

# Решение задач

27 мая 2025 г.

## 1 Задача: Скалярное произведение

### 1.1 Исходные данные

$(1, 2, 3); (4, 5, 6)$

### 1.2 Решение

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 1 \times 4 + \\ &+ 2 \times 5 + \\ &+ 3 \times 6 = \\ &= 4 + 10 + 18 \\ &= 32\end{aligned}$$

## 2 Задача: Векторное произведение

### 2.1 Исходные данные

$(1, 0, 0); (0, 1, 0)$

### 2.2 Решение

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(0 \times 0 - 0 \times 1) \\ &- \mathbf{j}(1 \times 0 - 0 \times 0) \\ &+ \mathbf{k}(1 \times 1 - 0 \times 0) \\ &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

### 3 Задача: Смешанное произведение

#### 3.1 Исходные данные

$(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3)$

#### 3.2 Решение

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \cdot (3, 3, 3) \\ &= (0 \times 3) + (0 \times 3) + (0 \times 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

### 4 Задача: Арифметические операции над векторами

#### 4.1 Исходные данные

$+ : 3; (1, 4, 1); (6, 2, 2); (5, 3, 8)$

#### 4.2 Решение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= (1, 4, 1) + (6, 2, 2) \\ &= (7, 6, 3) \end{aligned}$$

### 5 Задача: Модуль вектора

#### 5.1 Исходные данные

$(1, 2, 3)$

#### 5.2 Решение

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{14} \\ &= 3,7416573867739413 \end{aligned}$$

## 6 Задача: Процесс ортогонализации

### 6.1 Исходные данные

3:(0, 1, 0);(2, 0, 2);(2, 3, 1)

### 6.2 Решение

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)} \mathbf{u}_1 \\ &= (2, 0, 2) - \frac{0}{1} (0, 1, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= (2, 0, 2) \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)} \mathbf{u}_1 \\ &= (2, 3, 1) - \frac{3}{1} (0, 1, 0) \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2)} \mathbf{u}_2 \\ &= (2, 3, 1) - \frac{6}{8} (2, 0, 2) \\ \mathbf{u}_3 &= (0, 5, 0, -0, 5)\end{aligned}$$

Результат ортогонализации:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= (2, 0, 2) \\ \mathbf{u}_3 &= (0, 5, 0, -0, 5)\end{aligned}$$

## 7 Задача: Арифметические операции над матрицами

### 7.1 Исходные данные

\*:[(1, 2, 2) , (2, 3, 4)]; [(1, 2) , (1, 2), (3, 4)]

## 7.2 Решение

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 4 \\ 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 3 \\ 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix} \text{text} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 17 & 26 \end{pmatrix}$$

## 8 Задача: Арифметические операции над матрицами

### 8.1 Исходные данные

\*:[(1, 2, 2) , (2, 3, 4)]; 2

### 8.2 Решение

$$2 \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

## 9 Задача: Определитель матрицы

### 9.1 Исходные данные

[(1, 2) , (2, 3)]

### 9.2 Решение

$$1 \times 3 + 2 \times 2 - \det(\mathbf{A}) = -1$$

## 10 Задача: Обратная матрица

### 10.1 Исходные данные

[(1, 2) , (2, 3)]

## 10.2 Решение

$$\det(\mathbf{A}) = -1$$

Присоединённая матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ Проверка } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 11 Задача: Ранг матрицы

### 11.1 Исходные данные

[(1, 2, 2) , (2, 3, 4)]

### 11.2 Решение

Исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Приводим к ступенчатому виду:

Меняем строки 1 и 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Обнуляем строку 2 с помощью строки 1 (множитель 0,5):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы = 2

## 12 Задача: Размер линейной оболочки

### 12.1 Исходные данные

3:(0, 1, 0);(2, 0, 2);(2, 3, 1)

## 12.2 Решение

Матрица из векторов (по столбцам):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Размер линейной оболочки = 3

## 13 Задача: Принадлежность линейной оболочке

### 13.1 Исходные данные

2: (0, 1, 0); (2, 0, 2); (2, 3, 1)

### 13.2 Решение

Проверяем принадлежность вектора  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  линейной оболочке

Векторы оболочки:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор не принадлежит линейной оболочке

