe}}{|\text{eingefügte Elemente}|} = \frac{27}{10}$

Speicherbedarf

- mit Listen: $|Zeiger| + |Elemente| + |Nullzeiger| = 10 + 10 + 11 = 31$
- mit linearer Suche: 11

Gegeben sei ein Array $A = A[1], \dots, A[n]$ mit n Zahlen in beliebiger Reihenfolge. Für eine gegebenen Zahl x soll ein Paar $(A[i], A[j])$, $1 \leq i, j \leq n$ gefunden werden, für das gilt: $A[i] + A[j] = x$.

- 1 Geben Sie eine Lösung für $x = 33$ und $A = (7, 15, 21, 14, 18, 3, 9)$ an.
- 2 Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der das Problem in erwarteter Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst, und bei Erfolg ein Paar $(A[i], A[j])$ ausgibt, ansonsten Nil.

■ Lösung mit Hashing:

1. alle Elemente in die Hash-Tabelle einfügen
2. zu jeder Zahl das „Gegenstück“ suchen („Gegenstück“ von $A[i]$ ist $x - A[i]$)

■ Wichtig:

Die Hashtabelle muss in $\Omega(n)$ Slots haben, damit der Satz aus der Vorlesung gilt. Aus diesem folgt das die erwartete Laufzeit von Einfügen und Tabellenlookup in $\mathcal{O}(n)$ ist.

- a) Entwerfen Sie eine Realisierung eines *SparseArray* (auf deutsch soviel wie „spärlich besetztes Array“). Dabei handelt es sich um eine Datenstruktur mit den Eigenschaften eines beschränkten Arrays, die zusätzlich schnelle Erzeugung und schnellen Reset ermöglicht. Nehmen Sie dabei an, dass **allocate** beliebig viel *uninitialisierten* Speicher in konstanter Zeit liefert. Im Detail habe das *SparseArray* folgende Eigenschaften:
- Ein *SparseArray* mit n Slots braucht $\mathcal{O}(n)$ Speicher.
 - Erzeugen eines leeren *SparseArray* mit n Slots braucht $\mathcal{O}(1)$ Zeit.
 - Das *SparseArray* unterstützt eine Operation *reset*, die es in $\mathcal{O}(1)$ Zeit in leeren Zustand versetzt.
 - Das *SparseArray* unterstützt die Operation *get(i)* und *set(i, x)*. Dabei liefert *A.get(i)* den Wert, der sich im i -ten Slot des *SparseArray* A befindet; *A.set(i, x)* setzt das Element im i -ten Slot auf den Wert x . Wurde der i -te Slot seit der Erzeugung bzw. dem letzten reset noch nicht mit auf einen bestimmten Wert gesetzt, so liefert *A.get(i)* einen speziellen Wert \perp . Die Operationen *get* und *set* dürfen zudem beide nicht mehr als $\mathcal{O}(1)$ Zeit verbrauchen (man nennt so etwas *wahlfreien Zugriff*, engl. *random access*)

- Benutzung von zwei uninitialisierten Arrays D und H mit jeweils n Slots
- in D werden die Nutzdaten gespeichert und zusätzlich in jedem Slot eine nicht negative Zahl
- in H werden Indizes abgespeichert
- zusätzlich Zähler c mit 0 initialisiert
- **set(i,x)**: $D[i].\text{daten} := x$; $D[i].\text{zahl} := c$; $H[c] := i$; $c++$
- **get(i)**: Überprüft ob der i-te Slot gesetzt wurde:
 - $D[i].\text{zahl} < c$ und $H[D[i].\text{zahl}] = i \Rightarrow D[i]$ wurde gesetzt
- **reset**: Es wird $c := 0$ gesetzt und somit werden alle Einträge invalidiert

- b) Nehmen Sie an, dass die Datenelemente, die Sie im *SparseArray* ablegen wollen, recht groß sind (also z.B. nicht nur einzelne Zahlen, sondern Records mit 10, 20 oder mehr Einträgen). Geht Ihre Realisierung unter dieser Annahme sparsam oder verschwenderisch mit dem Speicherplatz um? Wenn Sie Ihre Realisierung für verschwenderisch halten, überlegen Sie ob und wie Sie es besser machen können.

- Die Lösung aus a) ist insofern verschwenderisch, dass n Slots für Nutzdaten allokiert werden, die zwar uninitialized aber reserviert sind. Stattdessen, sollte man die Nutzdaten mit ins Array H speichern und für H ein *unbounded Array* verwenden, das initial nur einen Slot hat.
Sei m die Anzahl der tatsächlich gesetzten Elemente. Dann belegt D den Platz für n nichtnegative ganze Zahlen. Das unbeschränkte Array H belegt maximal den Platz für $3m$ Nutzdatenelemente und Indizes (während des Kopiervorganges, wenn das unbeschränkte Array kopiert reallokiert wird)

- c) Vergleichen Sie Ihr *SparseArray* mit bounded Arrays. Welche Vorteile und Nachteile sehen Sie im Hinblick auf den Speicherverbrauch und auf das Iterieren über alle Elemente mit set eingefügten Elemente?

- Iterieren dauert nur $O(m)$ statt $O(n)$ Zeit. Der Speicherverbrauch ist schlechter, wenn die Nutzdatenelemente klein sind. Für große Nutzdatenelemente kann der Speicherverbrauch sogar erheblich besser sein, sofern man eine sparsame Realisierung wie in b) verwendet und nicht zuviele Elemente eingefügt werden.