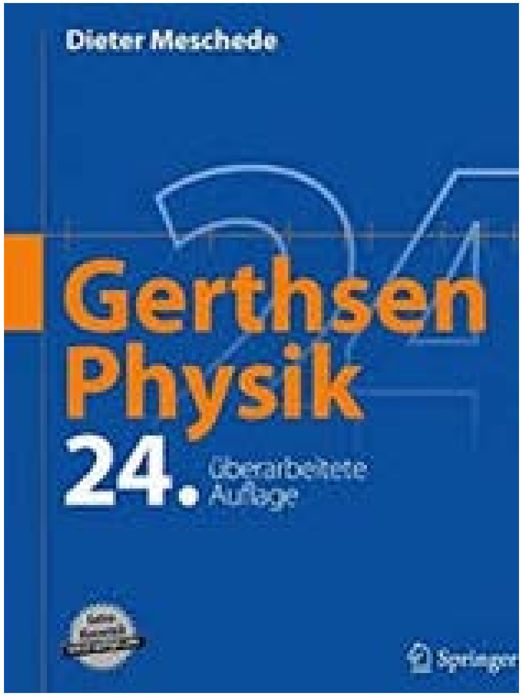
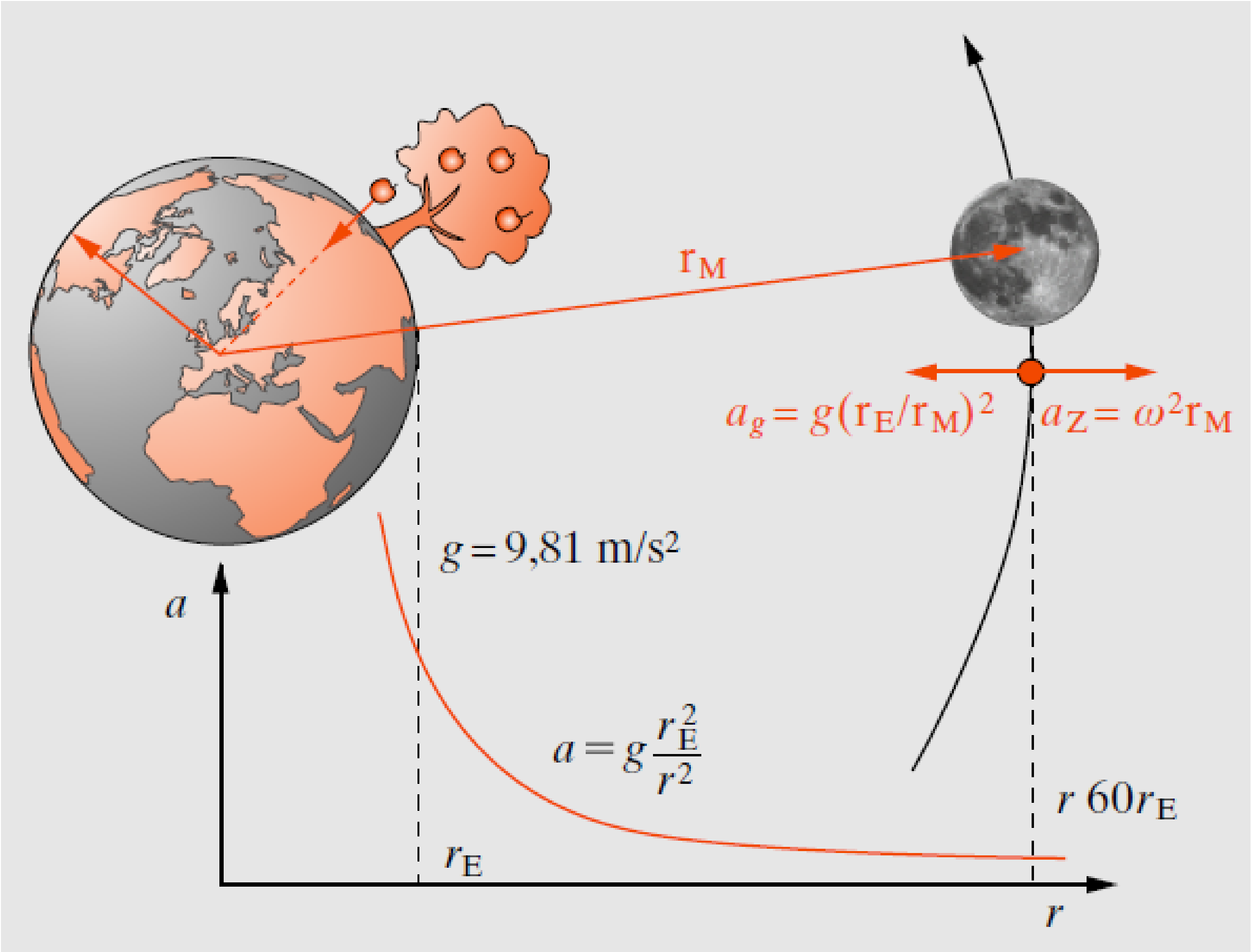
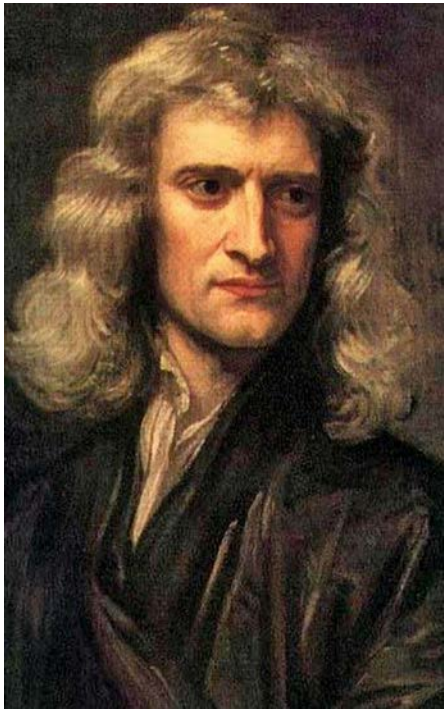
Mehrkörper-Probleme





