

# Appunti di Algebra

Quel ragazzo con la maglia blu

May 19, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Divisione nei numeri naturali e nei numeri interi</b>	<b>2</b>
1.1	Divisione in $\mathbb{N}$	2
1.2	Divisione in $\mathbb{Z}$	2
1.3	Divisibilità in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$	3
1.4	Massimo Comun Divisore in $\mathbb{N}$ ed in $\mathbb{Z}$	3
1.5	Calcolo MCD in $\mathbb{N}$ : Algoritmo di Euclide	5
1.5.1	In $\mathbb{N}$	5
1.5.2	In $\mathbb{Z}$	6
<b>2</b>	<b>Polinomi</b>	<b>7</b>
2.1	Somma di polinomi	7
2.2	Prodotto di polinomi	7
2.3	Divisioni di polinomi	8
2.4	Radici di un polinomio	8
2.4.1	Teorema di Ruffini	8
2.4.2	Radici di polinomi di 2° grado a coefficienti reali	8
2.5	Teorema fondamentale dell'algebra	9
2.6	Identità di Bezout (teorema)	10
<b>3</b>	<b>Classi di Congruenza</b>	<b>12</b>
3.1	Invertibili in $\mathbb{Z}_n$ e il loro calcolo	15
3.2	La funzione di Eulero	16
3.3	Sistema di congruenze	16
3.4	Il teorema cinese dei resti	17
3.4.1	Metodo di Newton	17
3.5	Ridurre un generico sistema di congruenze	20
3.6	Esercizio tipo	22
<b>4</b>	<b>Matrici e loro operazioni</b>	<b>24</b>
4.1	Operazioni	24
4.1.1	Prodotto di una matrice per uno scalare	24
4.2	Somma di due matrici	25
4.3	Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna	26
4.4	Prodotto di due matrici (riga per colonna)	27
4.5	La trasposta	29
4.6	La coniugata	30
4.7	La H-trasposta	30
4.8	Tipi di matrici	31
4.9	Scrittura matriciale di un sistema lineare	33
4.10	Algoritmo di Gauss o eliminazione di Gauss (E.G.)	33

<b>5</b>	<b>Spazi vettoriali reali e complessi</b>	<b>35</b>
5.1	Sottospazi di spazi vettoriali . . . . .	36
5.2	Insieme dei multipli di un vettore . . . . .	38
5.3	Insiemi di vettori linearmente indipendenti (L.I.) e insiemi di vettori linearmente dipendenti . . . . .	43
5.4	Proprietà degli insiemi L.D. e degli insiemi L.I. . . . .	44
5.5	Basi ordinate e mappe delle coordinate . . . . .	49



**NB2**  $q, r$  sono unici perché si richiede  $0 \leq r < |b|$

**NB3**  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  in  $\mathbb{Z} : a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < |b|$   
 $|a|, |b| \in \mathbb{N}, |b| \neq 0$  in  $\mathbb{N} : |a| = |b| \cdot q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < |b|$

**ATTENZIONE** Non c'è un nesso tra il quoziente ed il resto della divisione di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{Z}$  ed il quoziente ed il resto della divisione di  $|a|$  e  $|b|$  in  $\mathbb{N}$

**Ad esempio**

$$\begin{array}{lcl} a = -137 & -137 = 55(-3) + 28 & |a| = 137 \\ b = 55 & \begin{array}{c} \text{a} \quad \text{b} \quad q_1 \quad r_1 \end{array} & \begin{array}{c} 137 = 55 \cdot 2 + 27 \\ |a| = |b| \quad q_2 \quad r_2 \end{array} \\ & & |b| = 55 \end{array}$$

### 1.3 Divisibilità in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

**Divisibilità in  $\mathbb{N}$**   $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

$$\begin{array}{ll} b|a \text{ se } a = bq \exists q \in \mathbb{N}^{(1)} & b \nmid a \\ \text{divide} & \text{non divide} \\ \text{Es. } 6|18 & \text{Es. } 4 \nmid 18 \end{array}$$

Per esempio  $6|18$

**Divisibilità in  $\mathbb{Z}$**   $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$$b|a \text{ se } \exists q \in \mathbb{Z} | a = bq \quad \text{altrimenti } b \nmid a$$

$$\text{NB} \quad a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, a \neq 0 \quad \begin{cases} b|a \\ a|b \end{cases} \implies a \in \{b, -b\}$$

### 1.4 Massimo Comun Divisore in $\mathbb{N}$ ed in $\mathbb{Z}$

**MCD In  $\mathbb{N}$**   $\forall a, b \in \mathbb{N}, (a, b) \neq (0, 0)$

(almeno uno dei due deve essere diverso da 0)

Un  $d \in \mathbb{N}$  è un  $MCD(a, b)$  se

1.  $d|a$  e  $d|b$  (è un divisore comune di  $a$  e  $b$ )
2. se  $z|a$  e  $z|b \implies z|d$

Ossia, se  $d$  è un divisore comune di  $a$  e  $b$  CHE

**NB 1**  $MCD(a, b)$  è ! in  $\mathbb{N}$  è il  $MCD(a, b)$

$$\begin{array}{ll} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 & 18 = 2 \cdot 3^2 \\ \\ \begin{array}{l} 60|2 \\ 30|2 \\ 15|3 \\ 5|5 \end{array} & \begin{array}{l} 18|2 \\ 9|3 \\ 3|3 \end{array} \\ & d = 2 \cdot 3 = 6 \end{array}$$

**NB 2**  $MCD(a, b) = MCD(b, a)$

**NB 3**

$$\begin{cases} b|a \\ b \neq 0 \end{cases} \implies MCD(a, b) = b \quad (1)$$

**NB 4**  $a, b \in \mathbb{N} \quad b \neq 0 \quad \exists q, r \in \mathbb{N}$   
 $a = bq + r \quad (2) \quad 0 \leq r < b$

Perciò

$$MCD(a, b) = MCD(b, r)$$

Per provarlo, proviamo che i due insiemi  $A$  e  $B$  sono uguali:

$A = \{z \mid z|a \text{ e } z|b\}$  = insieme dei divisori comuni di  $a$  e  $b$

$B = \{w \mid w|b \text{ e } w|r\}$  = insieme dei divisori comuni di  $b$  e  $r$

$$z \in A \implies \begin{cases} z|a \\ z|b \end{cases} \quad \begin{cases} z|a - bq = r \\ z|b \end{cases} \implies z \in B \implies A \subseteq B$$

$$w \in B \implies \begin{cases} w|b \\ w|r \end{cases} \quad \begin{cases} w|b \\ w|bq + r = a \end{cases} \implies w \in A \implies B \subseteq A$$

In  $\mathbb{Z} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$  con  $(a, b) \neq (0, 0) \quad d \in \mathbb{Z}$  è un  $MCD(a, b)$  se

1.  $d|a$  e  $d|b$   $d$  è un divisore comune di  $a$  e  $b$

2.  $\begin{cases} z|a \\ z|b \end{cases} \implies z|d$   $d$  è un multiplo di ogni divisore comune di  $a$  e  $b$

Abbiamo già visto che  $d = MCD(a, b)$  è unico in  $\mathbb{N}$

Anche in  $\mathbb{Z}$  scrivo  $d = MCD(a, b)$  anche se la nozione è “impropria”.

**NB** In  $\mathbb{Z}$   $d$  è individuale e **non ha segno**.

Se  $d$  è un massimo comun divisore di  $a$  e  $b$  allora anche  $-d$  è un massimo comun divisore di  $a$  e  $b$ .

Quindi in  $\mathbb{Z}$   $MCD(a, b)$  non indica un solo numero, ma 2:  $d$  e  $-d$ .

Es.  $-6 = MCD(-12, 18) = +6$

**Perché per parlare di  $MCD(a, b)$  è necessario supporre  $(a, b) \neq (0, 0)$**

---

(2)  $r = a - bq$

$$\begin{array}{lcl} \text{NB} & \frac{2|0}{b \ a} & \frac{0}{a} = \frac{2 \cdot 0}{b \ q} \\ 3|0 & 142|0 & \forall b \neq 0 \quad b|0 \end{array}$$

Ecco perchè è importante quando si parla di  $\text{MCD}(a, b)$   
**se fosse**  $(a, b) = (0, 0)$  allora  $\forall z \neq 0 \ z|0$

L'insieme dei divisori comini di  $(a, b) = (0, 0)$  è

$$\{z|z \in \mathbb{Z}, z \neq 0\}$$

Dunque non c'è un  $MCD(a, b)$  nel casi in cui  $(a, b) = (0, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{NB} & a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \\ & a = bq + r \quad 0 \leq r < |b| \end{array}$$

$$\implies MCD(a, b) = MCD(b, r)$$

è la stessa osservazione che abbiamo fatto per  $MCD(a, b)$  nel caso  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$

**NB**  $a, b \in \mathbb{Z}$ , **non entrambi nulli** allora  
 $MCD(a, b) = MCD(-a, b) = MCD(a, -b) = MCD(-a, -b)$

### 1.5 Calcolo MCD in $\mathbb{N}$ : Algoritmo di Euclide

### 1.5.1 In $\mathbb{N}$

$$a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \neq a$$

1° passaggio  $a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$

**SE**  $r_1 = 0$   $MCD(a, b) = MCD(b, r_1) = MCD(b, 0) = b$   
**STOP**

Esempio 1       $\text{MCD}(\underset{a}{36}, \underset{b}{12}) =$

$$\mathbf{P1} \quad \underset{a}{36} = \underset{b}{12} \cdot \underset{q_1}{3} + \underset{r_1}{0} \implies MCD(36, 12) = MCD(12, 0) = 12$$

$$\mathbf{1}^o \mathbf{P} \ a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

**SE  $r_1 \neq 0$  continua.**

**2° passaggio SI DIVIDE  $b$  per  $r_1$**

$$b = r_1 q_2 + r_2 \quad =_{\leq} r_2 < r_1$$

**SE  $R_2 = 0$  STOP**

$$\begin{array}{ccccccc} \text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(b, r_1) = \text{MCD}(r_1, r_2) = \text{MCD}(r_1, 0) = r_1 & & & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & b = r_1 q_2 + r_2 & & \text{se } r_2 = 0 & & \end{array}$$

Potevo vederlo così: se  $r_2 = 0$  allora  $b = r_1q_2 + r_2 = r_1q_2$   
per cui  $\text{MCD}(b, r_1) = r_1$  quindi  $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(b, r_1) = r_1$

Esempio 2       $\text{MCD}(\underset{a}{42}, \underset{b}{12} = 6)$

$$\frac{r_1 \neq 0}{\frac{1^{\circ}p}{2^{\circ}p}} \quad \frac{42 = 12 \cdot 3 = 6}{\begin{matrix} a & b & q_1 & r_1 \\ 12 = 6 \cdot 2 + 0 \\ b & r_1 & q_2 & r_2 \end{matrix}} \quad \text{SE } r_2 \neq 0 \text{ continuo...}$$

$MCD(A, B)$  è l'ultimo resto non nullo della sequenza di divisioni successive

**Es 1**  $MCD(36, 28) = 4$

$$\begin{array}{lcl} \underline{1^o p} & 36 = 28 \cdot 1 + 8 & \\ \underline{2^o p} & 28 = 8 \cdot 3 + 4 & \\ \underline{3^o p} & 8 = 4 \cdot 2 + 0 & r_3 = 0 \implies r_2 = MCD \end{array}$$

**Es 2**  $MCD(2420, 1386) = 22$

$$\begin{array}{lcl} \underline{1^o p} & 2420 = 1386 \cdot 1 + 1034 & \\ \underline{2^o p} & 1386 = 1034 \cdot 1 + 352 & \\ \underline{3^o p} & 1034 = 352 \cdot 2 + 330 & \\ \underline{4^o p} & 352 = 330 \cdot 1 + 22 & \\ \underline{5^o p} & 330 = 22 \cdot 15 + 0 & \end{array}$$

### 1.5.2 In $\mathbb{Z}$

**1° modo** consigliato

- $|a|, |b| \in \mathbb{N}$
- $MCD(|a|, |b|) = d \in \mathbb{N}$
- $d, -d$  boh illeggibile  $MCD(a, b)$  in  $\mathbb{Z}$

**2° modo** Algoritmo di Euclide in  $\mathbb{Z}$

**Esempio**  $MCD(-274, 110)$

$$\begin{aligned} |a| &= |-274| = 274 \\ |b| &= |110| = 110 \end{aligned}$$

**1° Modo** svolgimento

$$\begin{array}{lcl} \underline{1^o p} & 274 = 110 \cdot 2 + 54 & \\ \underline{2^o p} & 110 = 54 \cdot 2 + 2 & \\ \underline{3^o p} & 54 = 2 \cdot 27 + 0 & \\ & & MCD(|a|, |b|) = d = 2 \implies 2 \text{ e } -2 \text{ sono i } MCD(-274, 110) \end{array}$$

