

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет Механико-математический

Кафедра Математических методов геофизики

Направление подготовки Механика и математическое моделирование

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Жарковой Екатерины Игоревны

Тема работы: Градиентный метод решения обратной задачи для одномерного
стохастического дифференциального уравнения

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой,
чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф.

Кабанихин С.И. / _____
(Фамилия И.О.) (Подпись)

« .. » 20...г.

Научный руководитель

к. ф.-м. н.
н. с. ИВМиМГ СО РАН

Криворотько О.И. / _____
(Фамилия И.О.) (Подпись)

« .. » 20...г.

Дата защиты: « .. » 20...г.

Новосибирск, 2021

Реферат

Тема работы: Градиентный метод решения обратной задачи для одномерного стохастического дифференциального уравнения.

Объем работы составляет 26 страниц, список использованной литературы включает 16 источников, в работе приводятся 1 таблица и 8 рисунков.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка, нелинейное операторное уравнение, сопряженный оператор, обратная задача, регуляризация, метод простой итерации.

Работа посвящена решению обратной задачи для одномерного стохастического дифференциального уравнения (СДУ), а именно – восстановлению коэффициента дрейфа по дополнительной информации о нескольких траекториях СДУ в фиксированный момент времени. Плотность случайных величин удовлетворяет решению нестационарного уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка. Задача формулируется в виде нелинейного операторного уравнения. В работе приведен вывод сопряженного оператора обратной задачи и рассмотрены следующие методы решения обратной задачи: метод простой итерации и итеративно регуляризованный метод Гаусса-Ньютона. Результаты численных расчетов на синтетических данных показали эффективность метода простой итерации для решения обратной задачи.

Содержание

Введение	3
1 Краткий исторический обзор	4
2 Постановка и численное решение прямой задачи	5
2.1 Постановка прямой задачи	5
2.2 Численное решение прямой задачи	5
3 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка	7
3.1 История возникновения	7
3.2 Численное решение уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка	8
4 Обратная задача	12
4.1 Постановка обратной задачи	12
4.2 Сопряженный оператор	12
4.3 Градиентные методы решения	15
5 Численные результаты	17
5.1 Анализ решения обратной задачи с данными без шума . . .	17
5.2 Анализ решения обратной задачи с зашумленными данными	20
6 Заключение	23
Список литературы	24

Введение

Современные вычислительные машины позволяют решать все более сложные, приближенные к реальности, задачи. Наш мир не является детерминированным. Его истинное лицо – вероятностное. Поэтому обыкновенные дифференциальные уравнения – это лишь первое приближение к реальности. Более правдоподобным инструментом исследования являются стохастические уравнения. Многие динамические процессы можно моделировать с помощью стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), которые учитывают случайность в происходящих процессах.

Решение обратных задач для СДУ - важная и открытая проблема в математике. В экономике результатами решения этих задач может стать прогнозирование цен акций, опционов, сырьевых товаров, курсов криптовалют. СДУ также находят применения во многих других дисциплинах: геофизике [13], экологии, социологии [8], биологии, медицине.

Цель данной работы заключается в построении алгоритма идентификации коэффициента дрейфа в одномерном случае по дополнительной информации о некоторых траекториях процесса в фиксированный момент времени.

1. Краткий исторический обзор

История СДУ и большая часть формального развития этой теории началась в 1942 году, когда К. Ито опубликовал статью о случайных процессах. Поэтому раздел математики, изучающий СДУ, считается относительно новым и малоизученным.

Моделирование с помощью стохастических дифференциальных уравнений стало стандартом в финансовой эконометрике после работ F. Black, M. Scholes [2]. С тех пор большой интерес вызывает параметрическое и непараметрическое оценивание дрейфа и диффузии в СДУ.

Параметрическая оценка была разработана A. Hurn, J. Jeisman, K. Lindsay [10]. Они предложили оценку максимального правдоподобия, которая основана на численном решении уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка методами конечных элементов. Отметим также работы H. Egger, H.W. Engl [6] и D. De Cezaro, O. Scherzer and J. Zubelli [3] для непараметрической оценки волатильности с использованием уравнений в частных производных. T. Hohage and F. Dunker [5] вывели скорость сходимости для оценки параметров в СДУ с помощью методов вариационной регуляризации.

2. Постановка и численное решение прямой задачи

2.1. Постановка прямой задачи

В нашей работе мы рассматриваем случай, когда коэффициент дрейфа является функцией от $X(t)$, а волатильность постоянна. В этом случае общий вид СДУ:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.1)$$

Здесь $t \in [0, T]$ – время, $X(t)$ – случайная величина, $W(t)$ – стандартный Винеровский процесс, $\mu(x)$ – коэффициент дрейфа (математическое ожидание), σ – волатильность (дисперсия).

Под прямой задачей в данной работе понимается задача нахождения случайной величины $X(t)$, которая описывается стохастическим дифференциальным уравнением. Для решения прямой задачи задаются:

- 1) уравнение (2.1), описывающее данный процесс;
- 2) коэффициент дрейфа и волатильность;
- 3) начальное условие;
- 4) интервал времени, для которого нужно найти $X(t)$.