r_M
$a_g = g(r_E/r_M)^2$
$a_Z = \omega^2 r_M$
$g = 9{,}81$ m/s²
a
$a = g\frac{r_E^2}{r^2}$
r $60r_E$
r_E
r



In seinen durch die Londoner Pestepidemie verlängerten Semesterferien 1665–1666 fand *Isaac Newton* außer dem verallgemeinerten binomischen Satz, der Differential- und Integralrechnung, der Spektralzerlegung des weißen Lichts auch das **Gravitationsgesetz**. Die Grundidee ist uns heute so geläufig geworden, dass wir ihre Genialität und Tragweite kaum noch richtig einschätzen können. Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen. Die Kraft wird von den Massen m_1 und m_2 der beiden beteiligten Körper, ihrem Abstand und vielleicht auch noch anderen Größen abhängen:

$$F = f(m_1, m_2, r, \dots) .$$

Aus dem Reaktionsprinzip folgt gleichzeitig, dass es sich um eine *beiderseitige* Anziehung handeln muss: Die Erde wird vom Apfel mit der gleichen Kraft angezogen wie umgekehrt. m_1 und m_2 müssen also in symmetrischer Weise

in die Funktion f eingehen. Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:

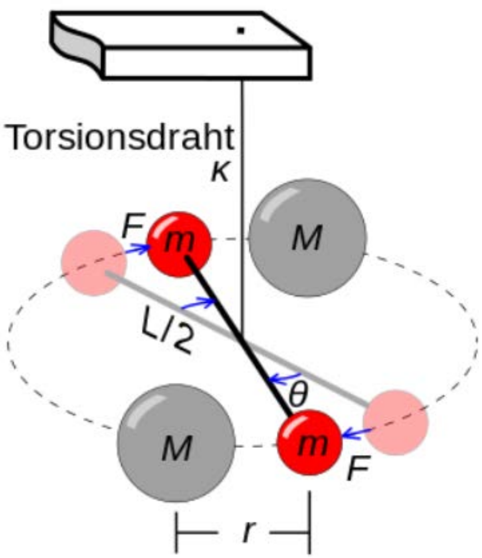
- Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m_2 des fallenden Körpers. Die zur Erklärung dieser Beschleunigung zu postulierende *Kraft* muss also proportional m_2 sein.
- Aus dem Reaktionsprinzip folgt dann, dass F auch proportional zu m_1 sein muss.

