まえがき

本書は，東京大学理学部数学科の学生有志が製作し，東京大学で開催されている学園祭の数学科学術企画「ますらぼ」において配布しているものです．今回初めて手に取っていただいた方もそうでない方も，楽しんでいただけたら幸いです．

読者の皆さんの中で，難しい本を読むときに「まえがき」だけ読んで満足してしまうという方はいらっしゃるでしょうか．なぜこんなことを聞くかというと，私自身がそうだからです．とくに数学書を読むときにそれをやると，何だかわかった気になって良い気分になります．私もそういうまえがきを書いてみたいと思ったのですが，せっかく書いた文章が読まれずに終わってしまうことは避けたいので，本文の内容に関係のあることは書かないことにします．従って，本文の内容に興味がある方は，このまえがきを読み飛ばしてください．

さて，これは自分の母親から聞いた話なのですが，私は小学１年生のとき，次の式を「理解できなかった」そうです．

$$1+1=2$$

今となっては当たり前ですし，なぜ「理解できなかった」のかもはや不明ですが，当時の自分がどうしてわからなかったのかここで考えてみたいと思います．

小学１年生の算数の授業では，初めから $1+1=2$ を学ぶわけではありません．具体的な計算を習う前に，十分慣れ親しんでおかなければならない概念があります．それは「数の概念」です．文部科学省が出している小学校学習指導要領によれば，小学１年生の算数の目標の中に次のようなものがあります．

> 具体物を用いた活動などを通して，数についての感覚を豊かにする．数の意味や表し方について理解できるようにするとともに，加法及び減法の意味について理解し，それらの計算の仕方を考え，用いることができるようにする．

「具体物を用いた活動」とは，簡単に言えば個数を比較したり順序を考えたりすることです．こうした体験を通じて，数の概念の有用性や便利さを覚え，身につけていくわけです．しかし，個数や順序を数で表すだけでは何も面白くありません．物事を数を用いて表すもうひとつの理由が，$1+1=2$，すなわち計算です．どんなものの個数も，数で表すことによって，たし算やひき算ができます．そしてその計算は，数えるものが何であろうと変わりません．

このように考えてみると，私たちは小学１年生の時点で「抽象化」の大きな一歩を踏み出していることがわかります．今までは石ころ１個と石ころ１個で石ころ２個，車１台と車１台で車２台など別々に考えていたものを「数」という観点で見直すと，どちらも $1+1=2$ と表現できます．逆に言えば，小学校で学ぶ分には，$1+1=2$ にはそのくらいの意味しかないということになりますが，当時の私はそれ以上の何かを求めていたのかもしれません．あるいは，それが物事を抽象化して表したものであるということをきちんと理解しきれていなかったのかもしれません．

ところで，中学校に入学すると，今まで算数と呼ばれていたらしいものは数学と言われるようになります．名前が変わるということは何かが違うはずなのですが，いったい何が違うのでしょうか．私は次のように考えています．

算数: 種々の問題を日常生活の中での感覚も助けにしながら論理的に解決する
数学: 種々の問題を日常生活から離れて論理的に解決する

最近の中学校の教科書は，日常生活の中での感覚もできるだけ助けになるようにかなり工夫して書かれているようですが，それでも実際には，日常から離れ，言語と論理を駆使して問題を解決します．２次方程式を解いたり，図形の証明問題を解いたりするときに，日常での経験はほとんどあてになりません．これは他の４教科—国語，社会，英語，理科—とは明らかに異なる点です．もちろん，数学はそういうところにも面白さがあるわけですが，世の中の多くの人が数学に興味がない，あるいは数学が好きではない理由も，ここにある気がしてならないのは私だけでしょうか．

長々とまとまらない話をしてきましたが，そういうわけで，数学という営みは積極的に日常から離れることを要求するものなのです．無論，数学に出てくる様々な概念の中には，日常の中の発想から生まれたものも多くあります．しかし，それを抽象化し，日常から切り離された論理の世界で発展させていくのが数学です．たとえアイデアの着想に至るまでに直観の力を借りたとしても，直観によらない強靭な思考を駆使し，そのアイデアをきちんと数学に昇華させなければ，せっかくの発想も日の目を見ることは無いでしょう．

...と，ここまで書いてみましたが，数学がどんなものなのか，少しでもわかった気になっていただけたでしょうか．読む人にもよるかと思いますが，私の試みがうまくいったという方が多くいらっしゃることを期待します．

さて，本書の内容は，いずれも執筆者の個性溢れる「数学」となっています．必ずしも数学を専門としない方向けに書かれているとはいえ，もしかすると少しばかり日常を離れなければならないかもしれません．私たちの数学が，少しでも皆さんの「非日常」に貢献できることを願っています．

最後に，本書の製作にあたって執筆や印刷，製本に協力してくれたすべての方々，そして本書をお読みくださっているすべての皆さまに感謝いたします．

編者を代表して
2018 年 5 月

目 次

オイラーの無限級数論 (植田)

0　注意

このコラムを読むにあたって，高校数学レベルの知識を仮定しています．また，オイラーの時代に習った古い記法を採用しました．

1　オイラーって？

レオンハルト・オイラーは，18 世紀において最も偉大だとされる数学者です．彼は極めて多くの論文を残し，その影響範囲は当時最先端の数学の全分野をカバーしているといっても過言ではありません．

彼の時代，数学はまだ厳密な証明を重視しておらず，直観的な無限大や無限小の取り扱いが許されていました．日本の高校数学で取り扱われている直観的な考え方によって，この時代の数学は理解できる，といってもよいでしょう．高校数学には存在しない「数ではないもの」や「図形ではないもの」を取り扱うことができるようになるには，次の世紀を待たねばなりませんでした．

そして，彼の時代において，特定の無限級数の値を正確に求める，ということは，数学の主題の一つでもありました．彼の名を当時の数学界に知らしめることとなった最初の業績も，次の級数の値を正確に求めるという，当時ヨーロッパ中の数学者の挑戦をはねのけ続けていた難問，いわゆるバーゼル問題を解決したということです．

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

そして，このコラムのテーマは，これに類似する無限級数の値のオイラーらしい求め方を知り，自分で値を求められるようになることです．証明は現代のように厳密ではありませんが，結果はすべて正しいものです．

2　バーゼル問題

オイラーは上の級数の値を求めるために，関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ を次の二つの方法で表しました．

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

もちろんこれを求める方法もオイラーは記しましたが，それをここに書くにはスペースが足りないので，代わりに

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

を使うことにします．右側は $\sin x$ の零点が $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$ であるので，展開した時 x の係数が 1 になるように因数分解した (いつでもできるわけではない) ものです．

左側の説明には，高校数学の範囲で証明可能な次の定理があれば十分です．

定理 (テイラーの定理)．

0 に十分近い x において，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

が成り立つ．

この定理も，証明を書くのにスペースが足りませんので，知りたい人はご自分でお調べください．

$f(x)=\sin x$ の場合は $(\sin x)'=\cos x,(\sin x)''=-\sin x,\sin 0=0,\cos 0=1$ より，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$$

が言えます．

ここで，$x^2 = -\pi^2 z$ とおくと，

$$1 + \frac{\pi^2}{6}z + \frac{\pi^4}{120}z^2 + \frac{\pi^6}{5040}z^3 + \frac{\pi^8}{362880}z^4 + \cdots = (1+z)\left(1+\frac{z}{2^2}\right)\left(1+\frac{z}{3^2}\right)\cdots$$

となります．右辺を展開して z の係数を比較すると，

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

となり，最初の級数の解が得られました．

以上が，オイラーの導き出した答えです．

問題． テイラーの定理について，図書館やインターネットなどで証明を探し，目を通しなさい．

3　べき指数がより大きい級数

オイラーは上の級数の値を求めただけで満足はしませんでした．続いて，

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

の値を求める方法を発見したのです．

一般に，

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)\cdots = 1 + Az + Bz + Cz + \cdots$$

とすると，$A = a+b+c+\cdots, B = ab+ac+bc+\cdots, C = abc+\cdots$ といったように，$A, B, C, \cdots$ は解と係数の関係によって，基本対称式になります．それは無限変数であっても例外ではありません．

ここで，$P_n = a^n + b^n + c^n + \cdots$ は対称式であり，

$$\begin{aligned} P_1 &= A \\ P_2 &= AP_1 - 2B \\ P_3 &= AP_2 - BP_1 + 3C \\ P_4 &= AP_3 - BP_2 + 3P_1 - 4D \\ &\vdots \end{aligned}$$

といった形で，基本対称式で表せます．

これを逐次計算していくことで，P_n の値を具体的に求めることが可能になります．

例えば，

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = A^2 - 2B = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{\pi^4}{120} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} = \frac{5-3}{180}\pi^4 = \frac{\pi^2}{90}$$

問題． これに習って，$n = 3, 4, 5, \cdots$ の値を求めてみてください．

計算を間違えなければ，$\frac{\pi^6}{945}, \frac{\pi^8}{9450}, \frac{\pi^{10}}{93555}, \cdots$ という値が得られるはずです．

4　パラメータを持つ級数

上のような級数の求め方は，同じ関数を表す級数と無限積があれば，いつでも実行できます．

事実，オイラーはより多くの無限級数の値を与える，ある関数の級数表示と無限積表示を示しています．

$\sin x$ の級数表示を求めたときと同様にして，

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

がわかります．これを用いて，

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos y-x\sin y-\frac{x^2}{2!}\cos y+\frac{x^3}{3!}\sin y\cdots$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos x}=1-x\tan y-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\tan y\cdots$$

ここで，$\cos(x+y)=0$ となるのは $x+y=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ の時でしたから，

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos x}=1-x\tan y-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\tan y\cdots=\left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1}{2}\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3}{2}\pi-y}\right)\cdots$$

ここで，$x=\frac{t}{2n}\pi, y=\frac{1}{2}\pi\frac{m}{n}, z=\tan y$ とすると，

$$1-\frac{t}{2n}z\pi-\frac{t^2}{2!\cdot(2n)^2}\pi^2+\frac{t^3}{3!(2n)^3}z\pi^3\cdots=\left(1-\frac{t}{n-m}\right)\left(1+\frac{t}{n+m}\right)\left(1-\frac{t}{3n-m}\right)\cdots$$