**2° Modo** Algoritmo di Euclide in  $\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lcl} \underline{1^o p} & 274 = 110 \cdot (-3) + 56 & |b| > r_1 \geq 0 \\ \underline{2^o p} & 110 = 56 \cdot 1 + 54 & \\ \underline{3^o p} & 56 = 54 \cdot 1 + 2 & 2 \text{ e } -2 \text{ sono i due massimi comuni divisori di } -274 \text{ e } 110 \\ \underline{4^o p} & 54 = 2 \cdot 27 + 0 & \end{array}$$

## 2 Polinomi

$$S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

$S[x]$  = Insieme dei polinomi a coefficienti in  $S$  nella indeterminata  $x$

$f(x) \in S[x]$  se  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  Robette che non ho capito bene bene bene

Se  $a_n \neq 0$  IL GRADO DI  $f(x)$  è

$n = \deg f(x)$ ;  $a_n$  si chiama **coefficiente direttore** di  $f(x)$ ,  $a_0$  si chiama **termine noto** di  $f(x)$

$$\text{NB 1} \quad \begin{cases} c \in S \\ c \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \deg c = 0$$

$$\text{NB 2} \quad c = 0 \in S \quad \text{per convenzione di pone } \deg 0 = -\infty$$

### 2.1 Somma di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$  definisco  $f(x) + g(x) \in S[x]$

$$\text{Es} \quad f(x) = 2 - x^3 + 3x^2 \quad g(x) = 7x + x^3 + 12$$

$$\begin{array}{rcl} 2 + 0x + 3x^2 - x^3 + & \deg f(x) = 3 & \\ 12 + 7x + 0x^2 + x^3 = & \deg g(x) = 3 & \\ \hline 14 + 7x + 3x^2 & \deg(f(x) + g(x)) \leq 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i & a_n = 0, \deg f(x) = n & \\ g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m = \sum_{i=0}^m b_i x^i & b_m = 0, \deg g(x) = m & \end{array}$$

Per fissare le idee si ponga che  $m \leq n$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^m (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i$$

$$\text{NB} \quad \deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

### 2.2 Prodotto di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$  definisco  $f(x) \cdot g(x) \in S[x]$

nel seguente modo:

se  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  e  $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  allora

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^m b_i x^i \right) = \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m) = \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots = \sum_{i=0}^i a_k b_{i-k} \left( \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) x^i \end{aligned}$$

$$\text{NB} \quad \deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

$$\begin{array}{l} \text{Esempio} \quad f(x) = 2 - x + 6x^2 \quad g(x) = 1 + 4x \\ (2 - x + 6x^2)(1 + 4x) = \dots = 2 + 7x - 4x^2 + 6x^4 + 24x^5 \end{array}$$

$$\text{DA QUESTO MOMENTO } S \neq \mathbb{Z} : \quad S \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$



## 2.3 Divisioni di polinomi

$\forall f(x), g(x) \in S[x], g(x) \neq 0 \exists! q(x), r(x) \in S[x]$  tale che  $\begin{cases} f(x) = g(x)q(x) + r(x) \\ \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$

**Esempio** Divido  $f(x) = 7x^4 + 3x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  per  $g(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{r|l} 7x^4 & x^2 + x + 1 \\ -7x^4 - 7x^3 - 7x^2 & \\ \hline & -7x^3 - 7x^2 \\ & 7x^3 + 7x^2 + 7x \\ \hline & 7x \end{array}$$

## 2.4 Radici di un polinomio

Sia  $f(x) \in S[x]$ .

Un numero  $x_0 \in S$  si dice una **radice** <sup>(3)</sup> di  $f(x)$  se  $f(x_0) = 0$  <sup>(4)</sup>

Quindi  $x_0$  è una radice di  $f(x)$  se e solo se  $x_0$  è una soluzione dell'equazione  $f(x) = 0$

**Esempio**  $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$   
 $x_0 = -1$  è una radice di  $f(x)$ :  $f(-1) = (-1 + 1)^2 = 0$   
 $x_0 = 1$  è soluzione dell'equazione  $x^2 + 2x + 1 = 0$  <sup>(5)</sup>

### 2.4.1 Teorema di Ruffini

Se  $f(x) \in S[x]$  ed  $x_0 \in S$

$(x_0 \text{ è una radice di } f(x)) \iff (x - x_0) \mid f(x) \iff f(x) = (x - x_0)q(x)$   
(divide)  $\exists q(x) \in S[x]$

dividendo  $f(x)$  per  $x - x_0$  si ha  $r(x) = 0$

### 2.4.2 Radici di polinomi di 2° grado a coefficienti reali

$ax^2 + bx + c = 0$   $a, b, c \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$   
 $\Delta = b^2 - 4ac$  è il discriminante dell'equazione

- SE  $\Delta > 0$  ci sono due soluzioni REALI distinte

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- SE  $\Delta = 0$  l'equazione ha UNA soluzione REALE  
 “contata due volte”

$$(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)(x + 1) \quad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- SE  $\Delta < 0$  l'equazione non ha soluzioni reali, ma ha 2 soluzioni complesse

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Poiché  $\sqrt{-\Delta} \neq 0 \implies x_1 \neq x_2$

L'equazione ha 2 soluzioni complesse **coniugate** (l'una coniugata dell'altra)

$$x_1 = \overline{x_2}$$

(3) oppure uno zero

(4) “ $f$  valutato in  $x_0 = 0$ ”

(5) ovvero  $f(x)$

$$x_2 = \overline{x_1}$$

**Equivalentemente** dato  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$   
 $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$  e  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$  ha due radici complesse  $x_1, x_2$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

e quindi

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{C} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

## 2.5 Teorema fondamentale dell'algebra

$$\forall f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$$\text{polinomio di grado } n > 0 \quad (a_n \neq 0)$$

$\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  tale che

$$f(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_n)$$

potrebbero esserci ripetizioni

**Ad esempio** se  $f(x) = (x-1)^n = (x-1)(x-1)\dots(x-1)$  allora  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 1$   
**Ogni polinomio di grado  $n > 0$  e coefficienti complessi è prodotto di  $n$  polinomi di grado 1**

Se  $z_0, z_1, \dots, z_x$  <sup>(6)</sup> sono quegli  $z_i$  **DISTINTI**, allora

$$f(x) = a_n(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2}\dots(x - z_k)^{m_k}$$

**$m_i$  = la molteplicità algebrica di  $z_i$**

È equivalente a:  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

L'equazione  $f(x) = 0$  <sup>(7)</sup> ha  $n$  soluzioni:

$z_1$  contata  $m_1$  volte

$z_2$  contata  $m_2$  volte

$z_3$  contata  $m_3$  volte

...

...

$z_k$  contata  $m_k$  volte

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

**Esempio**  $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3) = (x - 1)^2(x - 3)$

$z_1 = -1$   $m_1 = 2$

$z_2 = 3$   $m_2 = 1$

**Ogni equazione a coefficienti complessi di grado  $n$  ha  $n$  soluzioni complesse contate con le loro molteplicità**

---

(6) sono le radici di  $f(x)$

(7) cioè  $a(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2}\dots(x - z_k)^{m_k} = 0$

### Ritorniamo alle divisioni in $\mathbb{Z}$

Se  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $d = MCD(a, b)$  Vogliamo trovare  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che

$$d = ma + nb$$

**Esempio**  $a = 10$   $b = 4$   $d = 2$

cerco  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che

$$\frac{d}{2} = \frac{a}{10}m + \frac{b}{4}n$$

Calcolo  $d$  usando l'algoritmo di Euclide:

$$\begin{aligned} 10 &= 4 \cdot 2 + 2 \\ \frac{a}{10} &= \frac{b}{4} \cdot \frac{q_1}{2} + \frac{r_1}{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ \frac{a}{4} &= \frac{b}{2} \cdot \frac{q_1}{2} + \frac{r_1}{2} \end{aligned} \quad d = 2 = \frac{10}{a} + \frac{4}{b} \cdot \frac{(-2)}{n}$$

$m = 1$

**NB**  $m, n$  non sono univocamente individuati da  $a$  e  $b$

**Esempio**  $2 = m10 + n4$  ma anche  $2 = \frac{10}{a} \cdot \frac{3}{m} + \frac{4}{b} \cdot \frac{(-7)}{n}$   
 $m = 1, n = -2$

## 2.6 Identità di Bezout (teorema)

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ , posto  $d = (a, b)$   $\exists m, n \in \mathbb{Z}$  tali che

$$d = ma + nb$$

**NB**  $m, n$  non sono unici

Per trovarli posso:

1. Applico l'algoritmo di Euclide in  $\mathbb{Z}$  e lo "ripercorro" all'indietro"  
OPPURE
2. (a) calcolo  $|a|, |b| \in \mathbb{N}$   
(b) osservo  $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$   
(c) prendo  $d$  il  $MCD(|a|, |b|)$  **positivo**  
calcolato con l'algoritmo di Euclide in  $\mathbb{N}$   
Lo ripercorro all'indietro e ottengo  $m^*, n^* \in \mathbb{Z}$

$$d = m^*|a| + n^*|b|$$

- (d) se  $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$  e  $m = m^*$ , se  $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$  e  $m = -m^*$   
se  $b \geq 0 \Rightarrow |b| = b$  e  $n = n^*$ , se  $b \leq 0 \Rightarrow |b| = -b$  e  $n = -n^*$

**Esempio**  $a = -36$   $b = 28$  se  $d = MCD(a, b)$ , cerco  $m, n \in \mathbb{Z}$  tale che  $d = ma + nb$

1° Modo Algoritmo di Euclide in  $\mathbb{Z}$  e calcolo  $d$

$$\frac{-36}{a} = \frac{28}{b} \cdot \frac{(-2)}{q_1} + \frac{20}{r_1} \Rightarrow \boxed{20 = -36 + 2 \cdot 28}$$

$$\text{N.B. } 0 \leq r_1 < |b| = 28$$

$$\frac{28}{b} = \frac{20}{r_1} \cdot \frac{q_2}{1} + \frac{8}{r_2} \Rightarrow 8 = 28 + 20 \cdot (-1)$$

$$\frac{20}{r_1} = \frac{8}{r_2} \cdot \frac{q_3}{2} + \frac{4}{r_3} \Rightarrow d = 4 = 20 + 8 \cdot (-2) = 20 + (-2)[28 + 20 \cdot (-1)] =$$

$$\begin{aligned}
&= 20 + (-2) \cdot 28 + 20 \cdot 2 = \\
&= 3 \cdot 20 + (-2) \cdot 28 = \\
&\quad 3 \cdot [-36 + 2 \cdot 28] + (-2) \cdot 28 \\
&= 3 \cdot (-36) + 6 \cdot 28 + (-2) \cdot 28 = 3 \cdot (-36) + 4 \cdot 28
\end{aligned}$$

**2° Modo** Cerco  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $d = am + bn$  dove  $d = MCD(a, b)$   $|a| = |-36| = 36$

**NB**  $MCD(|a|, |b|) = MCD(a, b) = d$

$|b| = |28| = 28$  Intanto (PAOLO) l'algoritmo di Euclide a  $|a|$  e  $|b|$  e trovo  $m^*, n^* \in \mathbb{Z}$

tali che  $d = |a| \cdot m^* + |b| \cdot n^*$

PAOLO

### 3 Classi di Congruenza

Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$

Si dice che  $a$  è **congruo** (o congruente) a  $b$  modulo  $n$  se

$$n|(a-b)$$

Si scrive  $a \equiv b \pmod{n}$ ; oppure  $a \equiv b \pmod{n}$  oppure  $a \equiv_n b$

**NB**  $a \equiv b \pmod{n} \iff \begin{array}{c} \text{il resto della divisione} \\ \text{di } a \text{ per } n \end{array} = \begin{array}{c} \text{il resto della divisione} \\ \text{di } b \text{ per } n \end{array}$

**Dimostrazione** ipotesi:  $a \equiv b \pmod{n}$  tesi: i due resti sono uguali

divido  $a$  per  $n$ :  $a = nq_1 + r_1$ ,  $0 \leq r_1 < n$

divido  $b$  per  $n$ :  $b = nq_2 + r_2$ ,  $0 \leq r_2 < n$

So che  $a \equiv b \pmod{n} \implies n|(a-b)$

Da  $a-b = nq_1 + r_1 - (nq_2 + r_2) = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$

$\uparrow$   
 $a = nq_1 + r_1$   
 $b = nq_2 + r_2$

Si ottiene:  $r_1 - r_2 = (a-b) - n(q_1 - q_2)$

$$\begin{cases} n|n(q_1 - q_2) \\ n|a-b \end{cases} \implies n|(a-b) - n(q_1 - q_2) \implies n|r_1 - r_2$$

Perché per ipotesi  $a \equiv b \pmod{n}$

$$\text{se } r_1 \geq r_2 \implies \begin{cases} 0 \leq r_1 - r_2 < n \\ n|r_1 - r_2 \end{cases} \implies r_1 - r_2 = 0 \implies r_1 = r_2$$

$$\text{se } r_2 \geq r_1 \implies \begin{cases} 0 \leq r_2 - r_1 < n \\ n|(r_1 - r_2) \implies n|(r_2 - r_1) \end{cases} \implies r_2 - r_1 = 0 \implies r_2 = r_1$$

**Viceversa**

**Ipotesi** Considero

$$a = nq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < n$$

$$b = nq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < n$$

$$r_2 = r_1$$

**Tesi**  $a \equiv b \pmod{n}$

**Dimostrazione** Voglio arrivare a dire che  $n|(a-b)$

$$\begin{cases} a = nq_1 + r_1 \\ r_1 = r_2 \end{cases} \implies a = nq_1 + r_2 \implies$$

$$a-b = (nq_1 + r_2) - (nq_2 + r_2) = nq_1 + \cancel{r_2} - nq_2 - \cancel{r_2} = nq_1 - nq_2 = n(q_1 - q_2) \implies n|(a-b)$$

**NB 2** Fisso  $n \in \mathbb{N}$ 

La relazione di congruenza gode delle seguenti proprietà:

1. **è riflessiva:**  $a \equiv a \pmod n \forall a$   
(infatti  $n|(a-a) = 0$ )

2. **è simmetrica:**  $a \equiv b \pmod n \implies b \equiv a \pmod n$   
(infatti  $n|(a-b) \implies n|(b-a)$ )

3. **è transitiva:**  $\begin{cases} a \equiv b \pmod n \\ b \equiv c \pmod n \end{cases} \implies a \equiv c \pmod n$

$$\text{Infatti } \begin{cases} a \equiv b \pmod n \implies n|(a-b) \\ b \equiv c \pmod n \implies n|(b-c) \end{cases} \implies n|[(a-b) + (b-c)] = (a-c) \implies a \equiv c \pmod n$$

Ogni relazione che gode delle proprietà 1., 2., 3. si dice una **relazione di equivalenza**.

