Hochschule München
S. Tornow

**Aufgaben zur Vorlesung Modellbildung und Simulation (Klassische Mechanik 2)**

Lösen Sie die Aufgaben, indem Sie in eigenen Worten das Problem, das Modell, die gelösten Gleichungen und den verwendeten Algorithmus beschreiben. Visualisieren und diskutieren Sie die Ergebnisse und führen Sie eine kritische Analyse durch. Geben Sie den verwendeten Code zusammen mit der Lösung ab und führen Sie diesen in den Übungen vor. Sie können in Gruppen von bis zu drei Studierenden zusammenarbeiten. **(Abgabe: 18.05.18)**

**Keplerproblem**

Zwei Massen $M$ und $m$, die einen Abstand $r$ zueinander besitzen, ziehen sich gegenseitig mit der Kraft

$$\vec{F}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \tag{1}$$

an. $G$ ist die universelle Gravitationskonstante.

1. Im File Sat.txt sind die Umlaufzeiten $T$ und mittlere Radien $r$ der Umlaufbahnen von vier Satelliten angegeben (die einen Asteroiden umkreisen). Zeigen Sie, dass sich die Daten mit der Formel $T = Cr^n$ beschreiben lassen. Bestimmen Sie $n$ und $C$, indem Sie die Daten logarithmisch auftragen. Schätzen Sie den fehlenden Radius ab.

2. Schreiben Sie ein Programm, das die Differentialgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{2}$$

   löst und visualisieren Sie die Bahnkurve der Erde um die Sonne. Verwenden Sie als Anfangsgeschwindigkeit $(0.0, 29.8) \cdot 10^3 m/s$ und den Anfangsort der Erde $(1.4960, 0.0) \cdot 10^{11} m$ (Die Sonne ruhe anfänglich im Ursprung). Überprüfen Sie die Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung numerisch.

3. Überprüfen Sie die Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung analytisch. Verwenden Sie dazu Polarkoordinaten und leiten Sie die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten her:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{mM}{r^2} \tag{3}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{4}$$

4. Variieren Sie die Anfangsgeschwindigkeit der Erde und beschreiben Sie die verschiedenen Bahnformen, die sich ergeben.

5. Beschreiben Sie mit Hilfe Ihres Programms die Bewegung zweier fast gleich großer Massen (Zweikörperproblem). Denken Sie an die Impulserhaltung!

6. Drei Sterne seien anfangs in Ruhe mit den folgenden Massen und Positionen (arbitrary units):

| | Masse | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| Stern 1 | 150 | 3 | 1 |
| Stern 2 | 200 | $-1$ | $-2$ |
| Stern 3 | 250 | $-1$ | 1 |

(Die drei Sterne seien in der $xy$-Ebene.)

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für Position $\vec{r}_1$ des ersten Sterns gegeben ist durch:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}$$

und stellen Sie die Gleichungen für $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ der beiden anderen Sterne auf.

(b) Setzen Sie $G = 1$ und schreiben Sie ein Programm, das die Bewegungsgleichungen löst. Plotten Sie $y$ als Funktion von $x$ und animieren Sie die Bewegung. Die Sterne bewegen sich sehr schnell, wenn sie sich nähern und sind sehr langsam, wenn sie weit voneinander entfernt sind. Eine adaptive Methode könnte deshalb nützlich sein.