

Лабораторная работа №4.

Линейная фильтрация полей.

Отфильтруем поле, заданное следующими значениями:

Таблица 1– Случайная функция

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F(x)	-4,36	6,36	8,36	6,36	-7,44	13,86	4,81	5,82	3,85	5,48	1,8	-7,32	-7,25	-2,27	-8,82

x	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
F(x)	-5,32	-11,83	-10,28	-10,86	-13,88	-11,12	-7,15	12,62	17,18	10,12	5,18	-5,29	-3,92	-6,26

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
F(x)	-6,72	5,38	3,81	4,22	5,32	6,28	12,25	5,66	14,28	13,27	-9,4	-6,23	-6,4

Вычислим математическое ожидание:

$$M[F] = \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i)}{n} = \frac{-4,36 + 6,36 + 8,36 + 6,36 + \dots - 6,23 - 6,4}{42} = 0,48$$

Вычислим дисперсию (автоковариационная функция для сдвига $\theta = 0$):

$$D[F] = \frac{\sum_{j=1}^n (F(x_j) - M[F])^2}{N - 1} = \frac{(-4,38 - (0,48))^2 + (6,36 - (0,48))^2 + \dots + (-6,4 - (0,48))^2}{42 - 1} = 71,18$$

Вычислим автоковариационную функцию:

$$K_F(\theta) = \frac{\sum_{j=1}^{n-\theta} (F(x_j) - M[F])(F(x_{j-\theta}) - M[F])}{N - \theta - 1}$$

И автокорреляционную функцию:

$$r_F(\theta) = \frac{K_F(\theta)}{D[F]}$$

θ – сдвиг функции относительно самой себя

Построим автокорреляционную функцию по значениям r_F . со сдвигами

$\theta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

1) Пусть $\theta = 0$. тогда

$$K_F(0) = D[F] = 71,18$$

$$r_F(0) = \frac{K_F(0)}{D[F]} = \frac{71,18}{71,18}$$

2) Пусть $\theta = 1$ тогда:

Таблица 2 – Вспомогательная таблица расчетов для $\theta = 1$

$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$F(x_i) - M(F)$	$F(x_{i+1}) - M(F)$	$(F(x_i) - M(F)) * F(x_{i+1}) - M(F)$
-4,36	6,36	-4,84	5,88	-28,46
6,36	8,36	5,88	7,88	46,34
8,36	6,36	7,88	5,88	46,34
6,36	-7,44	5,88	-7,92	-46,57
-7,44	13,86	-7,92	13,38	-105,97
13,86	4,81	13,38	4,33	57,94
4,81	5,82	4,33	5,34	23,12
5,82	3,85	5,34	3,37	18,00
3,85	5,48	3,37	5,00	16,85
5,48	1,8	5,00	1,32	6,60
1,8	-7,32	1,32	-7,80	-10,30
-7,32	-7,25	-7,80	-7,73	60,29
-7,25	-2,27	-7,73	-2,75	21,26
-2,27	-8,82	-2,75	-9,30	25,57
-8,82	-5,32	-9,30	-5,80	53,94
-5,32	-11,83	-5,80	-12,31	71,39
-11,83	-10,28	-12,31	-10,76	132,45
-10,28	-10,86	-10,76	-11,34	122,01
-10,86	-13,88	-11,34	-14,36	162,84
-13,88	-11,12	-14,36	-11,60	166,57
-11,12	-7,15	-11,60	-7,63	88,50
-7,15	12,62	-7,63	12,14	-92,63
12,62	17,18	12,14	16,70	202,74
17,18	10,12	16,70	9,64	160,99
10,12	5,18	9,64	4,70	45,31
5,18	-5,29	4,70	-5,77	-27,12
-5,29	-3,92	-5,77	-4,40	25,39
-3,92	-6,26	-4,40	-6,74	29,65
-6,26	-6,72	-6,74	-7,20	48,52
-6,72	5,38	-7,20	4,90	-35,28
5,38	3,81	4,90	3,33	16,32

1	2	3	4	5
3,81	4,22	3,33	3,74	12,46
4,22	5,32	3,74	4,84	18,10
5,32	6,28	4,84	5,80	28,07
6,28	12,25	5,80	11,77	68,27
12,25	5,66	11,77	5,18	60,97
5,66	14,28	5,18	13,80	71,49
14,28	13,27	13,80	12,79	176,51
13,27	-9,4	12,79	-9,88	-126,36
-9,4	-6,23	-9,88	-6,71	66,29
-6,23	-6,4	-6,71	-6,88	46,16

$$K_F(1) = \frac{\sum_{i=1}^{n-\theta} (F(x_{i-\theta}) - M[F])(F_{x_i} - M[F])}{(N - \theta - 1)} = \frac{-28,46 + 46,34 + \dots + 66,29 + 46,16}{42 - 1 - 1} = 39,06$$

$$K_F(1) = 39,06; \quad r_F(1) = \frac{39,06}{71,18} = 0,68$$

3) Пусть $\theta = 2$ тогда:

