

Градиентный метод решения обратной задачи для одномерного стохастического дифференциального уравнения

Жаркова Екатерина

24.06.2021

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Криворотько О.И.

- 1 Введение
- 2 Прямая задача
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача
- 5 Заключение

- 1 Введение
- 2 Прямая задача
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача
- 5 Заключение

Общий вид стохастического дифференциального уравнения (СДУ):

$$dX(t) = \mu(X)dt + \sigma dW(t),$$

t - время, $X(t)$ - случайная величина, $W(t)$ - стандартный Винеровский процесс, $\mu(x)$ - коэффициент дрейфа (математическое ожидание), σ - волатильность (дисперсия)

- Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) учитывают случайность в процессах, которые происходят вокруг нас.
- История СДУ и большая часть формального развития этой теории началась в 1942 году, когда Кийоси Ито опубликовал статью о случайных процессах. Поэтому раздел математики, изучающий СДУ считается относительно новым и мало изученным.

СДУ находят применения во многих дисциплинах, включая экономику и финансы, геофизику, экологию, социологию, биологию и медицину.

- моделирование сейсмических закономерностей и описание основных фондовых индексов: [Stochastic differential equations applied to the study of geophysical and financial time series](#), Maria C. Mariani, Osei K. Tweneboah, 2016;
- социология: [A stochastic differential equation approach to the analysis of the UK 2016 EU referendum polls](#), Trevor Fenner, Mark Levene and George Loizou, 2017;
- биология: [Exploring behaviors of stochastic differential equation models of biological systems using change of measures](#), Sumit Kumar Jha and Christopher James Langmead, 2012

СДУ применяются для моделирования цен акций, опционов, валют и сырьевых товаров.

- прогнозирования курсов криптовалют: *Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities*, Stephen Dipple, Abhishek Choudhary, James Flamino, Boleslaw K. Szymanski and G. Korniss, 2020;
- моделирование цен акций: *Stochastic modeling of stock prices*, Sorin R. Straja, 1997

Цель данной работы заключается в построении алгоритма идентификации коэффициента дрейфа в одномерном случае, используя дополнительную информацию о поведении процесса в фиксированный момент времени.

- 1 Введение
- 2 Прямая задача**
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача
- 5 Заключение

Постановка прямой задачи

$$dX(t) = \mu(X)dt + \sigma dW(t), \quad (1)$$

- $t \in [0, T]$ - время;
- $X(t)$ - случайная величина;
- $W(t)$ - стандартный Винеровский процесс;
- $\mu(x)$ - коэффициент дрейфа (математическое ожидание);
- σ - волатильность (дисперсия).

Дано: $\mu(x)$, σ , $X(0)$.

Найти: $X(t)$.

Метод Эйлера-Маруямы:

$$\begin{aligned}X_{i+1} &= X_i + \mu_i \Delta t + \sigma \Delta W_i, \\ \Delta W_i &= z_i \sqrt{\Delta t},\end{aligned}\tag{2}$$

где z_i выбирается из $N(0, 1)$.

¹И.Ю. Кузнецова, Численное решение стохастических дифференциальных уравнений в финансах

Численное решение прямой задачи

На графике изображен пример генерации десяти путей для $\sigma = 0.5$, $\mu = -5x^3 + 2x$, $X_0 = 0$ методом Эйлера-Маруямы.

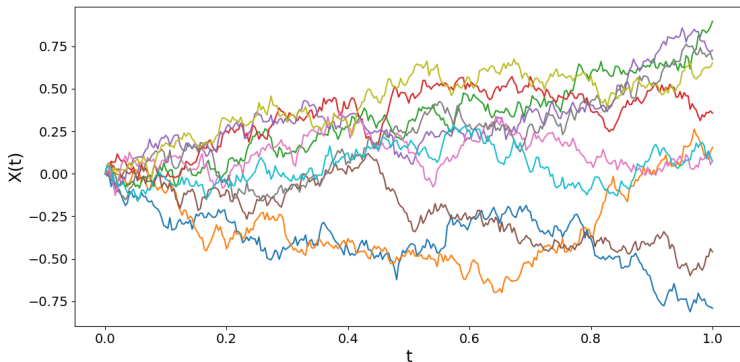


Рис. 1: Решение прямой задачи методом Эйлера-Маруямы

- 1 Введение
- 2 Прямая задача
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача
- 5 Заключение

Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка²

Для определения плотности распределения $u(t, x)$ случайной величины $X(t)$ в СДУ мы используем решение начально-краевой задачи для уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_\mu u, & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [l, L], \\ u(l, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3)$$

$u_0 = \delta_0$ - дельта-функция Дирака.