- An der Erdoberfläche, also einen Erdradius oder $r_\mathrm{E} = 6370\,\mathrm{km}$ vom Anziehungszentrum (Erdmittelpunkt) entfernt, beträgt die Schwerebeschleunigung $g \approx 10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Die Beschleunigung in dem Abstand r, wo sich der Mond befindet ($r = 60\,r_\mathrm{E}$), ergibt sich sofort aus der Kreisbahnbedingung für den Mond, d. h. der Gleichheit von Schwere- und Zentripetalbeschleunigung (vgl. (1.32), $T_\mathrm{Um} = 27{,}3$ Tage $= 2{,}36 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$):

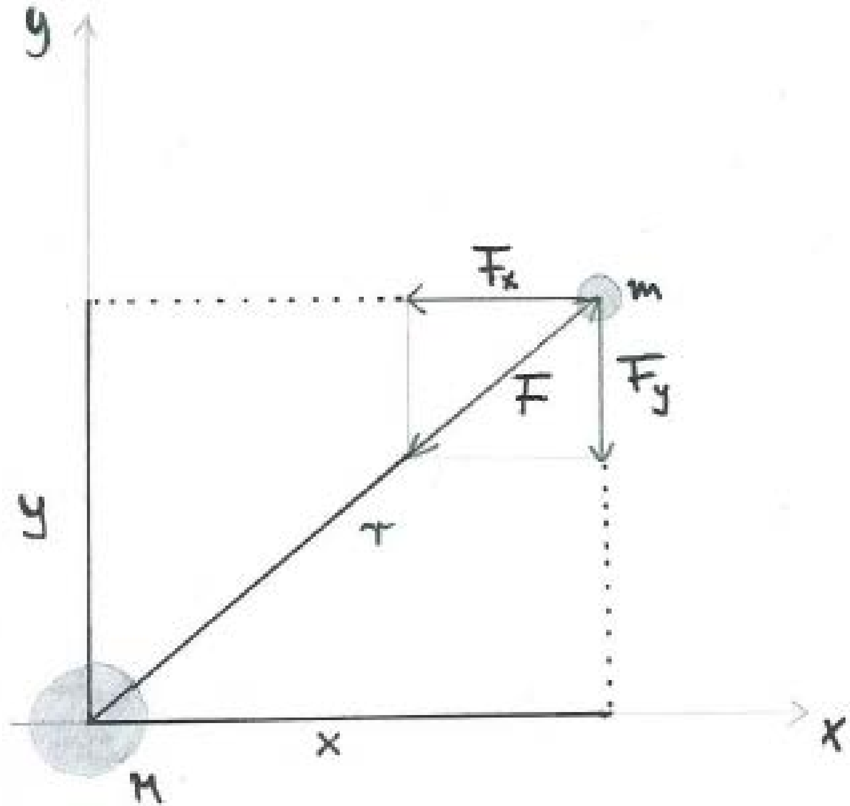
$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{Um}}\right)^2 \cdot (60 r_\mathrm{E}) = 2{,}73 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ .$$

Die Beschleunigung im Mondabstand ist also $1/3600 = 60^{-2}$ von der auf der Erdoberfläche wirkenden. Es war kühn, allein hieraus allgemein auf eine Abstandsabhängigkeit wie r^{-2} zu schließen:

$$F \sim r^{-2}\,, \quad \text{also} \quad \boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}\,,$$



$$G = (6{,}673 \pm 0{,}010) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}\,.$$