Fissato  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ,  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

4.  $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod n \\ a_2 \equiv b_2 \pmod n \end{cases} \implies (a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2) \pmod n$

le congruenze modulo  $n$  si possono “sommare”

5.  $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod n \\ a_2 \equiv b_2 \pmod n \end{cases} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod n$

le congruenze modulo  $n$  si possono “moltiplicare” PAOLO qui però ho copiato parecchio dalle slide vecchie

In generale

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, k \in \mathbb{Z}$

$$[a]_n = [a + kn]_n$$

2.  $c \in [a]_n \implies [a]_n = [c]_n$

3. In particolare (divideo)  $a$  per:

$$a = qn + r \text{ con } 0 \leq r < n$$

$$\text{Si ha } [a]_n = [r]_n$$

Perché, essendo  $r = a + n \cdot (-q)$ , si ha che  $r \in [a]_n$ , quindi si può usare  $[z]_{??}$  con  $c = r$

**Def.**  $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ , si chiama

**classe di congruenza  $a$  modulo  $n$**  e si indica  $[a]_n$  oppure  $[a] \pmod n$

$$\begin{aligned} [a]_n &= \text{insieme di tutti i numeri interi che sono congrui ad } a \text{ modulo } n \\ &= \{b \in \mathbb{Z} | b \equiv a \pmod n\} \end{aligned}$$

**NB 1**  $\forall b \in \mathbb{N}, n > 0, a, b \in \mathbb{Z} \quad [a]_n, [b]_n$

Voglio vedere che  $[a]_n = [b]_n$  oppure che  $[a]_n \cap [b]_n = \emptyset$  <sup>(8)</sup>

Infatti o  $[a]_n = [b]_n$

Oppure  $[a]_n \neq [b]_n$ . Suppongo  $[a]_n \cap [b]_n \neq \emptyset$

$$\implies \exists c \in [a]_n \cap [b]_n \implies \begin{cases} c \in [a]_n \implies [a]_n = [c]_n \\ c \in [b]_n \implies [b]_n = [c]_n \end{cases}$$

$$\implies [a]_n = [c]_n = [b]_n \implies [a]_n = [b]_n \text{ è una contraddizione}$$

---

(8)  $[a]_n$  e  $[b]_n$ , pensati come insiemi di numeri interi, sono **insiemi disgiunti**

**NB 2**  $\forall n, n > 0$

Considero le classi di congruenza  $[a]_n$  con  $0 \leq a < n$

se  $b \in \mathbb{Z}$ , dividendo  $b$  su  $n$  si ha:  $b = nq + r$  con  $0 \leq r < n \implies [b]_n = [r]_n \implies b \in [r]_n$

Quindi

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup [2]_n \cup \dots \cup [n-1]_n$$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{0 \leq a < n} [a]_n$$

Queste classi sono a due a due **disgiunte**, l'insieme delle classi  $[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n$  sono una **partizione** di  $\mathbb{Z}$

**Def.** L'insieme degli **interi modulo  $n$** , indicato con il simbolo  $\mathbb{Z}_n$  è:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

In  $\mathbb{Z}_n$  si definiscono  $+$  e  $\cdot$  nel seguente modo:

DA QUI RIPRENDO LEZIONE LIVE 6

**Teorema 1** (\*) ha soluzione  $\iff d = MCD(a, n) | b$

se  $d|b$  una soluzione  $x_0 = \alpha q$  dove  $\begin{cases} d = \alpha a + bn \\ b = \alpha q \text{ per cui } q = \frac{b}{d} \end{cases}$

**Teorema 2** se (\*) ha soluzione e  $x_0$  è una soluzione allora l'insieme di **tutte** le soluzioni è:

$\{x_k = x_0 + k \cdot \frac{n}{d} | k \in \mathbb{Z}\}$  si ripartiscono nelle classi:  $[x_0]_n, [x_1]_n, \dots, [x_{d-1}]_n$

### ESERCIZI

1.  $2x \equiv 5 \pmod{8}$

(a) Calcolo  $d = MCD(a, n) = MCD(2, 8) = 2$

(b)  $d|b$  **PAOLO**

2.  $3 \equiv 4 \pmod{7}$

(a) Calcolo  $d = MCD(a, n) = MCD(3, 7) = 1$

(b)  $d|b$   $1|4$

La congruenza ha  $\infty$  numeri come soluzioni:

$\{x_0 + 7k | x \in \mathbb{Z}\} = [x_0]_7$  dove  $x_0$  è una particolare soluzione.

Soluzione:

$$d = \alpha a + \beta n$$

$$1 = \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 7$$

Bezout:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \implies d = 1$$

$$1 = \frac{7}{d} + 3 \cdot \frac{(-2)}{\beta=1} \implies \alpha = -2$$

$$4 = 7 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 4$$

Le soluzioni sono tutte nella classe

$$[(-2) \cdot 4]_7 \implies [-8]_7 = [-8 + 7]_7 = [-1]_7 = [-1 + 7]_7 = [6]_7$$

**PAOLO**

3.  $2x \equiv 10 \pmod{12}$

**PAOLO** La congruenza ha infiniti numeri interi come soluzioni, che si ripartiscono in  $d = 2$  classi di congruenza modulo  $n = 12$

(a) calcolo  $x_0$  (poi prendo anche  $x_1 = x_0 + 6$ )

$$\begin{matrix} a & b & n \\ 2x \equiv 10 & \text{mod } 12 & d = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 12 \end{matrix}$$

$$2 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 12$$

$$\begin{matrix} a & n & q_1 & r_1 \\ 2 = 12 \cdot 0 + 2 & \implies & \text{Continua} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} d & a & n & \beta \\ 2 = 2 \cdot \alpha 1 + 12 \cdot 0 & \text{Moltiplico per } 5 = \frac{b}{d} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} b=10 & n \\ 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 12 \cdot 0 & \text{Continua} \end{matrix}$$

L'insieme delle soluzioni della congruenza è:

$$\{5 + 12k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11 + 12k | k \in \mathbb{Z}\}$$

### 3.1 Invertibili in $\mathbb{Z}_n$ e il loro calcolo

$n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  si dice **invertibile modulo  $n$**  se la congruenza  $ax \equiv 1 \pmod{n}$  ha soluzioni.

quindi  $\iff MCD(a, n) = d | b = 1 \iff MCD(a, n) = 1$

Si dice **PAOLO**.

**Def.**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$

$[a]_n \in \mathbb{Z}_n$  si dice **invertibile** in  $\mathbb{Z}_n$  se

$\exists [b]_n \in \mathbb{Z}_n$  tale che  $[a]_n [b]_n - n = [1]_n$

In questo caso  $[b]_n$  si dice **un inverso** di  $[a]_n$

$[a]_n = [1]_n$   $ax \equiv 1 \pmod{n}$   $d = MCD(a, n) = 1$  Essendo  $[b]_n$  **unico** (Perché  $d = 1$ )

Allora  $[b]_n$  è l'**inverso** di  $[a]_n$  **PAOLO**

**Esempio 1** 6 non è invertibile modulo 9 perché  $MCD(6, 9) \neq 1$   
( $6x \equiv 1 \pmod{9}$  non ha soluzioni)

**Esempio 2** 4 è invertibile modulo 9 perché  $MCD(4, 9) = 1$   
(4 e 9 sono coprimi)

$4x \equiv 1 \pmod{9}$  ha soluzione

$$\begin{matrix} a & b & n \\ \exists [4]_9^{-1} \end{matrix}$$

Calcolo l'inverso di  $[4]_9$ , cioè calcolo  $[4]_9^{-1}$

$$\begin{matrix} d & a & n \\ d = \alpha a + \beta n \\ 1 & 4 & 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n & a & q_1 & r_1 \\ 9 = 4 \cdot 2 + 1 \end{matrix}$$

$$1 = 9 + 4 \cdot (-2) \quad \mathbb{Z}_p \text{ (con } p \text{ un numero primo)}$$

Sia  $p$  un numero primo e  $[a]_p \in \mathbb{Z}_p$

Posso supporre  $0 \leq a < p$

se  $a = 0$  allora  $[a]_p = [0]_p$

$$\nexists [b]_p | [0]_p [b]_p = [1]_p$$

$$\exists [0]_p^{-1}$$

se  $a \neq 0$  **Siccome  $p$  è un numero primo PAOLO**

Di  $\mathbb{Z}_p$  **tutti di elementi**  $\neq [0]_p$  sono **invertibili**.

Quanti sono? Sono  $p - 1$

Il numero degli elementi invertibili in  $\mathbb{Z}_p$  è  $p - 1$

Quanti sono gli invertibili in  $\mathbb{Z}_n$ ?

**PAOLO**



### 3.2 La funzione di Eulero

La funzione di Eulero  $\phi$  li “conta”

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

è definita da  $\phi(n)$  = il numero dei naturali  $k$  tali che  $\begin{cases} 0 \leq k < n \\ \text{MCD}(k, n) = 1 \end{cases}$  Se  $p$  è un numero primo (**PAOLO**)  $\phi(p) = p - 1$

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} \implies \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

Finisci slide

### 3.3 Sistema di congruenze

UN sistema di congruenze è

$$a_1 x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$a_2 x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

...

$$a_k x \equiv c_k \pmod{m_k}$$

Dove  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$   $i = 1, \dots, k$

**PAOLO**

“**Risolvere**” il sistema significa

- Dire se ha soluzioni oppure no
- nel caso le abbia, trovarle tutte

Un  $x_0 \in \mathbb{Z}$  è UNA SOLUZIONE del sistema se è **contemporaneamente soluzione** di **ogni congruenza** del sistema.

**NB 1** Se una congruenza non ha soluzioni allora l'intero sistema non ne ha.<sup>(9)</sup>

**NB 2** Anche se tutte le congruenze del sistema hanno soluzione, non è detto che il sistema abbia soluzione.

Ad esempio

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{6} \end{cases} \quad \text{non ha soluzioni anche se ogni sua configurazione ha soluzioni}$$

---

<sup>(9)</sup> come avviene in tutti i sistemi

### 3.4 Il teorema cinese dei resti

Il teorema cinese dei resti da una condizione **sufficiente** affinché **particolari** sistemi di congruenze abbiano soluzioni.

