I_3. *Существует число, обозначаемое* 0 *и называемое нулем, такое, что для любого числа* a

$$a + 0 = a.$$

I_4. *Для любого числа* a *существует число, обозначаемое* $-a$ *и называемое противоположным данному, такое, что*

$$a + (-a) = 0.$$

II. Операция умножения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab (или $a \cdot b$), так что при этом имеют место следующие свойства.

II_1. *Для любой пары чисел* a *и* b

$$ab = ba.$$

Это свойство называется *переместительным* или *коммутативным законом умножения.*

II_2. *Для любых чисел* a, b, c

$$a(bc) = (ab)c.$$

Это свойство называется *сочетательным* или *ассоциативным законом умножения.*

II_3. *Существует число, обозначаемое* 1 *и называемое единицей, такое, что для любого числа* a

$$a \cdot 1 = a.$$

II_4. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует число, обозначаемое* $1/a$ *или* $\frac{1}{a}$ *и называемое обратным данному, такое, что*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. Связь операций сложения и умножения. *Для любых чисел* a, b, c

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Это свойство называется *распределительным* или *дистрибутивным законом умножения* относительно сложения.

IV. Упорядоченность. *Для каждого числа* a *определено одно из соотношений* $a > 0$ *(*a *больше нуля),* $a = 0$

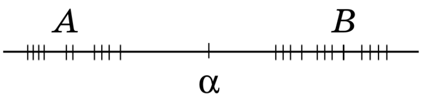

Рис. 2

(a равно нулю) или $a < 0$ (a меньше нуля) так, что условие $a > 0$ равносильно условию $-a < 0$.

При этом если $a > 0$, $b > 0$, то имеют место неравенства:

IV$_1$. $a + b > 0$.

IV$_2$. $ab > 0$.

Свойство IV дает возможность ввести понятие сравнения или, как иногда говорят, сравнения по величине для любых двух чисел.

Число b называют числом, бо́льшим числа a, и пишут $b > a$, или, что то же самое, число a называют меньшим числа b и пишут $a < b$, если $b - a > 0$.

Наличие сравнения «больше» или «меньше» для любой пары действительных чисел называется *свойством упорядоченности множества всех действительных чисел.*

Действительные числа обладают еще так называемым свойством непрерывности.

V. С в о й с т в о н е п р е р ы в н о с т и. *Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \boldsymbol{R}$ и $B \subset \boldsymbol{R}$, у которых для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$, существует такое число α, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место* (рис. 2) *соотношение*

$$a \leqslant \alpha \leqslant b.$$

Свойство непрерывности действительных чисел связано с самым простейшим использованием математики на практике — с измерением величин. При измерении какой-либо физической или какой-нибудь другой природы величины часто получают с большей или меньшей точностью ее приближенные значения. Если в результате экспериментального измерения данной величины получается ряд чисел, дающих значение искомой величины с недостатком (они играют роль множества в приведенной выше формулировке свойства непрерывности) и с избытком (множество), то свойство непрерывности действительных чисел выражает объективную уверенность в том, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и избытком.

Из свойств I—V действительных чисел вытекают другие многочисленные их свойства, поэтому можно сказать, что действительные числа представляют собой совокупность элементов, обладающую свойствами I—V.