2.2. Численное решение прямой задачи

Для построения разностной схемы введем равномерную по времени сетку с шагом $\Delta t = T/N_t$, где N_t – количество узлов.

Прямая задача (2.1) решается методом Эйлера - Маруямы:

$$X_{i+1} = X_i + \mu_i \Delta t + \sigma \Delta W_i, \quad \Delta W_i = z_i \sqrt{\Delta t},$$

где $z_i \sim N(0,1)$ – гауссовы случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

В ходе проведения численных экспериментов с помощью метода Эйлера-Маруямы были получены следующие решения прямой задачи для СДУ, отличающиеся между собой на $\sigma dW(t)$.

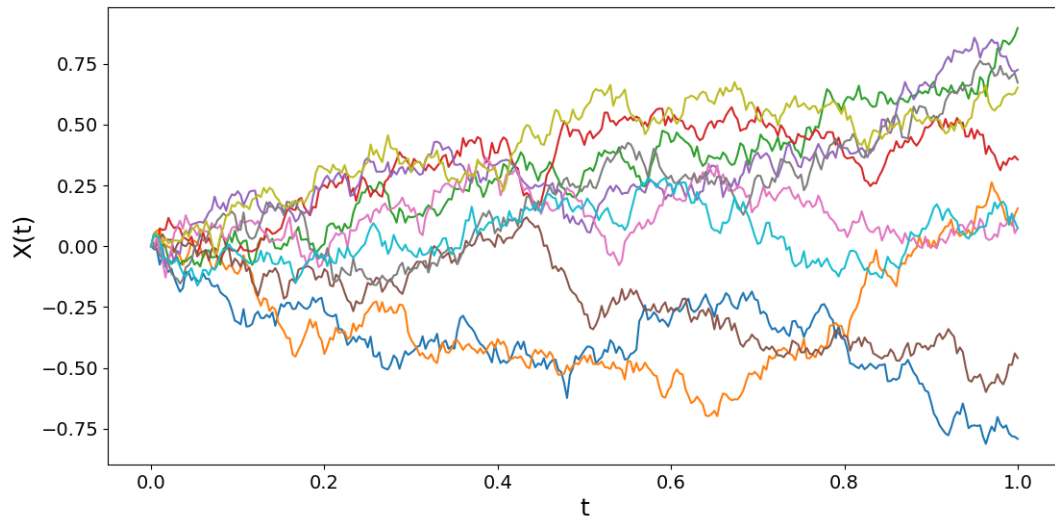


Рис. 2.1: Решение прямой задачи $X(t)$ методом Эйлера-Маруямы.

На рис. 5.1 изображен пример генерации десяти путей методом Эйлера-Маруямы для $\sigma = 0.5$, $\mu = -5x^3 + 2x$, $X_0 = 0$, $N_t = 300$. Если рассматривать задачу экономики, то каждая кривая описывает цену акции или опциона в зависимости от времени t .

3. Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка

3.1. История возникновения

В 1905 г. Альберт Эйнштейн в одной из своих работ закладывает основы математического описания броуновского движения. Он обнаружил, что плотность распределения u броуновской частицы удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Позже физики Адриан Фоккер и Макс Планк обобщили это уравнение, в результате чего сформировалось уравнение Фоккера-Планка.

В 1931 г. Андрей Николаевич Колмогоров в работе «Об аналитических методах в теории вероятности» строит математическую модель диффузионных процессов и математически выводит прямое уравнение Колмогорова, которое сейчас называют уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [l, L], \\ u(l, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $u_0(x)$ – начальная плотность распределения процесса.

В данной работе мы используем решение начально-краевой задачи для уравнения КФП для определения плотности распределения случайной величины в СДУ (2.1).

3.2. Численное решение уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

Введем равномерную сетку по времени и пространству с шагом $\Delta t = T/N_t$ и $\Delta x = (L - l)/N_x$ соответственно, N_t – количество узлов по времени, N_x – по пространству.

а) Рассмотрим неявную схему:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2\Delta x} u_i^{n+1} + \mu_i \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$

в рамках которой начальные и граничные условия аппроксимируются как

$$\begin{aligned} u_i^0 &= u^0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N_x, \\ u_0^n &= 0, u_{N_x}^n = 0 \quad \forall n = 0, \dots, N_t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Порядок схемы: $O(\tau + h^2)$. Необходимое условие устойчивости:

$$\left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t + \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right)^2 + \frac{\cos^2(\omega \Delta x) \Delta t}{\Delta x} \left(\mu_i + \frac{\sigma^2}{\Delta x} \right)^2 \geq 1, \quad (3.4)$$

где ω – волновое число. Если $\mu_{i+1} \geq \mu_{i-1}$, то условие (3.4) выполнено всегда, и схема абсолютно устойчива. Однако в случае $\mu_{i+1} < \mu_{i-1}$ существуют Δx и Δt , когда условие (3.4) может нарушаться.