Dati  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}, n_i > 0 \quad i = 1, \dots, k$   
**a due a due coprimi**<sup>(10)</sup>

$\forall b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$  si ha che  $\exists$  infinite soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ \dots \\ x \equiv b_k \pmod{n_k} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Esse si trovano tutte nella stessa classe} \\ \text{di congruenze modulo } n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k \end{array}$$

**NB** La condizione che gli  $n_i$  siano a due a due coprimi non è una condizione necessaria affinché il sistema abbia soluzioni:

**Esempio 1**  $\begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{7} \\ 3x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases} \quad \begin{array}{l} n_1 = n_2 \implies MCD(n_1, n_2) \neq 0 \\ \text{Però il sistema ha soluzione } [2]_7 \end{array}$

**Esempio 2**  $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} MCD(n_1, n_2) \neq 0 \\ \text{Però il sistema ha soluzione in } [2]_4 \end{array}$

**Cominciamo a studiare Il caso  $k = 2$**

$$\begin{cases} A \rightarrow \\ B \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \end{cases} \quad MCD(n_1, n_2) = 1$$

#### 3.4.1 Metodo di Newton

1.  $x_1 = b_1$
2. Cerco  $t_2 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_1 + t_2 n_1 \equiv x_2$  sia soluzione di  $B$   
 Così cerco  $t_2 \in \mathbb{Z}$  tale che  
 $b_1 = t_2 n_1 \equiv b_2 \pmod{n_2}$   
 $t_2 n_1 \equiv (b_2 - b_1) \pmod{n_2}$   
 dove  $t_2$  è il numero intero che cerco in modo tale che:  
 $x_2 \equiv b_2 \pmod{4}$  (siccome cerco  $t_2$ )  
 $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv x - 1 = b_1 \pmod{n_1}$
3.  $x_2$  è una soluzione di  $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$
4. Per il teorema cinese dei resti, le soluzioni del sistema sono esattamente tutti i numeri interi nella classe  $[x_2]_n = \{ \}$  **PAOLO**

**Esempio**  $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \quad \begin{array}{l} b_1 \quad n_1 \\ b_2 \quad n_2 \end{array}$   
 $MCD(n_1, n_2) = MCD(6, 5) = 1$

Posso applicare il teorema cinese dei resti e concludere che il sistema ha infinite soluzioni: tutti i numeri in  $[x_2]_{30} = \{x_2 + 30k | k \in \mathbb{Z}\}$

<sup>(10)</sup> cioè se  $i \neq j$  allora  $MCD(n_i, n_j) = 1$

1.  $x_1 = 4$
2. cerco  $t_2 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \pmod{n_2}$ , ovvero  
 $4 + t_2 \cdot 6 \equiv 3 \pmod{5}$   
 Facendo i conti in  $\mathbb{Z}_5$ :  $[4]_5 + t_2[6]_5 = [3]_5$   
 $t_2 \cdot 6 \equiv 3 - 4 \pmod{5}$   
 $6t_2 \equiv -1 \pmod{5} \implies t_2 \equiv 4 \pmod{5}$
3. ad esempio prendo  $t_2 = 4 \implies$   
 $\implies x_2 = x_1 + t_2 n_1 = 4 + 4 \cdot 6 = 28$

Per il teorema cinese dei resti tutte le soluzioni di  $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$  sono gli interi nell'insieme  
 $[28]_{30} = \{28 + 30k | k \in \mathbb{Z}\}$

**Il caso  $k = 3$**  Consideriamo

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ x \equiv b_3 \pmod{n_3} \end{cases} \\ B &\longrightarrow \\ C &\longrightarrow \end{aligned}$$

E lo risolviamo col teorema cinese dei resti con l'ipotesi:

$$\begin{aligned} MCD(n_1, n_2) &= 1 \\ MCD(n_1, n_3) &= 1 \\ MCD(n_2, n_3) &= 1 \end{aligned}$$

Per trovare  $x_3$ :

1. Scelgo una soluzione di  $A : x_1 = b_1$
2. Cerco  $t_2 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \pmod{n_2}$
3.  $x_2$  è soluzione di  $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$
4. Cerco  $t_3 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2) = x_3$   $x_3$  è soluzione di  $\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_3 &\equiv x_2 \text{ è soluzione di } A \\ \text{mod } n_1 & \\ x_3 &\equiv x_2 \text{ è soluzione di } B \\ \text{mod } n_2 & \end{aligned}$$

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

5.  $x_3$  è una soluzione del sistema  $\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$

Per il teorema cinese dei resti la soluzione del (\*) sono i numeri interi nell'insieme  
 $\{x_2 + nk | k \in \mathbb{Z}\}$

**Esempio 2** considero

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{11} & MCD(11, 6) = 1 \\ x \equiv 5 \pmod{6} & MCD(11, 7) = 1 \\ x \equiv 10 \pmod{7} & MCD(6, 7) = 1 \end{cases}$$

$$n = 11 \cdot 6 \cdot 7 = 462$$

1.  $x_1 = 10$
2. Cerco  $t_2 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv b_2 \pmod{n_2}$   
 $10 = t_2 \cdot 11 \equiv 5 \pmod{6}$   
 $11t_2 \equiv 5 - 10 \pmod{6}$   
 $11t_2 \equiv -5 \pmod{6}$   
 $[1]_6 = [5]_6$   
 $[-5]_6 = [1]_6$  **PAOLO**, e anche bello grosso
3. Cerco  $t_3 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_3 = x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2)$  sia soluzione di  $C: x \equiv 5 \pmod{7}$   
 $x_2 + t_3(n_1 \cdot n_2) \equiv 5 \pmod{7}$   
 $65 + t_3(11 \cdot 6) \equiv 5 \pmod{7}$   
 $66t_3 \equiv -60 \pmod{7} \quad 3t_3 \equiv 3 \pmod{7}$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + t_3 \cdot n_1 \cdot n_2 \\ &= 65 + 1 \cdot 11 \cdot 6 \\ &= 65 + 66 = 131 \end{aligned}$$

**PAOLO**

In generale se  $k \geq 4$  e  $\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ x \equiv b_k \pmod{n_k} \end{cases}$  Con  $MCD(n_i, n_j) = 1 \quad \forall i \neq j$

Itero di procedimento

- $x_1 = b_1$  è una soluzione di 1
- impongo che  $x_1 + n_1 t_2 = x_2$  Sia soluzione di 2 **PAOLO** Cerco  $t_2 \dots$
- Impongo che  $x_2 + n_1 n_2 t_3 = x_3$  sia soluzione di 3  
 (Cerco  $t_3 \in \mathbb{Z}$  tale che ...) allora  $x_3$  è soluzione di  $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$
- Impongo che  $x_3 + n_1 n_2 n_3 t_4 = x_4$  sia soluzione di 4  
 (Cerco  $t_4 \in \mathbb{Z}$  tale che ...) allora  $x_4$  è soluzione di  $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$

**PAOLO**

Torniamo al caso  $k = 2$   $\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \end{cases}$  Metodo di Lagrange  $MCD(n_1, n_2) =$   
1

Da  $MCD(n_1, n_2) = 1$ , usando Bezout trovo:  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$  tali che

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = 1$$

Allora  $z = \alpha_1 n_1 b_2 + \alpha_2 n_2 b_1$  è una **PAOLO** ..

..

..

$$z = \alpha_1 n_1 b_2 + \alpha_2 n_2 b_1$$

$$z \equiv b_1 \pmod{n_1} \quad \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \implies \alpha_2 n_2 = 1 - \alpha_1 n_1$$

$$z = \alpha_1 n_1 b_2 + (1 - \alpha_1 n_1) b_1 \quad (2)$$

$$= \alpha_1 n_1 b_2 \quad (3)$$

**PAOLO**, c'è da finire la slide

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}$$

$$MCD(6, 5) = 1 \text{ cerco } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$$

**PAOLO**

### 3.5 Ridurre un generico sistema di congruenze

Vediamo come “ridurre”, se si può, un generico sistema di congruenze:

$$\begin{cases} a_1 x \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ a_2 x \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ a_k x \equiv c_k \pmod{m_k} \end{cases} \quad \text{ad un sistema nella forma} \quad \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ \dots \\ x \equiv b_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

$$a_i, c_i \in \mathbb{Z}, m_i \in \mathbb{N}, m_i > 0 \quad b_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{Z}, n_i > 0$$

**Ridurre** significa “sostituire con un sistema equivalente”

**Equivalente** significa “con le stesse soluzioni”

**Motivazione** Abbiamo

$$\begin{matrix} A \rightarrow \\ B \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{8} \\ 3x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

$$A = MCD(2, 8) = d = 2 \mid 4 \begin{cases} [2]_8 & 2 \cdot 2 = 4 \equiv 4 \pmod{8} \\ [6]_8 & 2 \cdot 6 = 12 \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

$$A \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{8} & \text{C} \\ x \equiv 6 \pmod{8} & \text{D} \end{cases}$$

$$B : MCD(3, 9) = d = 3 \mid 6 \begin{cases} [2]_9 & 3 \cdot 2 = 6 \equiv 6 \pmod{9} \\ [5]_9 & 3 \cdot 5 = 15 \equiv 6 \pmod{9} \\ [8]_9 & 3 \cdot 8 = 24 \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{9} & E \\ x \equiv 5 \pmod{9} & F \\ x \equiv 8 \pmod{9} & G \end{cases}$$

Quindi le soluzioni di  $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$  sono l'unione delle soluzioni di 6 sistemi:

$$\begin{cases} C \\ E \end{cases} \cup \begin{cases} C \\ F \end{cases} \cup \begin{cases} C \\ G \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ E \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ F \end{cases} \cup \begin{cases} D \\ G \end{cases}$$

E noi vorremmo non dover risolvere sei sistemi.

**Passaggio 1** Calcolo  $d_i = MCD(a_i, m_i) \forall i = 1, \dots, k$

- $\exists d_i$  tale che  $d_i \nmid c_i$  allora  $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$  Non ha soluzioni, allora (\*) non ha soluzioni.
- se  $d_i | c_i \forall i = 1, \dots, k$  allora ogni congruenza di (\*) ha soluzione e
  - se  $d_i = 1$  **mantengo** la congruenza  $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$
  - se  $d_i \neq 1$  **sostituisco** la congruenza  $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$  con la congruenza

$$\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}}$$

**NB 1** La congruenza  $\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}}$  è **equivalente** alla congruenza  $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$

**NB 2** La congruenza  $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$

Infatti

Sia  $z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{z \text{ è soluzione di } a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}} & \iff & \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a_i z = c_i + m_i k} \\ \text{divido per } d_i & & \\ \implies & & \\ \iff & & \\ \text{moltiplico per } d_i & & \\ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \frac{a_i}{d_i} z = \frac{c_i}{d_i} + \frac{m_i}{d_i} k} & \iff & \boxed{z \text{ è soluzione di } \frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}}} \end{array}$$

**NB 3** Siccome  $d_i = MCD(a_i, m_i)$  allora

$$MCD\left(\frac{a_i}{d_i}, \frac{m_i}{d_i}\right) = 1$$

Quindi le soluzioni della congruenza  $\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}}$  stanno tutte in un'unica classe di congruenza modulo  $\frac{m_i}{d_i}$

Alla fine del **passaggio 1** ottengo che (\*) non ha soluzioni, oppure che (\*) è equivalente a

$$(**) \begin{cases} \frac{a_1}{d_1} x \equiv \frac{c_1}{d_1} \pmod{\frac{m_1}{d_1}} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{d_k} x \equiv \frac{c_k}{d_k} \pmod{\frac{m_k}{d_k}} \end{cases}$$

**Passaggio 2** Risolvo ciascuna congruenza di (\*\*)

$$\frac{a_i}{d_i} x \equiv \frac{c_i}{d_i} \pmod{\frac{m_i}{d_i}} \implies x \equiv b_i \pmod{\frac{m_i}{d_i}}$$

Dove  $[b_i]_{\frac{m_i}{d_i}} = \{b_i + \frac{m_i}{d_i} t \mid t \in \mathbb{Z}\}$  è l'insieme delle soluzioni della congruenza

Posto  $n_i = \frac{m_i}{d_i}$  ottengo un sistema

$$(***) \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ \dots \\ x \equiv b_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

SE  $MCD(n_i, n_j) = 1 \forall i \neq j$  posso applicare il Teorema cinese dei resti. In tal caso:

**Passaggio 3** Con newton trovo  $x_k$  una particolare soluzione di (\*\*\*) e per il teorema cinese dei resti l'insieme di tutte le soluzioni (\*\*\*), e quindi anche di (\*) è  $[x_k]_n = \{x_k + nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{dove } n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

### 3.6 Esercizio tipo

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ 2x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$$

**Passaggio 1**  $a_1 = MCD(a_1, m_1) = MCD(3, 5) = 1 \mid 4 = c_1$   
 $a_2 = MCD(a_2, m_2) = MCD(2, 6) = 2 \mid 4 = c_2$

$a_1 = 1 \implies$  mantengo  $3x \equiv 4 \pmod{5}$   
 $a_2 = 2 \neq 1$  **sostituisco**  $2x \equiv 4 \pmod{6}$   
 Con  $\frac{2}{2}x \equiv \frac{4}{2} \pmod{\frac{6}{2}}$ :  $x \equiv 2 \pmod{3}$

$$\text{arrivo a } (**) \begin{cases} 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

**Passaggio 2** Risolvo ciascuna congruenza **PAOLO**

$$3x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$d = MCD(a, n) = 1 \mid 4 = b$$

$$d = 1 = \alpha a + \beta n$$

$$1 = \alpha + \beta \cdot 5$$

$$\alpha = 2$$

$$x_0 = \alpha q = 2 \cdot 4 = 8$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \implies 2 = 5 + 3 \cdot (-1)$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$\implies 1 = 3 + 3 \cdot (-1) = 3 + (-1)[5 + 3 \cdot (-1)] = 3x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$[8]_5 = [8 - 5]_5 = [3]_5$$

Sostituisco  $3x \equiv 4 \pmod{5}$  con  $x \equiv 3 \pmod{5}$

Per puro caso la congruenza  $x \equiv 2 \pmod{3}$  è già risolta.

$$(***) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Siccome  $MCD(n_1, n_2) = MCD(5, 3) = 1$ ,

