2) множество номеров $n > n_\varepsilon$, т.ч. $|a_n - a| \geq \varepsilon$ конечно или пусто. Пусть n'_ε — наибольший из этих номеров, если такие номера имеются, и $n'_\varepsilon = n_\varepsilon$ в противном случае. Тогда $\forall n > n'_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$, т.е. с увеличением номеров n члены последовательности (a_n) могут только приблизиться к a.

Итак, если для последовательности (a_n) для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ выполняется пункт 1), то естественно считать, что (a_n) не стремится к a при возрастании n. Если же $\forall\varepsilon > 0$ наблюдается ситуация, описываемая в пункте 2), то это вполне согласуется с представлениями о стремлении a_n к a. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 2. *Последовательность* (a_n) *сходится (стремится) к числу a при $n \to +\infty$, если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$. *При этом пишут* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, *или $a_n \to a$ при $n \to +\infty$.*

Переформулируем определение предела в терминах окрестностей:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{т.ч. } \forall n > n_\varepsilon : a_n \in U(a, \varepsilon).$$

Значит, последовательность (a_n) сходится к a тогда и только тогда, когда в любой заданный интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера n_ε+1. А тогда вне любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ может находиться лишь конечное число членов последовательности. Верно и обратное, что если вне произвольной ε-окрестности числа a имеется лишь конечное число членов последовательности (это число зависит от рассматриваемой окрестности), то a является пределом последовательности.

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$. Для $\varepsilon < 2$ в окрестностях $U(\pm1, \varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности, но и вне их также находится бесконечно много членов последовательности. Следовательно, -1 и 1 не могут быть пределами рассматриваемой последовательности. Далее, у любого числа $a \neq \pm1$ легко построить окрестность, не содержащую ни одного члена данной последовательности: достаточно взять $\varepsilon \doteq \min(|a-1|, |a+1|)$. Значит, никакое действительное число не является пределом исследуемой последовательности.

Дадим определение стремления последовательности к $-\infty$, $+\infty$ и ∞. Для этого в окрестном определении предела надо заменить