Appunti di Algebra

Quel ragazzo con la maglia blu

May 12, 2022

Contents

1 Divisione nei numeri naturali e nei numeri interi

Insieme dei numeri **naturali**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Insieme dei numeri **interi**:

$$\mathbb{Z} = \{... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

1.1 Divisione in $\mathbb{N}$

$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

$$\exists! q, r \in \mathbb{N} \qquad | \qquad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q = quoziente
r = resto
$|$ = tale che

Esempio 1 $a = 137$ $b = 55$ $\qquad \underset{a}{137} = \underset{b}{55} \cdot \underset{q}{2} + \underset{r}{27}$

Esempio 2 $a = 137$ $b = 142$ $\qquad \underset{a}{137} = \underset{b}{142} \cdot \underset{q}{0} + \underset{r}{137}$

NB1 per provare che q ed r **esistono** si usa il principio di induzione

NB2 q ed r **sono unici** significa:

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ a = bq_2 + r_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq r_1 < b \\ 0 \leq r_2 < b \end{matrix} \implies \begin{cases} q_2 = q_1 \\ r_2 = r_1 \end{cases}$$

1.2 Divisione in $\mathbb{Z}$

La definizione è uguale per i numeri interi
$\forall a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ \exists! q,\ r \in \mathbb{Z}$ tali che $a = bq + r$
con unica differenza $0 \leq r < |b|$

$$|r| = \begin{cases} r \text{ se } r \geq 0 \\ -r \text{ se } r < 0 \end{cases}$$

NB Se non si impone la condizione $\begin{cases} r \geq 0 \\ r < |b| \end{cases}$ non si ha l'unicità di q e r

Ad esempio
$a = 137$ $b = -55$ $\qquad \underset{a}{137} = \underset{b}{(55)}\ \underset{q}{-2}\ \underset{r}{+27}$ $\qquad$ ma anche $\underset{a}{137} = \underset{b}{(-55)}\ \underset{q}{-3}\ +\underset{r}{-28}$

NB1 la dimostrazione dell'esistenza di q ed r è simile a quella che si fa in $\mathbb{N}$, ottenuta sempre col principio di induzione.

NB2 q, r sono unici perché si richiede $0 \leq r < |b|$

NB3 $a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0$ in $\mathbb{Z} : a = bq_1 + r_1,\, 0 \leq r - 1 < |b|$
$|a|, |b| \in \mathbb{N},\, |b| \neq 0$ in $\mathbb{N} : |a| = |b| \cdot q_2 + r_2 \;\; 0 \leq r_2 < |b|$

ATTENZIONE Non c'è un nesso tra il quoziente ed il resto della divizione di a e b in $\mathbb{Z}$ ed il quoziente ed il resto della divizione di $|a|$ e $|b|$ in $\mathbb{N}$

Ad esempio

$$\begin{array}{cc|cc} a = -137 & \underset{a}{-137} = \underset{b}{55}\underset{q_1}{(-3)} + \underset{r_1}{28} & |a| = 137 & \underset{|a|}{137} = \underset{|b|}{55} \cdot \underset{q_2}{2} + \underset{r_2}{27} \\ b = 55 & & |b| = 55 & \end{array}$$

1.3 Divisibilità in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

Divisibilità in $\mathbb{N}$ $a,\, b \in \mathbb{N},\, b \neq 0$

$$\begin{array}{cc} b|a \text{ se } a = bq \; \exists q \in \mathbb{N} \; ^{(1)} & b \not| a \\ \text{divide} & \text{non divide} \\ \text{Es. } 6|18 & \text{Es. } 4|18 \end{array}$$

Per esempio $6|18$

Divisibilità in $\mathbb{Z}$ $a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0$

$$b|a \text{ se } \exists q \in \mathbb{Z} | a = bq \qquad \text{altrimenti } b \not| a$$

NB $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, a \neq 0 \begin{cases} b|a \\ a|b \end{cases} \implies a \in \{b, -b\}$

1.4 Massimo Comun Divisore in $\mathbb{N}$ ed in $\mathbb{Z}$

MCD In $\mathbb{N}$ $\forall a,\, b \in \mathbb{N},\, (a, b) \neq \underset{\uparrow}{(0, 0)}$
(almeno uno dei due deve essere diverso da 0)

Un $d \in \mathbb{N}$ è un $MCD(a, b)$ se

1. $d|a$ e $d|b$ (è un divisore comune di a e b)
2. se $z|a$ e $z|b \implies z|d$

Ossia, se d è un divisore comune di a E B CHE

NB 1 $MCD(a, b)$ è ! in $\mathbb{N}$ è **il** $MCD(a, b)$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad\qquad 18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{ccc} 60|2 & & 18|2 \\ 30|2 & & 9|3 \\ 15|3 & & 3|3 \\ 5|5 & & \end{array}$$

$$d = 2 \cdot 3 = 6$$

NB 2 $MCD(a,b) = MCD(b,a)$

NB 3

$$\begin{cases} b|a \\ b \neq 0 \end{cases} \implies MCD(a,b) = b \tag{1}$$

NB 4 $a,\, b \in \mathbb{N}$ $b \neq 0$ $\quad \exists q,\, r \in \mathbb{N}$
$a = bq + r$ (2) $\quad 0 \leq r < b$

Perciò

$$MCD(a,b) = MCD(b,r)$$

Per provarlo, proviamo che i due insiemi A e B sono uguali:
$A = \{z \mid z|a \text{ e } z|b\}$ = insieme dei divisori comuni di a e b
$B = \{w \mid w|b \text{ e } w|r\}$ = insieme dei divisori comuni di b e r

$$z \in A \implies \begin{cases} z|a \\ z|b \end{cases} \quad \begin{cases} z|a - bq = r \\ z|b \end{cases} \quad \implies z \in B \implies A \subseteq B$$

$$w \in B \implies \begin{cases} w|b \\ w|r \end{cases} \quad \begin{cases} w|b \\ w|bq + r = a \end{cases} \quad \implies w \in A \implies B \subseteq A$$

In $\mathbb{Z}$ $\forall a,\, b \in \mathbb{Z}$ con $(a,b) \neq (0,0)$ $d \in \mathbb{Z}$ è **un** $MCD(a,b)$ se

1. $d|a$ e $d|b$ $\qquad$ d è un divisore comune di a e b
2. $\begin{cases} z|a \\ z|b \end{cases} \implies z|d$ $\qquad$ d è un multiplo di ogni divisore comune di a e b

Abbiamo già visto che $d = MCD(a,b)$ è unico in $\mathbb{N}$
Anche in $\mathbb{Z}$ scrivo $d = MCD(a,b)$ anche se la nozione è "impropria".

NB In $\mathbb{Z}$ d è individuale e non ha segno.
Se d è un massimo comun divisore di a e b allora anche $-d$ è un massimo comun divisore di a e b.

Quindi in $\mathbb{Z}$ $MCD(a,b)$ non indica un solo numero, ma 2: d e $-d$.
Es. $-6 = MCD(-12, 18) = +6$

Perché per parlare di $MCD(a,b)$ è **necessario** supporre $(a,b) \neq (0,0)$

(2) $r = a - bq$

NB $\underset{b}{2}|\underset{a}{0}$ $\quad \underset{a}{0} = \underset{b}{2} \cdot \underset{q}{0}$
$3|0$ $\quad 142|0$ $\quad \forall b \neq 0 \quad b|0$

Ecco perché è importante quando si parla di $\mathrm{MCD}(a, b)$
se fosse $(a, b) = (\underset{a}{0}, \underset{b}{0})$ allora $\forall z \neq 0\ z|0$

L'insieme dei divisori comini di $(a, b) = (0, 0)$ è

$$\{z | z \in \mathbb{Z}, z \neq 0\}$$

Dunque non c'è un $MCD(a, b)$ nel casi in cui $(a, b) = (0, 0)$

NB $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$
$a = bq + r \qquad 0 \leq r < |b|$

$$\Longrightarrow MCD(a, b) = MCD(b, r)$$

è la stessa osservazione che abbiamo fatto per $MCD(a, b)$ nel caso $a, b \in \mathbb{N},\ b \neq 0$

NB $a, b \in \mathbb{Z}$, **non entrambi nulli** allora
$MCD(a, b) = MCD(-a, b) = MCD(a, -b) = MCD(-a, -b)$

1.5 Calcolo MCD in $\mathbb{N}$: Algoritmo di Euclide

1.5.1 In $\mathbb{N}$

$$a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \neq a$$

1^o **passaggio** $a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$

SE $r_1 = 0$ $MCD(a, b) = MCD(b, r_1) = MCD(b, 0) = b$
STOP

Esempio 1 $\quad \mathrm{MCD}(\underset{a}{36}, \underset{b}{12}) =$
P1 $\underset{a}{36} = \underset{b}{12} \cdot \underset{q_1}{3} + \underset{r_1}{0} \Longrightarrow MCD(36, 12) = MCD(12, 0) = 12$
1^{o}P $a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$

SE $r_1 \neq 0$ **continua.**

2^o **passaggio SI DIVIDE** b **per** r_1

$b = r_1 q_2 + r_2 \qquad = \leq r_2 < r_1$

SE $R_2 = 0$ **STOP**

$\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(b, r_1) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{MCD}(r_1, r_2) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{MCD}(r_1, 0) = r_1$
. $\qquad b = r_1 q_2 + r_2 \qquad$ se $r_2 = 0$

Potevo vederlo così: se $r_2 = 0$ allora $b = r_1 q_2 + r_2 = r_1 q_2$
per cui $\mathrm{MCD}(b, r_1) = r_1$ quindi $\mathrm{MCD}(a, b)$ =$\mathrm{MCD}(b, r_1) = r_1$

Esempio 2 $\quad \mathrm{MCD}(\underset{a}{42}, \underset{b}{12} = 6)$

1^op $\quad \underset{a}{42} = \underset{b}{12} \cdot \underset{q_1}{3} = \underset{r_1}{6}$
$r_1 \neq 0 \quad 2^o p \quad \underset{b}{12} = \underset{r_1}{6} \cdot \underset{q_2}{2} + \underset{r_2}{0}$ $\quad$ **SE** $r_2 \neq 0$ continuo...

$MCD(A,B)$ è l'ultimo resto non nullo della sequenza di divisioni successive

Es 1 $MCD(\underset{a}{36},\underset{b}{28}) = 4$

$\underline{1^o p}$ $\underset{a}{36} = \underset{b}{28} \cdot \underset{q_1}{1} + \underset{r_1}{8}$

$\underline{2^o p}$ $\underset{b}{28} = \underset{r_1}{8} \cdot \underset{q_2}{3} + \underset{r_2}{4}$

$\underline{3^o p}$ $\underset{r_1}{8} = \underset{r_2}{4} \cdot \underset{q_3}{2} + \underset{r_3}{0}$ $\quad r_3 = 0 \Longrightarrow r_2 = \text{MCD}$

Es 2 $MCD(\underset{a}{2420},\underset{b}{1386}) = 22$

$\underline{1^o p}$ $\underset{a}{2420} = \underset{b}{1386} \cdot \underset{q_1}{1} + \underset{r_1}{1034}$

$\underline{2^o p}$ $\underset{b}{1386} = \underset{r_1}{1034} \cdot \underset{q_2}{1} + \underset{r_2}{352}$

$\underline{3^o p}$ $\underset{r_1}{1034} = \underset{r_2}{352} \cdot \underset{q_3}{2} + \underset{r_3}{330}$

$\underline{4^o p}$ $\underset{r_2}{352} = \underset{r_3}{330} \cdot \underset{q_3}{1} + \underset{r_4}{22}$

$\underline{5^o p}$ $\underset{r_3}{330} = \underset{r_4}{22} \cdot \underset{q_3}{15} + \underset{r_5}{0}$

1.5.2 In $\mathbb{Z}$

1^o modo consigliato

- $|a|,|b| \in \mathbb{N}$
- $MCD(|a|,|b|) = d \in \mathbb{N}$
- d $-d$ boh illeggibile $\qquad MCD(a,b)$ in $\mathbb{Z}$

2^o modo Algoritmo di Euclide in $\mathbb{Z}$

Esempio $MCD(\underset{a}{-274},\underset{b}{110})$

$|a| = |-274| = 274$
$|b| = |110| = 110$

1^o Modo svolgimento

$\underline{1^o p}$ $\underset{a}{274} = \underset{b}{110} \cdot \underset{q_1}{2} + \underset{r_1}{54}$