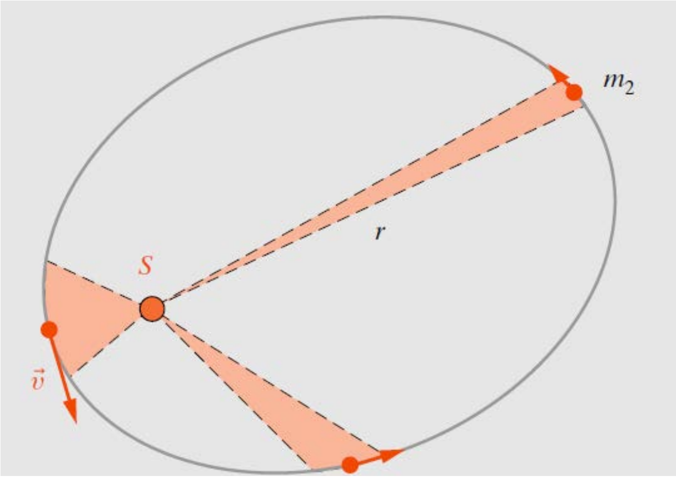


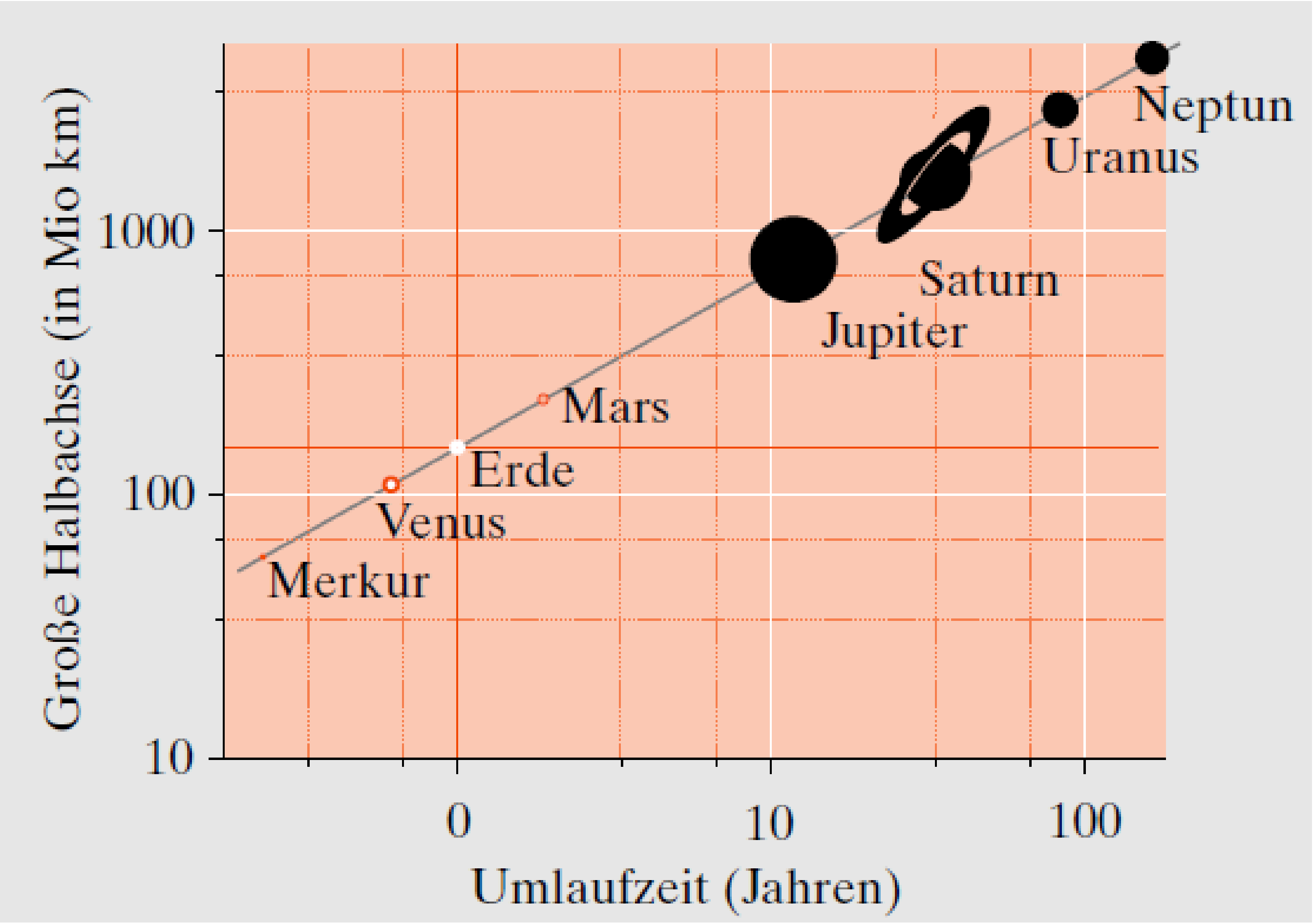
$$\boxed{\vec{F} = -m_P \frac{G m_Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}},$$