² А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятности, 1931

Численное решение уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

Неявная схема:

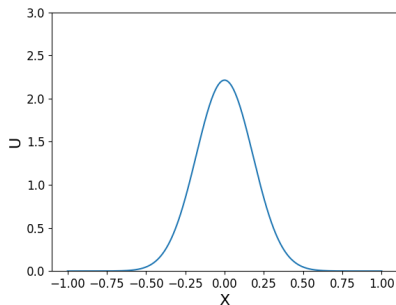
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2\Delta h} u_i^{n+1} + \mu_i \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta h} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta h)^2} \quad (4)$$

Порядок схемы: $O(\tau + h^2)$.

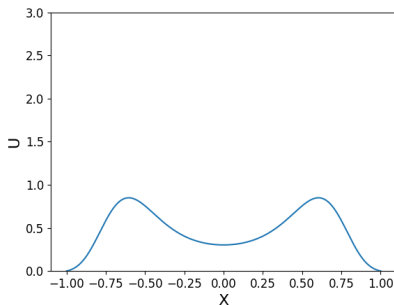
В качестве начальных условий для уравнения КФП используется дельта-функция Дирака δ_0 . В наших вычислениях мы берем $u_0(x) = \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-(sx)^2}$. Эта функция удовлетворяет свойствам плотности случайной величины и слабо сходится к δ – функции при $s \rightarrow \infty$.

Численное решение уравнения Фоккера-Планка

Пример для $\sigma = 0.5$ и $\mu = -5x^3 + 2x$, $x \in [-1, 1]$, $T = 1$. Количество узлов по времени: 400, по пространству: 400.



а)



б)

Рис. 2: Решение уравнения КФП: а) для $t=0$, б) для $t=T$

- 1 Введение
- 2 Прямая задача
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача**
- 5 Заключение

Постановка обратной задачи для СДУ

$$dX(t) = \mu(x)dt + \sigma dW(t)$$

Дано: $X^i(T)$ - измерения в фиксированный момент времени
($i = 1, \dots, n$), $X(0)$, $\sigma = \text{const}$.

Требуется вычислить: $\mu(x)$.

Нелинейное операторное уравнение

Сформулируем обратную задачу в виде нелинейного операторного уравнения:

$$F(\mu) = u(x, T; \mu), \quad (5)$$

где $u(x, T; \mu)$ - решение уравнения КФП (3) в фиксированный момент времени T , $\mu = \mu(x)$ - искомая функция.

В качестве правой части уравнения (5) мы имеем u^δ - эмпирическую плотность распределения для данных $X^i(T)$.

Чтобы найти оператор $F'[\mu]$, продифференцируем (3) по μ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} = L_\mu v - \operatorname{div}(hu), & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ v(0, x) = 0, & x \in [l, L], \\ v(l, t) = v(L, t) = 0, & t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (6)$$

где $v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial \mu} h$. Тогда

$$F'[\mu]h = v(x, T). \quad (7)$$

Нами было сформулировано и доказано следующее утверждение:

Утверждение

Сопряженный к $F'[\mu]$ оператор имеет вид:

$$F'[\mu]^* g = u(x, T; \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^T w(x, t) dt \right), \quad (8)$$

где $w(x, t)$ - решение следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial t} = -\mu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ w(T, x) = g(x), & x \in [l, L], \\ w(l, t) = w(L, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (9)$$

При доказательстве мы опирались на работы Т. Hohage и D. De Cezaro, O. Scherzer.

Задача (5) является некорректной, т.к. данные задачи не полны. Для линейных задач итерация Ландвебера известна как метод регуляризации. Итерацию Ландвебера можно обобщить на нелинейное операторное уравнение (5):

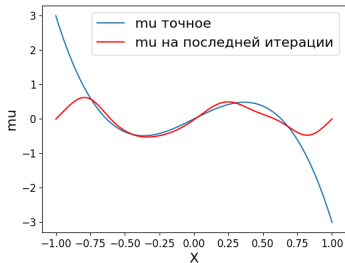
$$\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda F'[\mu_k]^*(u^\delta - F(\mu_k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где k - номер итерации.