Таблица 3 – Вспомогательная таблица расчетов для $\theta = 2$

$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$F(x_i) - M(F)$	$F(x_{i+1}) - M(F)$	$(F(x_i) - M(F)) * F(x_{i+1}) - M(F)$
-4,36	8,36	-4,84	7,88	-38,14
6,36	6,36	5,88	5,88	34,58
8,36	-7,44	7,88	-7,92	-62,41
6,36	13,86	5,88	13,38	78,68
-7,44	4,81	-7,92	4,33	-34,29
13,86	5,82	13,38	5,34	71,45
4,81	3,85	4,33	3,37	14,59
5,82	5,48	5,34	5,00	26,70
3,85	1,8	3,37	1,32	4,45
5,48	-7,32	5,00	-7,80	-39,00
1,8	-7,25	1,32	-7,73	-10,21
-7,32	-2,27	-7,80	-2,75	21,45
-7,25	-8,82	-7,73	-9,30	71,88
-2,27	-5,32	-2,75	-5,80	15,95
-8,82	-11,83	-9,30	-12,31	114,48

1	2	3	4	5
-5,32	-10,28	-5,80	-10,76	62,40
-11,83	-10,86	-12,31	-11,34	139,59
-10,28	-13,88	-10,76	-14,36	154,51
-10,86	-11,12	-11,34	-11,60	131,54
-13,88	-7,15	-14,36	-7,63	109,56
-11,12	12,62	-11,60	12,14	-140,82
-7,15	17,18	-7,63	16,70	-127,42
12,62	10,12	12,14	9,64	117,03
17,18	5,18	16,70	4,70	78,50
10,12	-5,29	9,64	-5,77	-55,62
5,18	-3,92	4,70	-4,40	-20,68
-5,29	-6,26	-5,77	-6,74	38,89
-3,92	-6,72	-4,40	-7,20	31,68
-6,26	5,38	-6,74	4,90	-33,03
-6,72	3,81	-7,20	3,33	-23,98
5,38	4,22	4,90	3,74	18,33
3,81	5,32	3,33	4,84	16,12
4,22	6,28	3,74	5,80	21,69
5,32	12,25	4,84	11,77	56,97
6,28	5,66	5,80	5,18	30,05
12,25	14,28	11,77	13,80	162,43
5,66	13,27	5,18	12,79	66,26
14,28	-9,4	13,80	-9,88	-136,34
13,27	-6,23	12,79	-6,71	-85,82
-9,4	-6,4	-9,88	-6,88	67,97

$$K_F(2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-\theta} (F_{(x_i-\theta)} - M[F])(F_{x_i} - M[F])}{(N - \theta - 1)} = \frac{(-38,14) + 34,58 + \dots + (-85,82) + 67,97}{42 - 1 - 1} = 19,62$$

$$K_F(2) = 19,62; \quad r_F(1) = \frac{19,62}{71,18} = 0,28$$

4) Сдвигая функцию в дальнейшем на $\theta = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ получим последующие значения функций:

θ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_F(\theta)$	71,18	39,06	19,62	1,96	-9,05	-15,70	-20,57	-13,43	-12,53	-22,44	-17,54
$r_F(\theta)$	1,00	0,55	0,28	0,03	-0,13	-0,22	-0,29	-0,19	-0,18	-0,32	-0,25

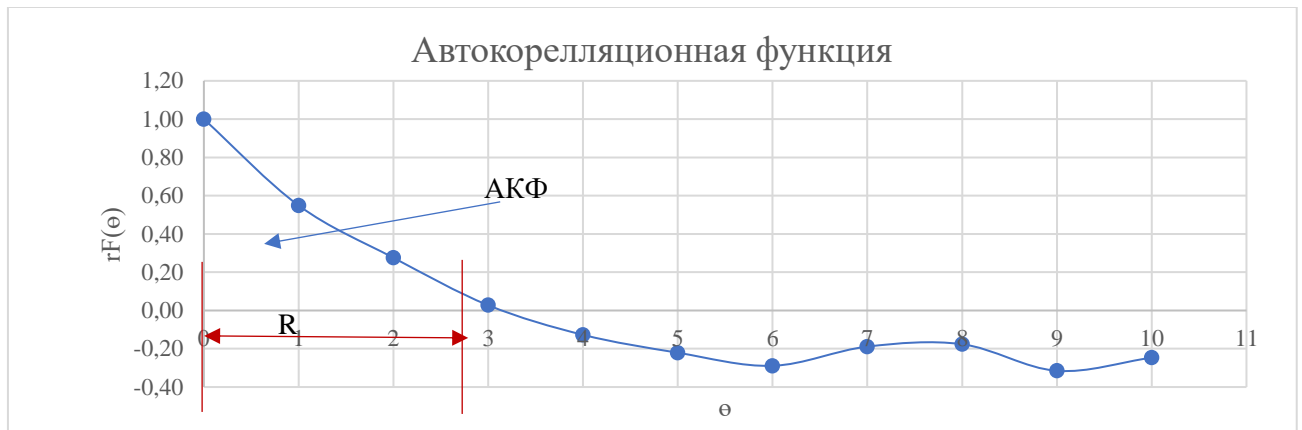


Рис.1 – Автокорреляционная функция

По графику автокорреляционной функции определим ширину окна L , а далее построим сглаженное значение функции.