$\underline{2^o p}$ $\underset{b}{110} = \underset{r_1}{54} \cdot \underset{q_2}{2} + \underset{r_2}{2}$

$\underline{3^o p}$ $\underset{r_1}{54} = \underset{r_2}{2} \cdot \underset{q_3}{27} + \underset{r_3}{0}$

$MCD(|a|,|b|) = d = 2 \Longrightarrow 2$ e -2 sono i $MCD(-274,110)$

2^o Modo Algoritmo di Euclide in $\mathbb{Z}$

$\underline{1^o p}$ $\underset{a}{274} = \underset{b}{110} \cdot \underset{q_1}{(-3)} + \underset{r_1}{56}$ $\qquad \underset{110}{|b|} > r_1 \geq 0$

$\underline{2^o p}$ $\underset{b}{110} = \underset{r_1}{56} \cdot \underset{q_2}{1} + \underset{r_2}{54}$

$\underline{3^o p}$ $\underset{r_1}{56} = \underset{r_2}{54} \cdot \underset{q_3}{1} + \underset{r_3}{2}$ $\qquad 2$ e -2 sono i due massimi comuni divisori di -274 e 110

$\underline{4^o p}$ $\underset{r_2}{54} = \underset{r_3}{2} \cdot \underset{q_3}{27} + \underset{r_4}{0}$

2 Polinomi

$$S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

$S[x]$ =Insieme dei polinomi a coefficienti in S nella indeterminata x
$f(x) \in S[x]$ se $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ Robette che non ho capito bene bene bene
Se $a_n \neq 0$ IL GRADO DI $f(x)$ è
$n = \deg f(x)$; a_n si chiama **coefficiente direttore** di $f(x)$, a_0 si chiama **termine noto** di $f(x)$

NB 1 $\begin{cases} c \in S \\ c \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \deg c = 0$

NB 2 $c = 0 \in S$ per convenzione di pone $\deg 0 = -\infty$

2.1 Somma di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$ definisco $f(x) + g(x) \in S[x]$

Es $f(x) = 2 - x^3 + 3x^2$ $g(x) = 7x + x^3 + 12$

$$\begin{array}{cc} 2 + 0x + 3x^2 - x^3 + & \deg f(x) = 3 \\ 12 + 7x + 0x^2 + x^3 = & \deg g(x) = 3 \\ \hline 14 + 7x + 3x^2 & \deg\big(f(x) + g(x)\big) \leq 3 \end{array}$$

$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ $a_n = 0, \deg f(x) = n$
$g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m = \sum_{i=0}^m b_ix^i$ $b_n = 0, \deg g(x) = m$
Per fissare le idee si ponga che $m \leq n$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_ix^i$$

NB $\deg\big(f(x) + g(x)\big) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

2.2 Prodotto di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$ definisco $f(x), g(x) \in S[x]$
nel seguente modo:
se $f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^m b_ix^i$ allora

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) =$$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m) =$

$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_a + a_2b_0)x^2 + ... = = \sum_{i=0}^i a_kb_{i-k}\left(\sum_{k=0}^i a_kb_{i-k}\right)x^i$

NB $\deg\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \deg f(x) + \deg g(x)$

Esempio $f(x) = 2 - x + 6x^2$ $g(x) = 1 + 4x$
$(2 - x + 6x^2)(1 + 4x) = ... = 2 + 7x - 4x^2 + 6x^4 + 24x^5$

DA QUESTO MOMENTO $S \neq \mathbb{Z}$: $S \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

2.3 Divisioni di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x], g(x) \neq 0 \ \exists! q(x), r(x) \in S[x]$ tale che $\begin{cases} f(x) = g(x)q(x) + r(x) \\ \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$

Esempio Divido $f(x) = 7x^4 + 3x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ per $g(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$
\begin{array}{rl|l}
7x^4 & & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
-7x^4 - 7x^3 - 7x^2 & & 7x^2 - 7x \\ \cline{1-1}
-7x^3 - 7x^2 & & \\
7x^3 + 7x^2 + 7x & & \\ \cline{1-1}
7x & &
\end{array}
$$

2.4 Radici di un polinomio

Sia $f(x) \in S[x]$.
Un numero $x_0 \in S$ si dice una **radice** [3] di $f(x)$ se $f(x_0) = 0$ [4]
Quindi x_0 è una radice di $f(x)$ se e solo se x_0 è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$

Esempio $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$x_0 = -1$ è una radice di $f(x)$: $f(-1) = (-1+1)^2 = 0$
$x_0 = 1$ è soluzione dell'equazione $x^2 + 2x + 1 = 0$ [5]

2.4.1 Teorema di Ruffini

Se $f(x) \in S[x]$ ed $x_0 \in S$
$(x_0$ è una radice di $f(x)) \iff (x - x_0) \underset{(divide)}{\mid} f(x) \iff f(x) = \underset{\exists q(x) \in S[x]}{(x - x_0)q(x)}$
dividendo $f(x)$ per $x - x_0$ si ha $r(x) = 0$

2.4.2 Radici di polinomi di 2^o grado a coefficienti reali

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$ è il discriminante dell'equazione

- **SE $\Delta > 0$ ci sono due soluzioni REALI distinte**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **SE $\Delta = 0$ l'equazione ha UNA soluzione REALE**
  "contata due volte"

$$(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(x+1) \qquad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- **SE $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali, ma ha 2 soluzioni complesse**

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  Poiché $\sqrt{-\Delta} \neq 0 \implies x_1 \neq x_2$
  L'equazione ha 2 soluzioni complesse **coniugate** (l'una coniugata dell'altra)

$$x_1 = \overline{x_2}$$

(3) oppure uno *zero*
(4) "f valutato in $x_0 = 0$"
(5) ovvero $f(x)$

$$x_2 = \overline{x_1}$$

Equivalentemente dato $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
$f(x) = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big)$ e $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ha due radici complesse x_1, x_2

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

e quindi

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{C} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

2.5 Teorema fondamentale dell'algebra

$$\forall f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$$

$$\text{polinomio di grado } n > 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

$\exists z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n)$$

potrebbero esserci ripetizioni

Ad esempio se $f(x) = (x-1)^n = (x-1)(x-1)...(x-1)$ allora $z_1 = z_2 = ... = z_n = 1$
Ogni polinomio di grado $n > 0$ e coefficienti complessi è prodotto di n polinomi di grado 1
Se $z_0, z_1, ..., z_x$ (6) sono quegli z_i DISTINTI, allora

$$f(x) = a_n(x - z_1)^{m_2}(x - z_2)^{m_2}...(x - z_k)^{m_k}$$

m_i = **la molteplicità algebrica di** z_i
È equivalente a: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
L'equazione $f(x) = 0$ (7) ha n soluzioni:
z_1 contata m_1 volte
z_2 contata m_2 volte
z_3 contata m_3 volte
...
...
z_k contata m_k volte

$$m_1 + m_2 + ... + m_k = n$$

Esempio $f(k) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3) = (x - 1)^2(x - 3)$
$z_1 = -1$ $m_1 = 2$
$z_2 = 3$ $m_2 = 1$

Ogni equazione a coefficienti complessi di grado n ha n soluzioni complesse
contate con le loro molteplicità

(6) sono le radici di $f(x)$
(7) cioè $a(x - z_n)^{m_1}(x - z_2)^{m_2}...(x - z_k)^{m_k} = 0$

Ritorniamo alle divisioni in $\mathbb{Z}$
Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $d = MCD(a, b)$ Vogliamo trovare $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$d = ma + nb$$

Esempio $a = 10$ $b = 4$ $d = 2$
cerco $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che
$\underset{2}{d} = \underset{10}{a}m + \underset{4}{b}n$

Calcolo d usando l'algoritmo di Euclide:

$$\underset{a}{10} = \underset{b}{4} \cdot \underset{q_1}{2} + \underset{r_1}{2} \qquad d = 2 = \underset{a\uparrow}{10} + \underset{b}{4} \cdot \underset{n}{(-2)}$$
$$\underset{a}{4} = \underset{b}{2} \cdot \underset{q_1}{2} + \underset{r_1}{0}$$

. $m = 1$

NB m, n non sono univocamente individuati da a e b

Esempio $2 = m10 + n4$ ma anche $\underset{d}{2} = \underset{a}{10} \cdot \underset{m}{3} + \underset{b}{4} \cdot \underset{n}{(-7)}$
$m = 1$, $n = -2$

2.6 Identità di Bezout (teorema)

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, posto $d = (a, b)$ $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$d = ma + nb$$

NB m, n non sono unici
Per trovarli posso:

1. Applico l'algoritmo di Euclide in $\mathbb{Z}$ e lo "ripercorro" all'indietro"
   OPPURE
2. (a) calcolo $|a|, |b| \in \mathbb{N}$
   (b) osservo $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$
   (c) prendo d il $MCD(|a|, |b|)$**positivo**
   calcolato con l'algoritmo di Euclide in $\mathbb{N}$
   Lo ripercorro all'indietro e ottengo $m^*, n^* \in \mathbb{Z}$

$$d = m^*|a| + n^*|b|$$

   (d) se $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$ e $m = m^*$, se $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$ e $m = -m^*$
   se $b \geq 0 \Rightarrow |b| = b$ e $n = n^*$, se $b \leq 0 \Rightarrow |b| = -b$ e $n = -n^*$

Esempio $\begin{matrix} a = -36 \\ b = 28 \end{matrix}$ se $d = MCD(a, b)$, cerco $m, n \in \mathbb{Z}$ tale che $d = ma + nb$

1^o Modo Algoritmo di Euclide in $\mathbb{Z}$ e calcolo d
$\underset{a}{-36} = \underset{b}{28} \cdot \underset{q_1}{(-2)} + \underset{r_1}{20} \Rightarrow \boxed{20 = -36 + 2 \cdot 28}$
N.B. $0 \leq r_1 < |b| = 28$
$\underset{b}{28} = \underset{r_1}{20} \cdot \underline{q_2}1 + \underline{r_2}8 \Longrightarrow 8 = 28 + 20 \cdot (-1)$
$\underset{r_1}{20} = \underset{r_2}{8} \cdot q_3 2 + \underset{r_3}{4} \Longrightarrow d = 4 = 20 + 8 \cdot (-2) = 20 + (-2)[28 + 20 \cdot (-1)] =$

$= 20 + (-2) \cdot 28 + 20 \cdot 2 =$
$= 3 \cdot 20 + (-2) \cdot 28 =$
$3 \cdot [-36 + 2 \cdot 28] + (-2) \cdot 28$
$= 3 \cdot (-36) + 6 \cdot 28 + (-2) \cdot 28 == 3 \cdot (-36) + 4 \cdot 28$

2^o Modo Cerco $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $d = am + bn$ dove $d = MCD(a, b)$ $|a| = |-36| = 36$
NB $MCD(|a|, |b|) = MCD(a, b) = d$
$|b| = |28| = 28$ Intanto (PAOLO) l'algoritmo di Euclide a $|a|$ e $|b|$ e trovo $m*, n* \in \mathbb{Z}$
tali che $d = |a| \cdot m * + |b| \cdot n*$

PAOLO

3 Classi di Congruenza

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$
Si dice che a è **congruo** (o congruente) a b modulo n se

$$n|(a-b)$$

Si scrive $a \equiv b \mod n$; oppure $a \equiv b(\mod n)$ oppure $a \equiv_n b$

NB $a \equiv b \mod n \iff \begin{matrix}\text{il resto della divisione}\\ \text{di } a \text{ per } n\end{matrix} = \begin{matrix}\text{il resto della divisione}\\ \text{di } b \text{ per } n\end{matrix}$

Dimostrazione ipotesi: $a \equiv b \mod n$ tesi: i due resti sono uguali
divido a per n: $a = nq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < n$
divido b per n: $b = nq_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < n$
So che $a \equiv b \mod n \Longrightarrow n|(a-b)$
Da $a - b \underset{\uparrow}{=} nq_1 + r_1 - (nq_2 + r_2) = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$
$a = nq_1 + r_1$
$b = nq_2 + r_2$