この式に対して，前述の基本対称式に当てはめることで

$$\frac{1}{(n-m)^k}+\frac{1}{(-(n+m))^k}+\frac{1}{(3n-m)^k}+\cdots$$

という形で表される級数の値を求めることが可能になります．例えば，$n=2, m=1, k$ を奇数に限定すると，

$$1-\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}-\frac{1}{7^k}+\frac{1}{9^k}\cdots$$

となります．このとき $y=\frac{\pi}{4}, z=1$ なので，$k=1$ のとき，

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots=\frac{z\pi}{2n}=\frac{\pi}{4}$$

となります．

蛇足ではありますが，これらの級数の族から導かれる特殊な形の級数として，バーゼル問題の級数に定数項を付け加えた級数が存在します．

$k=1$ としたとき，

$$\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\cdots=\frac{z\pi}{2n}$$

となりますが，この級数を 2 項ずつまとめると，

$$\frac{2m}{n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}+\frac{2m}{25n^2-m^2}\cdots=\frac{z\pi}{2n}$$

となり，整理すると，$m=np$ として，

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\frac{1}{25-p^2}\cdots=\frac{z\pi}{4p}$$

また，$l=n-m$ とすれば，

$$\frac{1}{l}-\frac{1}{2n-l}+\frac{1}{2n+l}-\cdots=\frac{z\pi}{2n}$$

となり，最初の項だけを右辺に移項し，$l=nq$ として整理すると

$$\frac{1}{4-q^2}+\frac{1}{16-q^2}+\frac{1}{36-q^2}\cdots=\frac{1}{2q^2}-\frac{z\pi}{4q}$$

となる．これらの級数の和や差をとることによって，

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-p^2}-\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}-\cdots$$

などといった級数の値を求めることができます．しかし，このとき p は 0 以上 1 以下でなくてはならず，分母の中に分数が入って見栄えがあまりよくありません．

そこで，テイラーの定理によって

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

となり，係数を見比べることで $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ がわかります．これを用いると，

$$\frac{1}{1+b} - \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} - \frac{1}{16+b} + \cdots = \frac{1}{2b} - \frac{\pi}{\sqrt{b}(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})}$$

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \frac{1}{16+b} + \cdots = \frac{\pi(e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}})}{2\sqrt{b}(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})} - \frac{1}{2b}$$

がわかります．このときは任意の b に対して正確な値を求めることができます．

問題. $z = \tan\frac{m\pi}{2n}$ の値が具体的にわかるような n,m*(ただし* n *は 12 以下，* $n-m, n+m$ *がともに自然数となるものとする)* について，級数に n,m を代入して書き出し，いくつかの k について具体的な値を計算しなさい．

例えば，$(n,m) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ は $z = \sqrt{3}, n-m = 1, n+m = 2$ となり，条件を満たしています．

5　無限積の展開

オイラーは他にもいくつか三角関数の無限積表示と級数表示を与えていますが，得られる級数は上で示したもの以外にはありませんでした．

ですが，オイラーは更に多くの種類の無限級数の値を求める方法を見つけています．

$$\frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$

の右辺は新たな級数であり，右辺の括弧の中の級数の部分級数でもあります．よって，

$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots\right)$$

となります．この左辺もそれ自身新たな級数として値を求めるに値すると思いますが，ここからさらに，

$$\frac{1}{3^s}\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots\right) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots\right)$$

となります．

同様の操作は 2 以上の任意の自然数に対して同様に行うことができますので，1 個あるいは複数個の特定の約数を分母が持つ項だけの和，もしくは持たない項だけの部分級数の値はこの方法で求めることができます．ただし，指定した約数の中に 1 以外の公約数を持つものがあれば，調整が必要です．

また，この方法で，同じ条件の項を取り除くのではなく符号を反転させた級数，例えば

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

の値を求めることも，

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}\cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}\cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\cdots = 1$$

となるので可能です．しかし，この場合は互いに素な数を約数に持つ場合も，たとえば 2 と 3 を約数に持つ場合，6 を約数に持つ項が二重に引かれてしまうので，6 を約数に持つ項の部分和を足さなくてはいけません．

4 章で示したパラメータを持つ級数の場合も，一部のパラメータに対してはまったく同様に部分和や符号を反転させた和を求めることが可能です．

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\cdots\right)=\frac{1}{3^s}-\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\cdots\right)=1+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}-\frac{1}{11^s}\cdots$$

などとして，これも任意の奇数に対して同様の操作を行うことができます．このような操作が実行可能であるためには，パラメータ n が 12 を割り切る必要があります．

これらの級数に対しすべての素数にわたって同じ操作を行うことで，

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

$$1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\cdots=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1+\frac{1}{7^s}\right)\cdots}$$

などという級数が得られます．2 つ目の級数においては，分母の素数が 4 で割って 3 余るとき符号が +,1 余るとき符号が − となります．

無限積を展開するとどのような級数が得られるか，ここで確認しておきます．

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)\cdots=1+Az+Bz+Cz+\cdots$$

としたときの $A,B,C,$ といった個別の値はすでに確認しました．z=1 とおくと，

$$(1+a)(1+b)(1+c)\cdots=1+A+B+C+\cdots$$

となり，$A,B,C,\cdots$ は相異なる 1 個，2 個，3 個の $a,b,c,\cdots$ の積の和だったことを考えると，右辺は相異なる $a,b,c,\cdots$ の積として表される任意の数の和となります．

では，$z=-1$ とした場合はどうでしょうか．

$$(1-a)(1-b)(1-c)\cdots=1-A+B-C+\cdots$$

となりますが，符号が正になっているのは相異なる偶数個の $a,b,c,\cdots$ の積の和となるもの，負になっているのは相異なる奇数個の積の和となっているものです．

これより，右辺は，相異なる偶数個の $a,b,c,\cdots$ の積として表される任意の数の和から相異なる奇数個の $a,b,c,\cdots$ の積として表される任意の数の和を引いたものとなります．

いったん元の形から離れて，$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2)\cdots=$ とした場合はどうなるでしょう．この場合は，$a,b,c,\cdots$ の積であって，同じ $a,b,c,\cdots$ の元が高々 2 個までで表されるような任意の数の和です．

より一般に，

$$(1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\cdots)(1+\beta_1 b+\beta_2 b^2+\cdots)(1+\gamma_1 c+\gamma_2 c^2+\cdots)\cdots$$

とすると，各項は $a,b,c,\cdots$ の積として表される任意の数に，$a,b,c,\cdots$ の次数 $k_a,k_b,k_c,\cdots$ に応じて，$\alpha_{k_a}\beta_{k_b}\gamma_{k_c}\cdots$ を掛けたものです．

ここで，任意の i に対して $1=\alpha_i=\beta_i=\cdots$ とすると，$1+x+x^2+x^3\cdots=\frac{1}{1-x}$ だったので，左辺の無限積は

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)\cdots}$$

に等しくなります．$a,b,c,\cdots$ を素数の逆数の s 乗とすれば，任意の自然数はただ一つの素因数分解を持つので，

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

というすでに示した結果が得られます．

また，$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$ だったので，

$$1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\cdots=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1+\frac{1}{7^s}\right)\cdots}$$

の右辺は，分母の素因数の中に 4 で割って 3 余る数で，次数が奇数個のものが奇数個あるとき，その項の符号は $-$，そうでないときその項の符号は $+$ ということです．

4 で割って 3 余る素因数で次数が奇数個のものが奇数個あるということと 4 で割って 3 余る素因数が重複も含めて奇数個あるということは同じことであり，また，4 で割って 3 余る奇数個の数といくつかの 4 で割って 1 余る数の積は 4 で割って 3 余るので，4 で割って 3 余る数を分母に持つ項は $-$,4 で割って 1 余る数を分母に持つ項は $+$ となり，左辺と一致します．

ここまで素数のみについて述べましたが，$\sin x$ の無限積表示と $e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ だけを用いて，自然数全体，あるいは偶数のみ，奇数のみ，また 6 と素な自然数といった集合上にわたる様々な無限積を求めることが可能です．

それらは $\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right)$ を因数分解することによって得られますが，k が偶数の場合のほか k が 3 の場合にも値を求めることが可能です．この際 n 項目の分子は n を特定の条件に従って自然数の積で表す方法の数となります．

ここで，無限積の中の有限個の項の符号を反転させたとき，級数は無限個の項が反転し，かつ，元の無限積の値がわかっていれば，その値に有理数の掛け算を有限回行うだけで，無限個の級数が反転した値を求めることができます．

しかし，無限積の中のすべての項の符号を反転させた無限積，ひいてはそれを展開して得られる級数の値を求める方法も存在します．

$$\left(1\mp\frac{1}{2^s}\right)\left(1\mp\frac{1}{3^s}\right)\left(1\mp\frac{1}{5^s}\right)\cdots=\frac{\left(1-\frac{1}{2^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2s}}\right)\cdots}{\left(1\pm\frac{1}{2^s}\right)\left(1\pm\frac{1}{3^s}\right)\left(1\pm\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

となります．3 章の方法によって右辺の分子の無限積はいつでも求めることが可能なので，右辺の分母の値がわかればその無限積のすべての項の符号を反転させた形である左辺の無限積の値もわかります．

また，興味深い点として，

$$\left(1\mp\frac{1}{2^s}\right)\left(1\mp\frac{1}{3^s}\right)\left(1\mp\frac{1}{5^s}\right)\cdots$$

を級数展開した形は

$$\frac{1}{\left(1\pm\frac{1}{2^s}\right)\left(1\pm\frac{1}{3^s}\right)\left(1\pm\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

を級数展開した形の部分級数である，という事実があります．このことから，双方の値を求めて級数展開し，下の無限級数から上の無限級数を引くことで新たな部分和の形が求められます．

