Μη Ομογενής Διαδικασία Poisson

Στοχαστικές Μέθοδοι

Μανδραβέλης Δημήτριος

Νεραντζάκη Κυριακή

Ιακωβίδης Ισίδωρος

Καπανίδης Ευριπίδης

9/11/2020

1.1ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON

Ορισμός 1.1.1

Μια απαριθμητή διαδικασία $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία Poisson** με ρυθμό λ αν:

I. N(0)=0
II. Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
III. Το πλήθος των γεγονότων σε οπουδήποτε διάστημα t ακολουθεί Poisson κατανομή:

$$P(N(t+s)-N(s)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad ,k \geq 0$$

Ορισμός 1.1.2

Μια απαριθμητή διαδικασία $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ καλείται **διαδικασία Poisson** με ρυθμό λ αν:

I. N(0)=0
II. Ανεξάρτητες και στατικές προσαυξήσεις
III. $P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$
IV. $P(N(h)=0)=1-\lambda h+o(h)$
V. $P(N(h)\geq 2)=o(h)$

Οι Ορισμοί 1.1.1 και 1.1.2 είναι ισοδύναμοι.

1.2 ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON

Η μη ομογενής διαδικασία Poisson είναι μια γενίκευση της κλασικής διαδικασίας Poisson όπου ο ρυθμός αφίξεων είναι συνάρτηση του χρόνου. Το κόστος αυτής της γενίκευσης είναι ότι χάνεται η ιδιότητα των στατικών αυξήσεων , δηλαδή τα γεγονότα είναι πιο πιθανό να συμβούν σε κάποιο χρόνο παρά σε ένα άλλο. Η μη ομογενής διαδικασία έχει εφαρμογή σε πολλές περιπτώσεις όπως οι αφίξεις πελατών σε ένα εστιατόριο.

Ορισμός 1.2.1

Μία στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ καλείται **μη ομογενής** με <u>συνάρτηση έντασης</u> <u>ή συνάρτηση ρυθμού αφίξεων</u> λ(t) όταν:

I. N(0)=0
II. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
III. P(N(t+h)-N(t)=1) = λ(t)h+o(h)
IV. P(N(t+h)-N(t)=0) = 1-λ(t)h+o(h)
V. P(N(t+h)-N(t) ≥2) = o(h)

Υπό αυτές τις συνθήκες μπορεί ναι δειχτεί ότι:

$$P(N(t+s)-N(t)=k)=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m((t))^k}{k!} \qquad ,k\geq 0$$

όπου,

$$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$$

Πρόταση 1.2.2

Η τ.μ. $\big(N(t+s)-N(t)\big)$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $m(t+s)-m(t)$.

Απόδειξη:

Συμβολίζουμε με $P_i(s)$ την πιθανότητα οι προσαυξήσεις σε ένα διάστημα $(t,t+s]$ να είναι ίσες με i. Δηλαδή,

$$P_i(s)=P(N(t+s)-N(t)=i)$$

Τότε,

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P(N(s+h+t)-N(t)=0) \\ &\overset{\text{OP.ii}}{=} P(N(s+t)-N(t)=0)P(N(t+s+h)-N(t+s)=0) \\ &= P_0(s)\big(1-\lambda(t+s)h+o(h)\big) \\ &= P_0(s)-P_0(s)\lambda(t+s)h-P_0(s)o(h) \end{aligned}$$

Και άρα

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = \frac{-P_0(s)\lambda(t+s)h-P_0(s)o(h)}{h}$$

Παίρνοντας όριο όταν $h \to 0$ έχουμε πως

$$P_0(s)' = -P_0(s)\lambda(t+s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)\,du \ +c$$

Με αλλαγή μεταβλητής k=t+u έχουμε,

$$\Leftrightarrow \quad \ln P_0(\mathrm{s}) = -\left(\int_0^{t+s} \lambda(k)\,dk - \int_0^t \lambda(k)dk\right)+c$$