Allora posso applicare il teorema cinese dei resti e concludere che  $(***)$  e quindi anche il sistema da cui sono partiti ha infinite soluzioni (numeri interi) tutte nella stessa classe di congruenza modulo

$$n = n_1 \cdot n_2 = 5 \cdot 3 = 15$$

**Passaggio 3** Trovo  $x_2$  una particolare soluzione di  $(***)$

$$1^\circ \text{ Modo per trovare } x_2 \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$1. x_1 = 3$$

$$2. \text{ cerco } t_2 \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x_2 = x_1 + t_2 n_1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x_2 \rightarrow 3 + t_2 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$5t_2 \equiv (2 - 3) \pmod{3}$$

$$5t_2 \equiv -1 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$

$$[5]_3 = [2]_3 \rightarrow 5t_2 = 2t_2$$

$$2t_2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\text{Ad esempio } t_2 = 1 \quad x_2 = 3 + 1 \cdot 5 = 3 + 5 = 8$$

$$\text{tutte le soluzioni del (*) sono } [8]_5 = \{8 + 15k | k \in \mathbb{Z}\}$$

**2° Modo** per trovare  $x_2 = z$   $MCD(n_1, n_2) = 1 \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = 1$$

$$\alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cdot 3 = 1$$

$$z = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2$$

$$= -5 \cdot 2 + 6 \cdot 3$$

$$= -10 + 18 = 8$$

$$[z]_n = [8]_{15} = \{8 + 15k | k \in \mathbb{Z}\}$$



## 4 Matrici e loro operazioni

Una **matrice** è una tabella di numeri (o di simboli) disposti in righe e colonne, detti **coefficienti** della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Altri tipi di notazioni sono sbagliati, inoltre:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ non è una matrice}$$

Il numero che si trova nella  $i$ -esima riga e nella  $j$ -esima colonna si chiama **coefficiente** di posto  $(i, j)$

$A$  è  $m \times n$  se ha  $m$  righe e  $n$  colonne

( $A$  ha “dimensioni  $m \times n$ ”)

$$A = \begin{matrix} \xrightarrow{\text{red}} \\ \xrightarrow{\text{blue}} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & \downarrow 3 & \downarrow 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ è } 2 \times 3 \quad \xrightarrow{\text{green}} \begin{bmatrix} 1 & \downarrow 2 \\ i & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ è } 3 \times 2$$

Le posizioni sono:

$$(2, 2) \quad (1, 3) \quad (3, 2)$$

Le matrici si indicano con lettere latine **maiuscole in stampatello**

$$A, B, C, \dots$$

I Coefficienti si indicano con le lettere latine **minuscole** in corsivo

$$a_{ij} = \text{il coefficiente di posti } (i, j) \text{ di } A$$

Per scrivere in modo compatto la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**La indico:**

$$A_{m \times n} = (a_{ij}) \text{ oppure } A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \text{ PAOLO}$$

### 4.1 Operazioni

#### 4.1.1 Prodotto di una matrice per uno scalare

Dato  $A = (a_{ij}), m \times n$  e dato uno scalare  $\alpha$ , si definisce **Prodotto dello scalare  $\alpha$  per la matrice  $A$**  la matrice  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  dove  $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

$$\text{si indica } B = \alpha \cdot A$$

**Esempio**  $\alpha = 1 - i$   $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3i \\ 1+2i & -i & -4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha A = (1 - i) \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3i \\ 1+2i & -i & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1-i)7 & (1-i) \cdot 0 & (1-i) \cdot 3i \\ (1-i)(1+2i) & (1-i)(-i) & (1-i)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-7i & 0 & 3+3i \\ 3+i & 1-i & -4+4i \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1-i)7 = 7-7i \\ (1-i) \cdot 3i = 3i-3i^2 \\ = -3i-3(-1) \\ = 3i+3 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1-i)(1+2i) = 1-i+2i+2i^2 = 1-i+2i+2 = 3+i \\ (1-i)(-i) = -i+i^2 = -i-1 \\ (1-i)(-4) = -4+4i \end{array}$$

**NB 1** vale la legge di cancellazione

$$\alpha \cdot A = || \Rightarrow \alpha = 0 \text{ oppure } A = ||$$

Indico con  $||$  la matrice con tutti i coefficienti  $= 0$

**NB 2**

1.  $\alpha A = A\alpha$   $\forall \alpha \text{ scalare } \forall A$
2.  $1 \cdot A = A$   $\forall A$
3.  $0 \cdot A = ||$   $\forall A$
4.  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha(\beta A)$   
 $\forall \alpha, \beta \text{ scalari } \forall A$

**Notazioni**  $(-1) \cdot A = -A$

$A = [a_{ij}]$   $(-1) \cdot A = [(-1)a_{ij}]$   $-A$  si chiama **la matrice opposta della matrice A**

## 4.2 Somma di due matrici

Date almeno due matrici  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{r \times s}$  **aventi le stesse dimensioni**,

cioè  $\begin{cases} r = m \\ s = n \end{cases}$  si definisce  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$  **la somma delle due matrici**

**Esempio** Siano  $A = \begin{bmatrix} 1+i & 3 & 2 \\ i & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3i & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & i & 2-i \\ i & 7+i & i \end{bmatrix}$

Non posso sommare A con B, né B con C, ma posso sommare A con C:

$$A+C = \begin{bmatrix} 1+i & 3+i & 2+2-i \\ i+i & 7+i & 7+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 3+i & 4-i \\ 2i & 7+i & 7+i \end{bmatrix}$$

**Proprietà della somma** Siano  $A, B, C$   $m \times n$ ,  $\alpha, \beta$  scalari

1.  $A+(B+C) = (A+B)+C$
2.  $A+B=B+A$
3.  $A+|| = A$
4.  $A+(-A) = ||$
5.  $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
6.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

### 4.3 Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna

Sono chiamati **vettori riga** matrici con una sola riga e **vettori colonna** matrici con una sola colonna.

In notazione:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]$$

**Il prodotto (riga per colonna)** di  $\underline{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$  per  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}$  è

$$\underline{v}^T \underline{u} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

**La riga deve necessariamente avere tanti elementi quanti ne ha la colonna**

**Esempio**  $[7 \quad 1+i \quad 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$  non esiste

$$\begin{aligned} [7 \quad 1+i \quad 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} &= -7 + (1+i)(1-i) + 3 \cdot 2i \\ &= -7 + 1^2 - i^2 + 6i \\ &= -7 + 1 - (-1) + 6i \\ &= -7 + 1 + 1 + 6i \\ &= -5 + 6i \end{aligned}$$

**NB 1**

1.  $\underline{v}^T \cdot \underline{0}$

$$\begin{aligned}
2. \quad \underline{u} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \underline{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \\
\underline{v} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}, \underline{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \\
\\
\underline{v}^T \underline{u} &= [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = \\
\\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**NB 2 non vale la legge di cancellazione**

Ossia

$$\begin{aligned}
\underline{u} \neq \underline{0} \text{ e } \underline{v}^T \underline{u} = 0 &\nRightarrow \underline{v}^T = \underline{0}^T \\
\text{ed anche } \underline{v}^T \neq \underline{0}^T \text{ e } \underline{v}^T \underline{u} = 0 &\nRightarrow \underline{u} = \underline{0}
\end{aligned}$$

**Esempio**  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

#### 4.4 Prodotto di due matrici (riga per colonna)

$A_{m \times n}$ ,  $B_{r \times s}$  Il prodotto di A e B è possibile solo se

$$n = r$$

$$A_{m \times n} B_{r \times s}$$

In tal caso il prodotto  $A_{m \times n} \cdot B_{r \times s} = C_{m \times s}$

dove

$c_{ij} = (i\text{-esima riga di A}) \cdot (j\text{-esima colonna di B})$  **PAOLO**

**Esempio**  $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 6i & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ ,

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, F_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 7i & 6+i \\ -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Non esiste AB, come non esiste AC.

Esiste però  $AE_{2 \times 3}$  perché il numero delle colonne di A coincide col numero di righe di E.

Per la stessa ragione esiste anche  $AF_{2 \times 2}$

$$AF = \begin{bmatrix} 22 + 14i & 6 + 2i \\ 20 + 42i & 21 + 6i \end{bmatrix}$$

Calcoliamo AE

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 14 & -5+9i & 19 \\ \hline 6 & 1 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + 12 = 14$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 9i - 7 = -5 + 9i$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 9 + 14 = 19$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -12 + 10 = -2$$

### Proprietà di cui gode il prodotto

Supponiamo che tutte le operazioni seguenti si possano fare con A, B, C matrici e  $\alpha$  scalare

1.  $\begin{matrix} r \times m & m \times n \\ s \times r & r \times n \end{matrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \times r & r \times m \\ s \times m & m \times n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{matrix} C \end{matrix}$  proprietà associativa
2.  $\begin{matrix} r \times m & m \times n \\ r \times m & m \times n \end{matrix} \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \begin{matrix} r \times n \end{matrix}$
3. Se  $I_n$  indica la matrice  $n \times n$  allora la matrice

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si chiama **matrice identica di ordine  $n$**

$$I_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$I_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Eccetera...

$$I_M \cdot \begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} = A = \begin{matrix} I_n \\ m \times n \end{matrix}$$

4.  $A(B+C) = AB+AC$

5.  $(A+B)C=AC+BC$
6.  $\alpha(AB) = (\alpha \cdot A)B = A(\alpha \cdot B)$   
Questo perché  $\alpha$  è uno scalare.

#### Proprietà di cui il prodotto non gode

1. **non vale la legge di cancellazione**

$$\begin{aligned} \text{ossia } \begin{cases} AB = \mathbb{I} \\ A \neq \mathbb{I} \end{cases} &\nRightarrow B = \mathbb{I} \\ \text{anche } \begin{cases} AB = \mathbb{I} \\ B \neq \mathbb{I} \end{cases} &\nRightarrow A = \mathbb{I} \end{aligned}$$

#### Esempio

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 6 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque  $AB = \mathbb{I}$  che  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$   
(ed anche sia  $A$  che  $B$  sono “quadrate”)

2. **Il prodotto (righe per colonne) NON è commutativo**

Cioè  $AB \neq BA$

- $\exists AB \nRightarrow BA$

$$\begin{cases} A_{x \times n} \\ B_{n \times k} \end{cases} \Rightarrow \exists AB_{m \times k}, \text{ ma se } k \neq m \text{ allora } \nexists BA$$

- $\begin{cases} \exists AB \\ \exists BA \end{cases} \nRightarrow AB \text{ e } BA \text{ hanno le stesse dimensioni}$

dunque

$$A_{m \times n} \text{ e } B_{n \times m} \Rightarrow \begin{matrix} \exists AB \text{ ed è } m \times m \\ \exists BA \text{ ed è } n \times n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{se } n \neq m \text{ allora} \\ AB \neq BA \end{matrix}$$

- Ma anche se  $A$  e  $B$  sono entrambe  $m \times m$  per cui  $\exists AB_{m \times m}$  ed  $\exists BA_{m \times m}$ ,  
ma non è detto che  $AB$  sia uguale a  $BA$

#### Esempio

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+6 & 6+18 \\ -4+2 & -3+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 8 & 32 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-3 & 12+18 \\ 4-6 & 6+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 30 \\ -2 & 42 \end{bmatrix}$$

## 4.5 La trasposta

Sia  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , la **trasposta di A** è  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  tale che

$$b_{ij} = a_{ji}$$

E si indica con  $B = A^T$

**Esempio**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1-i \\ \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & \textcolor{red}{7i} \\ 2+3i & \textcolor{red}{0} \\ 1-i & \textcolor{red}{4} \end{bmatrix}$

Per questo  $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$

## 4.6 La coniugata

Sia  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

La **coniugata di A** è  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  tale che  $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$

Si indica  $B = \overline{A}$

**Esempio**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1+i \\ 7i & 0 & 4 \end{bmatrix}$   
 $\Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2+3i} & \overline{1+i} \\ \overline{7i} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 1-i \\ -7i & 0 & 4 \end{bmatrix}$

## 4.7 La H-trasposta

La H-trasposta di  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  è

$B = (b_{ij})_{n \times m}$  tale che  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Si indica  $B = A^H$

**Esempio**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1-i \\ 7i & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^H = \overline{A^T} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{7i} \\ \overline{2+3i} & \overline{0} \\ \overline{1-i} & \overline{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7i \\ 2-3i & 0 \\ 1+i & 4 \end{bmatrix}$$

**NB**  $A^H = \overline{A^T} = (\overline{A})^T \quad \forall A$

**Proprietà delle trasposte, delle coniugate e delle H-trasposte**

Siano A,B matrici,  $\alpha$  scalare, supponiamo che tutte le operazioni scritte siano possibili.