さらに，二つの無限積の次数 s が等しく，符号だけが異なる場合は，片方をもう片方で割ると，各素数 n の項が $\dfrac{n^s-1}{n^s+1},\dfrac{n^s+1}{n^s-1}$ のどちらかとなりますが，

$$\frac{n^s-1}{n^s+1}=1-\frac{2}{n^s}+\frac{2}{n^{2s}}-\frac{2}{n^{3s}}+\cdots,\frac{n^s+1}{n^s-1}=1+\frac{2}{n^s}+\frac{2}{n^{2s}}+\frac{2}{n^{3s}}+\cdots$$

となり，級数展開した時各項の分子は分母を n^s として，n の素因数の個数を $\omega(n)$ とすると，$2^{\omega(n)}$ と表すことができます．このように，一部の無限積においては級数展開の分子の形を純粋に自然数 n の整数論的性質によって記述することが可能です．

自然数から自然数への関数 f がそのような性質を持つためには，自然数 n の素因数を $p_1,\cdots,p_m$, 指数を $k_1,\cdots,k_m$ として，$\dfrac{f(n)}{n^s}=\dfrac{f(p_1^{k_1})}{p_1^s}\cdots\dfrac{f(p_m^{k_m})}{p_m^s}$ となる必要があるので，$f(n)=f(p_1^{k_1})\cdots f(p_m^{k_m})$ という性質を持たなくてはいけません．

そのような性質を持つ重要な関数として，n の約数の数を表す $d(n)$ や，n 以下で n と素な自然数を表す $\phi(n)$, また n の素因数分解の指数の積を表す $\lambda(n)$, 最後に任意の自然数 k に対する $k^{\omega(n)}$ があります．また，これら同士の積や，n の代わりに n^k を代入したものが条件を満たすことは容易に証明できます．

素数の冪に対して値を求めてみると，

$$d(p^m)=m+1,\phi(p^m)=p^m-p^{m-1},\lambda(p^m)=m,k^{\omega(p^m)}=k$$

となります．

また，d や ϕ を特別な場合として含み，上の性質を満たす関数として，n のすべての約数の k 乗の和をあらわす $\sigma_k(m)$ や，n 以下の自然数 k 個の (順番を入れ替えたものは区別する) 組であって全体で n と公約数を持たないものの数をあらわす $J_k(n)$ というものも存在します．このとき，$\sigma_0(n) = d(n), J_1(n) = \phi(n)$ です．

素数の冪に対しては，

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + \cdots + p^{km}, J_k(p^m) = p^{mk} - p^{(m-1)k}$$

となります．これらを用いて実際に無限積表示を求めてみると，例えば

$$1 + \frac{2^{\omega(p)}\lambda(p)}{p^s} + \frac{2^{\omega(p^2)}\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \frac{2^{\omega(p^3)}\lambda(p^3)}{p^{3s}} \cdots = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{4}{p^{2s}} + \frac{6}{p^{3s}} \cdots = 1 + \frac{2}{p^s}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{p^{2s}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2}$$

$$1 + \frac{J_k(p)}{p^s} + \frac{J_k(p^2)}{p^{2s}} + \frac{J_k(p^3)}{p^{3s}} + \cdots = 1 + \frac{1}{p^{s-k}} - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-2k}} - \frac{1}{p^{2s-k}} + \cdots = \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^{s-k}}}$$

などがわかります．

問題． この章で示した様々な事実をもとに，自分しか値を知らない級数を見つけなさい．

Clifford 代数 (井上)

1 前書き

こんにちは，数学科の井上と申します．eπisode に書くテーマを決めたときは代数を勉強するつもりでテーマを選んだのですが，残念ながら今はあまり代数に触れていません．自分で書いておきながら，これが実際になんの役に立つのかと聞かれても私もよくわかってないという状態です．というわけで発展的な内容までは書けませんがお付き合いいただければ幸いです．

2 数

数にはいろんな種類があります．例えば以下のような数の集合が有ります．（集合の概念，表し方等は濱田さんのページのあるのでそちらを参照してください．）
自然数 $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$
整数 $\mathbb{Z} = \{\cdots -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
有理数 $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}/\{0\}\}$
実数 $\mathbb{R} = \{1, 2, \sqrt{2}, \pi, \cdots\}$
さらに実数だけではすべての有理数係数の代数方程式（$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ の形をした方程式）は解けないので，複素数という考え方が導入されます．二乗すると -1 になる i という記号を用います．(例えば $x^2 + 1 = 0$ の解は $\pm i$ になのでこれは実数解は持たないが複素数解をもつ．)
複素数 $\mathbb{C} = \{i, 2 + 3i, \cdots\}$
今回はさらにこの"数"を広げていくことを考えます．

定義 2.1. 集合 F が以下の条件を満たすとき体と呼ぶ．ただし F に入る演算を加法 $+$ と乗法 $\times$ とし，a，b，c を任意の F の元とする．

1. 加法の結合法則 $a + (b + c) = (a + b) + c$ を満たす
2. $a + 0 = 0 + a = a$ となる零元 0 が存在する
3. $a + (-a) = (-a) + a = 0$ となる加法の逆元 $(-a)$ が存在する
4. 加法の交換法則 $a + b = b + a$ を満たす
5. 乗法の結合法則 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ を満たす
6. $a \times 1 = 1 \times a$ となる単位元 1 が存在する
7. $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ となる乗法の逆元 a^{-1} が存在する (ただし $a \neq 0$)
8. 乗法の交換法則 $a \times b = b \times a$ を満たす
9. 分配法則 $a \times (b + c) = a \times b + a \times b$

この定義に基づくと整数は整数の中に乗法の逆元を持たない数があるので体ではありません．(例えば 2 の乗法の逆元は $\frac{1}{2}$ だがこれは整数の集合に含まれない．) 一方有理数，実数，複素数はすべての条件を満たしているので体になります．体は引き算や割り算が無条件にできるなど性質が良いので扱いやすです．ちなみに複素数 $\mathbb{C}$ は任意の複素数係数の代数方程式の解は複素数に含まれるということから，代数的に閉じているので代数閉体と呼ばれます．

3 Galois 拡大

それでは，この複素数 $\mathbb{C}$ をさらに拡張することはできるのでしょうか．まずは $\mathbb{C}$ を含むような体が存在しないか考えてみます．体を拡大する方法はいくつかありますが Galois 拡大というものに焦点を当ててみたいと思います．

定義 3.1. *Galois* 拡大
E, F を体とする．このとき拡大 E/F が代数拡大であって，正規拡大かつ分離拡大であるもの．
代数拡大とは E のすべての元が F 係数の代数方程式の解になっていること．正規拡大とは，E に根を持つ F 係数の既約な多項式はすべて E 上で一次式の積に分解できる．これはある元が E に含まれていたらそれと共役な元も常に E に含まれるということ．分離拡大とは任意の $a \in E$ の最小多項式 (a を根にもつ多項式のうち最も次数の小さいもの) が E 上で相異なる一次式の積に分解できること．

例えば $E = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}$ とおくと確かに $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は Galois 拡大になっています．代数拡大であることについては，$a + bi \in \mathbb{C}$ は $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$ の解になっていることなどからいえます．正規拡大であることも $a + bi \in \mathbb{C}$ なら $a - bi \in \mathbb{C}$ となるのでいえます．そして分離拡大になっていることも $a + bi \in \mathbb{C}$ の最小多項式は $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = (x - a + bi)(x - a - bi)$ となっていることなどにより言えます．

定義 3.2. 拡大次数
F 上のベクトル空間としての E の次元を拡大次数という．

命題 3.3. $\mathbb{R}$ の *Galois* 拡大は *2* 次拡大の $\mathbb{C}$(とその同型) のみである．

証明. まず 2 次拡大であることはイメージだけ書きます．$\mathbb{C}$ の元は全て $\mathbb{R}$ の元 a, b を用いて $a + \sqrt{-1}b$ と書けるので，$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\sqrt{-1}$ つまり $\mathbb{R}$ が二つくっついたものと見なせるということ．
ここから $\mathbb{R}$ の Galois 拡大は $\mathbb{C}$ のみになることを順に示します．最初に $\mathbb{R}$ の 3 次以上の奇数次 Galois 拡大は存在しないことを示す．$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 係数の 3 次以上の奇数次元多項式とする．（$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ としたときに n は 3 以上の奇数.）このとき $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ なので，中間値の定理より $f(a) = 0$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在し，$f(x) = (x - a)g(x)$ と因数分解されるので既約ではない．よって $\mathbb{R}$ の 3 次以上の奇数次の既約多項式は存在しない．
次に $\mathbb{C}$ の 2 次拡大は存在しないことを示す．もし $\mathbb{C}$ が 2 次拡大を持つなら，$f(x) = x^2 + ax + b$ という形の既約多項式がある．しかし，$f(x) = (x - \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2})(x - \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2})$ と $\mathbb{C}$ 上で因数分解できてしまう．よって矛盾．$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の拡大体なので，もし $\mathbb{C}$ の拡大体があれば $\mathbb{R}$ の拡大体にもなっている．そのため $\mathbb{R}$ の偶数次の拡大体は存在しない．あとは $\mathbb{R}$ の次拡大は $\mathbb{C}$(とその同型) のみということを示せばこの証明は終わりますが今回は略します．

□

ちなみにこの命題は任意の $\mathbb{R}$ 係数の多項式が $\mathbb{C}$ 上で一次式の積に分解できることも意味している．よって，任意の n 次の $\mathbb{R}$ 係数の代数方程式が $\mathbb{C}$ 上に n 個の解を持つという代数学の基本定理がこれによっても示される．(代数学の基本定理は多くの異なる証明が与えられていることでも有名．)

4　Clifford 代数

それでは Galois 拡大はあきらめて別の方面から考えてみます．
知っている人も多いと思いますが Hamilton の四元数 $\mathbb{H}$ を考えます．これは二乗すると -1 になる数，i, j, k を用いて $a + bi + cj + dk(a, b, c, d$ は実数) の形で書かれます．このとき i, j, k の間の掛け算は次のようになります．

(左側)×(右側)	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

この表を見てわかるように $i \times j = k$ だが $j \times i = -k$ なので，掛け算は交換できない (非可換) になっています．よって体の 8 個目の条件である乗法の交換法則を満たしていません．このようなものは斜体と呼ばれます．$\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}$ を拡大したものだが $\mathbb{H}$ は体ではないということです．