б) Рассмотрим вычислительную схему для уравнения КФП, где используется Эйлерово-Лагранжев подход [16]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} \right) u_{i-1/2}^{n+1} + \left(\frac{3}{4\Delta t} + \frac{\sigma^2}{\Delta x^2} \right) u_{i+1/2}^{n+1} + \left(\frac{1}{8\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} \right) u_{i+3/2}^{n+1} = \\ = \alpha_{i+1/2} u_{i-1/2}^n + \beta_{i+1/2} u_{i+1/2}^n + \gamma_{i+1/2} u_{i+1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

для $\forall i = 0, \dots, N_x - 1 \quad \forall n = 0, \dots, N_t - 1$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1/2} &= \frac{1}{8\Delta t} \left(1 + \frac{4\Delta t}{\Delta x} \mu_i \right), \\ \beta_{i+1/2} &= \frac{1}{8\Delta t} \left(3 + \frac{4\Delta t}{\Delta x} \mu_i \right) + \frac{1}{8\Delta t} \left(3 - \frac{4\Delta t}{\Delta x} \mu_{i+1} \right), \\ \gamma_{i+1/2} &= \frac{1}{8\Delta t} \left(1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x} \mu_{i+1} \right). \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^0 &= u^0(x_{i+1/2}) \quad \forall i = 0, \dots, N_x - 1, \\ u_{-1/2}^n &= u_{1/2}^n = 0, \quad u_{N_x-1/2}^n = u_{N_x+1/2}^n = 0 \quad \forall n = 0, \dots, N_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, на каждом временном шаге функция $u(x, t_n)$ определяется следующим образом:

$$u(x, t_n) = u_{i-1/2}^n \frac{(x_{i+1/2} - x)}{\Delta x} + u_{i+1/2}^n \frac{(x - x_{i-1/2})}{\Delta x}.$$

Порядок схемы: $O(\tau + h^2)$. Условия для устойчивости схемы и диагонального преобладания у матрицы системы (3.5):

$$\Delta t |\mu_i| < \frac{\Delta x}{2}, \quad \Delta x^2 < 4\Delta t \sigma^2 \quad \forall i = 0, \dots, N_x - 1, \forall n = 0, \dots, N_t. \quad (3.7)$$

В качестве начальных условий для уравнения КФП используется дельта-функция Дирака δ_0 . В наших вычислениях мы берем $u_0(x) = \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-(sx)^2}$. Эта функция удовлетворяет свойствам плотности случайной величины и слабо сходится к δ – функции при $s \rightarrow \infty$.

Сравнение схем а) и б) представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1: Сравнение неявной схемы (а) и схемы с Эйлерово-Лагранжевым подходом (б).

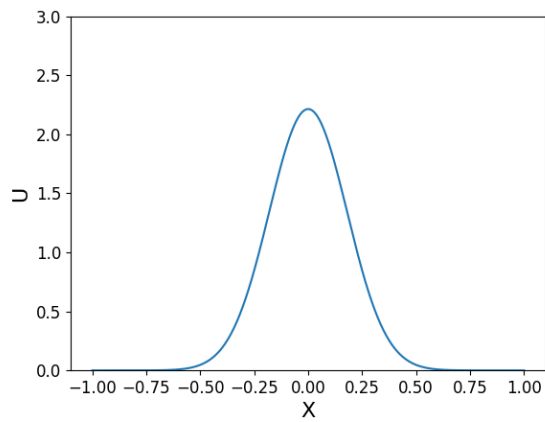
Δx	Δt	δ_a^h	p_a	δ_b^h	p_b
2×10^{-2}	8×10^{-4}	0.0026556		0.00227628	
10^{-2}	2×10^{-4}	0.0006995	1.924	0.00056815	2.002
0.5×10^{-2}	0.5×10^{-4}	0.0001758	1.992	0.00014189	2.001

В таблице 3.1 приведены значения ошибки δ^h и порядка сходимости p для схем из пунктов а) и б). Был рассмотрен случай, когда $\sigma = 0.5$, $\mu = -5x^3 + 2x$, $x \in [-1, 1]$, $T = 1$. Обе схемы аппроксимируют уравнение КФП с порядком $O(\tau + h^2)$. В данном случае условия устойчивости для схем выполнены. Однако условие устойчивости схемы б) накладывает сильное ограничение на шаг по времени. В нашей работе для нас будет важно только значение плотности в момент времени T , т.е. $u(x, T)$, поэтому нам, прежде всего, нужно иметь хорошую точность по пространственной координате, а не по времени.