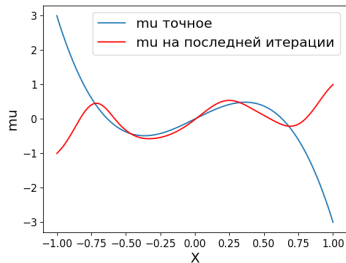
³М. Hanke, A. Neubauer, and O. Scherzer. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems. Numer. Math., 72:21–37, 1995.

Численные эксперименты решения обратной задачи

На графиках изображен пример восстановления функции μ для синтетических данных $X^i(T)$, где $i = 1, \dots, 500$. Здесь $\sigma = 0.5$, начальное приближение $\mu_0 = 0$ и $\mu_0 = x$, $x \in [-1, 1]$, $T = 1$. Количество итераций $k = 20$. В качестве λ в (10) было взято значение σ .



а)

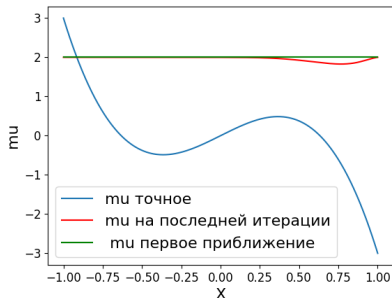


б)

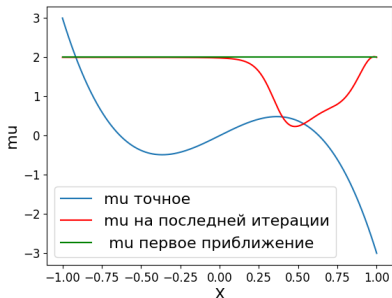
Рис. 3: Восстановленный и точный коэффициент дрейфа для а) $\mu_0 = 0$, б) $\mu_0 = x$

Численные эксперименты решения обратной задачи

Если рассматривать начальное приближение μ_0 более удаленным от точного решения, то для получения результата требуется больше итераций. Возьмем $\mu_0 = 2$, k - номер итерации.

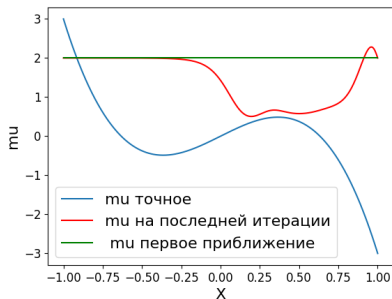


$k=20$

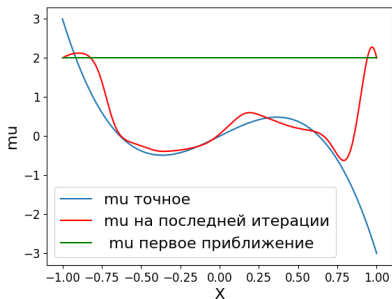


$k=100$

Численные эксперименты решения обратной задачи



$k=200$



$k=400$

Значение функционала и относительной ошибки

Для анализа полученных результатов введем следующий функционал:

$$J(\mu) = \|F(\mu) - u^{obs}\|_{L_2}^2 = \int_l^L |F(\mu) - u^{obs}|^2 dx. \quad (11)$$

Кроме значения функционала также измерялась относительная ошибка:

$$\varepsilon_k = \frac{\|\mu^{exact} - \mu_k\|_{L_2}^2}{\|\mu^{exact}\|_{L_2}^2}, \quad (12)$$

где μ^{exact} - точное значение дрейфа, а μ_k - значение на k -ой итерации.

Значение функционала и относительной ошибки

В качестве примера рассмотрим те же значения: $\sigma = 0.5$, $\mu_0 = 2$, $\mu^{exact} = -5x^3 + 2x$, $x \in [-1, 1]$, $T = 1$.