### Trasposte

1.  $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$
2.  $(A+B)^T = A^T + B^T$
3.  $(A^T)^T = A$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

### Coniugate

1.  $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}$
2.  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
3.  $\overline{\overline{A}} = A$
4.  $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

## H-trasposte

1.  $(\alpha A)^H = \bar{\alpha} \cdot A^H$
2.  $(A+B)^H = A^H + B^H$
3.  $(A^H)^H = A$
4.  $(AB)^H = B^H A^H$

## 4.8 Tipi di matrici

L'insieme di tutte le matrici  $m \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  viene indicato

$$M(\mathbb{R})_{m \times n} \text{ oppure } M(\mathbb{R})_{m,n}$$

Stessa cosa per quanto riguarda in  $\mathbb{C}$ :

$$M(\mathbb{C})_{m \times n} \text{ oppure } M(\mathbb{C})_{m,n}$$

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  Diro: “una matrice” invece di “una matrice complessa”, specificherò “una matrice **reale**” per dire che i coefficienti sono reali.  
(cioè nel caso  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ )

1. A si dice **quadrata** se  $n = m$   
In  $A_{n \times n}$ ,  $n$  indica l'**ordine delle matrice quadrata di A**

$M_n(\mathbb{C})$  è preferibile a  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$   
 $M_n(\mathbb{R})$  è preferibile a  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$  e  $M_{2,3}(\mathbb{C})$  = matrici  $2 \times 3$

$$M_{23}(\mathbb{C}) = \text{matrici } 23 \times 23 \text{ Esempio } A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1-i \\ 0 & 2+3i & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

### Diagonale principale

I coefficienti diagonali di A sono 7,  $2+3i$ , 2

2. A si dice **diagonale** se
  - è quadrata ( $n \times n$ )
  - tutti i coefficienti che non sono diagonali sono uguali a 0  
(cioè:  $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ )

$$\text{Esempi } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Non è quadrata   È diagonale   Non è diagonale   È diagonale

3.  $A = (a_{ij})$  si dice **scalare** se  $m \times n$   
 $A = \text{Diag}(d, d, \dots, d)$

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = d \cdot I_n$$



$d\mathbf{I}_n$  si chiama **scalare** perché

$$d\mathbf{I}_n \mathbf{B}_{n \times k} = d(\mathbf{I}_n \mathbf{B}) = d\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}_{m \times n}(d\mathbf{I}_n) = \mathbf{C}(\mathbf{I}_n d) = (\mathbf{C}\mathbf{I}_n) \cdot d = \mathbf{C} \cdot d$$

Moltiplicare per la matrice scalare individuata dallo scalare  $d$  equivale a moltiplicare per lo scalare  $d$

$$4. \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ è un } \mathbf{vettore\ colonna}$$

Un vettore colonna con  $n$  elementi si indica  $\mathbb{C}^n$  o  $\mathbb{R}^n$

$$\text{Analogamente } \underline{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

Un vettore riga di  $n$  elementi si indica  $\mathbb{C}_n$  o  $\mathbb{R}_n$

5. Caso particolare: i vettori coordinati

$$\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^{(11)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

( nel simbolo  $\underline{e}_i$  manca  
l'informazione: "quanto  
alto è il vettore colonna" )

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\underline{e}_i^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1^{(12)} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

6. A si dice **simmetrica** se  $A^T = A$

$$\underline{\text{NB}} \quad A_{m \times n} \implies A_{n \times m}^T$$

Se  $A_{n \times m}^T = A_{m \times n} \implies A$  è **quadrata**

$$\mathbf{Esempio} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

7. A si dice **Hermitana** se  $A^H = A$

$$\underline{\text{NB}} \quad \text{se } A^H = A \implies A \text{ quadrata}$$

$$\mathbf{Esempio:} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

8. A si dice **antisimmetrica** se

$$A^T = -A$$

Se  $A^T = -A \implies A$  è quadrata.

$$\mathbf{Esempio:} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ -3-i & 0 \end{bmatrix}$$

9. A si dice **antihermitana** se

$$A^H = -A$$

Se  $A^H = -A \Rightarrow A$  è quadrata

Esempio:  $A = \begin{bmatrix} 2i & 3+i \\ -3+i & 7i \end{bmatrix}$

## 4.9 Scrittura matriciale di un sistema lineare

Dato un sistema lineare<sup>(13)</sup> con

$m$  equazioni

$n$  incognite

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice  $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$  Si chiama la **matrice dei coefficienti** di (\*)

Il vettore  $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$  Si chiama il **vettore dei termini noti** di (\*)

Il vettore  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$  Si chiama il **vettore delle incognite** di (\*)

abbiamo dunque

$$A_{m \times n} \underline{x}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Per cui la scrittura  $A\underline{x} = \underline{b}$  è un modo compatto per scrivere (\*)

Si chiama la **scrittura matriciale** del sistema (\*)

## 4.10 Algoritmo di Gauss o eliminazione di Gauss (E.G.)

Data una matrice  $A_{m \times n}$ , l'obiettivo è "trasformare"  $A$  in una matrice della forma

**PAOLO**

(13) ovvero ogni equazione ha grado 1

$$\text{NB} \begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{colonne} \\ \text{dominanti di } \mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{il numero} \\ \text{dei} \\ \text{gradi di } \mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{right non} \\ \text{nulle di } \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

“Trasformare” significa “applicare ripetutamente operazioni elementari sulle righe”

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice A sono:

1. **Sommare alla  $i$ -esima riga di A la  $j$ -esima riga di A moltiplicato per uno scalare  $c$  dove  $j \neq i$**

Esempio  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Sommo alla seconda riga di A (ossia  $[2 \ 6 \ 2]$ ) la prima riga di A (ossia  $[1 \ 3 \ 4]$ ) moltiplicata per  $c = -2$

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \\ + \\ \begin{bmatrix} -2 & -6 & -8 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \end{array} \quad \longleftarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} (-2) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Otengo  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Otterrò una matrice B e scriverò:

$$A \xrightarrow{E_{ij}(c)} B$$

Nell'esempio  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = B$

2. **Moltiplicare la  $i$ -esima riga di A per uno scalare  $c \neq 0$**

Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Sostituisco la seconda riga moltiplicando la seconda riga per  $c = \frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otengo dunque  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  Ottenuta la matrice B scriverò  $A \xrightarrow{E_{ij}(c)} B$

Nell'esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

3. **Scambiare la  $i$ -esima riga di A con la  $j$ -esima riga di A**

Esempi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

Otterrò una matrice B e scriverò  $A \xrightarrow{E_{ij}} B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{NB: } E_{ij} = E_{ji}$$

## 5 Spazi vettoriali reali e complessi

Sia  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Uno spazio vettoriale su  $K$

- se  $K = \mathbb{C}$  dirò uno spazio vettoriale (complesso)
- se  $K = \mathbb{R}$  dirò uno spazio vettoriale reale

è un insieme **non vuoto**  $V$  su cui sono definite due operazioni

**addizione:**  $V \times V \longrightarrow V$

**prodotto di elementi di  $V$  per uno scalare:**  $K \times V \longrightarrow V$

che verificano le seguenti condizioni:

- $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$  (gli elementi di  $V$  si chiamano **vettori**)
  - $\forall \alpha, \beta \in K$  (gli elementi di  $K$  si chiamano **scalari**)
1.  $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$  + associativa
  2.  $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$  + commutativa
  3.  $\alpha(\beta \underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$
  4.  $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
  5.  $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$
  6.  $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$
  7.  $\exists \underline{0} \in V$  tale che  $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
  8.  $\forall \underline{v} \in V \exists \underline{w} \in V$  tale che  $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ ,  $\underline{w}$  si indica con  $-\underline{v}$

### Esempi

1.  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n, M_{m \times n}(\mathbb{R})$  sono spazi vettoriali reali  
 $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}_n, M_{m \times n}(\mathbb{C})$  sono spazi vettoriali (complessi)
2.  $a, b \in \mathbb{R}$   $a < b$   $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$   
 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{f | f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathcal{F}([a, b])$  <sup>(14)</sup>  $\mathcal{F}([a, b])$  è uno spazio vettoriale reale rispetto a:

- $+$  :  $\mathcal{F}([a, b]) \times \mathcal{F}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{F}([a, b])$   
 $(f, g) \longrightarrow f + g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(f + g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathcal{F}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{F}([a, b])$   
 $(\alpha, f) \longrightarrow \alpha f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(\alpha f)(x) \stackrel{def}{=} \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$\mathcal{C}([a, b]) = \{f \in \mathcal{F}([a, b]) | f \text{ continue}\}$   
 con le stesse operazioni di sopra è uno spazio vettoriale reale

---

(14) dove  $f$  è l'insieme delle funzioni definite in  $[a, b]$  ed a valori in  $\mathbb{R}$

3.  $\mathbb{R}[x]$  =insieme dei polinomi a coefficienti reali  
è uno spazio vettoriale reale (rispetto a  $+$  e  $\cdot$  )  
 $\mathbb{C}[x]$  =insieme dei polinomi a coefficienti complessi  
è uno spazio vettoriale (rispetto a  $+$  e  $\cdot$  )

4.  $\mathbb{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq n\}$   
è uno spazio vettoriale reale

5.  $\{\underline{0}\}$  contiene un unico vettore, che chiamo  $\underline{0}$

$$\begin{aligned} \underline{0} + \underline{0} &= \underline{0} \\ \alpha \in K \quad \alpha \cdot \underline{0} &= \underline{0} \\ k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Rispetto a queste operazioni,  $\{\underline{0}\}$  è un **PAOLO** vettore su  $K$

**NB** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$   
Allora

1.  $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}, \forall \underline{v} \in V$
2.  $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}, \forall \alpha \in K$
3. **Vale la legge di cancellazione per il prodotto per scalari**  
 $\alpha \in k, \underline{v} \in V$  e  $\alpha \underline{v} = \underline{0} \implies \alpha = \underline{0}$  o  $\underline{v} = \underline{0}$
4.  $-(\alpha \underline{v}) = (-\alpha) \underline{v} = \alpha(-\underline{v}), \forall \alpha \in K, \forall \underline{v} \in V$

## 5.1 Sottospazi di spazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale in  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

**Def** Un sottoinsieme  $U$  di  $V$  si dice un **sottospazio vettoriale** (o semplicemente un **sottospazio**) di  $V$  se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.  $\underline{0} \in U$
2.  $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$  ( $U$  è chiuso alla **somma**)
3.  $\alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K$  ( $U$  è chiuso al **prodotto per scalari**)

**NB 1** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$   
Sia  $U$  un sottoinsieme di  $V$ . Allora

$$\left[ \begin{array}{l} U \text{ soddisfa le condizioni} \\ \underline{0} \in U \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{array} \right] \iff \left[ \begin{array}{l} U \text{ soddisfa le condizioni} \\ U \neq \emptyset \\ \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{array} \right]$$

“ $\implies$ ” ovvia:  $\underline{0} \in U \implies U \neq \emptyset$

“ $\impliedby$ ”  $U \neq \emptyset \Rightarrow \exists \underline{u} \in U \Rightarrow \alpha \underline{u} \in U \forall \alpha \in k \Rightarrow 0 \cdot \underline{u} \in U$

**NB 2** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Se  $U$  è un sottospazio di  $V$ , allora  $U$  è uno spazio vettoriale if (con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  che si ottengono restringendo quelle di  $V$ )

**Esempio 1**  $V = \mathbb{R}^3$  è uno spazio vettoriale reale ( $K = \mathbb{R}$ )

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V \quad U \text{ è sottospazio di } V?$$

$$1. \quad \underline{0} \in U \quad (15) \quad \underset{?}{\exists a, b \in \mathbb{R}} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Si:  $a = 0, b = 0$

Quindi  $\underline{0} \in U$

$$2. \quad \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U \quad \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ per opportuni } a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ per opportuni } a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \underset{?}{\in} \mathbb{R}$$

$$\underset{?}{\exists a, b \in \mathbb{R}} \mid \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \text{ Sì } \begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{cases}$$

Quindi  $U$  è chiuso alla somma

$$3. \quad \alpha \underline{u} \underset{?}{\in} U \quad \forall \underline{u} \in U \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \alpha \underline{u} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \\ \alpha b \end{bmatrix} \underset{?}{\in} U$$

$$\underset{?}{\exists a^*, b^* \in \mathbb{R}} \mid \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \\ \alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* \\ 0 \\ b^* \end{bmatrix}$$

$$\text{Sì: } \begin{cases} a^* = \alpha a \\ b^* = \alpha b \end{cases} \quad \text{Quindi } U \text{ è chiuso al prodotto per scalari}$$

Da **1.**, **2.** e **3.** concludo che  $U$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$

**Esempio 2** Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  un insieme lineare del tipo

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

si chiama **un sistema lineare omogeneo** (ossia tale che il vettore dei termini noti sia  $\underline{0}$ ), dove:

- $A = m \times n$
- $\underline{x} = n \times 1$
- $\underline{0} = m \times 1$

---


$$(15) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0} \in V = \mathbb{R}^3$$

Un sistema lineare omogeneo ha sempre soluzioni, ad esempio la soluzione nulla  
**PAOLO**

Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$

$$N(A) = \begin{array}{l} \text{insieme delle} \\ \text{soluzioni del} \\ \text{sistema lineare} \\ \text{omogeneo} \end{array} = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n | A\underline{v} = \underline{0}\}$$

$$A_{m \times n} \underline{x}_{n \times 1} = \underline{0}_{m \times 1}$$

$N(A)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{C}^n$

Proviamo che  $N(A)$  è un sottospazio di  $\mathbb{C}^n$

(Quindi  $N(A)$  è a sua volta uno spazio vettoriale)

Chiamiamo  $N(A)$  lo **spazio nullo** della matrice  $A$

$$1. \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}_{n \times 1} \in N(A)$$

Si:  $A\underline{0}_{n \times 1} = \underline{0}_{m \times 1}$

$$\text{Quindi } \underline{0}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in N(A)$$