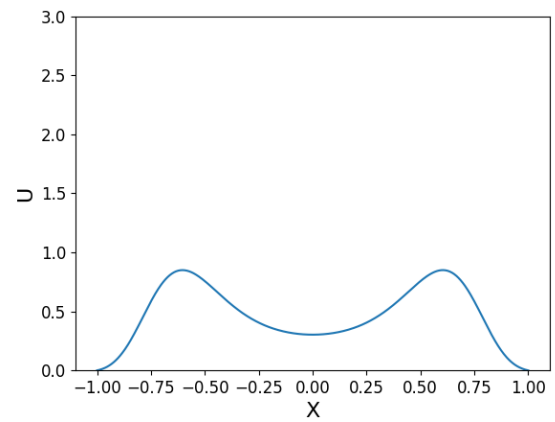
Для вычисления ошибки и порядка сходимости схем были использованы следующие формулы:

$$\delta^h = \max_{i,n} |u^{h/2} - u^h|, \quad p = \log_2(\delta^h / \delta^{h/2}).$$

Приведем графические результаты решения уравнения КФП неявной схемой:



а) Начальная плотность распределения при $t = 0$.



б) Конечная плотность распределения при $t = T$.

Рис. 3.1: Решение начально-краевой задачи для уравнения КФП.

На рис. 3.1 изображены решения уравнения КФП для моментов времени $t = 0$ и $t = T$. Рассмотрены те же значения: $\sigma = 0.5$, $\mu = -5x^3 + 2x$, $x \in [-1, 1]$, $T = 1$, $s = 4$.

4. Обратная задача

4.1. Постановка обратной задачи

В обратной задаче требуется восстановить функцию $\mu(x)$, удовлетворяющей СДУ (2.1) по измерениям в фиксированный момент времени $X^i(T)$, $i = 1, \dots, n$. Здесь $X^i(T)$ - решение прямой задачи (2.1) в момент времени T . Также предполагается, что $X(0)$ и $\sigma = \text{const}$ известны.

Сформулируем обратную задачу в виде нелинейного операторного уравнения:

$$F(\mu) = u(x, T; \mu), \quad (4.1)$$

где $u(x, T; \mu)$ – решение уравнения КФП (3.1) в фиксированный момент времени T , $\mu = \mu(x)$ – искомая функция.

В качестве правой части уравнения (4.1) мы имеем u^{obs} – эмпирическую плотность распределения для данных $X^i(T)$.

Эта обратная задача некорректна, т.к. данные задачи не полны. Поэтому следует применять алгоритмы регуляризации.

4.2. Сопряженный оператор

Пусть $u \in L^2([l, L] \times [0, T])$, $\mu \in L^2([l, L])$. Тогда $F: L^2[l, L] \rightarrow L^2[l, L]$.

Обозначим правую часть уравнения КФП (3.1) через оператор $L_\mu u$, т.е.

$$L_\mu u := -\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Чтобы найти оператор $F'[\mu]$, продифференцируем (3.1) по μ :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = L_\mu v - \operatorname{div}(hu), & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ v(0, x) = 0, & x \in [l, L], \\ v(l, t) = v(L, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.2)$$

где $v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial \mu} h$. Тогда $F'[\mu] : L^2[l, L] \rightarrow L^2[l, L]$ и

$$F'[\mu]h = v(x, T). \quad (4.3)$$

Основываясь на [3], докажем следующую лемму.

Лемма *Сопряженный к $F'[\mu]$ оператор имеет вид:*

$$F'[\mu]^* g = u(x, T; \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^T w(x, t) dt \right), \quad (4.4)$$

где $w(x, t)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = -\mu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ w(T, x) = g(x), & x \in [l, L], \\ w(l, t) = w(L, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.5)$$

Доказательство. Обозначим $f = -\operatorname{div}(hu)$ в (4.2). Введем оператор A такой, что $A : f \rightarrow v(x, T)$. И оператор B такой, что $Bh = -\operatorname{div}(hu)$. Тогда

$$F'[\mu]h = A(-\operatorname{div}(hu)) = ABh \Rightarrow F'[\mu]^* = B^* A^*. \quad (4.6)$$

Докажем сначала, что $A^*g = \int_0^T w(x,t)dt$, где $w(x,t)$ решение следующей

задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = -L_\mu^* w, & t \in [0, T], x \in [l, L], \\ w(T, x) = g(x), & x \in [l, L], \\ w(l, t) = w(L, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \langle v(x, T), g(x) \rangle = \langle v(x, T), w(x, T) \rangle = \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \langle v(x, t), w(x, t) \rangle dt + \langle v(x, 0), w(x, 0) \rangle = \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, w(x, t) \right\rangle + \left\langle v(x, t), \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle L_\mu v(x, t) + f, w(x, t) \rangle + \langle v(x, t), -L_\mu^* w(x, t) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle L_\mu v(x, t), w(x, t) \rangle + \langle f, w(x, t) \rangle - \langle L_\mu v(x, t), w(x, t) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle f, w(x, t) \rangle dt = \langle f, \int_0^T w(x, t) dt \rangle. \end{aligned}$$

В следующих выкладках покажем, что $L_\mu^* w = \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned} \langle L_\mu u, w \rangle &= \left\langle -\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, w \right\rangle = \\ &= - \int_0^T \int_l^L \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} w dx dt + \int_0^T \int_l^L \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx dt = \\ &= - \int_0^T \left[\mu u w \Big|_l^L - \int_l^L \mu u \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] dt + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} w \Big|_l^L - \int_l^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] dt = \\ &= \int_0^T \int_l^L \mu u \frac{\partial w}{\partial x} dx dt - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \left[u \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_l^L - \int_l^L u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_l^L \mu u \frac{\partial w}{\partial x} dx dt + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_l^L u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dt = \langle u, \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rangle = \\
&= \langle u, L_\mu^* w \rangle.
\end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что $B^* = u(x, T; \mu) \frac{\partial}{\partial x}$.