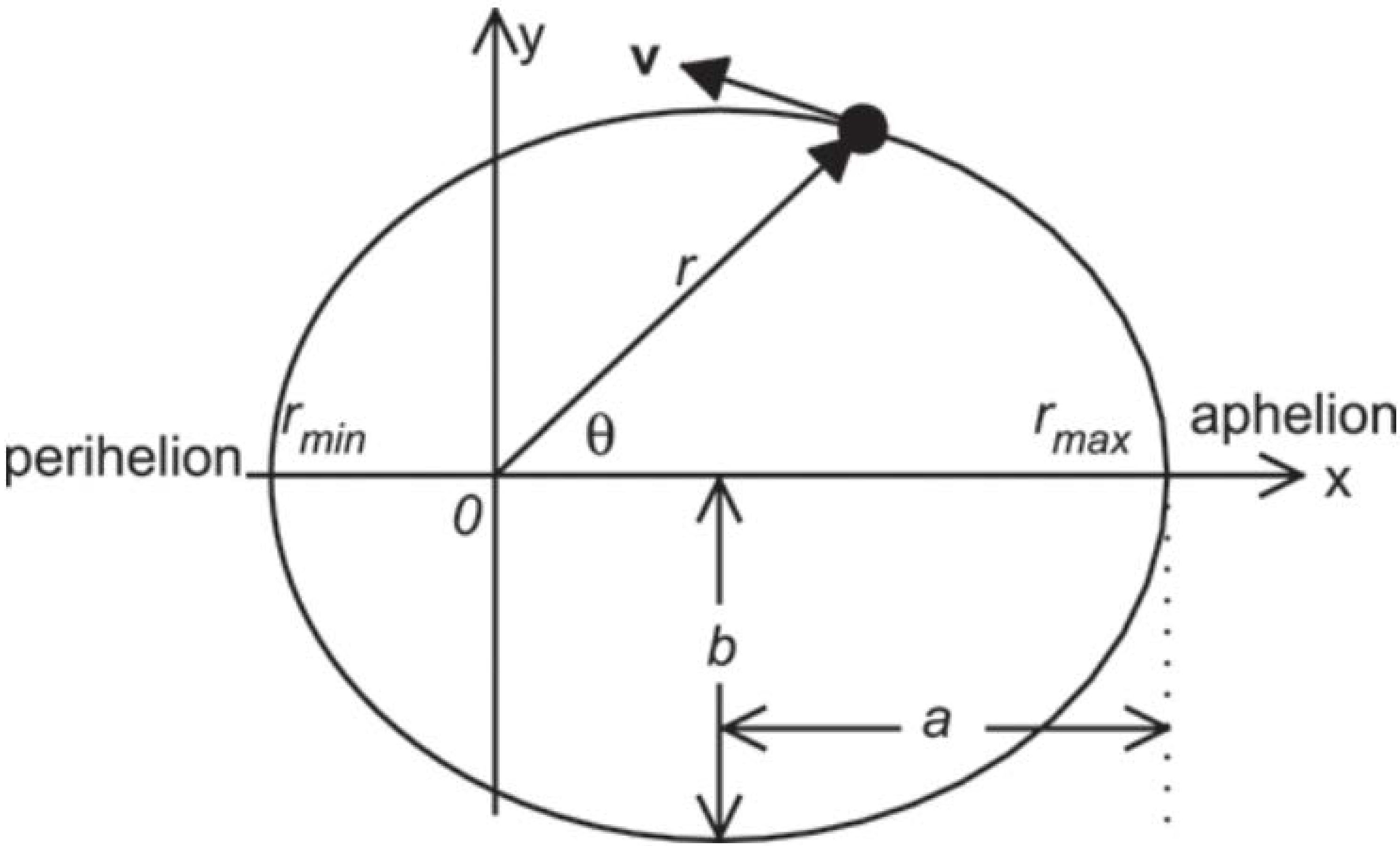
$$E_{pot}(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m_P \int_{\infty}^{r} G m_Q \frac{1}{r^2} dr = -m_P \frac{G m_Q}{r}$$

Der wichtigste Teil von Johannes Keplers (1571–1630) Lebenswerk bestand darin, aus einem ungeheuren astronomischen Beobachtungsmaterial (völlig mit bloßem Auge von Tycho Brahe gewonnen und entsprechend ungenau) seine drei Gesetze zu kondensieren:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Radiusvektor (der Fahrstrahl Sonne–Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.




Große Halbachse (in Mio km)
1000
100
10
0
10
100
Umlaufzeit (Jahren)
Merkur
Venus
Erde
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun


y
v
r
θ
perihelion
r_{min}
r_{max}
aphelion
x
0
b
a

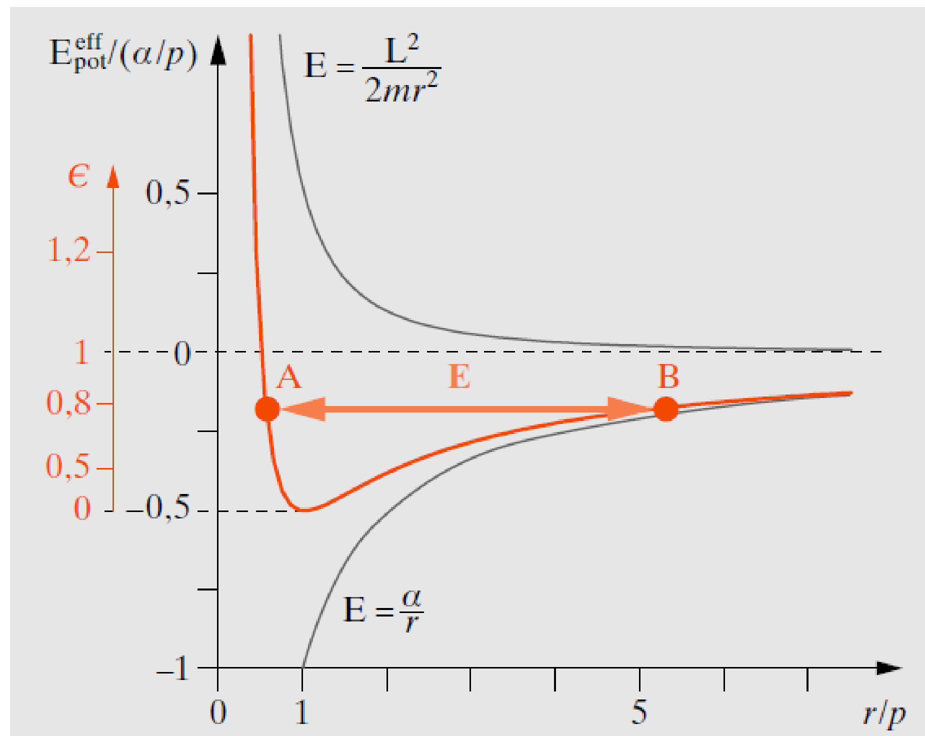
$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{\alpha}{r}$$