## 14 Задача: Решение СЛАУ

### 14.1 Исходные данные

Жордан: [(2, 1), (1, 3)]; [(4), (5)]

## 14.2 Решение

Расширенная матрица системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Метод Жордана-Гаусса:

Нормируем строку 1 (делим на 2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычитаем строку 1 умноженную на 1 из строки 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}$$

Нормируем строку 2 (делим на 2,5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Вычитаем строку 2 умноженную на 0,5 из строки 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,4 \\ 0 & 1 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Решение системы:

$$x_1 = 1,4$$

$$x_2 = 1,2$$

## 15 Задача: Собственные числа

### 15.1 Исходные данные

$$[(2, 1), (1, 3)]$$

### 15.2 Решение

Характеристическое уравнение:  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

Используем QR-алгоритм для нахождения собственных чисел

Собственные числа:

$$\lambda_1 \approx 3,618$$

$$\lambda_2 \approx 1,382$$

## 16 Задача: Собственные векторы

### 16.1 Исходные данные

$[(2, 1), (1, 3)]$

### 16.2 Решение

Найденные собственные числа:

$$\lambda_1 = 3,618$$

$$\lambda_2 = 1,382$$

Соответствующие собственные векторы:

Для  $\lambda_1 = 3,618$ :

$$\begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix}$$

Для  $\lambda_2 = 1,382$ :

$$\begin{pmatrix} -0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix}$$

## 17 Задача: Уравнения прямой на плоскости

### 17.1 Исходные данные

1; 2; 3

### 17.2 Решение

Исходное уравнение прямой:  $1x + 2y + 3 = 0$

Уравнение с угловым коэффициентом:  $y = -0,5x + 1,5$

Каноническое уравнение:  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = t$

## 18 Задача: Точка пересечения прямых

### 18.1 Исходные данные

1; 2; 3; 2;3;4



## 18.2 Решение

Уравнения прямых:  $1 : 1x + 2y + 3 = 0$

$2 : 2x + 3y + 4 = 0$

Точка пересечения:  $(1, -2)$

## 19 Задача: Расстояние от точки до прямой

### 19.1 Исходные данные

$(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3)$

### 19.2 Решение

Прямая задана точкой  $\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и направляющим вектором  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Точка  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Расстояние:  $d = \frac{|\mathbf{P}_0\mathbf{P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = 0$

## 20 Задача: Симметричная точка относительно прямой

### 20.1 Исходные данные

$(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3)$

## 20.2 Решение

$$\text{Исходная точка } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Проекция точки: } \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Симметричная точка: } \mathbf{P}'' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 21 Задача: Уравнения плоскости

### 21.1 Исходные данные

1;2;3;4

### 21.2 Решение

Общее уравнение плоскости:  $1x + 2y + 3z + 4 = 0$

Уравнение в отрезках:  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1,333} = 1$

Нормальное уравнение:  $\frac{1x + 2y + 3z + 4}{3,742} = 0$

## 22 Задача: Уравнения прямой в n-мерном пространстве

### 22.1 Исходные данные

(1, 1, 1);(2, 2, 2)

## 22.2 Решение

Параметрические уравнения прямой:

$$x_1 = 1 + 2t$$

$$x_2 = 1 + 2t$$

$$x_3 = 1 + 2t$$

Канонические уравнения:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$

## 23 Задача: Пересечение плоскостей

### 23.1 Исходные данные

$$1; 2; 3; 4; 1; 2; 3; 4$$

### 23.2 Решение

Уравнения плоскостей: 1 :  $1x + 2y + 3z + 4 = 0$

2 :  $1x + 2y + 3z + 4 = 0$

Прямая пересечения: Параметрические уравнения:  $x = 0 + 0t$

$$y = 0 + 0t$$

$$z = 0 + 0t$$

Канонические уравнения:  $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$

## 24 Задача: Проекция прямой на плоскость

### 24.1 Исходные данные

$$4; 1; 2; 3; (1, 1, 1); (2, 2, 2)$$

## 24.2 Решение

Уравнение плоскости:  $4x + 1y + 2z + 3 = 0$

Исходная прямая:  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Проекция прямой:  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -0,429 \\ -0,429 \\ -0,429 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0,667 \\ 1,333 \\ 0,667 \end{pmatrix}$