Επειδή $P_0(0)=1$ τότε c=0 . Άρα

$$P_0(s) = e^{-\left(m(t+s)-m(t)\right)}$$

Με την ίδια λογική,

$$P_i(s+h) = P(N(s+h+t) - N(t) = i)$$

$$= P_i(s)P_0(t+s) + P_{i-1}(s)P_1(t+s)$$

$$= P_i(s)(1 - \lambda(t+s)h + o(h)) + P_{i-1}(s)(\lambda(t+s)h + o(h))$$

$$= P_i(s) - P_i(s)\lambda(t+s)h + P_i(s)o(h) + P_{i-1}(s)\lambda(t+s)h + P_{i-1}(s)o(h)$$

Επομένως,

$$\frac{P_i(s+h) - P_i(s)}{h} = \frac{-P_i(s)\lambda(t+s)h + P_i(s)o(h) + P_{i-1}(s)\lambda(t+s)h + P_{i-1}(s)o(h)}{h}$$

Παίρνοντας ξανά όριο όταν $h \to 0$ έχουμε πως,

$$P_i(s)' = -P_i(s)\lambda(t+s) + P_{i-1}(s)\lambda(t+s)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_i(s)' + P_i(s)\lambda(t+s) = P_{i-1}(s)\lambda(t+s)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_i(s)' e^{m(t+s)} + P_i(s)\lambda(t+s)e^{m(t+s)} = P_{i-1}(s)\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(e^{m(t+s)}P_i(s)\right)}{ds} = P_{i-1}(s)\,\lambda(t+s)e^{m(t+s)} \qquad (1)$$

Για $i = 1$ είναι,

$$\frac{d\left(e^{m(t+s)}P_1(s)\right)}{ds} = P_0(s)\,\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(e^{m(t+s)}P_1(s)\right)}{ds} = e^{-(m(t+s)-m(t))}\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(e^{m(t+s)}P_1(s)\right)}{ds} = e^{m(t)}\lambda(t+s)$$

$$\Rightarrow \quad e^{m(t+s)}P_1(s) = e^{m(t)}\int_0^s \lambda(t+s)ds + c$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}\int_0^s \lambda(t+s)ds + c$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1(s) = e^{-\left(m(t+s)-m(t)\right)}\left(m(t+s)-m(t)\right) + c$$

Επειδή $P_1(0) = 0$ έχουμε ότι c=0. Άρα,

$$P_1(s) = e^{-\left(m(t+s)-m(t)\right)}\left(m(t+s)-m(t)\right)$$

Με μαθηματική επαγωγή θα αποδείξουμε,

$$P(N(t+s)-N(t)=i) = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m((t))^i}{i!}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για $i = 1$. Έστω ότι ισχύει για $i = k-1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $i = k$. Στην (1) για $i = k$,

$$\frac{d\left(e^{m(t+s)}P_k(s)\right)}{ds} = \quad P_{k-1}(s)\,\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(e^{m(t+s)}P_k(s)\right)}{ds} = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m((t))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{m(t+s)}P_k(s) = e^{m(t)}\int_0^s \lambda(t+s)\frac{(m(t+s)-m((t))^{k-1}}{(k-1)!}ds + c$$

Ισχύει ότι,

$$\frac{d(m(t+s)-m(t))^k}{ds} = k\big(m(t+s)-m(t)\big)^{k-1}\lambda(t+s)$$

Άρα,

$$e^{m(t+s)}P_k(s) = e^{m(t)}\frac{\big(m(t+s)-m(t)\big)^k}{(k-1)!\,k} + c$$

Επειδή $P_k(0) = 0$, τότε c=0. Τελικά,

$$P_k(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m((t))^k}{k!}$$

■

Πόρισμα 1.2.3

Η τ.μ. N(t) ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό m(t),δηλαδή

$$P(N(t)=k) = \frac{e^{-m(t)}\big(m(t)\big)^k}{k!} \qquad ,k \geq 0$$

Αν το λ είναι σταθερό και ανεξάρτητο του t τότε το $m(t)$ =λt και έχουμε την ομογενή Poisson.