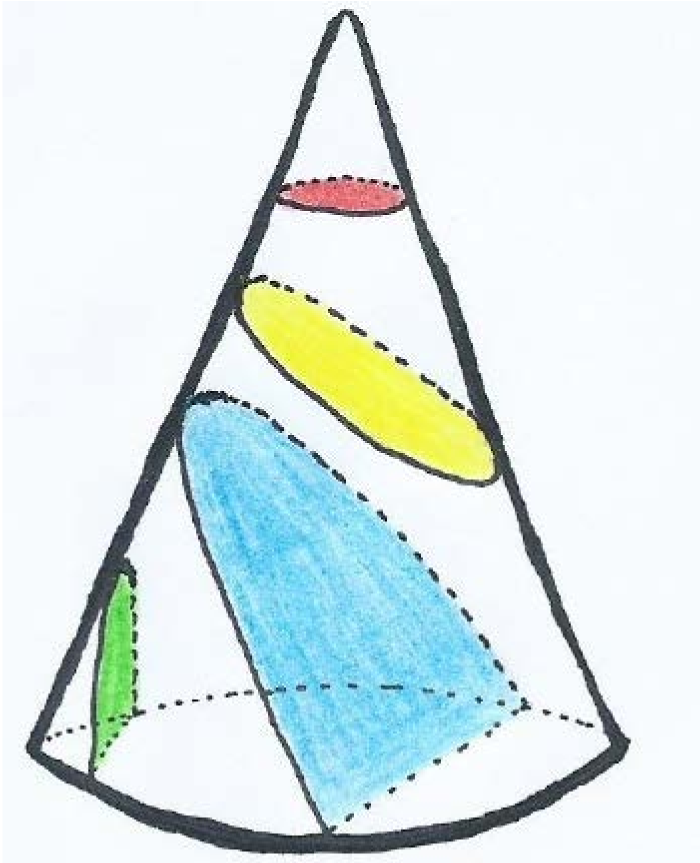
$$G \cdot M \cdot m$$

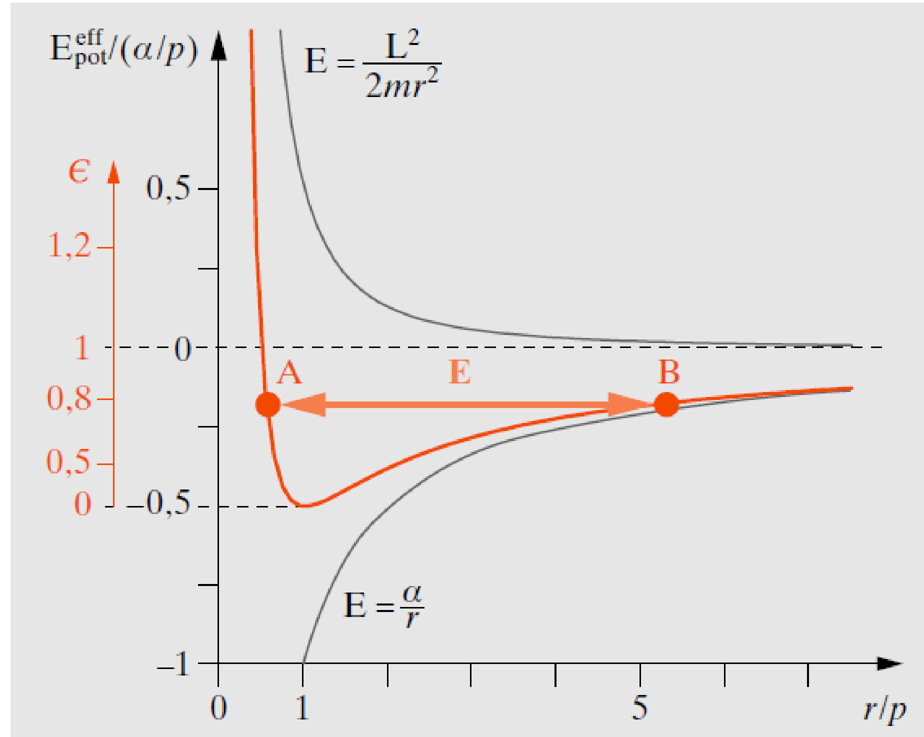
$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) - \frac{\alpha}{r}\,.$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{eff}}(r)\,.$$