Si ottiene: $r_1 - r_2 = (a-b) - n(q_1 - q_2)$

$$\begin{cases} n|n(q_1 - q_2) \\ n|a-b \end{cases} \Longrightarrow n|(a-b) - n(q_1 - q_2) \Longrightarrow n|r_1 - r_2$$

Perché per ipotesi $a \equiv b \mod n$

$$\text{se } r_1 \geq r_2 \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq r_1 - r_2 < n \\ n|r_1 - r_2 \end{cases} \Longrightarrow r_1 - r_2 = 0 \Longrightarrow r_1 = r_2$$

$$\text{se } r_2 \geq r_1 \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq r_2 - r_1 < n \\ n|(r_1 - r_2) \Rightarrow n|(r_2 - r_1) \end{cases} \Longrightarrow r_2 - r_1 = 0 \Longrightarrow r_2 = r_1$$

Viceversa

Ipotesi Considero
$a = nq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < n$
$b = nq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < n$
$r_2 = r_1$

Tesi $a \equiv b \mod n$

Dimostrazione Voglio arrivare a dire che $n|(a-b)$

$$\begin{cases} a = nq_1 + r_1 \\ r_1 = r_2 \end{cases} \Longrightarrow a = nq_1 + r_2 \Longrightarrow$$

$a - b = (nq_1 + r_2) - (nq_2 + r_2) = nq_1 + \cancel{r_2} - nq_2 - \cancel{r_2} = nq_1 - nq_2 =$
$= n(q_1 - q_2) \Longrightarrow n|(a-b)$

NB 2 Fisso $n \in \mathbb{N}$
La relazione di congruenza gode delle seguenti proprietà:

1. **è riflessiva**: $a \equiv a \mod n \forall a$
   (infatti $n|(a-a) = 0$)
2. **è simmetrica**: $a \equiv b \mod n \Longrightarrow b \equiv a \mod n$
   (infatti $n|(a-b) \Longrightarrow n|(b-a)$)
3. **è transitiva**: $\begin{cases} a \equiv b \mod n \\ b \equiv c \mod n \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c \mod n$
   Infatti $\begin{cases} a \equiv b \mod n \Longrightarrow n|(a-b) \\ b \equiv c \mod n \Longrightarrow n|(b-c) \end{cases} \Longrightarrow n|[(a-b)+(b-c)] = (a-c) \Longrightarrow$
   $\Longrightarrow a \equiv c \mod n$
   Ogni relazione che dove delle proprietà 1., 2., 3. si dice una
   relazione di equivalenza.
   Fissato $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$
4. $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \mod n \\ a_2 \equiv b_2 \mod n \end{cases} \Longrightarrow (a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2) \mod n$
   le congruenze modulo n si possono "sommare"
5. $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \mod n \\ a_2 \equiv b_2 \mod n \end{cases} \Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \mod n$
   le congruenze modulo n si possono "moltiplicare" PAOLO qui però ho copiato parecchio dalle slide vecchie

In generale

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, k \in \mathbb{Z}$
$$[a]_n = [a + kn]_n$$
2. $c \in [a]_n \Longrightarrow [a]_n = [c]_n$
3. In particolare (dividevo) a per:
   $a = qn + r$ con $0 \leq r < n$
   Si ha $[a]_n = [r]_n$
   Perché, essendo $r = a + n \cdot (-q)$, si ha che $r \in [a]_n$, quindi si può usare $[z]$??? con $c = r$

Def. $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n > 0$, si chiama
classe di congruenza a modulo n e si indica $[a]_n$ oppure $[a] \mod n$

$$\begin{aligned} [a]_n &= \text{ insieme di tutti i numeri interi che sono congrui ad } a \text{ modulo } n \\ &= \{b \in \mathbb{Z} | b \equiv a \mod n\} \end{aligned}$$

NB 1 $\forall b \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad [a]_n, [b]_n$
Voglio vedere che $[a]_n = [b]_n$ oppure che $[a]_n \cap [b]_n = \varnothing$ (8)
Infatti o $[a]_n = [b]_n$
Oppure $[a]_n \neq [b]_n$. Suppongo $[a]_n \cap [b]_n \neq \varnothing$
$\Longrightarrow \exists c \in [a]_n \cap [b]_n \Longrightarrow \begin{cases} c \in [a]_n \Longrightarrow [a]_n = [c]_n \\ c \in [b]_n \Longrightarrow [b]_n = [c]_n \end{cases}$
$\Longrightarrow [a]_n = [c]_n = [b]_n \Longrightarrow [a]_n = b_n$ è una **contraddizione**

(8) $[a]_n$ e $[b]_n$, pensati come insiemi di numeri interi, sono **insiemi disgiunti**

NB 2 $\forall n,\, n > 0$
Considero le classi di congruenza $[a]_n$ con $0 \leq a < n$
se $b \in \mathbb{Z}$, dividendo b su n si ha: $b = nq + r$ con $0 \leq r < n \Longrightarrow [b]_n = [r]_n \Longrightarrow b \in [r]_n$
Quindi

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup [2]_n \cup \ldots \cup [n-1]_n$$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{0 \leq a < n} [a]_n$$

Queste classi sono a due a due **disgiunte**, l'insieme delle classi $[0]_n, [1]_n, ..., [n-1]_n$ sono una **partizione** di $\mathbb{Z}$

Def. L'insieme degli interi modulo n, indicato con il simbolo $\mathbb{Z}_n$ è:

$$\mathbb{Z}_n = \Big\{[0]_n, [1]_n, [2]_n, ..., [n-1]_n\Big\}$$

In $\mathbb{Z}_n$ si definiscono $+$ e $\cdot$ nel seguente modo:

DA QUI RIPRENDO LEZIONE LIVE 6

Teorema 1 (*) ha soluzione $\Longleftrightarrow d = MCD(a,n)|b$
se $d|b$ una soluzione $x_0 = \alpha q$ dove $\begin{cases} d = \alpha a + bn \\ b = \alpha q \text{ per cui } q = \frac{b}{d} \end{cases}$

Teorema 2 se (*) ha soluzione e x_0 è una soluzione allora l'insieme di **tutte** le soluzioni è:
$\{x_k = x_0 + k \cdot \frac{n}{d} | k \in \mathbb{Z}\}$ si ripartiscomno nelle classi: $[x_0]_n, [x_1]_n, ..., [x_{d-1}]_n$
ESERCIZI

1. $\underset{a}{2}x \equiv \underset{b}{5} \mod \underset{n}{8}$
   (a) Calcolo $d = MCD(a,n) = MCD(2,8) = 2$
   (b) $d|b$ PAOLO

2. $\underset{x}{3} \equiv \underset{b}{4} \mod \underset{n}{7}$
   (a) Calcolo $d = MCD(a,n) = MCD(3,7) = 1$
   (b) $d|b$ $\quad 1|4$
   La congruenza ha ∞ numeri come soluzioni:
   $\{x_0 + 7k | x \in \mathbb{Z}\} = [x_0]_7$ dove x_0 è una particolare soluzione.
   Soluzione:
   $d = \alpha a + \beta n$
   $1 = \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 7$
   Bezout:
   $\underset{n}{7} = \underset{a}{3} \cdot \underset{q_1}{2} + \underset{r_1}{1} \Longrightarrow d = 1$
   $\underset{d}{1} = \underset{\beta=1}{7} + 3 \cdot (-2) \Longrightarrow \alpha = -2$
   $4 = 7 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 4$
   Le soluzioni sono tutte nella classe
   $[(-2) \cdot 4]_7 \Longrightarrow [-8]_7 = [-8+7]_7 = [-1]_7 = [-1+7]_7 = [6]_7$
   PAOLO

3. $\underset{a}{2}x \equiv \underset{b}{10} \mod \underset{n}{12}$
   PAOLO La congruenza ha infiniti numeri interi come soluzioni, che si ripartiscono in $d = 2$ classi di congruenza modulo $n = 12$

(a) calcolo x_0 (poi prendero anche $x_1 = x_0 + 6$)
$\underset{a}{2}x \equiv \underset{b}{10} \mod \underset{n}{12}$ $d = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 12$
$2 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 12$
$\underset{a}{2} = \underset{n}{12} \cdot \underset{q_1}{0} + \underset{r_1}{2} \Longrightarrow$ *Continua*
$\underset{d}{2} = \underset{a}{2} \cdot \alpha 1 + \underset{n}{12} \cdot \underset{\beta}{0}$ Moltiplico per $5 = \frac{b}{d}$
$\underset{b=10}{5 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot \underset{n}{12} \cdot 0$ Continua
L'insieme delle soluzioni della congruenza è:
$\{5 + 12k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11 + 12k | k \in \mathbb{Z}\}$

3.1 Invertibili in $\mathbb{Z}_n$ e il loro calcolo

$n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ si dice **invertibile modulo** n se la congruenza $ax \equiv 1 \mod n$ ha soluzioni.
quindi $\Longleftrightarrow MCD(a, n) = d | b = 1 \Longleftrightarrow MCD(a, n) = 1$
Si dice PAOLO.

Def. $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$
$[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ si dice **invertibile** in $\mathbb{Z}_n$ se
$\exists [b]_n \in \mathbb{Z}_n$ tale che $[a]_n[b] - n = [1]_n$
In questo case $[b]_n$ si dice **un inverso** di $[a]_n$
$[a]_n = [1]_n$ $ax \equiv 1 \mod n$ $d = MCD(a, n) = 1$ Essendo $[b]_n$ **unico** (Perché $d = 1$)
Allora $[b]_n$ è l'**inverso** di $[a]_n$ PAOLO

Esempio 1 6 non è invertibile modulo 9 perché $MCD(6, 9) \neq 1$
($6x \equiv 1 \mod 9$ non ha soluzioni)

Esempio 2 4 è invertibile modulo 9 perché $MCD(4, 9) = 1$
(4 e 9 sono coprimi)
$\underset{a}{4}x \equiv \underset{b}{1} \mod \underset{n}{1}$ ha soluzione
$\exists [4]_9^{-1}$
Calcolo l'inverso di $[4]_9$, cioè calcolo $[4]_9^{-1}$
$\underset{1}{d} = \alpha \underset{4}{a} + \underset{1}{\beta} \underset{9}{n}$
$\underset{n}{9} = \underset{a}{4} \cdot \underset{q_1}{2} + \underset{r_1}{1}$
$1 = 9 + 4 \cdot (-2)$ $\mathbb{Z}_p$ (con p un numero primo)
Sia p un numero primo e $[a]_p \in \mathbb{Z}_p$
Posso supporre $0 \leq a < p$A

se $a = 0$ allora $[a]_p = [0]_p$
$\nexists [b]_p | [0]_p [b]_p = [1]_p$
$\exists [0]_p^{-1}$

se $a \neq 0$ Siccome p è un numero primo PAOLO

Di $\mathbb{Z}_p$ **tutti di elementi** $\neq [0]_p$ sono **invertibili**.
Quanti sono? Sono $p - 1$
Il numero degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_p$ è $p - 1$
Quanti sono gli invertibili in $\mathbb{Z}_n$?
PAOLO

3.2 La funzione di Eulero

La funzione di Eulero ϕ li "conta"
$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
è definita da $\phi(n)$ =il numero dei naturali k tali che $\begin{cases} 0 \leq k < n \\ MCD(k,n) = 1 \end{cases}$ Se p è un numero primo (PAOLO) $\phi(p) = p - 1$

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{a_2} ... p_m^{a_m} \Longrightarrow \phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2} ... (1 - \frac{1}{p_m})$$

Finisci slide

3.3 Sistema di congruenze

UN sistema di congruenze è
$a_1 x \equiv c_1 \mod m_1$
$a_2 x \equiv c_2 \mod m_2$
...
$a_k x \equiv c_k \mod m_k$
Dove $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ $i = 1, ..., k$
PAOLO
"Risolvere" il sistema significa

- Dire se ha soluzioni oppure no
- nel caso le abbia, trovarle tutte

Un $x_0 \in \mathbb{Z}$ è UNA SOLUZIONE del sistema se è **contemporaneamente soluzione** di **ogni congruenza** del sistema.

NB 1 Se una congruenza non ha soluzioni allora l'intero sistema non ne ha.(9)

NB 2 Anche se tutte le congruenze del sistema hanno soluzione, non è detto che il sistema abbia soluzione.
Ad esempio

$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 0 \mod 6 \end{cases}$ non ha soluzioni anche se ogni sua configurazione ha soluzioni

(9) come avviene in tutti i sistemi

3.4 Il teorema cinese dei resti

Il teorema cinese dei resti da una condizione **sufficiente** affinché **particolari** sistemi di congruenze abbiano soluzioni.