Подставляем найденные операторы в (4.6) и получаем (4.4). ■

4.3. Градиентные методы решения

Как уже упоминалось ранее, задача (4.1) является некорректной. Регуляризация Тихонова, безусловно, самый известный метод регуляризации. Анализ этого метода для нелинейных некорректных задач изучался в работах [7, 15].

Задача (4.1) может быть решена итеративно регуляризованным методом Гаусса-Ньютона:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_k I + F'[\mu_k]^* F'[\mu_k])(\mu_{k+1} - \mu_k) = \\
&F'[\mu_k]^*(u^{obs} - F[\mu_k]) + \alpha_k(\mu_0 - \mu_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

где k – номер итерации, α_k – последовательность параметров регуляризации, которая удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad 1 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq \alpha.$$

для некоторой $\alpha > 1$. Результаты решения обратной задачи для восстановления коэффициента дрейфа итеративно регуляризованным методом Ньютона и Гаусса-Ньютона показаны в [5].

Для линейных задач метод простой итерации тоже может выступать в качестве метода регуляризации, где параметром регуляризации является номер итерации. Метод простой итерации можно обобщить на нелинейное операторное уравнение (4.1), как показано в [9], и получить итерационный алгоритм решения обратной задачи:

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda F'[\mu_k]^*(u^{obs} - F(\mu_k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.8)$$

где λ - параметр спуска.

5. Численные результаты

5.1. Анализ решения обратной задачи с данными без шума

Для решения обратной задачи в качестве синтетических данных $X^i(T)$ ($i = 1 \dots n$) были взяты значения решения прямой задачи для точного коэффициента дрейфа $\mu^{exact}(x) = -5x^3 + 2x$ в точке T для начального условия $X(0) = 0$. Для данных была найдена эмпирическая плотность распределения u^{obs} .

Для определения u^{obs} мы строили гистограмму, где количество интервалов, на которое разбивался наблюдаемый диапазон измерений случайных величин $X^i(T)$, выбиралось по правилу Стёрджеса. Затем применяли интерполяцию кубическими сплайнами для получения значений плотности во всех точках равномерной сетки.

Воспользовавшись формулой (4.4) и применив метод простой итерации (4.8) с параметром спуска $\lambda = \sigma$ были получены следующие результаты.

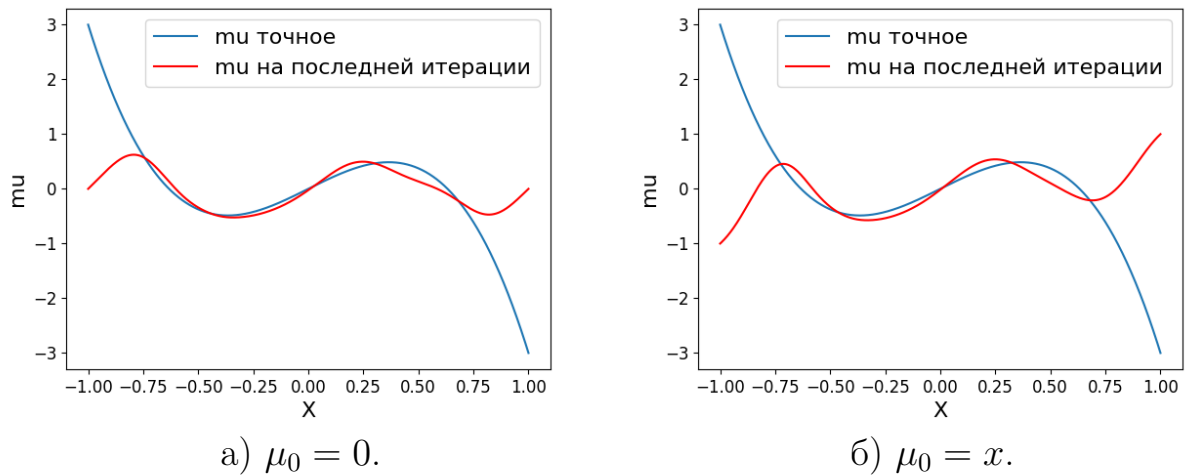
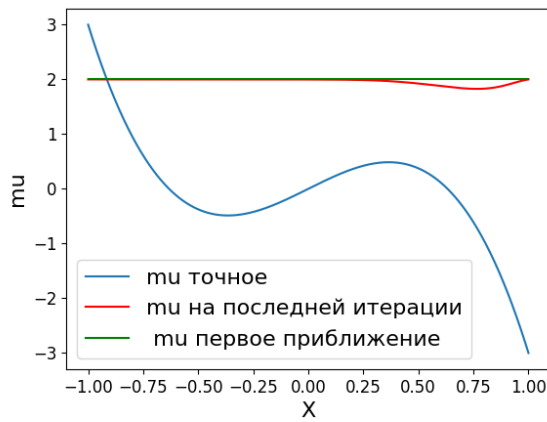