それでは，体ではなく斜体だったらどこまでも拡張できるのでしょうか．答えは yes です．Clifford 代数 (Cln) で拡張できます．これによりいくつかの数を一般化することができます．

定義 4.1.　*Clifford* 代数
Cln を $\mathbb{R}-$ 線形空間とする．
Cln の基底のうちの n 個を $e_1, e_2, \cdots, e_n$ としたとき積を以下を線形に拡張したもので定義する．

$$\begin{cases} e_s e_r = -e_s e_r (s \neq r, 1 \leq r, s \leq n) \\ e_s^2 = -1 \end{cases} \tag{1}$$

このとき Cln の基底は $\{1, e_1, e_2, \cdots, e_n, e_1e_2, e_2e_3, \cdots, e_{n-1}e_n, \cdots, e_1e_2\cdots e_n\}$ の 2^n 個になります．よって次元は基底の個数である $\dim Cln = 2^n$ になります．

$n = 0$ の時は $Cl_0 = \mathbb{R}$ となります．
$n = 1$ の時は $Cl_1 = \mathbb{C}$ となります．このとき $e_1 = i$ になっています．
$n = 2$ の時は $Cl_2 = \mathbb{R}$ となります．このとき $e_1 = i, e_2 = j, e_1e_2 = k$ となっています．
このようにして $n = 3, 4, 5, \cdots$ と定義していくことができます．

上で定めた基底で Cln を 2^n 次実正方行列と同一視することができます．
$n = 0$ つまり $\mathbb{R}$ の時はそのまま実数を一次元実正方行列と見なします．
$n = 1$ つまり複素数体 $\mathbb{C}$ のときは以下の対応がつけられます．

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

つまり $a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ となります．この対応は一対一になります．

$n = 2$ つまり $\mathbb{H}$ の時も以下のように一対一対応になります．

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

おまけ

証明等はしませんが $n=8$ までの Cln が何と同型になっているかだけあげておきます．ただし $M_n(K)$ は K を行列成分に持つ n 次正方行列とします．

Cln	同型なもの	次元
Cl_0	$\mathbb{R}$	1
Cl_1	$\mathbb{C}$	2
Cl_2	$\mathbb{H}$	4
Cl_3	$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$	8
Cl_4	$M_2(\mathbb{H})$	16
Cl_5	$M_4(\mathbb{C})$	32
Cl_6	$M_8(\mathbb{R})$	64
Cl_7	$M_8(\mathbb{R})\times M_8(\mathbb{R})$	128
Cl_8	$M_{16}(\mathbb{R})$	256

5　参考文献

Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory / Andrew Baker (2002)
『代数学〈1〉群と環 (大学数学の入門)』 桂 利行 (2004)

数学記号の歴史 (今井)

はじめに

前号の $e^{\pi i}sode$ を読んだことがある人は知っていると思いますが，数学科生にしかわからないような難しい数学の話がほとんどでした．この号も前号ほどではないものの，ちょっと難しいなあと思った方もいるのではないでしょうか．まあ東大の数学科生の書く記事なのでそうなるのももっともではありますが，とりあえず五月祭の数学科ブースに来て何気なくこの冊子を手に取った読者の中には，「そんなこと書かれてもわからないよ」という読者もいるでしょう．この記事は，そんな読者も含め文系理系や数学の学習歴に関係なく気軽に楽しめるような記事として書こうと思っています．

さて，前置きはこのくらいにして早速本題に入りますが，皆さんはどのような数学記号を知っているでしょうか．$+$，$-$，$\times$，$\div$，$=$ くらいならどんなに数学嫌いの人でもさすがに知っているでしょう．ということで，まずはこれらの記号に根号を表す $\sqrt{\ }$，$\times$ と同じく掛け算を表す $\cdot$ を加えた 7 つの記号から始めたいと思います．1 節は小学校高学年以上，2 節は中学生以上，3 節は高校生以上を対象として書いています．

1 四則演算，冪根，等号

下に書いている通り，現在のように $+$，$-$，$\times$，$\cdot$，$\div$，$=$，$\sqrt{\ }$ の記号が使われるようになったのはつい数百年前の 16〜17 世紀，日本でいえば戦国時代か江戸時代初めのころですが，もちろんそれ以前に計算が行われなかったわけではありません．小学校で習うこれら四則演算（足し算，引き算，掛け算，割り算）は今から約 4000 年前の古代エジプトや古代メソポタミアでも行われていました．それどころか古代メソポタミアについては，2 次方程式や 3 次方程式の解法について書かれた粘土板まであります．しかしこれらの粘土板やエジプトのパピルスには見慣れた数学記号は一切出てきません．ではどのようにして計算を書き記していたのかと思われるでしょう．実は文章で計算をあらわしていたのです．例えば $5 \times 3 + 2 = 17$ は「5 の 3 倍に 2 を加えると 17 になる」という具合です（もちろん古代エジプトや古代メソポタミアなので，日本語ではなくヒエログリフで書かれたエジプト語や楔形文字で書かれたシュメール語ではありますが）．ところが，単純な計算ならそれで良いですが，複雑な計算を考えるようになるにつれて，文章で表すのは大変になってきます．そこで単語を略したり記号を使ったりするようになりました．$+$，$-$ などの登場よりも数百年も前に，インドやギリシャでは単語の頭文字等を演算を表すのに用いていたり，アラビアでは記号を用いて式を書いている記録が残っていますが，その話は割愛します．

1.1 $+$，$-$

7 つの記号のうち，一番初めに登場したのは $+$ と $-$ で，確認されている中では 1489 年に出版されたヴィットマン（J. Widmann, 1460-?）による計算法の本 [1] に登場します．しかし，この本において $+$ と $-$ は足し算や引き算の記号ではなく，過不足を表す記号として用いられています．例えば，

$4 + 5$ と書いて 4 ツェントネル 5 ポンド
$3 - 12$ と書いて 3 ツェントネルに 12 ポンド不足つまり 2 ツェントネル 88 ポンド
（1 ツェントネルは 100 ポンドで，ツェントネル，ポンドは重さの単位）

のように使ったようです．計算記号として $+$，$-$ を使っている本としては 1514 年に出版されたファンデルフッケ（G. Vander Hoecke, ?-?）の本 [2] があります．

$+$，$-$ のうち $+$ の方は起源がはっきりしています．ラテン語の “et”（接続詞，〜と〜）の走り書きです．一方，$-$ の方については諸説あり，ラテン語の “minus”（より少ない）の省略形 m̃ をさらに省略した形という説もあります．

1.2 $\sqrt{\ }$

$+$，$-$ の登場から数十年遅れて，根号の記号として $\sqrt{\ }$ が登場します．1525 年ルドルフ（C. Rudolff, 1499-1545）に

---

[1] “Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft”『あらゆる商取引の敏捷で上手な計算法』
[2] “Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica”

よる代数学教科書[3]において，平方根を$\surd$と表しています．その後シュティフェル（M. Stifel, 1486?-1567）によって改訂された第2版（1553）[11]において，立方根，4乗根，5乗根については$\surd$の後にそれぞれ筆記体のce，zz，ßのような記号（それぞれ3乗，4乗，5乗を表すcubice, zensizensice, sursolideの略）を書き加えることで表しています．根を表すラテン語の“radix”の頭文字rが由来という説もありますが，由来ははっきりとはわかっていません．上の横線は元々はなく，横線を加えて$\sqrt{\ }$を使ったのは，哲学者としても有名なデカルト[4]（R. Descartes, 1596-1650）です．

1.3　=

次に登場したのは＝です．1557年にイギリスのレコード（R. Recorde, 1512?-1558）が書いた代数学の本[5]において，“is equalle to”（～は～と等しい）という言葉の繰り返しを避けるために「2本の平行な線は最も等しい2つのものですから[6]」，＝を使う，としています．

1.4　×，÷，·

×を初めて掛け算の記号として用いたのは，イギリスのオートレッド（W. Oughtred, 1574-1660）であり，彼の1631年の著書“Clavis mathematicae”『数学の鍵』に出てきます．また，÷はスイスのラーン（J. Rahn, 1622-1676）による“Teutsche Algebra”（1659）が初出と言われています．×については由来は不明ですが，÷については元々ラテン語の“divisa est”（割られた）の“est”を表す記号で，“divisa ÷”の“divisa”が省略されたという説があります．

高校数学以降乗算（掛け算）の記号として使われる·を初めて使ったのはイギリスのハリオット（T. Harriot, 1560-1621）[7]と言われていますが，広く使われるようになったのは，微積分の発見で有名なライプニッツ（G. W. Leibniz, 1646-1716）がヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli, 1667-1748）に送った手紙（1698年7月29日付）に記されてからです．ライプニッツはこの手紙の中で，

「xと混同しやすいので×は好きではない．私はしばしば単に2つの数量の間に点を書いて$ZC.LM$によって積を表す．」

と述べています．

2　文字式，指数，小数

さて，四則演算や冪根，等号を表す記号ができて，ヨーロッパにおける記号代数学が始まったわけですが，この記号だけでは，当時最先端の数学の数式を書くには多少不便でした．というのも，求めたい未知数を文字で表すことは3世紀のギリシャでも行われていましたが，既知の定数を文字で表すということはしていなかったため，今の記法でいう$x^2+ax+b=0$等のいわゆる一般の2次方程式などを書き表すことはできず，具体的に係数がわかっている方程式しか解くことができなかったのです．

2.1　既知数を表す文字

フランスの数学者ヴィエト（F. Viète, 1540-1603）は，既知数を文字で表した最初の数学者であり，このため，「代数学の父」と呼ばれることもあります．ヴィエトは，既知数を母音（A，E，Iなど），未知数を子音（B，Dなど）で表しました．彼の死後，1646年に出版された，彼の数学における業績をまとめた“Opera Mathematica”『数学著作集』から引用すると，

> Si A *quad.* $+ B2$ *in* A, æquetur Z *plano*. $A+B$ esto E. Igitur E *quad.*, æquabitur Z *plano* $+ B$ *quad.*
> Confectarium.
> Itaque, $\sqrt{Z\ plani + B\ quad.} - B$ fit A, de qua primum quærebatur.
> （日本語訳）
> （Aの二乗$+B\cdot 2\cdot A$）が（面積Z）に等しいとする．$A+B$をEとおく．
> すると，Eの二乗は（面積Z+Bの二乗）に等しいだろう．
> 結論

---

[3] “Die Coß”

[4] “La Géométrie”『幾何学』（1637）

[5] “The whetstone of witte whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng the extraction of rootes: the cossike practise, with the rule of equation: and the woorkes of surde nombers.”