Dati $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}, n_i > 0 \qquad i = 1, ..., k$
a due a due coprimi[10]

$\forall b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{Z}$ si ha che $\exists$ infinite soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \\ ... \\ x \equiv b_k \mod n_k \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \text{Esse si trovano tutte nella stessa classe} \\ \text{di congruenze modulo } n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k \end{array}$$

NB La condizione che gli n_1 siano a due a due coprimi non è una condizione neccessaria affinché il sistema abbia soluzioni:

Esempio 1 $\begin{cases} 5x \equiv 3 \mod \underset{n_1}{7} \\ 3x \equiv 6 \mod \underset{n_2}{7} \end{cases} \qquad \begin{array}{c} n_1 = n_2 \Longrightarrow MCD(n_1, n_2) \neq 0 \\ \text{Però il sistema ha soluzione } [2]_7 \end{array}$

Esempio 2 $\begin{cases} x \equiv 0 \mod \underset{n_1}{2} \\ x \equiv 2 \mod \underset{n_2}{4} \end{cases} \qquad \begin{array}{c} MCD(n_1, n_2) \neq 0 \\ \text{Però il sistema ha soluzione in } [2]_4 \end{array}$

Cominciamo a studiare Il caso $k = 2$

$$\begin{cases} A \rightarrow \\ B \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \end{cases} \quad MCD(n_1, n_2) = 1$$

3.4.1 Metodo di Newton

1. $x_1 = b_1$
2. Cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_1 + t_2 n_1 \equiv x_2$ sia soluzione di B
   Così cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che
   $b_1 = t_2 n_1 \equiv b_2 \mod n_2$
   $t_2 n_1 \equiv (b_2 - b_1) \mod n_2$
   dove t_2 è il numero intero che cerco in modo tale che:
   $x_2 \equiv b_2 \mod 4$ (siccome cerco t_2)
   $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv x - 1 = b_1 \mod n_1$
3. x_2 è una soluzione di $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$
4. Per il teorema cinese dei resti, le soluzioni del sistema sono esattamente tutti i numeri interi nella classe $[x_2]_n = \{\}$ PAOLO

Esempio $\begin{cases} x \equiv \underset{b_1}{4} \mod \underset{n_1}{6} \\ x \equiv \underset{b_2}{3} \mod \underset{n_2}{5} \end{cases}$
$MCD(n_1, n_2) = MCD(6, 5) = 1$
Posso applicare il teorema dinese dei resti e concludere che il sistema ha infinite soluzioni: tutti i numeri in $[x_2]_30 = \{x_2 + 30k | k \in \mathbb{Z}\}$

(10) cioè se $i \neq j$ allora $MCD(n_i, n_j) = 1$

1. $x_1 = 4$

2. cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $\quad x_2 = \quad x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \mod n_2$, ovvero
$$4 + t_2 \cdot 6 \equiv 3 \mod 5$$
Facendo i conti in $\mathbb{Z}_5$: $[4]_5 + t_2[6]_5 = [3]_5$
$t_2 \cdot 6 \equiv 3 - 4 \mod 5$
$6t_2 \equiv -1 \mod 5 \Longrightarrow t_2 \equiv 4 \mod 5$

3. ad esempio prendo $t_2 = 4 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x_2 = x_1 + t_2 n_1 = 4 + 4 \cdot 6 = 28$

Per il teorema cinese dei resti tutte le soluzioni di $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ sono gli interi nell'insieme $[28]_{30} = \{28 + 30k | k \in \mathbb{Z}\}$

Il caso $k = 3$ Consideriamo

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow \\ B \longrightarrow \\ C \longrightarrow \end{array} \begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \\ x \equiv b_3 \mod n_3 \end{cases}$$

E lo risolviamo col teorema cinese dei resti con l'ipotesi:

$MCD(n_1, n_2) = 1$
$MCD(n_1, n_3) = 1$
$MCD(n_2, n_3) = 1$

Per trovare x_3:

1. Scelgo una soluzione di $A : x_1 = b_1$

2. Cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \mod n_2$

3. x_2 è soluzione di $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

4. Cerco $t_3 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2) = x_3$ x_3 è soluzione di $\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$

   $\underset{\text{mod } n_1}{x_3} \equiv x_2$ è soluzione di A
   $\underset{\text{mod } n_2}{x_3} \equiv x_2$ è soluzione di B

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

5. x_3 è una soluzione del sistema $\begin{cases} A \\ B \\ B \end{cases}$

Per il teorema cinese dei resti la soluzione del $(*)$ sono i numeri interi nell'insieme $\{x_2 + nk | k \in \mathbb{Z}\}$

Esempio 2 considero

$$\begin{cases} x \equiv 10 \mod \underset{n_1}{11} \\ x \equiv 5 \mod \underset{n_2}{6} \\ x \equiv 10 \mod \underset{n_3}{7} \end{cases} \qquad \begin{array}{c} MCD(11,6)=1 \\ MCD(11,7)=1 \\ MCD(6,7)=1 \end{array}$$

$$n = 11 \cdot 6 \cdot 7 = 462$$

1. $x_1 = 10$
2. Cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \mod n_2$
   $10 = t_2 \cdot 11 \equiv 5 \mod n$
   $11t_2 \equiv 5 - 10 \mod 6$
   $11t_2 \equiv -5 \mod 6$
   $[1]_6 = [5]_6$
   $[-5]_6 = [1]_6$ PAOLO, e anche bello grosso
3. Cerco $t_3 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_3 = x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2)$ sia soluzione di C: $x \equiv 5 \mod 7$
   $x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2) \equiv 5 \mod 7$
   $65 + t_3(11 \cdot 6) \equiv 5 \mod 7$
   $66t_3 \equiv -60 \mod 7$ $3t_3 \equiv 3 \mod 7$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + t_3 \cdot n_1 \cdot n_2 \\ &= 65 + 1 \cdot 11 \cdot 6 \\ &= 65 + 66 = 131 \end{aligned}$$

PAOLO

In generale se $k \geq 4$ e $\begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \\ x \equiv b_k \mod n_k \end{cases}$ Con $MCD(n_i, n_j) = 1 \; \forall i \neq j$

Itero di procedimento

- $x_1 = b_1$ è una soluzione di 1
- impongo che $x_1 + n_1 t_2 = x_2$ Sia soluzione di 2 PAOLO Cerco t_2...
- Impongo che $x_2 + n_1 n_2 t_3 = x_3$ sia soluzione di 3

  (Cerco $t_3 \in \mathbb{Z}$ tale che ...) allora x_3 è soluzione di $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$
- Impongo che $x_3 + n_1 n_2 n_3 t_4 = x_3$ sia soluzione di 4

  (Cerco $t_4 \in \mathbb{Z}$ tale che ...) allora x_4 è soluzione di $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$

PAOLO

Torniamo al caso $k = 2$ $\begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \end{cases}$ Metodo di Lagrange $MCD(n_1, n_2) =$ 1

Da $MCD(n_1, n_2) = 1$, usando Bezout trovo: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = 1$$

Allora $z = \alpha_1 n_1 b_2 + \alpha_2 n_2 b_1$ è una PAOLO ..
..
..
$z = \alpha_1 n_1 b_2 + \alpha_2 n_2 b_1$
$z \equiv b_1 \mod n_1$ $a_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \implies \alpha_2 n_2 = 1 - \alpha_1 n_1$

$$z = \alpha_1 n_1 b_2 + (1 - \alpha_1 n_1) b_1 \quad (2)$$
$$= \alpha_1 n_1 b_2 \quad (3)$$

PAOLO, c'è da finire la slide

$$\begin{cases} x \equiv \underset{b_1}{4} \mod \underset{n_1}{6} \\ x \equiv \underset{b_2}{4} \mod \underset{n_2}{6} \end{cases}$$

$MCD(\underset{n_1}{6}, \underset{n_2}{5}) = 1$ cerco $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}|$

PAOLO

3.5 Ridurre un generico sistema di congruenze

Vediamo come "ridurre", se si può, un generico sistema di congruenze:

$$\underset{a_i, c_i \in \mathbb{Z}, m_i \in \mathbb{N}, m_i > 0}{\begin{cases} a_1 x \equiv c_1 \mod m_1 \\ a_2 x \equiv c_2 \mod m_2 \\ \dots \\ a_k x \equiv c_k \mod m_k \end{cases}} \quad \text{ad un sistema nella forma} \quad \underset{b_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{Z}, n_i > 0}{\begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \\ \dots \\ x \equiv b_k \mod n_k \end{cases}}$$

Ridurre significa "sostituire con un sistema equivalente"
Equivalente significa "con le stesse soluzioni"

Motivazione Abbiamo

$$\begin{matrix} A \to \\ B \to \end{matrix} \begin{cases} 2x \equiv 4 \mod 8 \\ 3x \equiv 6 \mod 9 \end{cases}$$

$$A = MCD(2, 8) = d = 2|4 \begin{cases} [2]_8 & 2 \cdot 2 = 4 \equiv 4 \mod 8 \\ [6]_8 & 2 \cdot 6 = 12 \equiv 4 \mod 8 \end{cases}$$

$$A \begin{cases} x \equiv 2 \mod 8 & C \\ x \equiv 6 \mod 8 & D \end{cases}$$

$$B : MCD(3, 9) = d = 3|6 \begin{cases} [2]_9 & 3 \cdot 2 = 6 \equiv 6 \mod 9 \\ [5]_9 & 3 \cdot 5 = 15 \equiv 6 \mod 9 \\ [8]_9 & 3 \cdot 8 = 24 \equiv 6 \mod 9 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x \equiv 2 \mod 9 & E \\ x \equiv 5 \mod 9 & F \\ x \equiv 8 \mod 9 & G \end{cases}$$

Quindi le soluzioni di $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ sono l'unione delle soluzioni di 6 sistemi:

$$\begin{cases} C \\ E \end{cases} \cup \begin{cases} C \\ F \end{cases} \cup \begin{cases} C \\ G \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ E \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ F \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ G \end{cases}$$

E noi vorremmo non dover risolvere sei sistemi.

Passaggio 1 Calcolo $d_i = MCD(a_i, m_i)\ \forall i = 1, ..., k$

- $\exists d_i$ tale che $d_i \nmid c_i$ allora $a_i x \equiv c_i \mod m_i$ Non ha soluzioni, allora $(*)$ non ha soluzioni.
- se $d_i | c_i\ \forall i = 1, ..., k$ allora ogni congruenza di $(*)$ ha soluzione e
  - se $d_i = 1$ **mantengo** la congruenza $a_i x \equiv c_i \mod m_i$
  - se $d_i \neq 1$ **sostituisco** la congruenza $a_i x \equiv c_i \mod m_i$ con la congruenza
$$\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \mod \frac{m_i}{d_i}$$

NB 1 La congruenza $\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \mod \frac{m_i}{d_i}$ è **equivalente** alla congruenza $a_i x \equiv c_i \mod m_i$

NB 2 La congruenza $a_i x \equiv c_i \mod m_i$

Infatti

Sia $z \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{c} z \text{ è soluzione} \\ \text{di } a_i x \equiv c_i \mod m_i \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che} \\ a_i z = c_i + m_i k \end{array}}$$

$$\underset{\text{moltiplico per } d_i}{\overset{\text{divido per } d_i}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che} \\ \frac{a_i}{d_i} z = \frac{c_i}{d_i} + \frac{m_i}{d_i} k \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} z \text{ è soluzione di} \\ \frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \mod \frac{m_i}{d_i} \end{array}}$$

NB 3 Siccome $d_i = MCD(a_i, m_i)$ allora

$$MCD\left(\frac{a_i}{d_i}, \frac{m_i}{d_i}\right) = 1$$

Quindi le soluzioni della congruenza $\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \mod \frac{m_i}{d_i}$ stanno tutte in un'unica classe di congruenza modulo $\frac{m_i}{d_i}$
Alla fine del **passaggio 1** ottengo che $(*)$ non ha soluzioni, oppure che $(*)$ è equivalente a

$$(**)\begin{cases} \frac{a_1}{d_1} x \equiv \frac{c_1}{d_1} \mod \frac{m_1}{d_1} \\ : \\ : \\ \frac{a_k}{d_k} x \equiv \frac{c_k}{d_k} \mod \frac{m_k}{d_k} \end{cases}$$