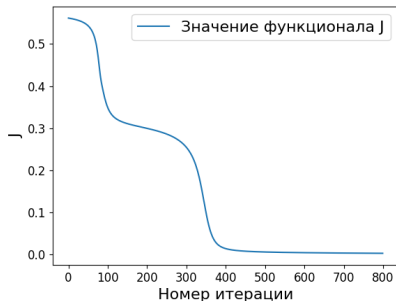
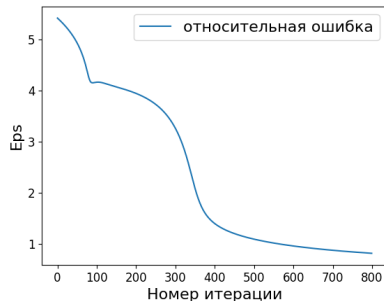


График убывания функционала



Относительная ошибка

Значение функционала и относительной ошибки в случае зашумленных данных

Возьмем синтетические данные $X^i(T)$, где $i = 1, \dots, 500$ и добавим к ним шум 15%. Рассмотрим начальное приближение дрейфа $\mu_0 = 2$.

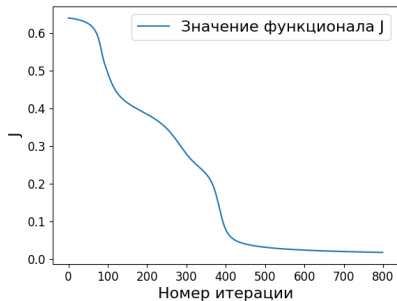
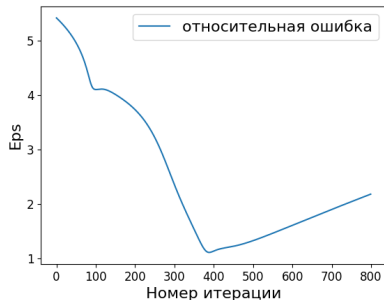


График убывания функционала



Относительная ошибка

- 1 Введение
- 2 Прямая задача
- 3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка
- 4 Обратная задача
- 5 Заключение**

- Решена прямая задача и уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка.
- Мы рассмотрели обратную задачу в виде нелинейного операторного уравнения и вывели операторы $F'[\mu]$ и $F'[\mu]^*$.
- Используя метод простой итерации была восстановлена функция $\mu(x)$ по дополнительной информации в фиксированный момент времени. Были рассмотрены случаи разных начальных приближений, а также данные с шумом и без.

Устные доклады на конференциях:

Международная научная студенческая конференция, секция математической экономики (12-23 апреля 2021 г.)

XIII международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (22 апреля 2021г.)



Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В., Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова



Black F., Scholes M., The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, no. 3. – P. 637-654.



D. De Cezaro, O. Scherzer, and J. Zubelli, Convex regularization of local volatility models from option prices: convergence analysis and rates // Nonlinear Analysis. – 2012. – Vol. 75, no. 4. – P. 2398–2415.



Dipple S., Choudhary A., Flamino J. et al., Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities // Applied Network Science. – 2020. – Vol. 5, no. 17.



Dunker F. and Hohage T., On parameter identification in stochastic differential equations by penalized maximum likelihood // Inverse Problems. – 2014. – Vol. 30, no. 9.



Egger H., Engl H., Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21, no. 3. – P. 1027–1045.



Engl H., Kunisch, K., Neubauer, A., Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems – 1989. – Vol. 5, no. 4. – P. 523–540.



Fenner T., Levene M., Loizou G., A stochastic differential equation approach to the analysis of the UK 2016 EU referendum polls // Journal of Physics Communications. – 2018. – Vol. 2, no 5.



Hanke M., Neubauer A., and Scherzer O., A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // Numerische Mathematik. – 1995. – Vol. 72. – P. 21–37.



Hurn A., Jeisman J., and Lindsay K., Teaching an old dog new tricks: Improved estimation of the parameters of stochastic differential equations by numerical solution of the Fokker - Planck equation // NCER Working Paper Series. – 2007.



Kabanikhin S., Krivorotko O., Bektemessov Z., Bektemessov M., Zhang S., Differential evolution algorithm of solving an inverse problem for the spatial Solow mathematical mode // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2020. – Vol. 28, no. 5. – P. 761-774.



Kaltenbacher B., Schopfer F., Schuster T. Iterative methods for non-linear ill-posed problems in Banach spaces: convergence and applications to parameter identification problems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, no. 6.