2.  $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in N(A) \implies \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(A)$  Per provare che  $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(A)$  devo provare

$$\text{che } \begin{cases} \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n \\ A(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underline{0} \end{cases}$$

$$\text{So che } \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(A), \text{ quindi } \begin{cases} \underline{u}_1 \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{u}_1 = \underline{0} \end{cases} \text{ e che } \underline{u}_2 \in N(A), \text{ quindi } \begin{cases} \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{u}_2 = \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n \implies \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n \quad A(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = A\underline{u}_1 + A\underline{u}_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}; \text{ quindi } \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in N(A)$$

$$3. \begin{cases} \underline{u} \in N(A) \\ \alpha \in \mathbb{C} \end{cases} \implies \alpha \underline{u} \in N(A)$$

$$\text{Per provare che } \alpha \underline{u} \in N(A) \text{ devo provare che } \begin{cases} \alpha \underline{u} \in \mathbb{C}^n \\ A(\alpha \underline{u}) = \underline{0} \end{cases}$$

$$\text{So che } \underline{u} \in N(A) \text{ quindi } \begin{cases} \underline{u} \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{u} = \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{u} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C} \implies \alpha \underline{u} \in \mathbb{C}^n$$

$$A(\alpha \underline{u}) = \alpha \cdot (A\underline{u}) = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0} \text{ Quindi } \alpha \underline{u} \in N(A)$$

$$1. + 2. + 3. \implies N(A) \text{ è un sottospazio di } \mathbb{C}^n$$

## 5.2 Insieme dei multipli di un vettore

Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  e  $\underline{v} \in V$

$$\{\alpha \underline{v} | \alpha \in K\} = \text{insieme dei multipli di } \underline{v}$$

Si indica  $\langle \underline{v} \rangle$  oppure  $\text{Span}(\underline{v})$

1.  $\langle \underline{v} \rangle$  è un sottospazio di  $V$

$$(a) \quad \underline{0} \in V: \underline{0} = 0 \cdot \underline{v} \text{ (prendo } a = 0)$$

(b)  $\alpha_1 \underline{v} + \alpha_2 \underline{v} = (\alpha_1 + \alpha_2) \underline{v}$  La somma di due multipli di  $\underline{v}$  è un multiplo di  $\underline{v}$

(c)  $\beta(\alpha \underline{v}) = (\beta\alpha) \underline{v}$  Il prodotto di  $\beta$  per un multiplo di  $\underline{v}$  è un multiplo di  $\underline{v}$

2. Se  $\underline{v} = \underline{0}$  allora  $\langle \underline{v} \rangle = \langle \underline{0} \rangle = \{\alpha \cdot \underline{0} | \alpha \in K\} = \{\underline{0}\}$   
e  $\langle \underline{v} \rangle$  ha un unico elemento.

Se  $\underline{v} \neq \underline{0}$  allora  $\langle \underline{v} \rangle = \{\alpha \underline{v} | \alpha \in K\}$  ha tanti elementi quanti sono gli elementi di  $K$

Per vederlo provo che 
$$\begin{cases} \alpha \underline{v} = \beta \underline{v} \\ \underline{v} \neq \underline{0} \\ \alpha, \beta \in K \end{cases} \iff \alpha = \beta$$

“ $\Leftarrow$ ” ovvio

“ $\Rightarrow$ ”  $\alpha \underline{v} = \beta \underline{v} \Rightarrow \alpha \underline{v} - \beta \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - \beta) \underline{v} \\ \underline{v} \neq \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

**NB** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , allora:

1.  $Z \leq U \leq V \implies Z \leq V$  <sup>(16)</sup>
2.  $\{\underline{0}\} \leq V, V \leq V$

Quindi se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ed  $U$  è un sottospazio di  $V$  allora

- o  $U = \{\underline{0}\}$  ed allora  $|U| = 1$
- o  $U \neq \{\underline{0}\}$  ed allora  $\exists \underline{u} \in U, \underline{u} \neq \underline{0}$

Essendo  $U$  un sottospazio di  $V$  ed  $\underline{u} \in U$  allora  $\alpha \underline{u} \in U \forall \alpha \in K$

$$\begin{cases} \langle \underline{u} \rangle = \{\alpha \underline{u} | \alpha \in K\} \subseteq U \\ \underline{u} \neq \underline{0} \implies |\langle \underline{u} \rangle| = \infty \end{cases} = |U| = \infty$$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

La **combinazione lineare degli  $n$  vettori** è una “lista” di vettori: i vettori non sono necessariamente distinti tra loro (possono esserci ripetizioni)

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$  con **coefficienti** o pesi

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  è il vettore

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in V$$

**Esempio**  $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{v} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 12\underline{v}_1 + 12\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 3\underline{v}_4 \\ \underline{v} &= 12\underline{v}_1 + 15\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 0\underline{v}_4 \end{aligned}$$

---

(16) dove *leq* sta per *sottospazio di*



$$\begin{aligned} \underline{v} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \text{ con} \\ \alpha_1 &= 12 \\ \alpha_2 &= 12 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 3 \end{aligned}$$

Dati  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$  ( $V$  spazio vettoriale su  $K$ ) l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari è:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \right\} \end{aligned}$$

Si indica  $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$

oppure ***Span***( $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ )

Si chiama il **sottospazio** (di  $V$ ) **generato** da  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

**NB**  $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$  è effettivamente un sottospazio di  $V$   
Infatti:

1.  $\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$   
 $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \mid \underline{0} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$   
 $\text{Sì, prendiamo } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
2.  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i \xRightarrow{?} \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n \delta_i \underline{v}_i$
3.  $\beta \in K, \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \xRightarrow{?} \beta \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n \delta_i \underline{v}_i$

**Def** Si dice che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  è un **sistema di generatori di  $V$**   
 $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \stackrel{(17)}{\text{è un insieme di generatori se }} V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è un **insieme di generatori di  $V$**   
 $\iff \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \left\{ \sum \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\} \supseteq \stackrel{(18)}{V}$

$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è un **insieme di generatori di  $V$**   $\iff$   
 $\forall \underline{v} \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

### Esempi

1.  $V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$   
Siano  $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$  le colonne di  $I_n$   
 $S = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n\}$  è un insieme di generatori di  $V$

(17) userò le parentesi graffe anche se i vettori  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  potrebbero essere tutti distinti

(18) dal momento che è sempre vero (qualunque sia  $S$  che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \subseteq V$ )

$$\forall \underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Sì:  $\alpha_i = a_i \forall i = 1, \dots, n$

2.  $V = \mathbb{C}_n[x], K = \mathbb{C}, S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Posto  $f(x) \leq n$

$$\forall f(x) \in \mathbb{C}_n[x] \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$\stackrel{?}{\exists} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \mid f(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n$$

Sì:  $\alpha_i = a_i$

3.  $V = M_2(\mathbb{C})$  spazio vettoriale  $k = \mathbb{C}$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $V$

$$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2\mathbb{C} \stackrel{?}{\exists} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$$

tali che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Sì:  $\alpha_1 = a, \alpha_2 = b, \alpha_3 = c, \alpha_4 = d$

Il problema di stabilire se  $S$  è un insieme di generatori di  $V$  si traduce nel problema di stabilire se una famiglia di sistemi lineari  $A\underline{x} = \underline{b}$  dove  $A$  è fissato e  $\underline{b}$  è un vettore dai termini noti **variabile** abbia o non abbia soluzioni.

Cioè:

$$A\underline{x} = \underline{b} \text{ ha soluzioni } \forall \underline{b} \in \mathbb{C}^m ? \quad (19)$$

$$[A|\underline{b}] \xrightarrow{EG} [U|\underline{d}] \quad \underline{d} \text{ è libera } \forall \underline{b} \in \mathbb{C}^m ?$$

**Esempio**  $V = M_2(\mathbb{C}), K = \mathbb{C}$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

È un insieme di generatori di  $V$ ?

$$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2\mathbb{C} \stackrel{?}{\exists} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$$

---

(19)  $A = m \times n$

tali che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi il problema diventa:

è vero che il sistema lineare  $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 = c \\ 0 = d \end{cases}$

Ha soluzioni  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ?

$\forall \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$  Vettori di termini noti (quindi un vettore di termini noti variabile)

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad = [A|\underline{b}] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right) \xrightarrow{EG}$$

$$[A|\underline{b}] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right)$$

La colonna  $d$  non è libera  $\forall a, b, c, d$  (basta prendere  $d = 0$ )

$S$  non è un insieme di generatori di  $V$

**NB** Abbiamo definito *insieme di generatori*  $S$

solo nel caso  $S$  non sia una lista finita.

**Def** Uno spazio vettoriale  $V$  si dice **finitamente generato (f.g.)** se ha un insieme di generatori che è un insieme finito. <sup>(20)</sup>.

Esempi di spazi f.g.

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n[x], \mathbb{R}^n[x], M_{m \times n}(\mathbb{C}), M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

**NB** non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati.

Esempio

$\mathbb{C}[x], R[x]$  **non** sono finitamente generati. <sup>(21)</sup>.

Nel nostro caso, d'ora in poi, supporremo  $V$  finitamente generato.

**Proprietà degli insiemi di generatori:** se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

(20) Noi, in realtà abbiamo parlato solo di insiemi di generatori finiti

(21) anche gli spazi di funzioni non sono finitamente generati

1. Sovrainsiemi di insiemi di generatori sono insiemi di generatori.

Cioè:  $\begin{cases} A \text{ insieme di generatori di } V \\ A \subseteq B \end{cases} \implies B \text{ insieme di generatori di } V$  **Dim**

PAOLO

2. Se da un insieme di generatori  $S$  di  $V$  si toglie un vettore che è combinazione lineare dei rimanenti vettori di  $S$  si ottiene un insieme di vettori che è ancora un insieme di generatori di  $V$  **Esempio:**

$$V = \langle \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^4$$

$S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$  è un insieme di generatori di  $V$

notiamo anche che

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_3 = 1 \cdot \underline{v}_1 + 1 \cdot \underline{v}_3 + 0 \cdot \underline{v}_4 \implies S_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$$

è ancora un insieme di generatori di  $V$

**NB**  $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 \implies S_2 = \{\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$   
è sempre un insieme di generatori di  $V$

**NB**  $\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \implies S_3 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}$   
è sempre un insieme di generatori di  $V$

**Attenzione!** Invece, togliendo  $\underline{v}_4$  da  $S$  non si ottiene più un insieme di generatori di  $V$ . Per quanto riguarda lo spazio vettoriale  $V = \{\underline{0}\}$  si ha che  $S_1 = \{\underline{0}\}$  è un suo insieme di generatori.

**NB** Per convenzione si pone che anche  $S_2 = \emptyset$  è un insieme di generatori di  $\{\underline{0}\}$

### 5.3 Insiemi di vettori linearmente indipendenti (L.I.) e insiemi di vettori linearmente dipendenti

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  e

$A\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  un "insieme" di vettori di  $V$  <sup>(22)</sup>

**Def** A si dice **linearmente indipendente (L.I.)** se l'unica combinazione lineare dei suoi elementi **nulla** è quella con i coefficienti tutti nulli, cioè

$$\begin{cases} \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

**Def 2**  $A\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  si dice **linearmente dipendente (L.D.)** se **non** è linearmente indipendente

Cioè  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  **non tutti nulli** tali che

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

(22) In realtà non è un insieme: è una lista (ci possono essere ripetizioni)

**NB** per convenzione  $\emptyset$  è L.I.

**NB**  $v \in V$

$\{v\}$  è L.I.  $\iff v = 0$

Proviamo " $\Leftarrow$ ": ipotesi  $v_0$ , tesi  $v$  L.D.

**Dim** Dobbiamo provare che esiste una combinazione lineare nulla di  $v_0$  con coefficienti non tutti nulli. Eccola: prendo  $\alpha = 1 \neq 0$  – coefficiente non nullo, ed ho:  $\alpha \cdot v = 1 \cdot v = 1 \cdot 0 = 0$ .

Proviamo " $\Rightarrow$ ": ipotesi  $v$  L.D., tesi  $v = 0$

**Dim** Siccome  $\{v\}$  è L.D.  $\exists \alpha v = 0$  con  $\alpha \neq 0$ . Da  $\alpha \neq 0$  segue che  $\exists \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{cases} \alpha v = 0 \\ \exists \frac{1}{\alpha} \end{cases} \implies \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha v) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$$

ma  $\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha v) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot v = 1 \cdot v = v$  e  $\frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$  quindi  $v = 0$

**NB**  $\{v\} \text{ L.D.} \iff v = 0$

**NB**  $\{v\} \text{ L.I.} \iff v \neq 0$  <sup>(23)</sup>

## 5.4 Proprietà degli insiemi L.D. e degli insiemi L.I.

### 1. Sovrainsiemi di L.D. sono L.D.

$$\text{Cioè } \begin{cases} B \subseteq A \\ B \text{ L.D.} \end{cases} \implies A \text{ L.D.}$$

**Dim**  $B$  L.D.  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  non tutti nulli t.c.  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$   
 $\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k$  non tutti nulli tali che  
 $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k \implies A$  L.D.