Passaggio 2 Risolvo ciascuna congruenza di $(**)$

$$\frac{a_i}{d_i}x \equiv \frac{c_i}{d_i} \mod \frac{m_i}{d_i} \Longrightarrow x \equiv b_i \mod \frac{m_i}{d_i}$$

Dove $[b_i]_{\frac{m_i}{d_i}} = \{b_i + \frac{m_i}{d_i}t | t \in \mathbb{Z}\}$ è **l'insieme delle soluzioni della congruenza**

Posto $n_i = \frac{m_i}{d_i}$ ottengo un sistema

$$(***) \begin{cases} x \equiv b_1 \mod n_1 \\ x \equiv b_2 \mod n_2 \\ ... \\ ... \\ x \equiv b_k \mod n_k \end{cases}$$

SE $MCD(n_i, n_j) = 1 \ \forall i \neq j$ posso applicare il Teorema cinese dei resti. In tal caso:

Passaggio 3 Con newton trovo x_k una particolare soluzione di $(***)$ e per il teorema cinese dei resti l'insieme di tutte le soluzioni $(***)$, e quindi anche di $(*)$ è $[x_k]_n = \{x_k + nt | t \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{dove } n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$$

3.6 Esercizio tipo

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \underset{a_1}{3}x \equiv \underset{c_1}{4} \mod \underset{m_1}{5} \\ \underset{a_2}{2}x \equiv \underset{c_2}{4} \mod \underset{m_2}{6} \end{cases}$$

Passaggio 1 $\begin{array}{l} a_1 = MCD(a_1, m_1) = MCD(3,5) = 1 | 4 = c_1 \\ a_2 = MCD(a_2, m_2) = MCD(2,6) = 2 | 4 = c_2 \end{array}$

$a_1 = 1 \Longrightarrow$ mantengo $3x \equiv 4 \mod 5$
$a_2 = 2 \neq 1$ **sostituisco** $2x \equiv 4 \mod 6$
Con $\frac{2}{2}x \equiv \frac{4}{2} \mod \frac{6}{2}$: $x \equiv 2 \mod 3$

$$\text{arrivo a } (**) \begin{cases} 3x \equiv 4 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Passaggio 2 Risolvo ciascuna congruenza PAOLO

$$\underset{a}{3}x \equiv \underset{b}{4} \mod \underset{n}{5}$$

$d = MCD(a, n) = 1 | 4 = b$
$d = 1 = \alpha a + \beta n$
$1 = \alpha + \beta \cdot 5$
$\alpha = 2$
$x_0 = \alpha q = 2 \cdot 4 = 8$
$\underset{n}{5} = \underset{a}{3} \cdot \underset{q_1}{1} + \underset{r_1}{2} \Longrightarrow 2 = 5 + 3 \cdot (-1)$
$\underset{a}{3} = \underset{r_1}{2} \cdot \underset{q_2}{1} + \underset{r_2}{1}$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} 1 = 3 + 3 \cdot (-1) = 3 + (-1)\left[5 + 3 \cdot (-1)\right] = \\ = 3 + (-1) \cdot 5 + 3 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \end{array} \qquad 3x \equiv 4 \mod 5$$

$[8]_5 = [8-5]_5 = [3]_5$
Sostituisco $3x \equiv 4 \mod 5$ con $x \equiv 3 \mod 5$
Per puro caso la congruenza $x = 2 \mod 3$ è già risolta.

$$(***) \begin{cases} x \equiv \underset{b_1}{3} \mod \underset{n_1}{5} \\ x \equiv \underset{b_2}{2} \mod \underset{n_2}{3} \end{cases}$$

Siccome $MCD(n_1, n_2) = MCD(5,3) = 1$,
Allora posso applicare il teorema cinese dei resti e concludere che $(***)$ e quindi anche il sistema da cui sono partitə ha infinite soluzioni (numeri interi) tutte nella stessa classe di congruenza modulo

$$n = n_2 \cdot n_2 = 5 \cdot 3 = 15$$

Passaggio 3 Trovo x_2 una particolare soluzione di $(***)$

1° Modo per trovare x_2 $\begin{cases} x \equiv \underset{b_1}{3} \mod \underset{n-1}{5} \\ x \equiv \underset{b_2}{2} \mod \underset{n-2}{3} \end{cases}$

1. $x_1 = 3$
2. cerco $t_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv 2 \mod 3$
   $x_2 \to 3 + t_2 \cdot 5 \equiv 2 \mod 3$

$5t_2 \equiv (2-3) \mod 3$
$5t_2 \equiv -1 \mod 3 \equiv 2 \mod 3$A
$[5]_3 = [2]_3 \to 5t_2 = 2t_2$

$2t_2 \equiv 2 \mod 3$
Ad esempio $t_2 = 1$ $x_2 = 3 + 1 \cdot 5 = 3 + 5 = 8$
tutte le soluzioni del (*) sono $[8]_5 = \{8 + 15k | k \in \mathbb{Z}\}$

2° Modo per trovare $x_2 = z$ $MCD(n_1, n_2) = 1$ $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tale che
$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = 1$
$\underset{-1}{\alpha_1} \cdot 5 + \underset{2}{\alpha_2} \cdot 3 = 1$

$z = \underset{-5}{\alpha_1 n_1} \; b_2 + \underset{6}{\alpha_2 n_2} \; b_1 =$
$= -5 \cdot 2 + 6 \cdot 3$
$= -10 + 18 = 8$

$$[z]_n = [8]_{15} = \{8 + 15k | k \in \mathbb{Z}\}$$

4 Matrici e loro operazioni

Una **matrice** è una tabella di numeri (o di simboli) disposti in righe e colonne, detti **coefficienti** della matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Altri tipi di notazioni sono sbagliati, inoltre:

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ non è una matrice}$$

Il numero che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna si chiama **coefficiente** di posto (i, j)

A è $m \times n$ se ha m righe e n colonne
(A ha "dimensioni $m \times n$")

$$\mathrm{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ è } 2 \times 3 \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \text{ è } 3 \times 2$$

Le posizioni sono:

$(2, 2)$ $(1, 3)$ $(3, 2)$

Le matrici si indicano con lettere latine **maiuscole in stampatello**

A, B, C, ...

I Coefficienti si indicano con le lettere latine **minuscole** in corsivo

$$a_{ij} = \text{il coefficiente di posti } (i, j) \text{ di A}$$

Per scrivere in modo compatto la matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La indico:
$\underset{m \times n}{\mathrm{A}} = (a_{ij})$ **oppure** A= $(a_{ij})_{i=1,\dots,m j=1,\dots,n}$PAOLO

4.1 Operazioni

4.1.1 Prodotto di una matrice per uno scalare

Dato A= $(aij), m \times n$ e dato uno scalare α, si definisce **Prodotto dello scalare $\boldsymbol{\alpha}$ per la matrice A** la matrice $\underset{m \times n}{\mathrm{B}} = (bij)$ dove $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

$$\text{si indica } \mathrm{B} = \alpha \cdot \mathrm{A}$$

Esempio $\alpha = 1 - i$ A= $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 3i \\ 1+2i & -i & -4 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \alpha \mathrm{A} = (1-j) \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3i \\ 1+2i & -i & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1-i)7 & (1-i)\cdot 0 & (1-i)\cdot 3i \\ \hline (1-i)(1+2i) & (1-i)(-i) & (1-i)(-4) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7-7i & 0 & 3+3i \\ \hline 3+i & 1-i & -4+41 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} (1-i)7 = 7-7i & (1-i)(1+2i) = 1-i+2i+2i^2 = 1-i+2i+2 = 3+i \\ (1-i)\cdot 3i = 3i - 3i^2 & (1-i)(-i) = -i+i^2 = -i-1 \\ = -3i - 3(-1) & (1-i)(-4) = -4+4i \\ = 3i+3 & \end{array}$$

NB 1 vale la legge di cancellazione

$$\alpha \cdot \mathrm{A} = || \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ oppure } \mathrm{A} = ||$$

Indico con || la matrice con tutti i coefficienti = 0

NB 2

1. αA=Aα $\forall\alpha$ scalare $\forall$A
2. 1·A=A $\forall$A
3. 0·A= || $\forall$A
4. $(\alpha \cdot \beta)$·A= $\alpha(\beta$A)
   $\forall\alpha, \beta$ scalari $\forall$A

Notazioni (-1)·A= $-$A
A= $[a_{ij}]$ (-1)·A= $[(-1)a_{ij}$ $-$A si chiama **la matrice opposta della matrice A**

4.2 Somma di due matrici

Date almeno due matrici A= $(a_{ij})m \times n$ e B= $(b_{ij})r \times s$ **aventi le stesse dimensioni**, cioè $\begin{cases} r = m \\ s = n \end{cases}$ si definisce $\underset{m\times n}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = (a_{ij} + b_{ij})$ **la somma delle due matrici**

Esempio Siano $\underset{2\times 3}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & 3 & 2 \\ i & 0 & 7 \end{bmatrix}, \underset{2\times 2}{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3i & 0 \end{bmatrix}, \underset{2\times 3}{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 0 & i & 2-i \\ i & 7+i & i \end{bmatrix}$

Non posso sommare A con B, né B con C, ma posso sommare A con C:

$$\mathrm{A+C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1+i & 3+i & 2+2-i \\ \hline i+i & 7+i & 7+i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1+i & 3+i & 4-i \\ \hline 2i & 7+i & 7+i \\ \hline \end{array}$$

Proprietà della somma Siano A, B, C $m \times n$, α, β scalari

1. A+(B+C) = (A+B)+C
2. A+B=B+A
3. A+|| =A
4. A+(−A) = ||
5. α(A+B) = αA+αB
6. $(\alpha + \beta) = \alpha$A+$\beta$A

4.3 Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna

Sono chiamati **vettori riga** matrici con una sola riga e **vettori colonna** matrici con una sola colonna.

In notazione:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}$$

Il prodotto (riga per colonna) di $\underline{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix}$ rer $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix}$ è

$$\underline{v}^T \underline{u} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + ... + v_n u_n$$

La riga **deve necessariamente avere** tanti elementi quanti ne ha la colonna

Esempio $\begin{bmatrix} 7 & 1+i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$ non esiste

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & 1+i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} &= -7 + (1+i)(1-i) + 3 \cdot 2i \\ &= -7 + 1^2 - i^2 + 6i \\ &= -7 + 1 - (-1) + 6i \\ &= -7 + 1 + 1 + 6i \\ &= -5 + 6i \end{aligned}$$

NB 1

1. $\underline{v}^T \cdot \underline{0}$

2. $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix}, \underline{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix}, \underline{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}$

$$\underline{v}^T \underline{u} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ..v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ..u_2 \end{bmatrix} = v_1u_1 + v_2u_2 + ... + v_nu_n =$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ..u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ..v_2 \end{bmatrix}$$

NB 2 non vale la legge di cancellazione
Ossia
$\underline{u} \neq \underline{0}$ e $\underline{v}^T\underline{u} = 0 \not\Rightarrow \underline{v}^T = \underline{0}^T$
ed anche $\underline{v}^T \neq \underline{0}^T$ e $\underline{v}^T\underline{u} = 0 \not\Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

Esempio $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

4.4 Prodotto di due matrici (riga per colonna)

$\mathrm{A}_{m\times n}$, $\mathrm{B}_{r\times s}$ Il prodotto di A e B è possibile solo se

$$n = r$$

$$\mathrm{A}_{m\times n}\mathrm{B}_{r\times s}$$

In tal caso il prodotto $\mathrm{A}_{m\times n} \cdot \mathrm{B}_{r\times s} = \mathrm{C}_{m\times s}$
dove
$c_{ij} = (i\text{-esima riga di A}) \cdot (j\text{-esima colonna di B})$ PAOLO

Esempio $\mathrm{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{C}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 6i & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$,
$\mathrm{E}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{F}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 7i & 6+i \\ -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$
Non esiste AB, come non esiste AC.
Esiste però $\mathrm{AE}_{2\times 3}$ perche il numero delle colonne di A coincide col numero di righe di E.