[6] “bicause noe 2, thynges, can be moare equalle”

[7] 彼の死後に出版された“Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas”『代数的方程式を解くための解析的方法』（1631）

これより，初めの方程式から，($\sqrt{\text{面積}\,Z + B\,\text{の二乗}} - B$) が A になることがわかる．

と書いてあります[8]．つまり，既知数を文字で表すことで，2 次方程式の解の公式を書き表すことに成功したのです．

2.2　指数，小数の記法

現在では指数は a^3 のように右肩に指数を書くことで表しますが，この記法に落ち着くまでには様々な紆余曲折がありました．前節の引用部分では「2 乗された」という意味のラテン語 “quadratus” の略 *quad.* を使って 2 乗を表しています．また，1.4 節に出てきたオートレッドは 2 乗を q，3 乗を c として，A^{10} を $Aqqcc$，つまり A の（$2+2+3+3$）乗と表しています．これらの記法に代わって，ベルギーのステヴィン（S. Stevin, 1548-1620）は，未知数の冪乗，つまり今でいう x^1，x^2，x^3，$\cdots$ を①，②，③，$\cdots$ と表し，さらに丸の中の数字を分数にすることで $x^{\frac{2}{3}}$ なども表せるようにしました．未知数が複数あるときは丸付き数字の前に第 2 の未知数は sec，第 3 の未知数は ter，$\cdots$ と書くことで表しました．例えば，現代の記法では

$$2x^{\frac{2}{3}}y^4 + 3z - y^3z^{\frac{1}{2}}$$

と書く多項式を，

$$2 \ \textcircled{\tfrac{2}{3}} \ M \ sec \ \textcircled{4} + 3 \ ter \ \textcircled{1} - sec \ \textcircled{3} \ M \ ter \ \textcircled{\tfrac{1}{2}}$$

と表しました．

また，彼はこの指数の記法と同じ記号を用いて，小数を書き表しました[9]．例えば，ステヴィンの記法では 27.847 を

$$27\textcircled{0}8\textcircled{1}4\textcircled{2}7\textcircled{3} \quad \text{または} \quad 27\overset{0}{}\overset{1}{8}\overset{2}{4}\overset{3}{7}$$

と書きます．小数といえば，「この箱の重さは 1.5kg」「100m 走の世界記録は 9.58 秒」のように現代ではだれでも当たり前のように使っていますが，実は 16 世紀以前の人々は小数というものを知らず，整数で表しきれない端数は分数を使って表していました．

指数と小数を現在のような形で書き始めたのは，それぞれ，デカルト[4] とネイピア[10]（J. Napier, 1550-1617）ですが，デカルトはステヴィンとは違い，指数が正の整数のときにしか使いませんでした．現在のように，指数が分数か整数か，正か負かにかかわらず，右肩に書いて表したのは，万有引力の法則や微積分の発見で有名なニュートン（I. Newton, 1643-1727）がロンドン王立協会初代事務局長のオルデンブルク（H. Oldenburg, 1618-1677）に宛てて た 1676 年 6 月 13 日の手紙の中で，非整数冪に一般化された二項定理の説明をする際に用いたのが最初とされています．文字指数（a^b のような書き方）もニュートンが導入しました．

3　微積分

お気づきの読者もいるかもしれませんが，前節に出てきたニュートンと 1.4 節に出てきたライプニッツの両方について「微積分の発見で有名」と書きました．しかし，2 人は一緒に研究して微積分を発見したわけではありません．実は彼らはほぼ同時期に別々に微積分を発見したのです．

3.1　$\dot{y}$

1665 年 5 月 20 日，1 枚の紙にニュートンは「流率（fluxio[11]）」を表すためにドットを上に付けた記号を書きました．「流率」とは瞬間的な変化率，つまり今でいう時間 t で微分した時の導関数のことです．ニュートンは物体の運動から微積分の概念を思いつきました．つまり流率とは速度のことなのです．逆に，速度の関数から物体がどれだけ進んだかを求める積分のことは「流量（fluens[11]）」と表しました．

ところで，この紙は出版はされず，出版物でこの流率の記号が現れるのは，28 年後の 1693 年，イギリスの数学者ウォリス（J. Wallis, 1616-1703）の『代数学』“Algebra”（1685）を改訂してラテン語版 [12] を出版する際にニュート

---

8) 面積（planus，元々は「平らな」という意味の形容詞で格変化した形が plano, plani）と書いてあるのが気になるかもしれません．当時の数式は幾何学的な意味を伴っているとみなされていたため，未知数の 1 乗は長さ，2 乗は面積，3 乗は体積を表していました．そのため，体積と長さ，面積と体積など，次元が違う者同士の足し算や引き算等は意味がないとみなされ，しないことになっていました．この例の場合，（A の二乗 $+B \cdot 2 \cdot A$）は面積を表すので，それと等しい Z も面積でなければならなかったのです．

9) “De Thiende”『10 分の 1』(1585)

10) “Rabdologia”『棒計算術』(1617)

11) fluxio, fluens, differentialis, integralis という単語は，当時の科学界の公用語であるラテン語です．ニュートンとライプニッツの論文もラテン語で書かれています．

ンが書き足した部分です．この本において，ニュートンは，y の流率（つまり現在の記法で $\frac{dy}{dt}$）は $\dot{y}$，その流率（つまり 2 階導関数，$\frac{d^2y}{dt^2}$）は $\ddot{y}$，その流率（つまり 3 階導関数，$\frac{d^3y}{dt^3}$）は $\dddot{y}$，その流率（つまり 4 階導関数，$\frac{d^4y}{dt^4}$）は $\ddddot{y}$ と書き，

$$\frac{yy}{b-x},\ \sqrt{aa-xx}\quad (aa, xx, yy\ \text{それぞれ}\ a^2, x^2, y^2\ \text{を表す})$$

の流率とそのまた流率はそれぞれ，

$$\frac{\dot{yy}}{b-x},\ \dot{\sqrt{aa-xx}}\quad と\quad \frac{\ddot{yy}}{b-x},\ \ddot{\sqrt{aa-xx}}$$

と書きました．この本にはドットを付けて表す流率，つまり時間 t で微分したものしか載っていませんが，別のところで，t 以外で微分したもの，例えば現代の記法で $\frac{dy}{dx}$ に当たるものとして，$\dot{y} : \dot{x}$ と書いています．ここで，: は割り算の意味で使われています．

しかし，上記の分数や根号の流率は印刷するのが難しかったため，あまり好まれず広まらなかったようです．$\dot{x}$，$\dot{y}$ の形だけは現在でも残っていて，物理学で時間での微分を表すのに使われています．

3.2　$\frac{dy}{dx}$

1675 年 11 月 11 日，ライプニッツの手記において，初めて dx，dy が x，y の微分（x，y を動かしたときに，x，y が動いた長さ）として使われました．ライプニッツの場合，曲線とその接線の関係性を調べる方法として微積分を編み出したため，dx や dy といった概念が必要となりました．これらを “differentialis[11)]”（微分 [12)]）と名付けたのも彼です．dx，dy の d は “differentialis” の頭文字です．

ライプニッツは同じ手稿の中で x を y で微分した導関数を $\frac{dx}{dy}$ と表しました．ニュートンのときと同様，これは出版されず，出版物で dx，dy が初めて登場したのは，1684 年に科学雑誌 “Acta Eruditorum”[6] にライプニッツが寄稿した論文です．論文においては，手稿とは異なり，x を y で微分した導関数は : を用いて，$dx : dy$ と表し，$\sqrt[b]{X^a}$ の微分は $d, \sqrt[b]{X^a}$（d の直後のカンマに注意），$\frac{1}{X^a}$ の微分は $d\frac{1}{X^a}$ と表しました．また，1693 年の “Acta Eruditorum”[7] を見ると，2 階導関数は $ddx : d\overline{y}^2$ と書かれています．$d\overline{y}^2$ の上線は，括線とよばれ，括弧と同様の役割を果たしました．この場合，$d\overline{y}^2$ は現在の記法では $d(y)^2$ ということになりますが，（$d\{(y)^2\}$ ではなく）$\{d(y)\}^2$ の意味で使っていたようです．

ライプニッツの記法は多くのスペースを必要とするものの，どの変数で微分しているかが明確に表せたため，後に多変数関数の微分を考えるようになってから重宝され，今日でも幅広く使用されています．

3.3　$f'(x)$

高校数学では，ほとんどの場合導関数を表すために $'$ をつけて表しますが，この記法はニュートンのものでもライプニッツのものでもありません．この記法はこの 2 人の時代より 1 世紀ほど経った 1759 年，イタリア生まれで主にフランスで活躍したラグランジュ（J. L. Lagrange, 1736-1813）が，論文集 “Miscellanea Taurinensis” の一部として書いた論文に現れます．ラグランジュは，その後 “Théorie des fonctions analytiques”『解析関数論』（1797）で微積分学に大きな影響を残しました．ラグランジュの記法では x の関数を fx と書き，1 階導関数を $f'x$，2 階導関数を $f''x$，3 階導関数を $f'''x$，と書くとし，y が x の関数のとき，導関数を同様に y'，y''，y'''，$\cdots$ と書くとしています．x に括弧がついていないことを除けば，現代の記法と同じです．また，ニュートンの記法との違いは，変数 x を明示することでどの変数で微分したかわかるようになっていることです．ライプニッツの記法に比べスペースも少なく済むため，今日まで生き残っているのだと思われます．