Επίσης πρέπει $m(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Από τον ορισμό της συνάρτησης m(t) συμπεραίνουμε τα εξής:

- Ο τύπος της Πρότασης 1.2.2 χρησιμοποιείται για διαστήματα μήκους t της μορφής (0,t)

- Ο τύπος του Πορίσματος 1.2.3 χρησιμοποιείται για διαστήματα μήκους s αλλά της μορφής (t,t+s)

Πρόταση 1.2.3

Για την τ.μ N(t+s)-N(t) ισχύει ότι :

i. $E\big(N(t+s)-N(t)\big)=m(t+s)-m(t)$

ii. $Var\big(N(t+s)-N(t)\big)=m(t+s)-m(t)$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη της (i) , από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε,

$$E\big(N(t+s)-N(t)\big)=E\big(N(t+s)\big)-E(N(t))$$

Είναι,

$$E\big(N(t)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(N(t)=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{e^{-m(t)}(m(t))^k}{k!}$$

$$=m(t)e^{-m(t)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(m(t))^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=m(t)e^{-m(t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m(t))^k}{k!}$$

$$=m(t)e^{-m(t)}e^{m(t)}$$

$$=m(t)$$

Για την απόδειξη της (ii) έχουμε,

$$Var\big(N(t)\big) = E(N(t)^2) - (E\big(N(t)\big)^2$$

$$EN(t)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(N(t) = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-m(t)} m(t)^k}{k!}$$

$$= e^{-m(t)} m(t) \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{m(t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-m(t)} m(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\big(m(t)\big)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(m(t)\big)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

$$= e^{-m(t)} m(t) \left[\mathrm{m(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(m(t)\big)^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(m(t)\big)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

$$= e^{-m(t)} m(t) (m(t) e^{m(t)} + e^{m(t)}$$

$$= m(t)^2 + m(t)$$

$$Var\big(N(t)\big) = m(t)^2 + m(t) - m(t)^2 = m(t)$$

■

Παρατήρηση: Αν η λ(t) έχει ρίζα στο $t=t_0$ και είναι μονότονη στο (α,β) και $α+β=2t_0$ τότε,

$$P(N(a,b) = k) = 0$$

1.3 Χρόνοι άφιξης

Όπως και στην συνήθη διαδικασία Poisson έτσι και εδώ υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ της ακολουθίας των ανανεώσεων N = {N(t) , tϵ[0, ∞)} και των χρόνων αφίξεων S = {Sn , n ∈ N}.

$$\{S_n < t\} = \{N(t) > n\}$$

Συνηθίζεται η συνάρτηση m να καλείται μέση τιμή και m'(t)=λ(t) (αν r συνεχής στο t) συνάρτηση ρυθμού.

$$E\big(N(t)\big) = Var\big(N(t)\big) = m(t) \qquad ,t \geq 0$$

Πρόταση 1.3.1

Η συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας της τ.μ. S είναι ,

$$f_i(t) = \frac{m^{i-1}(t)}{(i-1)!}\lambda(t)e^{-m(t)}$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι,

$$P(S_i \leq t) = P(N(t) \geq i) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{e^{-m(t)}m(t)^k}{k!}$$

Παίρνω την παράγωγο ως προς t,

$$f_i(t) = \sum_{k=i}^{\infty}\left[-m'(t)\frac{e^{-m(t)}m(t)^k}{k!} + \frac{e^{-m(t)}km(t)^{k-1}m'(t)}{k!}\right]$$

$$= \lambda(t)e^{-m(t)}\sum_{k=i}^{\infty}\left[\frac{m(t)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{m(t)^k}{k!}\right]$$

Όπου η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{m(t)^{i-1}}{(i-1)!}$$

■

Συγκεκριμένα για S_1 πού είναι ο χρόνος μέχρι τη πρώτη ανανέωση,

$$f_1(t) = \lambda(t)e^{-m(t)}$$

1.4 Simulation Μη Ομογενούς Διαδικασίας Poisson

Το simulation θα γίνει με την R με χρήση της εντολής «nhpp» η οποία δίνει ως αποτέλεσμα την ακολουθία S_n,με την μέθοδο thinning των P. A. W. Lewis και G. S. Shedler.