Per la stessa ragione esiste anche $\mathrm{AF}_{2\times 2}$

$$\mathrm{AF} = \begin{bmatrix} 22+14i & 6+2i \\ 20+42i & 21+6i \end{bmatrix}$$

Calcoliamo AE

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 14 & \text{-5+9i} & 19 \\ \hline 6 & 1 & \text{-2} \\ \hline \end{array}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + 12 = 14$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 9i - 7 = -5 + 9i$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 9 + 14 = 19$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -12 + 10 = -2$$

Proprietà di cui gode il prodotto

Supponiamo che tutte le operazioni seguenti si possano fare con A, B, C matrici e α scalare

1. $\underset{s\times r}{\mathrm{A}} \left(\overset{r\times m}{\mathrm{B}} \underset{r\times n}{\cdot} \overset{m\times n}{C} \right) = \left(\overset{s\times r}{\mathrm{A}} \underset{s\times m}{\cdot} \overset{r\times m}{\mathrm{B}} \right) \underset{m\times n}{\mathrm{C}}$ proprietà associativa
2. $\underset{r\times m}{||} \cdot \underset{m\times n}{\mathrm{A}} = \underset{r\times n}{||}$
3. Se $\mathrm{I}_n$indica la matrice $n \times n$ allora la matrice

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si chiama **matrice identica di ordine *n***

$$\mathrm{I}_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \mathrm{I}_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{Eccetera...}$$

$$\mathrm{I}_M \cdot \underset{m\times n}{\mathrm{A}} = \mathrm{A} = \underset{m\times n}{\mathrm{I}_n}$$

4. A(B+C) =AB+AC

5. (A+B)C=AC+BC
6. α(AB) = ($\alpha\cdot$A)B=A($\alpha\cdot$B)
   Questo perché α è uno scalare.

Proprietà di cui il prodotto non gode

1. **non vale la legge di cancellazione**
   ossia $\begin{cases} \text{AB} = || \\ \text{A} \neq || \end{cases} \not\Rightarrow \text{B} = ||$
   anche $\begin{cases} \text{AB} = || \\ \text{B} \neq || \end{cases} \not\Rightarrow \text{A} = ||$
   Esempio
   $$\text{AB} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 + 3\cdot(-4) & 2\cdot(-3)+3\cdot 2 \\ 4\cdot 6+6\cdot(-4) & 4\cdot(-3)+6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Dunque AB = || che A $\neq 0$ e B $\neq 0$
   (ed anche sia A che B sono "quadrate")
2. **Il prodotto (righe per colonne) NON è commutativo**
   Cioè AB$\neq$BA
   - $\exists$AB$\not\Rightarrow$BA
     $$\begin{cases} \text{A}_{x\times n} \\ \text{B}_{n\times k} \end{cases} \implies \exists \text{AB}_{m\times k} \text{ , ma se } k \neq m \text{ allora } \nexists \text{BA}$$
   - $\begin{cases} \exists\text{AB} \\ \exists\text{BA} \end{cases} \not\Longrightarrow$ AB e BA hanno le stesse dimensioni

     dunque
     $$\text{A}_{m\times n} \text{ e } \text{B}_{n\times m} \implies \begin{matrix} \exists\text{AB ed è } m\times m \\ \exists\text{BA ed è } n\times n \end{matrix} \implies \begin{matrix} \text{se } n\neq m \text{ allora} \\ \text{AB}\neq\text{BA} \end{matrix}$$
   - Ma anche se A e B sono entrambe $m \times m$ per cui $\exists$AB$_{m\times m}$ ed $\exists$BA$_{m\times m}$, ma non è detto che AB sia uguale a BA

     Esempio
     $$\text{AB=} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline 8+6 & 6+18 \\ \hline -4+2 & -3+36 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 14 & 24 \\ \hline 8 & 32 \\ \hline \end{array}$$
     $$\text{BA=} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline 8-3 & 12+18 \\ \hline 4-6 & 6+36 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 30 \\ \hline -2 & 42 \\ \hline \end{array}$$

4.5 La trasposta

Sia A= (a_{ij}) $m \times n$, la **trasposta di A** è B= (b_{ij}) $n \times m$ tale che

$$b_{ij} = a_{ji}$$

E si indica con B=A^T

Esempio A= $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1-i \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow$A^T = $\begin{bmatrix} 1 & 7i \\ 2+3i & 0 \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}$

Per questo $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix}$

4.6 La coniugata

Sia A= $(a_{ij})m \times n$

La **coniugata di A** è B= $(b_{ij})m \times n$ tale che $b_{ij} = a_{ij}$

Si indica B = $\overline{\text{A}}$

Esempio A= $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1+i \\ 7i & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{\text{A}} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2+3i} & \overline{1-i} \\ \overline{7i} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1-i \\ 7i & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{7i} \\ \overline{2+3i} & \overline{0} \\ \overline{1-i} & \overline{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3i \\ 1-i \end{bmatrix}$

PAOLO

Proprieta delle trasposte, delle coniugate e delle H-trasposte

Siano A,B matrici, α scalare, supponiamo che tutte le operazioni scritte siano possibili.

Trasposte

1. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot$A^T
2. (A+B) =A^T+B^T
3. (A^T)^T = PAOLO
4. (AB)^T =B^{T}A^T

Coniugate

1. $\overline{\alpha \text{A}} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\text{A}}$
2. $\overline{\text{A} + \text{B}} = \overline{\text{A}} + \overline{\text{B}}$
3. $\overline{\overline{\text{A}}} = \text{A}$
4. $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{A}} \cdot \overline{\text{B}}$

H-trasposte

1. $(\alpha \text{A})^H = \overline{\alpha} \cdot \text{A}^H$
2. (A+B)^H =A^H+B^H
3. (A^H)^H =A
4. (AB)^H =B^{H}A^H

4.7 Tipi di matrici

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ viene indicato

$\underset{m\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ oppure $\underset{m,n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$

Stessa cosa per quanto riguarda in $\mathbb{C}$:

$\underset{m\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{C})$ oppure $\underset{m,n}{\mathrm{M}}(\mathbb{C})$

Sia A$\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ Diro: "una matrice" invece di "una matrice complessa", specificherò "una matrice **reale**" per dire che i coefficienti sono reali.
$\big($cioè nel caso A$\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\big)$

1. A si dice **quadrata** se $n = m$
   In $\mathrm{A}_{n\times n}$, n indica l'**ordine delle matrice quadrata di A**

   $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ è preferibile a $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$
   $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è preferibile a $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

   $\mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$ e $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ = matrici 2×3

   $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{C})$ = matrici 23×23 **Esempio** A= $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1-i \\ 0 & 2+3i & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$

   Diagonale principale

   I coefficienti diagonali di A sono 7, $2 + 3i$, 2

2. A si dice **diagonale** se

   - è quadrata $(n \times n)$
   - tutti i coefficienti che non sono diagonali sono uguali a 0
     (cioè: $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$)

   Esempi $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Non è quadrata}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{È diagonale}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{Non è diagonale}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{È diagonale}}$

3. A= (a_{ij}) si dice **scalare** se $m \times n$
   A= $Diag(d, d, ..., d)$

   $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = d{\cdot}\mathrm{I}_n$$

   $d\mathrm{I}_n$ si chiama **scalare** perché
   $d\mathrm{I}_n\mathrm{B}_{n\times k} = d(\mathrm{I}_n\mathrm{B}) = d\mathrm{B}$
   $\mathrm{C}_{m\times n}(d\mathrm{I}_n) = \mathrm{C}(\mathrm{I}_n d) = (\mathrm{C}\mathrm{I}_n) \cdot d = \mathrm{C}{\cdot}d$
   Moltiplicare per la matrice scalare indivuata dallo scalare d equivale a moltiplicare per lo scalare d

4. $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix}$ è un **vettore colonna**

   Un vettore colonna con n elementi si indica $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$

   Analogamente $\underline{v}^T = \begin{bmatrix} v1 & v2 & ... & v_n \end{bmatrix}$

   Un vettore riga di n elementi si indica $\mathbb{C}_n$ o $\mathbb{R}_n$

5. Caso particolare: i vettori coordinati
   PAOLO

6. A si dice **simmetrica** se $A^T = A$
   NB $A_{m\times n} \Longrightarrow A^T_{n\times m}$
   Se $\underset{n\times m}{A}^T = \underset{m\times n}{A} \Longrightarrow$ A è **quadrata**
   Esempio A= $\begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$

7. A si dice **Hermitana** se $A^H = A$
   NB se $A^H = A \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ A quadrata
   Esempio: A= $\begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$

8. A si dice **antisimmetrica** se
   $A^T = -A$
   Se $A^T = -A \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ A è quadrata.
   Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ -3-i & 0 \end{bmatrix}$

9. A si dice **antihermitana** se
   $A^H = -A$
   Se $A^H = -A \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ A è quadrata
   Esempio: A= $\begin{bmatrix} 2i & 3+i \\ -3+i & 7i \end{bmatrix}$

4.8 Scrittura matriciale di un sistema lineare

Dato un sistema lineare[11] con

m equazioni
n incognite

$$(*) \begin{cases} a_{11}x1 + a_{12}x_2 \quad a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x2 + a_{22}x_2 \quad a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{m1}xn + a_{m2}x_n \quad a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(11) ovvero ogni equazione ha grado 1

La matrice $\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Si chiama la **matrice dei coefficienti** di (*)

Il vettore $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$ Si chiama il **vettore dei termini noti** di (*)

Il vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ Si chiama il **vettore delle incognite** di (*)

abbiamo dunque

$$\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Per cui la scrittura $A\underline{x} = \underline{b}$ è un modo compatto per scrivere $(*)$
Si chiama **la scrittura matriciale** del sistema $(*)$

4.9 Algoritmo di Gauss o eliminazione di Gauss (E.G.)

Data una matrica $A_{m\times n}$, l'**obiettivo** è "trasformare" A in una matrice della forma
PAOLO

NB $\begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{colonne} \\ \text{dominanti di } \mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{il numero} \\ \text{dei} \\ \text{gradi di } \mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{right non} \\ \text{nulle di } \mathcal{U} \end{pmatrix}$

"Trasformare" significa "applicare ripetutamente operazioni elementari sulle righe"
Le operazioni elementari sulle righe di una matrice A sono:

1. **Sommare alla *i*-esima riga di A la *j*-esima riga di A moltiplicato per uno scalare *c*** dove $j \neq i$
   Esempio A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$
   Sommo alla seconda riga di A (ossia $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$) la prima riga di A (ossia $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$) moltiplicata per $c = -2$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} & + \\ \begin{bmatrix} -2 & -6 & -8 \end{bmatrix} & = \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} & \end{array} \quad \longleftarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}(-2) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

   Ottengo B= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

   Otterrò una matrice B e scriverò:

$A \xrightarrow[E_{ij}(c)]{} B$

Nell'esempio A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = B$

2. **Moltiplicare la i-esima riga di A per uno scalare $c \neq 0$**

   Esempio

   A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

   Sostituisco la seconda riga moltiplicando la seconda riga per $c = \frac{1}{6}$

   $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Ottengo dunque $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ottenuta la matrice B scriverò $A \xrightarrow[E_{ij}(c)]{} B$
   Nell'esempio
   A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(-\frac{1}{6})]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ =B

3. **Scambiare la i-esima riga di A con la j-esima riga di A**

   Esempi:
   A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ =B
   A= $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ =B
   Otterrò una matrice B e scriverò $A \xrightarrow[E_{ij}]{} B$

   $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}]{} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **NB:** $E_{ij} = E_{ji}$

5 Spazi vettoriali reali e complessi

Sia $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Uno spazio vettoriale su K

- se $K = \mathbb{C}$ dirò uno spazio vettoriale (complesso)
- se $K = \mathbb{C}$ dirò uno spazio vettoriale reale

è un insieme **non vuoto** V su cui sono definite due operazioni

addizione: $V \times V \longrightarrow v$

prodotto di elementi di V per uno scalare: $k \times v = v$

che verificano le seguenti condizioni:

- $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ (gli elementi di V si chiamano **vettori**)
- $\forall \alpha, \beta \in K$ (gli elementi di K si chiamano **scalari**)