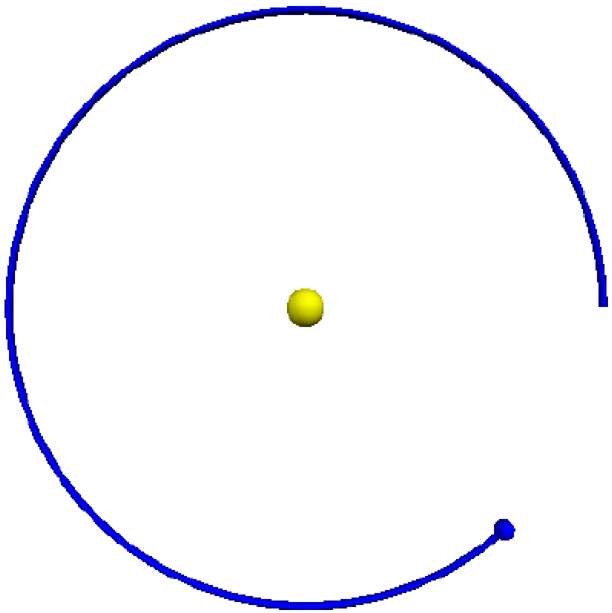
$$\boxed{r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}}\,.$$

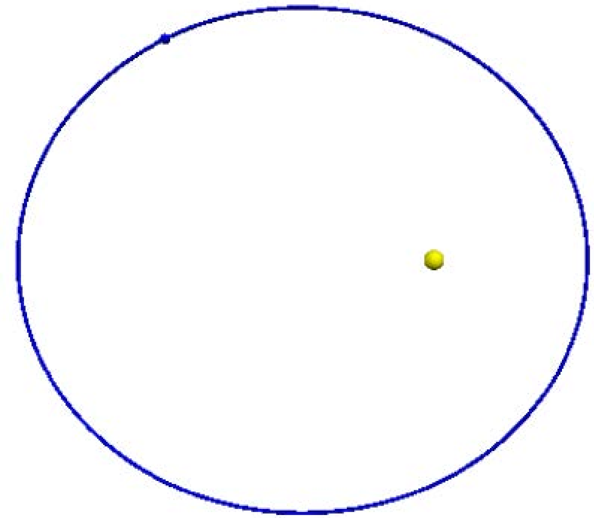


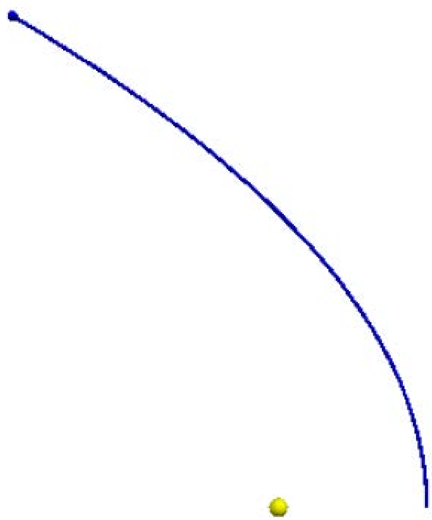




$E > 0,$	$e > 1;$	hyperbola (unbound),
$E = 0,$	$e = 1;$	parabola (borderline),
$E < 0,$	$e < 1;$	ellipse (bound, Kepler's first law),
$E = -mk^2/2L^2,$	$e = 0;$	circle (bound).







kosmischen Geschwindigkeiten

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{G}}$$

$$m \cdot \frac{{v_1}^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

$$v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}} = 29787,8 \frac{m}{s} = 29,8 \frac{km}{s}$$