Исходя из графика, найдём радиус корреляции $R \approx 3,2$, $2R = 6,4$
 За длину окна L примем целое нечетное число $L < 2R$ и нечетное: $L = 5$

$$\tilde{F}(x_j) = M[F(x)] = \frac{\sum_{j=1}^L F(x_j)}{L}$$

Перемещая интервал вдоль оси x , каждый раз подсчитывая среднее значение, внутри интервала, получим отфильтрованное поле. Рассмотренный метод носит название скользящего среднего или среднего окна.

Отфильтруем поле на оси x : $\frac{1+5}{2} = 3$

$$\tilde{F}(3) = \frac{-4,36 + 6,36 + 8,36 + 6,36 - 7,44}{5} = 1,86$$

$$\tilde{F}(4) = \frac{6,36 + 8,36 + 6,36 - 7,44 + 13,86}{5} = 5,5$$

$$F_{(40)} = \frac{14,28 + 13,27 - 9,4 - 6,23 - 6,4}{5} = 1,1$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F(x)	-4,36	6,36	8,36	6,36	-7,44	13,86	4,81	5,82	3,85	5,48	1,8	-7,32	-7,25	-2,27	-8,82	-5,32	-11,83	-10,28	-10,86	-13,88	-11,12
$\tilde{F}(x)$			1,86	5,5	5,19	4,68	4,18	6,76	4,35	1,93	-0,69	-1,91	-4,77	-6,2	-7,1	-7,7	-9,42	-10,43	-11,59	-10,66	-6,08

X	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
F(x)	-7,15	12,62	17,18	10,12	5,18	-5,29	-3,92	-6,26	-6,72	5,38	3,81	4,22	5,32	6,28
$\tilde{F}(x)$	-0,47	4,33	7,59	7,96	4,65	-0,03	-3,4	-3,36	-1,54	0,09	2,4	5	6,38	6,75

X	36	37	38	39	40	41	42
F(x)	12,25	5,66	14,28	13,27	-9,4	-6,23	-6,4
$\tilde{F}(x)$	8,76	10,35	7,21	3,52	1,1		

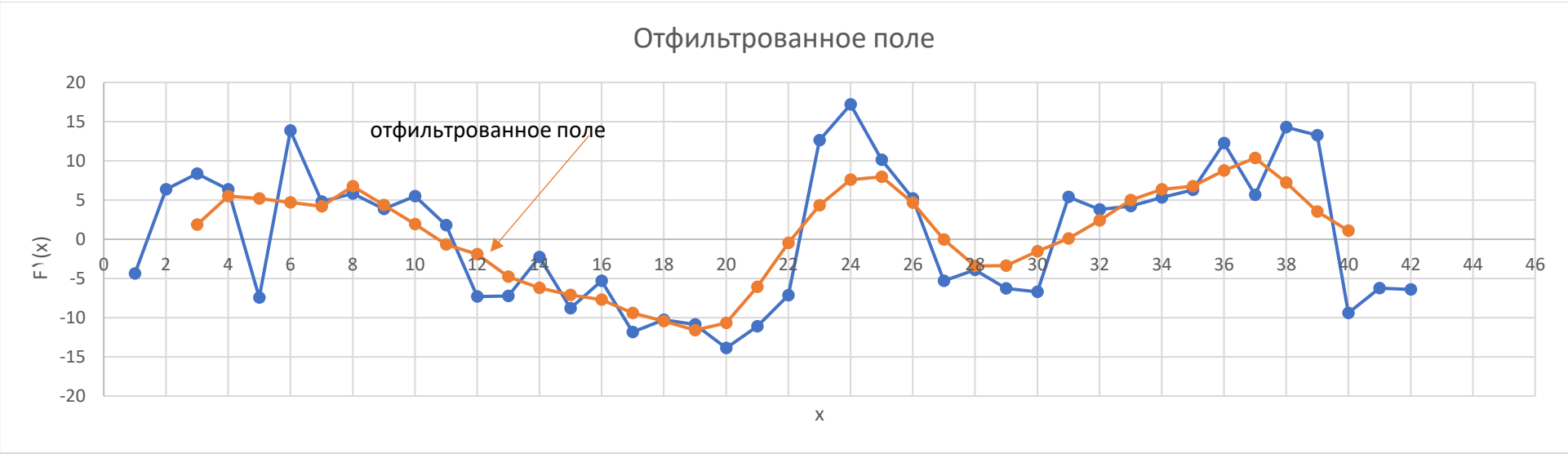


Рис. 2- Отфильтрованное поле