1. $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$ $\quad$ + associativa
2. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ $\quad$ + commutativa
3. $\alpha(\beta \underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$
4. $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
5. $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$
6. $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$
7. $\exists \underline{0} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
8. $\forall \underline{v} \in V \exists \underline{w} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$, $\quad$ $\underline{w}$ si indica con $-\underline{v}$

Esempi

1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n, M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sono spazi vettoriali reali
   $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}_n, M_{m \times n}(\mathbb{C})$ sono spazi vettoriali (complessi)
2. $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad$ $a < b$ $\quad$ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
   $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad$ $\{f | f : [a, b] = \mathbb{R}\} = \mathcal{F}([a, b])$ (12) $\mathcal{F}([a, b])$ è uno spazio vettoriale reale rispetto a:
   - $+ : \mathcal{F}([a, b]) \times \mathcal{F}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{F}([a, b])$
     $(f, g) \longrightarrow f + g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
     $(f + g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$ $\quad$ $\forall x \in [a, b]$
   - $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{F}([a, b])$
     $(\alpha, f) \longrightarrow \alpha f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
     $(\alpha f)(x) \overset{def}{=} \alpha \cdot f(x)$ $\quad$ $\forall x \in [a, b]$

   $\mathcal{C}([a, b]) = \{f \in \mathcal{F}([a, b]) | f \text{ continue}\}$
   con le stesse operazioni di sopra è uno spazio vettoriale reale

(12) dove f è l'insieme delle funzioni definite in $[a, b]$ ed a valori in $\mathbb{R}$

3. $\mathbb{R}[x]$ =insieme dei polinomi a coefficienti reali
   è uno spazio vettoriale reale (rispetto a $+$ e $\cdot$)
   $\mathbb{C}[x]$ =insieme dei polinomi a coefficienti complessi
   è uno spazio vettoriale (rispetto a $+$ e $\cdot$)

4. $\mathbb{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg f(x) \leq n\}$
   è uno spazio vettoriale reale

5. $\{\underline{0}\}$ contiene un unico vettore, che chiamo $\underline{0}$

   $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$
   $\alpha \in K \qquad \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$
   $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

   Rispetto a queste operazioni, $\{\underline{0}\}$ è un PAOLO vettore su K

NB Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Allora

1. $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$, $\forall \underline{v} \in V$
2. $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$, $\forall \alpha \in K$
3. Vale la legge di cancellazione per il prodotto per scalari
   $\alpha \in k$, $\underline{v} \in V$ e $\alpha\underline{v} = \underline{0} \Longrightarrow \alpha = \underline{0}$ o $\underline{v} = \underline{0}$
4. $-(\alpha\underline{v}) = (-\alpha)\underline{v} = \alpha(-\underline{v})$, $\forall \alpha \in K$, $\forall \underline{v} \in V$

5.1 Sottospazi di spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale in $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def Un sottoinsieme U di V si dice un **sottospazio vettoriale** (o semplicemente un **sottospazio**) di V se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\underline{0} \in U$
2. $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$, $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ (U è chiuso alla **somma**)
3. $\alpha\underline{u} \in U$, $\forall \underline{u} \in U$, $\forall \alpha \in K$ (U è chiuso al **prodotto per scalari**)

NB 1 Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Sia U un sottoinsieme di V. Allora

$$\begin{bmatrix} U \text{ soddisfa le condizioni} \\ \boldsymbol{\underline{0} \in U} \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \alpha\underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} U \text{ soddisfa le condizioni} \\ \boldsymbol{U \neq \varnothing} \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \alpha\underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{bmatrix}$$

"$\Longrightarrow$" ovvia: $\underline{0} \in U \Longrightarrow U \neq \varnothing$
"$\Longleftarrow$" $U \neq \varnothing \Rightarrow \exists \underline{u} \in U \Rightarrow \alpha\underline{u} \in U \forall \alpha \in k \Rightarrow 0 \cdot \underline{u} \in U$

NB 2 Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Se U è un sottospazio di V, allora U è uno spazio vettoriale if (con le operazioni $+$ e $\cdot$ che si ottengono restringendo quelle di V)

Esempio 1 $V = \mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale reale ($K = \mathbb{R}$)

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V \qquad U \text{ è sottospazio di } V?$$

1. $\underline{0} \in U$ [13] $\qquad \underset{?}{\exists} a, b \in \mathbb{R} | \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$

   Si: $a = 0$, $b = 0$

   Quindi $\underline{0} \in U$

2. $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U \ \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$

   $\underline{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$ per opportuni $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

   $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$ per opportuni $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

   $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \underset{?}{\in} \mathbb{R}$

   $\underset{?}{\exists} a, b \in \mathbb{R} | \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ Sì $\begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{cases}$

   Quindi U è chiuso alla somma

3. $\alpha \underline{u} \underset{?}{\in} U \ \forall \underline{u} \in U \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \qquad \alpha \underline{u} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \\ \alpha b \end{bmatrix} \underset{?}{\in} U$

   $\underset{?}{\exists} a^*, b^* \in \mathbb{R} \Big| \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \\ \alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* \\ 0 \\ b^* \end{bmatrix}$

   Sì: $\begin{cases} a^* = \alpha a \\ b^* = \alpha b \end{cases}$ Quindi U è chiuso al prodotto per scalari

   Da **1.**, **2.** e **3.** concludo che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Esempio 2 Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ un insieme lineare del tipo

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

si chiama **un sistema lineare omogeneo** (ossia tale che il vettore dei termini noti sia $\underline{0}$), dove:

- $A = m \times n$
- $\underline{x} = n \times 1$
- $\underline{0} = m \times 1$

---

(13) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \in V = \mathbb{R}^3$

Un sistema lineare omogeneo ha sempre soluzioni, ad esempio la soluzione nulla
PAOLO

Sia A$\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

$$N(\mathrm{A}) = \begin{matrix}\text{insieme delle}\\ \text{soluzioni del}\\ \text{sistema lineare}\\ \text{omogeneo}\\ \mathrm{A}_{m\times n}\underline{x}_{n\times 1} = \underline{0}_{m\times 1}\end{matrix} = \{\underline{v}\in\mathbb{C}^n | \mathrm{A}\underline{v} = \underline{0}\}$$

$N(\mathrm{A})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$
Proviamo che $N(\mathrm{A})$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$
(Quindi $N(\mathrm{A})$ è a sua volta uno spazio vettoriale)
Chiamiamo $N(\mathrm{A})$ lo **spazio nullo** della matrice A

1. $\begin{bmatrix}0\\ :\\ :\\ 0\end{bmatrix} = \underline{0} \underset{?}{\ni} N(\mathrm{A})$

   Si: $\mathrm{A}\underline{0}_{n\times 1} = \underline{0}_{m\times 1}$

   Quindi $\underline{0}_{n\times 1} = \begin{bmatrix}0\\ :\\ :\\ 0\end{bmatrix} \in N(\mathrm{A})$

2. $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in N(\mathrm{A}) \underset{?}{\Longrightarrow} \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(\mathrm{A})$ Per provare che $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(\mathrm{A})$ devo provare che $\begin{cases}\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n\\ \mathrm{A}\times(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = 0\end{cases}$

   So che $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(\mathrm{A})$, quindi $\begin{cases}\underline{u}_1 \in \mathbb{C}^n\\ \mathrm{A}\underline{u}_1 = 0\end{cases}$ e che $\underline{u}_2 \in N(\mathrm{A})$, quindi $\begin{cases}\underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n\\ \mathrm{A}\underline{u}_2 = 0\end{cases}$

   $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n \Longrightarrow \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n$ $\mathrm{A}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \mathrm{A}\underline{u}_1 + \mathrm{A}\underline{u}_2 = \underline{0} + \underline{0}\underline{0}$; quindi $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(\mathrm{A})$

3. $\begin{cases}\underline{u} \in N(\mathrm{A})\\ \alpha \in \mathbb{C}\end{cases} \Longrightarrow \alpha\underline{u} \in n(\mathrm{A})$

   Per provare che $\alpha\underline{U} \in N(\mathrm{A})$ devo provare che $\begin{cases}\alpha\underline{u} \in \mathbb{C}^n A\\ \mathrm{A}\cdot(\alpha\underline{u}) = 0\end{cases}$

   So che $\underline{u} \in N(\mathrm{A})$ quindi $\begin{cases}\underline{u} \in \mathbb{C}^n\\ \mathrm{A}\underline{u} = \underline{0}\end{cases}$

   $\underline{u} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha\underline{u} \in \mathbb{C}^n$
   $\mathrm{A}\cdot(\alpha\underline{u}) = \alpha\cdot(\mathrm{A}\underline{u}) = \alpha\cdot\underline{0} = \underline{0}$ Quindi $\alpha\underline{u} \in N(\mathrm{A})$
   1. + 2. + 3. $\Longrightarrow$ $N(\mathrm{A})$ **è un sottospazio di** $\boldsymbol{\mathbb{C}^n}$

5.2 Insieme dei multipli di un vettore

Siano V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\underline{v} \in V$

$$\{\alpha\underline{v} | \alpha \in K\} = \text{insieme dei multipli di } V$$

$$\text{Si indica } <\underline{v}> \text{ oppure Span}(\underline{v})$$

1. **$<\underline{v}>$ è un sottospazio di V**

   (a) $\underline{0} \in V$: $\underline{0} = 0\cdot\underline{v}$ (prendo $a = 0$)

(b) $\alpha_1\underline{v} + \alpha_2\underline{v} = (\alpha_1 + \alpha - 2)\underline{v}$ La somma di due multipli di $\underline{V}$ è un multiplo di $\underline{v}$

(c) $\beta(\alpha\underline{v}) = (\beta\alpha)\underline{v}$ Il prodotto di β per un multiplo di $\underline{v}$ è un multiplo di $\underline{v}$

2. **Se $\underline{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}$** allora $<\underline{v}>=<0>= \{\alpha \cdot \underline{0} | \alpha \in K\} = \{\underline{0}\}$
e $<\underline{v}>$ ha un unico elemento.

Se $\underline{\boldsymbol{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ allora $<\underline{v}>= \{\alpha\underline{v} | \alpha \in K\}$ ha tanti elementi quanti sono gli elementi di K

Per vederlo provo che $\begin{cases} \alpha\underline{v} = \beta\underline{v} \\ \underline{v} \neq 0 \\ \alpha, \beta \in K \end{cases} \iff \alpha = \beta$

"$\Longleftarrow$" ovvio

"$\Longrightarrow$" $\alpha\underline{v} = \beta\underline{v} \Rightarrow \alpha\underline{v} - \beta\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - \beta)\underline{v} \\ \underline{v} \neq \underline{0} \end{cases} \Longrightarrow \alpha - \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta$

NB Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, allora:

1. $Z \leq U \leq V \Longrightarrow Z \leq V$ (14)
2. $\{\underline{0}\} \leq V$, $V \leq V$

Quindi se V è uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ed U è un sottospazio di V allora

- o $U = \{\underline{0}\}$ ed allora $|U| = 1$
- o $U \neq \{\underline{0}\}$ ed allora $\exists \underline{u} \in U, \underline{u} \neq 0$

Essendo U un sottospazio di V ed $\underline{u} \in U$ allora $\alpha\underline{u} \in U$ $\forall \alpha \in k$

$$\begin{cases} <u>= \{\alpha\underline{u} | \alpha \in K\} \subseteq U \\ \underline{u} \neq \underline{0} \Longrightarrow |<\underline{u}>| = \infty \end{cases} = |U| = \infty$$

Sia V uno spazio vettoriale du $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
La **combinazione lineare degli *n* vettori** è una "lista" di vettori: i vettori non sono necessariamente distinti tra loro (possono esserci ripetizioni)
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in V$ con **coefficienti** o pesi
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ è il vettore

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n \in V$$

Esempio $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{v} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 12\underline{v}_1 + 12\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 3\underline{v}_4 \\ \underline{v} &= 12\underline{v}_1 + 15\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 0\underline{v}_4 \end{aligned}$$

(14) dove *leq* sta per *sottospazio di*

$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha i \underline{v} i$ con
$\alpha_1 = 12$
$\alpha_2 = 12$
$\alpha_3 = 0$
$\alpha_4 = 3$

Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ (V spazio vettoriale su K) l' insieme di tutte le loro combinazioni lineari è:

$$\{\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} =$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \Big\}$$