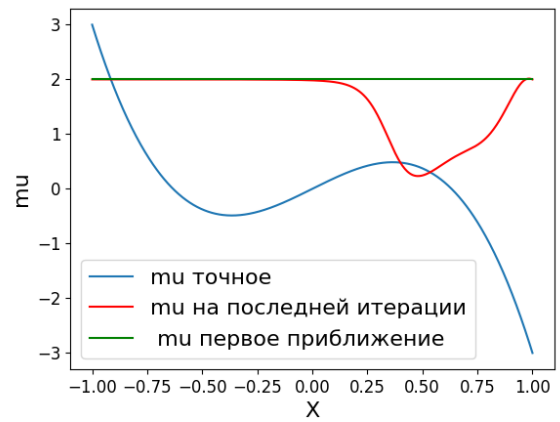
Рис. 5.1: Восстановленный и точный коэффициент дрейфа $\mu(x)$ для разных начальных приближениях в методе простой итерации.

На рис. 5.1 изображены примеры восстановления функции μ для данных $X^i(T)$, где $i = 1, \dots, 500$. Здесь $\sigma = 0.5$, начальное приближение $\mu_0 = 0$ (а) и $\mu_0 = x$ (б), количество итераций $k = 20$.

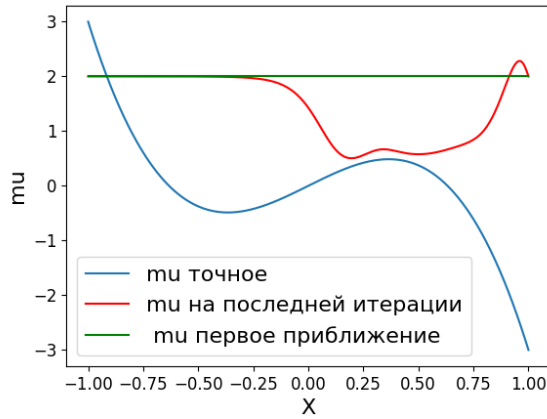
Решение, полученное с помощью градиентных методов, зависит от начального приближения. Если рассматривать начальное приближение μ_0 более удаленным от точного решения, то для получения результата требуется больше итераций (см. рис. 5.2).



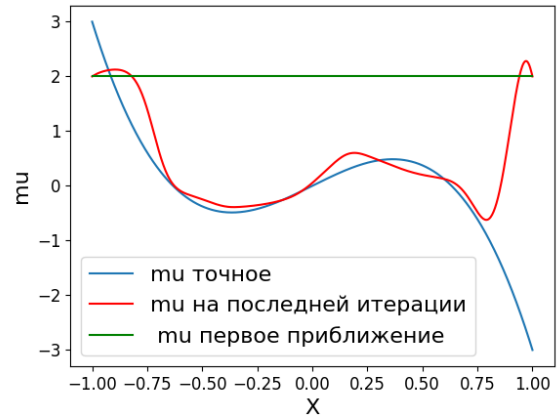
а) $k = 20$.



б) $k = 100$.



в) $k = 200$.



г) $k = 400$.

Рис. 5.2: Восстановленный и точный коэффициент дрейфа при начальном приближении $\mu_0 = 2$ метода простой итерации.

На рис. 5.2 можно увидеть то, как меняется восстановленная функция $\mu(x)$ в зависимости от количества итераций.

Из графиков видно, что значение дрейфа на концах отрезка $[-1,1]$ восстановиться не удастся. Это связано с тем, что плотность распределения случайной величины $u(x,T)$ в этих точках близка к нулю.

Для анализа полученных результатов введем следующий функционал:

$$J(\mu) = \|F(\mu) - u^{obs}\|_{L_2}^2 = \int_l^L |F(\mu) - u^{obs}|^2 dx.$$

Тогда обратная задача (4.1) может быть сформулирована как поиск минимума целевого функционала $J(\mu)$.

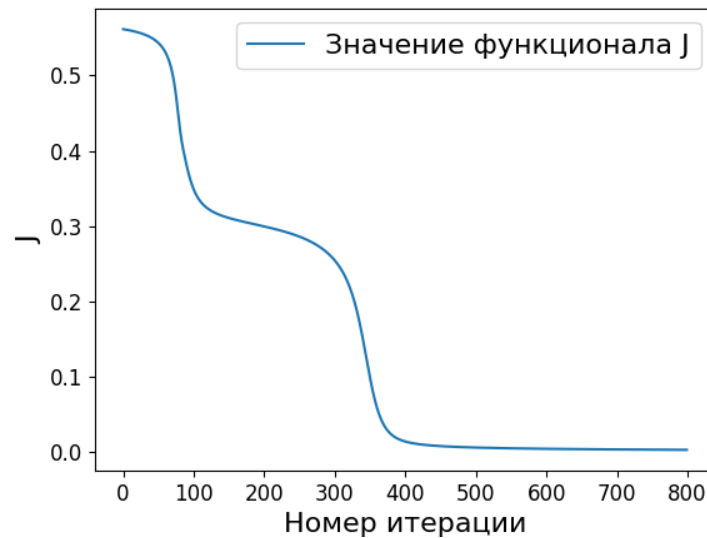


Рис. 5.3: График убывания функционала $J(\mu)$.