Maria C. Mariani, Osei K. Tweneboah, Stochastic differential equations applied to the study of geophysical and financial time series // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2016. – Vol. 443. – P. 170-178.



Robert M. Solow, Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39, no. 3. – P. 312-320.



Scherzer O., Engl, H.W., Kunisch, K., Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1992. – Vol. 30, no. 6. – P. 1796-1838.



Shaydurov V., Kornienko V., Zhang S., The Euler-Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – P. 2702-2713.

Спасибо за внимание!

Винеровский процесс - случайный процесс, служащий математической моделью броуновского движения.

Определение.

Случайный процесс $\{W_t\}_{t \geq 0}$ называется винеровским процессом, если

- 1) $W_0 = 0$ почти наверное.
- 2) $\{W_t\}$ — процесс с независимыми приращениями.
- 3) $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, для любых $0 \leq s < t < \infty$, где $N(0, t - s)$ обозначает нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $t - s$.

Решение прямой задачи⁴

Метод Эйлера-Маруямы:

$$\begin{aligned}X_{i+1} &= X_i + \mu_i \Delta t + \sigma \Delta W_i, \\ \Delta W_i &= z_i \sqrt{\Delta t},\end{aligned}\tag{13}$$

где z_i выбирается из $N(0, 1)$

Определение

Мы говорим, что метод сходится слабо с порядком m , если ошибка в момент времени T имеет m -й порядок от шага, или

$$|Ef(X(T)) - Ef(X_h(T))| = (h^m)$$

для всех многочленов $f(x)$.

Метод Эйлера-Маруямы для СДУ имеет порядок $m=1/2$.

⁴И.Ю. Кузнецова, Численное решение стохастических дифференциальных уравнений в финансах

Численное решение уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

Неявная схема:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2\Delta h} u_i^{n+1} + \mu_i \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta h} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta h)^2} \quad (14)$$

Порядок схемы: $O(\tau + h^2)$. Необходимое условие устойчивости:

$$\left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t + \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right)^2 + \frac{\cos^2(\omega \Delta x) \Delta t}{\Delta x} \left(\mu_i + \frac{\sigma^2}{\Delta x} \right)^2 \geq 1, \quad (15)$$

где ω - волновое число. Если $\mu_{i+1} \geq \mu_{i-1}$, то условие (15) выполнено всегда и схема абсолютно устойчива. Однако в случае $\mu_{i+1} < \mu_{i-1}$ существуют $\Delta x, \Delta t$, когда условие (15) может нарушаться.

Задача (5) является некорректной. Мы можем применить регуляризацию Тихонова и воспользоваться итеративно регуляризованным методом Гаусса-Ньютона:

$$(\alpha_k I + F'[\mu_k]^* F'[\mu_k])(\mu_{k+1} - \mu_k) = F'[\mu_k]^*(u^{obs} - F[\mu_k]) + \alpha_k(\mu_0 - \mu_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где k - номер итерации, α_k - последовательность параметров регуляризации.

Алгоритм решения задачи методом Ландвебера

Задаем σ , $X(0)$, μ_0 - начальное приближение, μ_{exact} - точное значение (для генерации синтетических данных).

Генерация данных

- решаем прямую задачу для μ_{exact} n раз: получаем $X^i(t), i = 1, \dots, n$
- фиксируем время T и сохраняем данные $X^i(T), i = 1, \dots, n$
- Находим u^{obs} - эмпирическую плотность распределения для данных $X^i(T)$

Решение обратной задачи

Запускаем цикл $k = 0, 1, 2, \dots$,

- Решаем уравнение КФП (3) и получаем $F[\mu_k]$
- Находим $F'[\mu_k]^*$ из Леммы
- Итерация Ландвебера $\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda F'[\mu_k]^*(u^\delta - F(\mu_k))$

Решение обратной задачи: разложение неизвестных функций в ряд Фурье

Можно рассматривать $\mu(x)$ в виде ряда Фурье:

$$\mu(x) \approx \sum_{j=1}^l q^j \sin(j\pi x). \quad (17)$$

Тогда нужно восстанавливать коэффициенты $q = (q^1, \dots, q^l)$, а не $\mu(x)$ для каждой точки. Это позволит упростить задачу и применить данный алгоритм в многомерном случае.