Si indica $\boldsymbol{< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n >}$
oppure ***Span***$\boldsymbol{(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)}$
Si chiama il **sottospazio (di V) generato da** $\boldsymbol{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n}$

NB $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >$ è effettivamente un sottospazio di V
Infatti:

1. $\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$
   $\underset{?}{\exists} \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K | \underline{0} = \alpha_1\underline{v}_1 \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n$
   Sì, prendiamo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i \underset{?}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i \underset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \underline{v}_i$
3. $\beta \in K$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \underset{?}{\Longrightarrow} \beta(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i) \underset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \underline{v}_i$

Def Si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un **sistema di generatori di *V***
$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ (15) è un **insieme di generatori** se $V =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >$

$S = \{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\}$ è un **inieme di generatori di *V***
$\Longleftrightarrow < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > = \{\sum \alpha_1 \underline{v}_i | \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \supseteq {}^{(16)} V$

$S = \{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di $V \Longleftrightarrow$
$\forall \underline{v} \in V \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K | \ \underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{n}$

Esempi

1. $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$
   Siano $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ le colonne di I_n
   $S = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n\}$ è un insieme di generatori di V

(15) userò le parentesi graffe anche se i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ potrebbero essere tutti distinti
(16) dal momento che è sempre vero (qualunque sia S che $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n \subseteq V$)

$$\forall \underline{v} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}|$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} &\overset{?}{=} \alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n\\ &= \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sì: $\alpha_i = a_i\ \forall i = 1, \dots, n$

2. $V = \mathbb{C}_n[x], K = \mathbb{C}, S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
   Posto $f(x) \leq n$
   $\forall f(x) \in \mathbb{C}_n[x]\ f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
   $\underset{?}{\exists} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \mid f(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x^n$
   Sì: $\alpha_i = a_i$

3. $V = M_2(\mathbb{C})$ spazio vettoriale $k = \mathbb{C}$

   $$S = \left\{ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \right\}$$

   è un insieme di generatori di V
   $\forall \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_2\mathbb{C} \underset{?}{\exists} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$
   tali che

   $$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} &= \alpha_1 \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \alpha_2 \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \alpha_3 \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \alpha_4 \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

   Sì: $\alpha_1 = a,\ \alpha_2 = b,\ \alpha_3 = c,\ \alpha_4 = d$

Il problema di stabilire se S è un insieme di generatopri di V si traduce nel problema di stabilire se una famiglia di sistemi lineari A$\underline{x} = \underline{b}$ dove A è fissato e $\underline{b}$ è un vettore dai termini noti **variabile**
abbia o non abbia soluzioni.
Cioè:
$A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni $\forall \underline{b} \in \mathbb{C}^m$? (17)
$[\mathrm{A}|\underline{b}] \overset{EG}{\to} [U|\underline{d}]$ $\underline{d}$ è libera $\forall \underline{b} \in \mathbb{C}^m$?

Esempio $V = M_2(\mathbb{C}), K = \mathbb{C}$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \right\}$$

È uun insieme di generatori di V?
$\forall \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_2\mathbb{C} \underset{?}{\exists} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$

(17) $A = m \times n$

tali che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi il problema diventa:

è vero che il sistema lineare $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 = c \\ 0 = d \end{cases}$

Ha soluzioni $\forall a, b, c, d \in \mathbb{C}$?

$\forall \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ Vettori di termini noti (quindi un vettore di termini noti variabile)

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b} \qquad = [\mathrm{A}|\underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[EG]{}$$

$$[\mathrm{A}|\underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

La colonna d non è libera $\forall a, b, c, d$ (basta prendere $d = 0$)
S non è un insieme di generatori di V

NB Abbiamo definito *insieme di generatori* S
solo nel caso S non sia una lista finita.

Def Uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dice **finitamente generato (f.g.)** se ha un insieme di generatori che è un insieme finito. (18).
Esempi di spazi f.g.

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n[x], \mathbb{R}^n[x], \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

NB non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati.
Esempio
$\mathbb{C}[x], R[x]$ **non** sono finitamente generati. (19).
Nel nostro caso, d'ora in poi, supporremmo V finitamente generato.

Proprietà degli insiemi di generatori: se V è uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

(18) Noi, in realtà abbiamo parlato solo di insiemi di generatori finiti
(19) anche gli spazi di funzioni non sono finitamente generati

1. Sovrainsiemi di insiemi di generatori sono insiemi di generatori.

   Cioè: $\begin{cases} \text{A insieme di generatori di } V \\ \text{A} \subseteq \mathcal{B} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{B}$ insieme di generatoridi V **Dim**

   PAOLO

2. Se da un insieme di generatori S di V si toglie un vettore che è combinazione lineare dei rimanenti vettori di S si ottiene un insieme di vettori che è ancora un insieme di generatori di V **Esempio:**

   $$V =< \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} >\leq \mathbb{C}^4$$

   $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è un insime di generatori di V
   notiamo anche che
   $\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_3 = 1 \cdot \underline{v}_1 + 1 \cdot \underline{v}_3 + 0 \cdot \underline{v}_4 \Longrightarrow S_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$
   è ancora un insieme di generatori di V

   NB $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 \Longrightarrow S_2 = \{\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$
   è sempre un insieme di generatori di V

   NB $\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \Longrightarrow S_3 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}$
   è sempre un insieme di generatori di V

   Attenzione! Invece, togliendo $\underline{v}_4$ da S non si ottiene più un insieme di generatori di V. Per quanto riguarda lo spazio vettoriale $V = \{\underline{0}\}$ si ha che $S_1 = \{\underline{0}\}$è un suo insieme di generatori.

   NB Per convenzione si pone che anche $S_2 = \varnothing$ è un insieme di generatori di $\{\underline{0}\}$

5.3 Insiemi di vettori linearmente indipendenti (L.I.) e insiemi di vettori linearmente dipendenti

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e
A$\{\underline{v})_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_n\}$ un'"insieme" di vettori di V [20]

Def A si dice **linearmente indipendente (L.I.)** se l'unica combinazione lineare dei suoi elementi **nulla** è quella con i coefficienti tutti nulli, cioè

$$\begin{cases} \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + ... + \alpha_n \underline{v}_n \\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Def 2 A$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si dice **lienarmente dipendente (L.D.)** se **non è** linearmente indipendente
Cioè $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ **non tutti nulli** tali che
$\alpha_1 \underline{v}_1, \alpha_2 \underline{v}_2, \dots, \alpha_n \underline{v}_n = 0$

(20) In realtà non è un insieme: è una lista (ci possono essere ripetizioni)

NB per convenzione $\varnothing$ è L.I.

NB $v \in V$
$\{\underline{v}\}$ è L.I. $\iff \underline{v} = 0$
Proviamo "$\Longleftarrow$": ipotesi $\underline{v}_0$, tesi $\underline{v}$ L.D.

Dim Dobbiamo provare che esiste una combinazione lineare nulla di $\underline{v}_0$ con coefficienti nokn tutti nulli. Eccola: prendo $\alpha = 1 \neq -$ coefficiente non nullo, ed ho: $\alpha \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
Proviamo "$\Longrightarrow$": ipotesi $\underline{v}$ L.D., tesi $\underline{v} = \underline{0}$

Dim Siccome $\{\underline{v}\}$ è L.D. $\exists \alpha \underline{v} = \underline{0}$ con $\alpha \neq =$. Da $\alpha \neq 0$ segue che $\exists \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{cases} \alpha \underline{v} = \underline{0} \\ \exists \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \underline{v}) = \frac{1}{\alpha} = \underline{0}$$

ma $\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \underline{v}) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ e $\frac{1}{\alpha} \cdot \underline{0} = 0$ quindi $\underline{v} = \underline{0}$

NB $\{\underline{v}\} L.D. \iff \underline{v} = \underline{0}$

NB $\{\underline{v}\} L.I. \iff \underline{v} \neq \underline{0}$ (21)

5.4 Proprietà degli insiemi L.D. e degli insiemi L.I.

1. **Sovrainsiemi di L.D. sono L.D.**

   Cioè $\begin{cases} B \subseteq A \\ B \text{ L.D.} \end{cases} \Longrightarrow A$ L.D.

   Dim B L.D. $\exists \alpha_1, \cdot, \alpha_n$ non tutti nulli t.c. $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$
   $\Longrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k$ non tutti nulli tali che
   $\alpha_1, \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n, \beta_1 \underline{w}_1, \ldots, \beta_k \underline{w}_k \Longrightarrow A$ L.D.

2. **Sottoinsiemi di L.I. sono L.I.**

   cioè $\begin{cases} B \subseteq A \\ A \text{ L.I.} \end{cases} \Longrightarrow B$ L.I.

   Dim $\begin{cases} \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \end{cases} \underset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$
   $\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots \alpha_n \underline{v}_n + 0 \underline{w}_1 + 0 \cdot \underline{w}_2 + \ldots \underline{w}_k = \underline{0}$
   Siccome A è L.I. **tutti** i coefficienti della combinazione lineare in rosso devono essere $= 0$. In particolare
   $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

Def Sia V uno spazio vetoriale si K
Una **BASE** di V è un insieme di generatori di V che sia anche L.I.

(21) questo nb è equivalente a quello prima

Esempi

1. $V = \mathbb{C}^n, K = \mathbb{C}$
   $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n\}$ =insieme delle colonne di I_n è una base di V (è anche base di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$)
   Si chiama **la base canonica** di $\mathbb{C}^n$ su [22]
   Per verificare che $\mathcal{E}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ occorre verificare:

   (a) $\mathcal{E}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^n$
   (b) $\mathcal{E}$ è L.I.

   $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$

   $$\begin{cases} \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{e}_n = \underline{0} \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

   $$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha - 2 = \cdots = \alpha_n = 0 = 0$$

2. $V = \mathbb{C}_n[x]$, $K = \mathbb{C}$ $S = \{1, x, x^2, \ldots, x6n\}$ è una base di V su $\mathbb{C}$
   difatti

   (a) S è un insieme di generatori di V
   (b) S è L.I.
   $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$
   $\implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$
   (c) $V = M_2(\mathbb{C})$, $K = \mathbb{C}$
   $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di V
   Infatti
   i. S è un insieme di genertori di V
   ii. S è L.I.

   $$\begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{C} \end{cases}$$

   $\implies \alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$

$V = \{\underline{0}\}$ **che base ha?**

$S_1 = \{\underline{0}\}$ è un insieme di generatori.
ma è L.D.
Non è una base di $\boldsymbol{V = \underline{0}}$

$$\begin{cases} \varnothing \text{ è un insieme di generatori di } V \text{ per convenzione} \\ \varnothing \text{ è L.I. per convenzione} \end{cases}$$

$\implies \varnothing$ è (l'unica) base di $\{\underline{0}\}$

(22) anche di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$

Teorema 1 Ogni spazio vettoriale (f.g.) ha una base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato...

Si parte da un insieme di generatori S di V (che essendo V f.g. è un insieme **finito di vettori**) e si tolgono via via i vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti al passaggio precedente.

Teorema 2 Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di V. Allora

$$\text{(il numero di elemento di } \mathcal{B}_1) = \text{(il numero di elemento di } \mathcal{B}_2)$$

Tale numero è quindi un invariante di V, si chiama **la dimensione** di V e si indica **dim** $\boldsymbol{V}$

5.5 Basi ordinate e mappe delle coordinate

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def Una **base ordinata** di V 'e una base di V in cui si sia fissato l' ordine degli elementi.

Esempio $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$
$\mathcal{B}_1 = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mathcal{B}_2 = \{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\}$
PAOLO

SIa $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots \underline{v}_n\}$ una **base ordinata** di V e sia $\underline{v} \in V$
$\mathcal{B}$ 'e un insieme di generatori di $V \Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \Big| \underline{v} = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i \underline{v} i$ $\mathcal{B}$ 'e L.I.
PAOLO
$\mathcal{B}$ 'e ordinata
$\forall \underline{v} \in V \exists! \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tale che
PAOLO

Def Siano V spazi vettoriali su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ordinata diu V
Sia $\underline{v} \in V$.
Si chiama **vettore delle coordinate** del vettore $\underline{v} \in V$ rispetto alla base ordinata B il vettore
PAOLO

Esempio $V = \mathbb{R}^2, \underline{v} = \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$
$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$C_{\mathcal{B}_1}(\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}\Big| \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

PAOLO