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{ges}} - W_{\text{pot}}$$

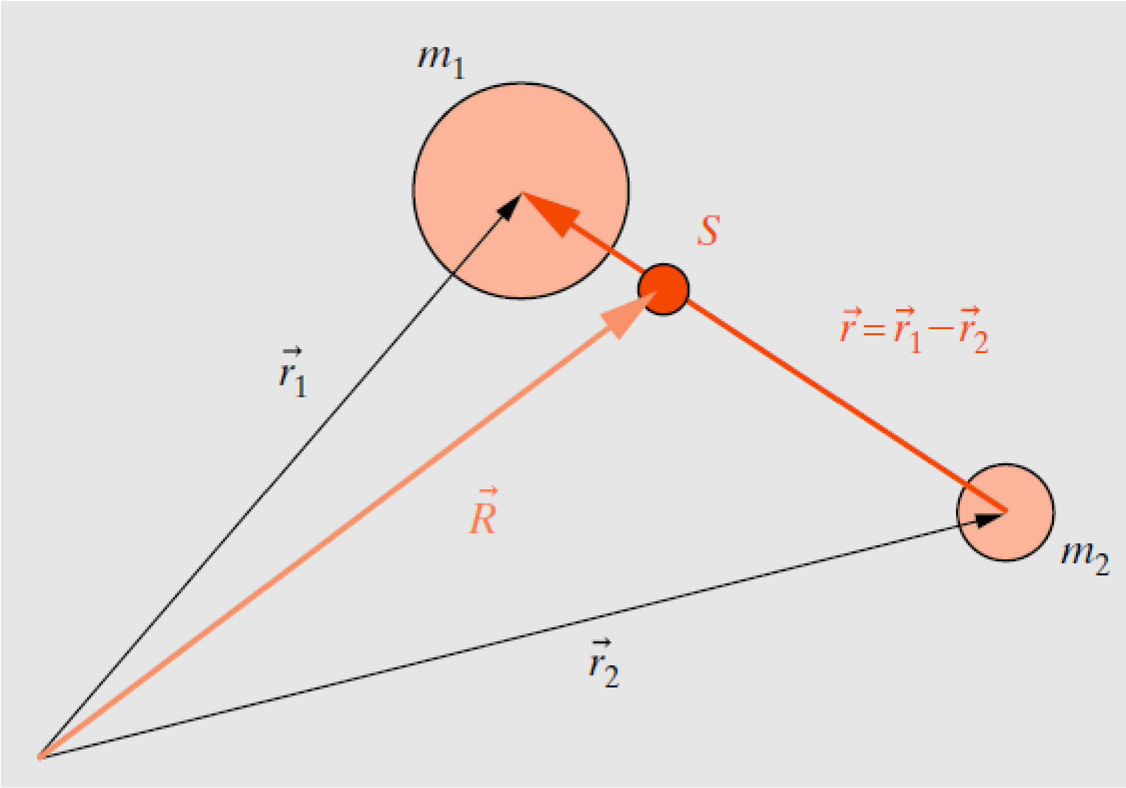
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_2}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot m \cdot M}{a} - \left(-G \cdot \frac{m \cdot M}{r}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_1 = 42126,3\frac{m}{s} = 42,1\frac{km}{s}$$

Die geschlossene Lösung des **Zwei-Körper-Problems** gehört zu den Eckpfeilern der erfolgreichen physikalischen Beschreibung der Materie, erlaubt es doch die Behandlung von so verschiedenen Objekten wie dem Planetensystem oder einfachen Atomen. Schon beim Drei-Körper-Problem

Nach Newtons Reaktionsprinzip üben Körper Kräfte immer paarweise und in Richtung des Vektors $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ aufeinander aus, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, Erde und Mond, Sonne und



m_1
S
$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
$\vec{r}_1$
$\vec{R}$
m_2
$\vec{r}_2$

Erde, aber auch Proton und Elektron im Wasserstoffatom. Kräfte verursachen Impulsüberträge, und wir hatten bei den Stoßgesetzen in Abschn. 1.5.9 schon gesehen, dass sich das Schwerpunktsystem besonders gut eignet, um die Dynamik zu beschreiben. Gehorchen zwei Körper im Laborsystem den Bewegungsgleichungen $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$ bzw. $m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$ so liegt es nahe, **Relativkoordinaten** $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und **Schwerpunktkoordinaten** $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$ einzuführen. Wegen $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}/m_1 - \vec{F}_{21}/m_2 = (m_1^{-1} + m_2^{-1})\vec{F}_{12}(\vec{r})$ führt man die **reduzierte Masse** μ ein,

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \,. \tag{1.78}$$

Dann erhält man mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ die neuen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \,, \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12}(\vec{r}) \,. \end{aligned} \tag{1.79}$$