3.4　$\frac{\partial f}{\partial x}$

多変数関数の微分を考えるようになると，数学者たちは偏微分と全微分を書き分ける必要が出てきました．f の x による偏導関数を表す記法のいくつか例を挙げると，

オイラー（L. Euler, 1707-1783）　$\left(\frac{df}{dx}\right)$（1755，全微分は括弧なし）

カーステン（W. J. G. Karsten, 1732-1787）　$\overset{x}{frac d}f dx$（1760）

フォンテーヌ（A. Fontaine, 1704-1771）　$\frac{df}{dx}$（1764，全微分は $\frac{1}{dx}\cdot df$）

などです．参考文献の [4] を見ると他にも色々な記法が使われていたことがわかります．現代の記法である $\frac{\partial f}{\partial x}$ はルジャンドル（A. M. Legendre,　1752-1833）が 1786 年の論文で導入します．しかし，しばらくの間，多くの数学者

12) ライプニッツは x，y の動きが無限小の場合に限らず，dx，dy をただ単に差として使っていて，直訳だと「差分」の方が近いです．このことは，differentialis という単語が，英語の difference（差）と似ていることからも推察できます．

がオイラーやフォンテーヌの記法を使い続けます．ルジャンドル自身，後の論文では全微分と偏微分の記法を区別しなかったりしたようです．さらに，当時数学の別の分野（数値解析の有限差分法）において d を使っていたため，全微分を ∂ を使って表したりする人もいて，記法は定まることなくさらに数十年が経過します．1841 年，ヤコビ（C. G. J. Jacobi, 1804-1851）が論文 “De determinalibus functionalibus” で再び d と ∂ による全微分と偏微分の書き分けを導入し，その後 50 年ほど経って，19 世紀の終わりごろに一般的な記法とみなされるようになりました．

3.5　$\int$

$\int$ という記号は，1675 年 10 月 29 日のライプニッツの手稿に初めて現れます．このとき，ライプニッツは “$\int l$ pro omn. l” と書いて，「全ての l の和」という意味で使っていました．$\int$ という記号も，和を意味するラテン語の “summa”（当時は語末以外の小文字の s は f の横棒を消したような形の文字（以後「長い s」と呼びます）で書いていました．）の頭文字の「長い s」のイタリック体です．“integralis[11]”（積分）という用語を考えたベルヌーイは，イタリック体の I を使ってはどうかと提案しましたが，最終的にはライプニッツに敬意を表して $\int$ を使うことにしたそうです．出版物で $\int$ が初めて出てきたのは 1686 年で，これも “Acta Eruditorum” の論文が初出ですが，このときはもっと「長い s」に近い形だったようです．

1675 年 10 月 29 日の手稿には $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$ と書いてあります．現代の記法と比べると積分の最後に dx がないことがわかります．一方，1686 年の出版された論文では，ライプニッツは最後に dx を書いています．積分を微分の逆としてみるなら，確かに dx は不要かもしれません．実際，dx を書かず，$\int_x$ と書いた数学者もいたようです．

1819-20 年には，フーリエ（J. Fourier, 1768-1830）が定積分の記法 $\int_a^b$ を考案しました．偏微分の記号とは全く違い，こちらは概ね好評で，すぐに自分の論文に取り入れた数学者もいました．

3.6　ニュートンの積分記号

微分に関してはニュートンの記法もライプニッツの記法も現在まで引き継がれていますが，積分に関してはどうでしょう．$\int$ とその派生形である $\oint$ 以外を目にしたことがある人はほとんどいないのではないでしょうか．ニュートンも当然，流量（積分）の記号は考案して使っていました．

ニュートンの記法は 2 つありました．まず 1 つ目は文字の上に縦棒を書く方法[13]です．例えば，x の流量は $\overset{|}{x}$，その流量は $\overset{||}{x}$ といった具合です．

2 つ目は四角で囲む方法です．例えば，現代の記法で書くと $\int \frac{a^2\,dx}{64x}$ という式を，ニュートンは “De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas”（1669）において $\boxed{\frac{aa\cdot dx}{64x}}$ と書いています．

ニュートンの記法が普及しなかったのは，1 つ目に関しては x' と紛らわしく，2 つ目に関しては，印刷するのが大変だったためということのようです．

結び

もちろんこれ以外にも数学記号はたくさんあるのですが，それを思いつくままに片っ端から由来を調べていたのではきりがないので，この記事はこのあたりで終わりにしたいと思います．この記事を書くにあたって私も利用しましたが，数百年前の数学書は著作権も当然切れていて，ネットで全文公開されているものも少なくありません．ほとんどがラテン語で書かれているので大多数の人は読めないとは思いますが，数式や図を見てみても，現代の数学書とはだいぶ雰囲気が違います．暇な時にでも見てみるといいかもしれません．ここまで読んでくださりありがとうございました．

参考文献

[1]　岡本久，長岡亮介 (2014). 関数とは何か　近代数学史からのアプローチ. 東京:近代科学社
[2]　Cajori, F. 著, 小倉金之助補訳 (1997). カジョリ初等数学史. 東京:共立出版
[3]　中村滋 (2015). 数学史の小窓. 東京:日本評論社
[4]　Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. *Annals of Mathematics, 25*(1), second series, 1-46. doi:10.2307/1967725
[5]　Gerhardt, C. I. (1855). *Leibnizens mathematische Schriften.* Halle: Verlag von A. Asher & Comp.
[6]　Grosse II, J., Gleiditsch II, J. F., et al. (1684). *Acta eruditorum: anno MDCLXXXIV publicata.* Leipzig

[13] “Quadratura curvarum”（1704）

[7] Grosse II, J., Gleiditsch II, J. F., et al. (1693). *Acta eruditorum: anno MDCXCIII publicata.* Leipzig

[8] Heeffer, A. (2008). The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models. *Foundations of Science, 13*(2), 149-161. doi:10.1007/s10699-008-9124-0

[9] Miller, J. (n.d.). Earliest Uses of Symbols of Operation. Retrieved April 17, 2018, from http://jeff560.tripod.com/operation.html

[10] Newton, I. (2008). *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press

[11] Rudolff, C., Stifel, M. (1553). *Die Coss Christoffs Rudolffs mit schnen Exempeln der Coss / durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt.* Königsperg: gedrückt durch Alexandrum Lutomyslensem

[12] Wallis, J. (1693). *De algebra tractatus; historicus & practicus.* Oxford: Sheldonian Theatre

無限の大きさ比べ (濱田)

はじめに

この文章は，理学部数学科 4 年 (2018 年度) の濱田が，五月祭学術企画「ますらぼ」のために作成したものです．ますらぼでのミニ講演は 10-15 分程度であり，短い時間の中で数学の魅力を伝えることはできても，数学をきちんと語るにはそれなりの時間が必要です．そこで，講演では概要だけわかりやすく説明して，詳しい中身に興味が湧いた方にはこの文章を読んでもらおう，ということにしました．この文章で講演内容をどれだけ補えているかはわかりませんが，できるだけわかりやすく書いたつもりです．お暇なときにゆっくりお読みいただければ幸いです．なお，本文中に高校数学で学ぶ記号が説明なしに登場します．意味が分からなければ，調べていただくか，読み飛ばしていただいても差し支えありません．

1　イントロダクション

「無限」という言葉は，おそらく多くの方が耳にしたことがあると思います．しかし，無限とは何か，ということをきちんと考えてみたことはあるでしょうか．明鏡国語辞典によれば，無限とは「限度がないこと．果てがないこと.」という意味だそうです．何も言っていませんね．このように，無限とは私たちが思っている以上に難しい概念であり，実はそれは数学の世界でも変わりません．この文章では，無限の大きさ比べをテーマに，数学ではどのように「無限」を扱っているのかをほんの少しでもわかってもらうことを目指します．

2　大きさ比べの準備

この節では，無限の大きさを比べるために，集合と写像に関するいろいろな言葉を定義します [1]．現代数学では，まず言葉や概念を準備して，それらの満たす性質を確認し，定理を証明する，という方法をとるのが一般的です．ここでも，その習慣に倣って進めていくことにしましょう．ただし，必ずしも数学を専門としない方にとっては，それだとわかりづらいかもしれないので，できるだけ例や問題も絡めていきたいと思います．

2.1　集合

何かある性質を満たす「もの」全部を集めたものを集合と呼びます．ただし，「ある性質」は一つの「もの」に対してイエスかノーで判定できるものでなければなりません．集合は以下のように記述します:

$$\{x \mid x\text{ が満たす条件}\},\ \{x, y, z\},\ \{a, b, c, \cdots\}$$

例 2.1. $P = \{x \mid x\text{ は図鑑番号 1 から 151 までの炎タイプのポケモン}\}$ は集合である．一方，$Q = \{x \mid x\text{ はみんなが好きなポケモン}\}$ は集合とは言えない．数学的な例を挙げると

- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{ は自然数}\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$[2]
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{ は整数}\} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{ は有理数}\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{ は実数}\}$
- $\mathbb{C} = \{x \mid x\text{ は複素数}\}$

は集合である [3] が，$X = \{p \mid p\text{ は素数っぽい数}\}$ は集合とは言えない．

問題 2.2. 例 2.1 に倣って，図形に関するもので「集合と言えるもの」・「集合と言えないもの」を挙げよ．

---

[1] 数学の世界で無限と言うと，解析学に現れる極限といった「無限」もありますが，ここでは集合の「無限」について考えることにします．

[2] 高校までは「自然数は $1, 2, 3, \cdots$」であることになっていますが，大学に来ると「自然数は $1, 2, 3, \cdots$」という流儀と「自然数は $0, 1, 2, \cdots$」という流儀が存在します．この文章では後者の 0 を含む流儀を採用することにします．この事実からわかるように，自然数に 0 を入れるか否かという問題は，数学的に自然数の本質を突くものではありません．

[3] $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ は黒板太字と呼ばれ，大学数学でよく使われます．大変便利な記号なので，この文章でも使うことにします．

Aを集合とするとき，Aを構成する一つ一つの「もの」を，集合Aの元 (あるいは要素) と呼びます．aが集合Aの元であるとき，aはAに属すると言い，このことを$a \in A$と書きます．逆に，aがAに属さないことを$a \notin A$と書きます．例えば，例2.1に戻ると，リザードン$\in P$，ピカチュウ$\notin P$，$2018 \in \mathbb{N}$，$-273 \notin \mathbb{N}$となります．