Προϋπόθεση για αυτόν τον αλγόριθμο είναι η $\lambda(t)$ να είναι άνω φραγμένη δηλαδή να υπάρχει $\lambda^*(t)$ $\tau.\omega.$ $\lambda(t) \leq \lambda^*(t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Όταν αυτή η σχέση ικανοποιείται, μπορούμε να ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο thinning των Lewis και Shedler:

0) Αρχικοποιούμε t=0
1) Παράγουμε $u_1 \sim U(0,1)$
2) Θέτουμε $t \leftarrow t - \frac{1}{\lambda^*} log u_1$
3) Παράγουμε $u_2 \sim U(0,1)$ ανεξάρτητο του u_1.
4) Αν το $u_2 < \frac{\lambda(t)}{\lambda^*}$ τύπωσε t
5) Πήγαινε στο βήμα 1

Παρατήρηση: Καθώς λ*(t) προσεγγίζει το λ(t) η πιθανότητα να δεχτούμε το u_2 αυξάνεται. Συνεπώς συνήθως διαλέγουμε ως λ*(t) (ή λ*) το supremum του λ(t).

Στα παρακάτω παραδείγματα η θα έχουμε ως αποτέλεσμα την ακολουθία Sn , με n=1,2,…,10 , η οποία θα προκύψει από μια ομογενή διαδικασία Poisson με ρυθμό λ* .

Για συνάρτηση έντασης $\lambda(t) = e^{(a+bt)}$:

```
> #a=0,b=-1
> intensity <-function(t) exp(-t)
> nhpp.sim(1,10,intensity,1,0,T)
 [1]  0.000000  1.800329 20.229451 20.446562 20.598898 24.654718
 [7] 24.708694 26.839505 27.204002 28.611498 28.704069
```

```
 #a=1,b=-3
 intensity <-function(t) exp(1-3*t)/exp(1)
 nhpp.sim(exp(1),10,intensity,1,0,T)
[1] 0.000000 6.533424 6.684803 6.903819 6.993953 7.032508 7.562102
[8] 7.785660 8.865398 8.898893 8.963232
```

Για συνάρτηση έντασης $\lambda(t) = a^{-b}bt^{b-1}$:

```
 #a=-1,b=-3
 intensity<-function(t) (3/t**(4))/3
 nhpp.sim(3,10,intensity,1,1,T)
[1]  1.000000  1.102848  1.183223  9.155322  9.499357  9.771713
[7]  9.904011  9.963911 10.365414 10.526921 10.551533
```

```
 #a=-1,b=-5
 intensity<-function(t) (5/t**(6))/5
 nhpp.sim(5,10,intensity,1,1,T)
[1] 1.000000 1.180731 5.989979 6.097111 6.237944 6.663516 6.934465
[8] 6.961071 7.090493 7.357088 7.555999
```

Βιβλιογραφία:

Ross, S. M. (1996). Stochastic Processes Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., University of California, Berkeley

Μαγγίρα O. (2015). Συζευγμένα μοντέλα απελευθέρωσης τάσης και ροπής. εφαρμογή για την εκτίμηση της σεισμικής επικινδυνότητας στον κορινθιακό κόλπο. Μη Δημοσιευμένη Μεταπτυχιακή Διατριβή. Α.Π.Θ Τμήμα Μαθηματικών

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods.
http://www.itl.nist.gov/div898/handbook (μετάβαση 31Οκτωβρίου 2020)

Lewis, P. A. W. and. Shedler, G. S. (1978). SIMULATION OF NONHOMOGENEOUS POISSON PROCESSES BY THINNING. Naval postgraduate school, Monterey, California