### 2. Sottoinsiemi di L.I. sono L.I.

$$\text{cioè } \begin{cases} B \subseteq A \\ A \text{ L.I.} \end{cases} \implies B \text{ L.I.}$$

$$\text{Dim } \begin{cases} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \end{cases} \xRightarrow{?} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + 0 w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_k = 0$$

Siccome  $A$  è L.I. **tutti** i coefficienti della combinazione lineare in rosso devono essere  $= 0$ . In particolare

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

**Def** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$

Una **BASE** di  $V$  è un insieme di generatori di  $V$  che sia anche L.I.

---

(23) questo nb è equivalente a quello prima

## Esempi

1.  $V = \mathbb{C}^n, K = \mathbb{C}$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  = insieme delle colonne di  $I_n$  è una base di  $V$  (è anche base di  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}$ )

Si chiama **la base canonica** di  $\mathbb{C}^n$  su  $\mathbb{C}$  <sup>(24)</sup>

Per verificare che  $\mathcal{E}$  è una base di  $\mathbb{C}^n$  su  $\mathbb{C}$  occorre verificare:

(a)  $\mathcal{E}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{C}^n$

(b)  $\mathcal{E}$  è L.I.

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \underline{0} \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 = 0$$

2.  $V = \mathbb{C}_n[x], K = \mathbb{C} \quad S = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$  è una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$   
difatti

(a)  $S$  è un insieme di generatori di  $V$

(b)  $S$  è L.I.

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0$$

$$\implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

(c)  $V = M_2(\mathbb{C}), K = \mathbb{C}$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ è una base di } V$$

Infatti

i.  $S$  è un insieme di generatori di  $V$

ii.  $S$  è L.I.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\implies \alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$$

$V = \{0\}$  che base ha?

$S_1 = \{0\}$  è un insieme di generatori.

**ma è L.D.**

**Non è una base di  $V = \underline{0}$**

$$\begin{cases} \emptyset \text{ è un insieme di generatori di } V \text{ per convenzione} \\ \emptyset \text{ è L.I. per convenzione} \end{cases}$$

$$\implies \emptyset \text{ è (l'unica) base di } \{0\}$$

---

(24) anche di  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}$

**Teorema 1 Ogni spazio vettoriale (f.g.) ha una base**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato...

Si parte da un insieme di generatori  $S$  di  $V$  (che essendo  $V$  f.g. è un insieme **finito di vettori**) e si tolgono via via i vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti al passaggio precedente.

**Teorema 2** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$   
Siano  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  due basi di  $V$ . Allora

$$(\text{il numero di elementi di } \mathcal{B}_1) = (\text{il numero di elementi di } \mathcal{B}_2)$$

Tale numero è quindi un invariante di  $V$ , si chiama **la dimensione** di  $V$  e si indica  **$\dim V$**

**NB** Nelle basi **non** ci sono ripetizioni.  
Anzi, negli insiemi L.I. non ci sono ripetizioni.

È equivalente a dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} \text{ è un insieme di vettori} \\ \text{e } \underline{v}_i = \underline{v}_j^{(25)} \end{array} \right. \implies A \text{ è L.D.}$$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  non tutti nulli tali che  $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ ?

$$0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 1 \cdot \underline{v}_i + \dots + (-1) \underline{v}_j + \dots + 0 \underline{v}_n = \underline{0}$$

PAOLO

**Quindi A è L.D.**

**Esempi di dimensione**

$$\begin{array}{ll} 1. \dim \mathbb{C}^n = n & \mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \text{ è una base} \\ \dim \mathbb{R}^n = n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2. \dim \mathbb{C}_n[x] = n+1 & \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \\ \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 & \end{array}$$

$$3. \dim M_2(\mathbb{C}) = 4 \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ è una sua base}$$

$$4. \dim \{\underline{0}\} = 0 \quad \text{è una sua base}$$

**Proprietà della dimensione** Sia  $V$  uno spazio vettoriale.

$$1. \begin{array}{c} U \leq V \\ \uparrow \\ \text{sottospazio} \end{array} \implies \dim U \leq \dim V$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} U \leq V \\ \dim U = \dim V \end{array} \right. \implies U = V$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} U \leq V \\ \dim U = 0 \end{array} \right. \iff U = \{\underline{0}\}$$

## Rango di una matrice

$$A_{m \times n}$$

1.  $A \xrightarrow{EG} U_1$  forma ridotta di Gauss per  $A$   
 $A \xrightarrow{EG} U_2$  forma ridotta di Gauss per  $A$

La possibilità che sia  $U_1 \neq U_2$  dipende solo dalla possibilità di fare **scelte** in scambi di righe **necessari** nelle EG.

Siccome nello scambio di righe non cambia il numero di righe non nullo si ha

$$\begin{pmatrix} \text{il numero delle righe} \\ \text{non nulle di } U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{il numero delle righe} \\ \text{non nulle di } U_2 \end{pmatrix}$$

Lo chiamiamo **rango di A** =  $\begin{matrix} \text{rk } A \\ \text{rg } A \end{matrix} = k$

2.  $A_m \times n$ ,  $\text{rk } A = k$   
 $A \rightarrow U = \text{DISEGNINO DELLA MATRICE}$

$k$  = il numero delle colonne dominanti di  $U$   
(perché ogni gradino è alto una riga)

3.  $A_{m \times n}$ ,  $\text{rk } A = k$ . Si ha  
 $k \leq m$  e  $k \leq n$

infatti:

$$\begin{aligned} k &= \begin{pmatrix} \text{numero delle righe} \\ \text{non nulle di } U \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{il numero} \\ \text{delle righe di } U \end{pmatrix} = m \\ k &= \begin{pmatrix} \text{numero delle colonne} \\ \text{dominanti di } U \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{il numero} \\ \text{delle colonne di } U \end{pmatrix} = n \end{aligned}$$

## I quattro sottospazi fondamentali di una matrice

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

$$A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{bmatrix}$$

PAOLO schemini cazzi mazzi

1. **Lo spazio delle colonne di A:**

$$C(A) = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle = \{ \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \} \leq \mathbb{C}^m$$

2. **Lo spazio delle righe di A:**

$$\begin{aligned} R(A) &= \langle \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m \rangle \leq \mathbb{C}^n \\ &= \{ \alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \dots + \alpha_m \bar{r}_m \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \} \end{aligned}$$



$$\mathbf{N} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{n \times m}^H = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}^H)$$

### 3. lo spazio nullo di $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \{\underline{x} | \mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}\} \leq \mathbb{C}^n \quad (26)$$

### 4. Lo spazio nullo sinistro di $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}^H) = \{\underline{x} | \mathbf{A}^H \underline{x} = \underline{0}\} \leq \mathbb{C}^m \quad (27)$$

### Come trovare basi di $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ , di $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ e di $\mathbf{N}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{C}), \text{rk } \mathbf{A} = k$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow[EG]{} \mathbf{U} \text{ forma ridotta di Gauss per } \mathbf{A}$$

#### 1. $\mathbf{U}$ ha $k$ colonne dominanti ( $\text{rk } \mathbf{A} = k$ )

Siano esse:  $\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}$

$$\mathbf{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] \quad \mathbf{U} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n]$$

Una base  $\mathbf{B}$  di  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  è l'insieme **delle colonne di  $\mathbf{A}$**  corrispondenti alle colonne dominanti di  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{B} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

$$\mathbf{NB} \quad 1 \text{ dim } \mathbf{C}(\mathbf{A}) = |\mathbf{B}| = k = \text{rk } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Nb} \quad 2 \text{ dim } \mathbf{C}(\mathbf{A}) = \text{rk } \mathbf{A} = \text{rk } \mathbf{U} = \text{dim } \mathbf{C}(\mathbf{U})$$

Ma  $\mathbf{C}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{C}(\mathbf{U})$  in generale, per cui

$\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}$  è una base di  $\mathbf{C}(\mathbf{U})$  **Ma può essere una base di  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$**

$$\mathbf{Esempio} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\text{Una base di } \mathbf{C}(\mathbf{A}) \text{ è } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Una base di } \mathbf{C}(\mathbf{U}) \text{ è } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Attenzione:} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ non è una bse di } \mathbf{C}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{Addirittura} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{C}(\mathbf{A}) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

$$2. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{bmatrix} \xrightarrow[EG]{} \mathbf{U} = \mathbf{PAOLO}$$

$$\underline{r}_i^T \in \mathbb{C}_n$$

---

(26)  $\mathbf{A}_{m \times n}, \mathbf{x}_{n \times 1}$

(27)  $\mathbf{A}_{n \times m}, \mathbf{x}_{m \times 1}$

U ha le prime  $k$  righe non nulle (e le altre  $m - k$  nulle)  
 Si ha che  $R(A) = R(U)$  e che una base  $D$  di  $R(A) = R(U)$  è

$$D = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_k\}$$

**NB 1**  $\dim R(A) = |D| = k = \dim R(U)$

**NB 2**  $R(A) = R(U)$  ma non è detto che le H-trasposte delle righe di  $A$  corrispondenti alle righe non nulle di  $U$  siano una bse: **occorre prendere le H-trasposte delle righe non nulle di U** (Dipende dal fatto che nelle EG su

$A$  ci possono essere scambi di righe) **Esempio**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{(28)} = U$

PAOLO

3.  $N(A) = \{\underline{x} | A\underline{x} = \underline{0}\} \leq \mathbb{C}^n \quad A_{m \times n}$   
 $[A | \underline{0}] \longrightarrow [U | \underline{0}]$   
 $A\underline{x} = \underline{0}$  è equivalente  $U\underline{x} = \underline{0}$   
**NB:**  $N(A) = N(U)$

**Teorema nullità del rango**  $\dim N(A) = \begin{matrix} \text{numero delle} \\ \text{colonne di } A \end{matrix} - \text{rk } A = n - k$

$A_{m \times n}$

$\text{rk } A = k$  In  $U$  ci sono  $n - k$  colonne libere, per cui  $A\underline{x} = \underline{0}$  ha  $\infty^{n-k}$  soluzioni, per cui gli elementi di  $N(A)$  sono “descritti” da  $n - k$  parametri:

$h_1, h_2, \dots, h_{n-k}$

Una base  $\mathcal{C}$  di  $N(A) = N(U)$  è

$$\mathcal{C} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-k}\} \text{ dove}$$

$N(A) \in \underline{v}_1$  si ottiene ponendo  $h_1 = 1$  e  $h_i = 0 \ \forall i \neq 1$

$N(A) \in \underline{v}_2$  si ottiene ponendo  $h_2 = 1$  e  $h_i = 0 \ \forall i \neq 2$

:

$N(A) \in \underline{v}_{n-k}$  si ottiene ponendo  $h_{n-k} = 1$  e  $h_i = 0 \ \forall i \neq n - k$

**Proprietà del rango**

Da  $\dim \mathcal{C}(A) = \text{rk } (A)$  segue che

1.  $\text{rk}(AB) \leq \text{rk } A$
2.  $\text{rk}(AB) \leq \text{rk } B$
3.  $\text{rk } A = \text{rk } A^H = \text{rk } A^T$

## 5.5 Basi ordinate e mappe delle coordinate

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

**Def** Una **base ordinata** di  $V$  è una base di  $V$  in cui si sia fissato l'ordine degli elementi.

---

(28)  $1$  e  $i \ \underline{s}_1^T, 0 \ 0 \ \underline{0}^T$

**Esempio**  $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  sono la stessa base di  $V = \mathbb{R}^2$ , ma sono diverse in quanto basi ordinate.

Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots; \underline{v}_n\}$  una **base ordinata** di  $V$   
e sia  $\underline{v} \in V$

$\mathcal{B}$  è un insieme di generatori di  $V \implies \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \mid \underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$   $\mathcal{B}$  è L.I.  
 $\implies \alpha_1, \dots, \alpha_n$  sono univocamente individuati da  $\underline{v}$ .

Infatti

$$\begin{cases} \underline{v} = \sum \alpha_i \underline{v}_i \\ \underline{v} = \sum \beta_i \underline{v}_i \end{cases} \implies \beta_i = \alpha_i \forall i = 1, \dots, n$$

$$\sum \alpha_i \underline{v}_i = \sum \beta_i \underline{v}_i \implies \sum \alpha_i \underline{v}_i - \sum \beta_i \underline{v}_i = 0 = \sum (\alpha_i - \beta_i) \underline{v}_i = 0$$

$$\implies \alpha_i - \beta_i = 0 \quad \forall i \implies \beta_i = \alpha_i \quad \forall i$$

$\mathcal{B}$  è ordinata

$$\forall \underline{v} \in V \exists! \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ tale che } \underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$$

**Def** Siano  $V$  spazi vettoriali su  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  e  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base ordinata di  $V$

Sia  $\underline{v} \in V$ .

Si chiama **vettore delle coordinate** del vettore  $\underline{v} \in V$  rispetto alla base ordinata  $\mathcal{B}$  il vettore

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^n$$

Tale che  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$ .

Si scrive

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

**Esempio**  $V = \mathbb{R}^2, \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_{\mathcal{B}_1} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \mid \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 7 \end{cases}$$

$$C_{B_1} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}_1} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \mid \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 7 \end{cases}$$

$$C_{B_2} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$