また，2つの集合A, Bの元が全く同じである，すなわちAの元がすべてBに属し，かつBの元がすべてAに属するとき，AとBは等しいと言い，$A = B$と書きます．

例 2.3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$である．ただし，$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$は「実数$x$ (すなわち$x \in \mathbb{R}$) であって$x^2 = 1$を満たすもの全部の集合」を表している．

次に定義する言葉は，集合と集合の間の包含関係を表す概念です．

定義 2.4 (部分集合)**.** 集合A, Bが「$x \in A$ならば$x \in B$」を満たすとき，AはBの部分集合であると言い，このことを$A \subset B$と書く．特に$A \subset B$かつ$A \neq B$が成り立つとき，AはBの真部分集合であると言い，このことを$A \subsetneq B$と書く．

例 2.5. $A = \{$ミズゴロウ, ヌマクロー, ラグラージ$\}$，$B = \{$ミズゴロウ, ラグラージ$\}$，$C = \{$ヌマクロー$\}$とすると，$B \subset A$，$C \subsetneq A$などが成り立つが，$C \subset B$は成り立たない．

部分集合の定義から「$A \subset B$かつ$B \subset A$ならば$A = B$」が成り立つことがわかります．したがって，$A = B$を証明するには$A \subset B$かつ$B \subset A$であることを示せば十分です．

ここで，大きさ比べの対象となる「無限個の元を持つ集合」を定義しておきましょう．

定義 2.6 (有限集合・無限集合)**.** 集合Aの元の個数が有限であるとき，Aを有限集合と呼ぶ．有限集合でない集合を無限集合と呼ぶ．

無限であるということを「有限でないこと」と定義しました．多くの数学の本もこのように定義していると思います．結局何も言っていません．ずるいですね．

2.2 写像

さて，集合は用意したものの，集合どうしを比べる「ものさし」が無いと，大きさの比べようがありません．そこで，集合と集合の間の関係を定めるための概念として「写像」というものを定義しましょう．

定義 2.7 (写像)**.** A, Bを集合とする．任意の$a \in A$に対し，ただ一つの元$b \in B$を対応させるものを，AからBへの写像と呼ぶ．fがAからBへの写像であることを$f\colon A \to B$と書き，このときAを定義域，Bを値域と呼ぶ．また，fによって$a \in A$が対応する$b \in B$を$f(a)$と書く．

例 2.8. $\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への写像fを次のように定める:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 1$$

矢印$\mapsto$は，$x \in \mathbb{R}$に対し$2x + 1 \in \mathbb{R}$を対応させる，という意味である．つまり，写像$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$は一次関数に他ならない．関数とは，一般に$\mathbb{R}$や$\mathbb{C}$を値域に持つ写像のことを言う．一方，$x > 0$に対し$g(x) = (x$の平方根$)$とすると，$g$は写像でない．

問題 2.9. 集合$X = \{0, 1, 2, 3\}$に対し，$\mathbb{N}$からXへの写像を一つ挙げよ．また，例2.8に倣って，写像でないものも一つ挙げよ．

次の定義は何だか回りくどいですが，要するに「fがAの元とBの元を1対1に結び付ける」ということです．この言葉が無限の大きさ比べのキーワードになります．

定義 2.10 (1対1対応)**.** fをAからBへの写像とする．任意の$b \in B$に対し$b = f(a)$を満たす$a \in A$がただ一つ存在するとき，fをAからBへの1対1対応[4]と呼ぶ．

問題 2.11. 例2.8の写像fは$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への1対1対応であることを示せ．

---

[4] 一般には全単射 (全射かつ単射の意) と呼ばれることが多いですが，わかりやすさを考えてこの表現を使いました．

3 集合の大きさ比べ

さて，いよいよ無限の大きさを比べてみましょう．そこで，無限集合の「大きさ」にあたる濃度という概念を定義します．

定義 3.1 (濃度)**.** 集合 A, B に対し，A から B への 1 対 1 対応が存在するとき，A と B の濃度は等しいと言い，このことを $|A| = |B|$ と書く．

ここで注意しておきたいのは，濃度は「一つひとつの集合に対して定まるものではない」ということです．つまり，無限集合の大きさを，一つの集合の大きさを見るのではなく，二つの集合のうちどちらが大きいかによって測ろうとしています．「無限は数えられない」という問題をこのように回避するのは，なかなかうまいやり方だと思いませんか．

例 3.2. $\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の真部分集合であるが，$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ が成り立つ．実際，写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定めれば，これは 1 対 1 対応である．f は次のような写像になっている．

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\cdots$

問題 3.3. $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は偶数}\}$ とする．E は $\mathbb{N}$ の真部分集合であることを示し，さらに $|\mathbb{N}| = |E|$ が成り立つことを示せ．

例 3.2 や問題 3.3 からわかるように，$A \subsetneq B$ であっても $|A| = |B|$ となることがあります．この一見不思議な現象は，有限集合では決して起こりません．この事実だけでも，無限がいかに恐ろしいものかおわかりいただけるかと思います．

さて，ここまでは濃度の等しい集合ばかり見てきましたが，いよいよ大きさの違う無限の話題に入ります．

定義 3.4 (可算・非可算)**.** $|A| = |\mathbb{N}|$ を満たす集合 A を可算無限集合と呼ぶ．このとき，A は可算である，といった言い方もする．一方，可算でない無限集合のことを非可算無限集合と呼ぶ．

例 3.2 で見た通り，$\mathbb{Z}$ は可算となります．実は $\mathbb{Q}$ も可算であることが証明できます (考えてみてください)．しかし，$\mathbb{R}$ は非可算です．最後にこのことを証明しましょう．

補題 3.5. $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ である．ただし $(0,1)$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ を意味する．

証明． 写像 $f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ は 1 対 1 対応である．したがって $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ である．　□

定理 3.6. $\mathbb{R}$ は非可算である．

証明． 補題 3.5 より，$(0,1)$ が非可算であることを示せばよい．このことを背理法を用いて示そう．$(0,1)$ が可算であると仮定すると，$\mathbb{N}$ から $(0,1)$ への 1 対 1 対応が存在する．すなわち，$(0,1)$ の元を $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$ と並べあげることができる．以下 $(0,1) = \{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\}$ とする．

次に，各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $x^{(n)} \in (0,1)$ を以下のように 10 進小数表示する:

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)} \cdot 10^{-k-1} = 0.x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} x_3^{(n)} x_4^{(n)} x_5^{(n)} \cdots,\ x_k^{(n)} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

ここで，$x^{(n)} \neq 0, 1$ であることから，$x_0^{(n)} = x_1^{(n)} = x_2^{(n)} = \cdots = 0$ や $x_0^{(n)} = x_1^{(n)} = x_2^{(n)} = \cdots = 9$ が成り立つことはない．そこで

$$y_n = \begin{cases} 2 & (x_n^{(n)} \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (x_n^{(n)} \text{ が偶数のとき}) \end{cases} (n = 0, 1, 2, \cdots),\ y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot 10^{-n-1}$$

とおくと，$y \in (0,1)$ となる．ところが，y の作り方から，すべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $y \neq x^{(n)}$ となることがわ

かる．これは $(0,1) = \{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\}$ であることに矛盾する．したがって，$(0,1)$ は非可算であるから，濃度の等しい $\mathbb{R}$ も非可算である． $\square$

定理 3.6 は，$\mathbb{R}$ が非可算無限集合であることを示すための有名な方法で，カントールの対角線論法と呼ばれるものの一種です．この定理から，集合 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$ よりも「大きな」無限集合であることがわかります．

これで本文はおしまいです．お疲れ様でした．

4 章末問題

問題 4.1 (ド・モルガンの法則)**.** X を集合とし，A, B をその部分集合とする．このとき

$$A^c = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \notin A\}$$

により定義される集合 A^c を A の補集合と呼ぶ．また

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}, A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

により定義される集合 $A \cup B$，$A \cap B$ を，それぞれ A と B の和集合，共通部分と呼ぶ．これらに関する次の等式を証明せよ．

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

問題 4.2. 集合 X, Y に対し，次の 3 つの条件は同値であることを証明せよ．すなわち，次の 3 つの条件は互いに必要十分条件となっていることを示せ．

1. $X \subset Y$
2. $X \cup Y = Y$
3. $X \cap Y = X$

問題 4.3 (ラッセルのパラドックス)**.** 次のような集合を考えると矛盾が生じることを示せ．

$$X = \{S \mid S \text{ は集合で } S \notin S\}$$

定義 4.4 (二項関係)**.** X を集合とする．$x, y \in X$ がある条件を満たすときに $x \sim y$ と書くとき，$\sim$ を X の二項関係という．

定義 4.5 (同値関係)**.** 集合 X に対し，その二項関係 $\sim$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$\sim$ を X の同値関係と呼ぶ．

1. (反射律) 任意の $x \in X$ に対し $x \sim x$
2. (対称律) 任意の $x, y \in X$ に対し $x \sim y$ ならば $y \sim x$
3. (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$

問題 4.6. 次の問いに答えよ．

1.「集合の大きさ比べ」の節において定義した「濃度」は反射律，対称律，推移律を満たすことを示せ．すなわち，集合 A, B, C に対し以下が成り立つことを示せ．
   a. $|A| = |A|$
   b. $|A| = |B|$ ならば $|B| = |A|$
   c. $|A| = |B|$ かつ $|B| = |C|$ ならば $|A| = |C|$
2.「集合の大きさ比べ」の節において，1 の事実を利用している箇所を指摘せよ．

問題 4.7. 実数列全体の集合を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とするとき，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は非可算であることを証明せよ．

5 問題の解答

問題 2.2

(例) $X = \{x \mid x \text{ は正三角形}\}$ は集合である．一方，$Y = \{y \mid y \text{ は円に近い図形}\}$ は集合とは言えない．

問題 2.9

(例) 写像 $f\colon \mathbb{N} \to X$ を $f(n) = (n$ を 4 で割ったときの余り$)$ と定めると，f は写像である．一方，$n \in \mathbb{N}$ に対し $g(n) = (n$ 個の元を持つ X の部分集合$)$ とすると，g は写像でない．