На рис. 5.3 показана динамика уменьшения значения функционала на первых 800 итерациях. Можно видеть, что примерно после 390 итерации функционал перестаёт значительно изменяться, поэтому было выбрано именно такое число итераций для работы алгоритма. Результат приведен для случая $\mu_0 = 2$.

Кроме значения функционала также измерялась относительная ошибка

$$\varepsilon_k = \frac{\|\mu^{exact} - \mu_k\|_{L_2}^2}{\|\mu^{exact}\|_{L_2}^2},$$

где μ^{exact} - точное значение дрейфа, а μ_k - значение на k -ой итерации.

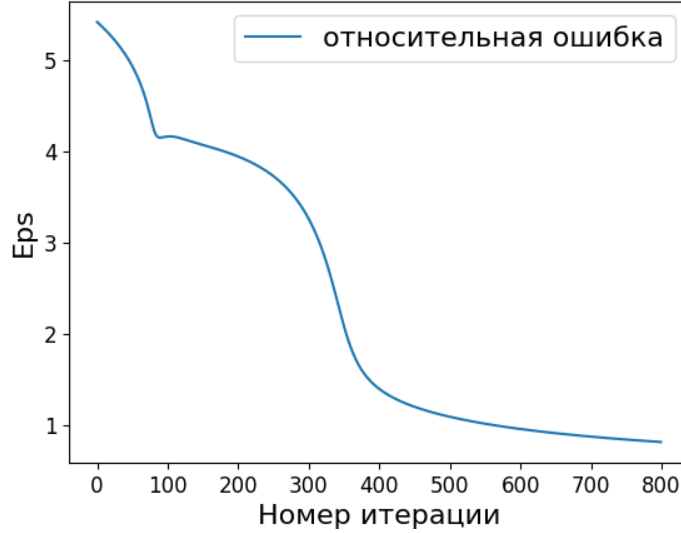


Рис. 5.4: Относительная ошибка.

На рис. 5.4 показано уменьшение значения ошибки на первых 800 итерациях. Ошибка достаточно быстро уменьшается до 400-й итерации, а затем уменьшается медленнее. Значительный вклад в ошибку вносят концы дрейфа, которые не удается восстановить.

5.2. Анализ решения обратной задачи с зашумленными данными

Аналогично пункту 5.1. рассмотрим $\mu^{exact}(x) = -5x^3 + 2x$, $\sigma = 0.5$, $X(0) = 0$, $x \in [-1, 1]$, $T \in [0, T]$. Возьмем синтетические данные $X^i(T)$, где $i = 1, \dots, 500$ и добавим к ним шум 15%. Рассмотрим начальное приближение дрейфа $\mu_0 = 2$.

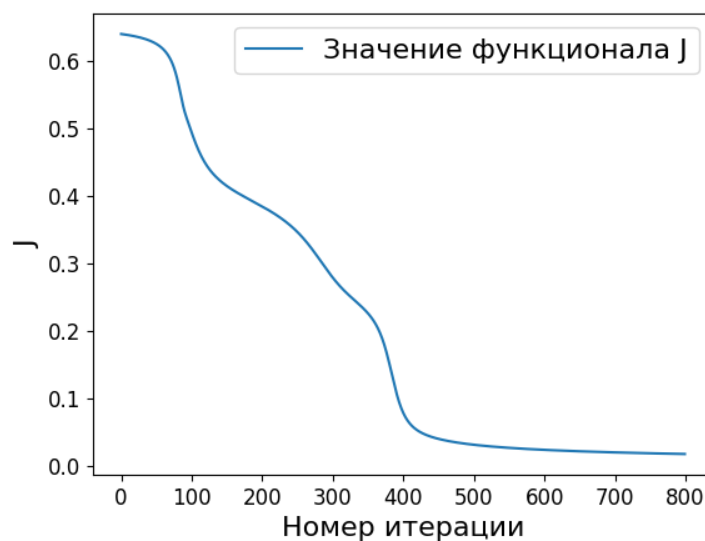


Рис. 5.5: Значение функционала при данных с шумом 15%

На рис. 5.2 представлено поведение функционала для случая зашумленных данных.

