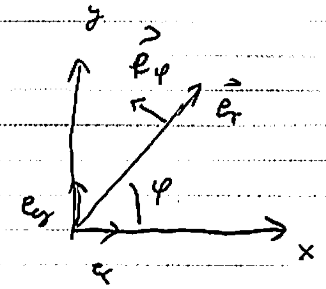
Bewegungsgleichungen

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos(\varphi) + \vec{e}_y \sin(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin(\varphi) + \vec{e}_y \cos(\varphi)$$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ \cos(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ -\sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\, \vec{e}_r$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = r\,\vec{e}_r \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Radiale Geschw. — Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_r)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ Radialkraft

$F_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$ Winkelkraft

Beispiele Radialkräfte $\vec{F}_C = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$

Rückstellkraft einer Feder $\vec{F}_r = -D\,\vec{e}_r$

Zentripetalkraft $F = -\frac{mv^2}{r}\,\vec{e}_r$

Gravitationskraft $\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r$

Potentielle Energie $V(r) = -\frac{GMm}{r}$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GMm}{r}$$

konst $\frac{dE}{dt} = 0$

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

$\frac{dL}{dt} = 0$ $\quad m\,2r\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$

$$mr\left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right] = 0$$