問題 2.11

任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し，$y = f(x)$ すなわち $y = 2x + 1$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ は，$x = \dfrac{y-1}{2}$ ただ一つである．したがって，f は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への 1 対 1 対応である．

問題 3.3

まず $E \subsetneq \mathbb{N}$ であることを示そう．$E \subset \mathbb{N}$ であることは E の定義からわかるから，$E \neq \mathbb{N}$ であること，すなわち $\mathbb{N} \subset E$ が成り立たないことを示せばよい．これは次のようにしてわかる: 1 は $\mathbb{N}$ の元であるが E の元ではない．したがって $\mathbb{N} \subset E$ は成り立たない．ゆえに $E \subsetneq \mathbb{N}$ である．

次に $|\mathbb{N}| = |E|$ であることを示そう．写像 $f\colon \mathbb{N} \to E$ を

$$f(n) = 2n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定めると，これは $\mathbb{N}$ から E への 1 対 1 対応である．したがって $|\mathbb{N}| = |E|$ である．

6　章末問題の解答

問題 4.1

1. $x \in (A \cup B)^c$ に対し，$x \notin A \cup B$ なのだから $x \notin A$ かつ $x \notin B$ が成り立つ．したがって $x \in A^c \cap B^c$ である．また，$x \in A^c \cap B^c$ に対し，$x \notin A$ かつ $x \notin B$ なのだから $x \notin A \cup B$ が成り立つ．したがって $x \in (A \cup B)^c$ である．以上より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ である．
2. $x \in (A \cap B)^c$ に対し，$x \notin A \cap B$ なのだから $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ．したがって $x \in A^c \cup B^c$ である．また，$x \in A^c \cup B^c$ に対し，$x \notin A$ または $x \notin B$ なのだから $x \notin A \cap B$ が成り立つ．したがって $x \in (A \cap B)^c$ である．以上より $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ である．

問題 4.2

まず $1 \Rightarrow 2$ であることを示そう．$Y \subset X \cup Y$ は明らかだから，$X \cup Y \subset Y$ であることを示せば十分である．そこで，$x \in X \cup Y$ とすると $x \in X$ または $x \in Y$ である．$x \in X$ であるとすると，仮定 1 より $X \subset Y$ だから $x \in Y$ である．したがって，いずれにしても $x \in Y$ である．ゆえに $X \cup Y \subset Y$ である．よって 2 が成り立つ．

次に $2 \Rightarrow 3$ であることを示そう．$X \cap Y \subset X$ は明らかだから，$X \subset X \cap Y$ であることを示せば十分である．そこで $x \in X$ であるとすると特に $x \in X \cup Y$ である．よって，仮定 2 より $X \cup Y = Y$ だから $x \in Y$ である．したがって $x \in X \cap Y$ であり，ゆえに $X \subset X \cap Y$ である．以上より 3 が成り立つ．

最後に $3 \Rightarrow 1$ であることを示そう．そこで $x \in X$ であるとすると，3 より $x \in X \cap Y$ である．よって特に $x \in Y$ である．したがって 1 が成り立つ．

これで 1，2，3 が互いに必要十分条件になっていることが証明された．実際，例えば $1 \Leftrightarrow 2$ は次のようにしてわかる．

- $1 \Rightarrow 2$ は直接示してある．
- $2 \Rightarrow 1$ は $2 \Rightarrow 3$ かつ $3 \Rightarrow 1$ であることから従う．

問題 4.3

もし $X \in X$ であるとすると，X の定義より $X \notin X$ となり矛盾する．また，$X \notin X$ であるとしても，やはり X の定義より $X \in X$ となり矛盾する．

問題 4.6

1. a. $a \in A$ を a 自身に移す写像 $\mathrm{id}\colon A \to A$ を考えると [5]，これは 1 対 1 対応である．したがって $|A| = |A|$ である．

[5] このような写像のことを恒等写像と呼びます．

b. 仮定より，1 対 1 対応 $f\colon A \to B$ が存在する．このとき，すべての $b \in B$ に対し $b = f(a)$ を満たす $a \in A$ がただ 1 つ存在するから，$b \in B$ に対し $b = f(a)$ なる $a \in A$ を対応させる写像 $g\colon B \to A$ を考えれば [6]，g は 1 対 1 対応である．したがって $|B| = |A|$ である．

c. 仮定より，1 対 1 対応 $f\colon A \to B$ および $g\colon B \to C$ が存在する．ここで，写像 $h\colon A \to C$ を $h(a) = g(f(a))$ で定義すると [7]，これは 1 対 1 対応である．したがって $|A| = |C|$ である．

2. 定理 3.6 の証明の 1 文目で使っている．もし $(0,1)$ が可算すなわち $|(0,1)| = |\mathbb{N}|$ であるとすると，補題 3.5 の結果から，推移律を用いて $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$ が得られ，$\mathbb{R}$ は可算となってしまう．

問題 4.7

背理法により証明する．$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が可算であると仮定すると

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\}$$

と書ける．ただし，各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $x^{(m)} = \{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ は実数列である．このとき，数列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次のように定める．

$$n = 0, 1, 2, \cdots \text{ に対し} \quad y_n = \begin{cases} 1 & (x_n^{(n)} \text{が負であるとき}) \\ -1 & (x_n^{(n)} \text{が負でないとき}) \end{cases}$$

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ は実数列であるから $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ である．ところが，$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ の定義から，各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $x^{(m)} \neq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ となる．したがって $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \notin \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ であるが，これは矛盾である．以上より，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は非可算である [8]．

---

[6] このような写像を逆写像と呼び，f の逆写像のことをよく f^{-1} と書きます．この解答では $g = f^{-1}$ となっています．

[7] このような写像を合成写像と呼び，よく $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ と書きます．

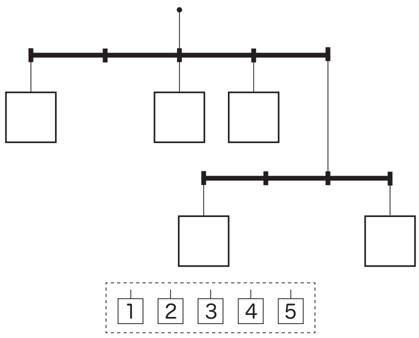
[8] 対角線論法を用いるひとつの例として出題しました．

パズルのコーナー(まどれ〜ぬ)

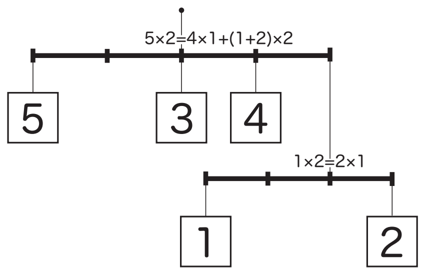
てこのパズル

〈ルール〉指定された重さのおもりを１つずつ配置して、すべての棒が水平に釣り合うようにします。棒と糸の重さは、無視できるものとします。
※棒が釣り合う条件は、支点の左右で（重さ）×（距離）の和が等しくなることです。

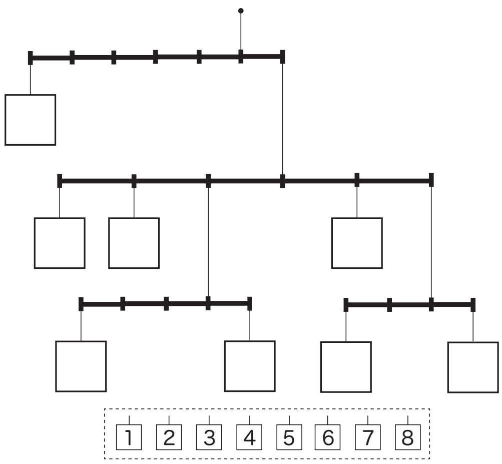
例題



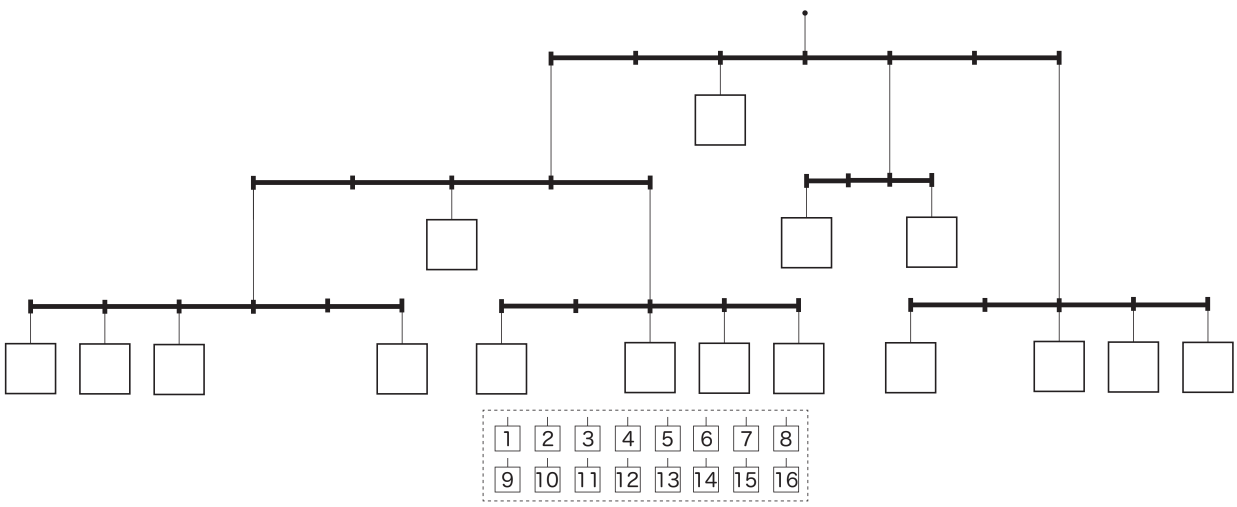
例題の答え



１．



２．



$e^{\pi i} sode$ **Vol.7**

2018年5月19日発行

著　者・・・・・東京大学理学部数学科有志

発行人・・・・・濱田 昌隆