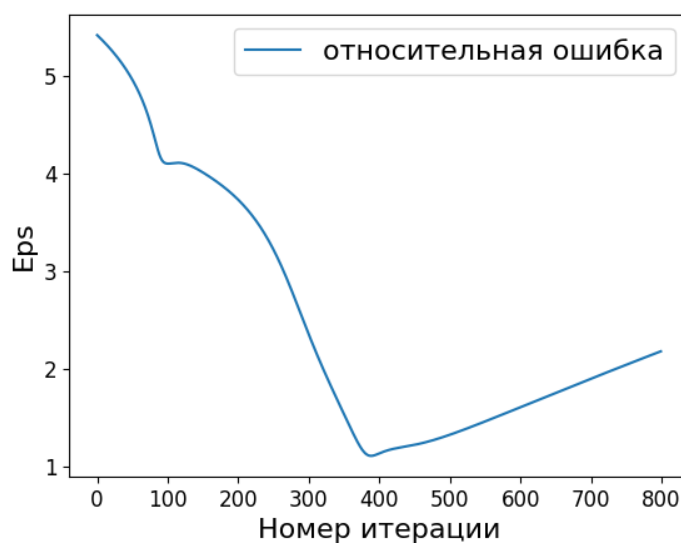


Рис. 5.6: Относительная ошибка для дрейфа при данных с шумом 15%.

На рис. 5.2 изображен график относительной ошибки для зашумленных данных. После 390 итерации ошибка начинает возрастать. Так как мы пользуемся методом простой итерации, где параметром регуляризации служит номер итерации, то исходя из результатов графика относительной

ошибки можно сказать, что для получения достаточно точного результата нужно останавливать алгоритм на $k=390$. В этом случае результат для восстановленного дрейфа будет иметь вид аналогичный графику (г) рис. 5.2. Анализируя график убывания целевого функционала (рис. 5.2), можно заметить, что останавливать итерации следует в тот момент, когда целевой функционал медленно убывает.

6. Заключение

В работе был построен алгоритм идентификации коэффициента дрейфа для одномерного стохастического дифференциального уравнения. Были рассмотрены и проанализированы две численные схемы для решения уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка. Мы рассмотрели обратную задачу в виде нелинейного операторного уравнения и вывели операторы $F'[\mu]$ и $F'[\mu]^*$. Используя метод просто итерации была восстановлена функция $\mu(x)$ по дополнительной информации о нескольких траекториях процесса в фиксированный момент времени. В качестве начального приближения для градиентного метода рассматривались несколько случаев: близкие к точному и более удаленное. Мы построили и проанализировали графики значения целевого функционала и относительной ошибки для случая зашумленных данных и данных без шума. Численные эксперименты показывают, что алгоритм, описанный в данной работе, позволяет достаточно точно восстановить коэффициент дрейфа на всем отрезке кроме его концов.

В настоящий момент рассмотрен одномерный случай, когда $\mu = \mu(X)$, $\sigma = \text{const}$. В перспективе планируется рассмотреть случай нескольких уравнений для группы акций из одной отрасли. А также случаи $\sigma = \sigma(X)$.

Список литературы

- [1] Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В., Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова
- [2] Black F., Scholes M., The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, no. 3. – P. 637-654.
- [3] D. De Cezaro, O. Scherzer, and J. Zubelli, Convex regularization of local volatility models from option prices: convergence analysis and rates // Nonlinear Analysis. – 2012. – Vol. 75, no. 4. – P. 2398–2415.
- [4] Dipple S., Choudhary A., Flamino J. et al., Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities // Applied Network Science. – 2020. – Vol. 5, no. 17.
- [5] Dunker F. and Hohage T., On parameter identification in stochastic differential equations by penalized maximum likelihood // Inverse Problems. – 2014. – Vol. 30, no. 9.
- [6] Egger H., Engl H., Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21, no. 3. – P. 1027–1045.
- [7] Engl H., Kunisch, K., Neubauer, A., Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems – 1989. – Vol. 5, no. 4. – P. 523–540.

- [8] Fenner T., Levene M., Loizou G., A stochastic differential equation approach to the analysis of the UK 2016 EU referendum polls // Journal of Physics Communications. – 2018. – Vol. 2, no 5.
- [9] Hanke M., Neubauer A., and Scherzer O., A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // Numerische Mathematik. – 1995. – Vol. 72. – P. 21–37.
- [10] Hurn A., Jeisman J., and Lindsay K., Teaching an old dog new tricks: Improved estimation of the parameters of stochastic differential equations by numerical solution of the Fokker - Planck equation // NCER Working Paper Series. – 2007.
- [11] Kabanikhin S., Krivorotko O., Bektemessov Z., Bektemessov M., Zhang S., Differential evolution algorithm of solving an inverse problem for the spatial Solow mathematical mode // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2020. – Vol. 28, no. 5. – P. 761-774.
- [12] Kaltenbacher B., Schopfer F., Schuster T. Iterative methods for non-linear ill-posed problems in Banach spaces: convergence and applications to parameter identification problems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, no. 6.
- [13] Maria C. Mariani, Osei K. Tweneboah, Stochastic differential equations applied to the study of geophysical and financial time series // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2016. – Vol. 443. – P. 170-178.
- [14] Robert M. Solow, Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39, no. 3. – P. 312-320.

- [15] Scherzer O., Engl, H.W., Kunisch, K., Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1992. – Vol. 30, no. 6. – P. 1796–1838.
- [16] Shaydurov V., Kornienko V., Zhang S., The Euler–Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – P. 2702–2713.