В-9 Задание N 15 (Метод наиск-го спуска)

$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - 5x_1 + x_2 + x_3$

Определение, является ли ф-я $f(x_1, x_2, x_3)$ выпуклой (вогнутой) или нет. Для этого найдем первые произв-е ф-и f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 + x_3 - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2 + x_1 - x_3 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + x_1 - x_2 + 1$$

Составим м-цу Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_1(H) = 4; \ M_2(H) = 23; \ M_3(H) = 34$$

М-ца H - положительно опред-на $\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ - выпуклая ф-я, к-я имеет min в некоторой точке x^*.

Градиент $f(x_1, x_2, x_3)$ определяется выражением

$$\operatorname{grad} f(x) = S = (4x_1 + x_2 + x_3 - 5, \ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1, \ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1)$$

$$t = \frac{(4x_1 + x_2 + x_3 - 5, \ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1, \ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1)\begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + x_3 - 5 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 \end{pmatrix}}{(4x_1 + x_2 + x_3 - 5, \ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1, \ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + x_3 - 5 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 \end{pmatrix}}$$

Координаты точек имеют вид:

$$x_1' = x_1 - t \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = x_1 - t(4x_1 + x_2 + x_3 - 5)$$

$$x_2' = x_2 - t \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_2 - t(x_1 + 6x_2 - x_3 + 1)$$

$$x_3' = x_3 - t \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = x_3 - t(x_1 - x_2 + 2x_3 + 1)$$

В качестве нач-й точки возьмем т-ку $X^0=(0,0,0)$, $f(X^0)=0$ и, решая ур-е $\dfrac{\partial\varphi(t,X^0)}{\partial t}=0$ относ. t находим $t_1=0,31$ и

$$x_1^1 = x_1^0 - t_1(4x_1^0+x_2^0+x_3^0-5) = 1,55$$

$$x_2^1 = x_2^0 - t_1(x_1^0+6x_2^0-x_3^0+1) = -0,31$$

$$x_3^1 = x_3^0 - t_1(x_1^0-x_2^0+2x_3^0+1) = -0,31$$

На втором шаге итерации для получ-й т-ки $(-1,55;\ 0,31;\ 0,31)$ при $t_2=0,31$, получаем точку X^2:

$$x_1^2 = x_1^1 - t_2(4x_1^1+x_2^1+x_3^1-5) = 1,37$$

$$x_2^2 = x_2^1 - t_2(x_1^1+6x_2^1-x_3^1+1) = -0,62$$

$$x_3^2 = x_3^1 - t_2(x_1^1-x_2^1+2x_3^1+1) = -1$$

На третьем шаге итерации для получ-й т-ки $(1,37;\ -0,62;\ -1)$ при $t_3=0,31$, получаем точку X^3:

$$x_1^3 = x_1^2 - t_3(4x_1^2+x_2^2+x_3^2-5) = 1,72$$

$$x_2^3 = x_2^2 - t_3(x_1^2+6x_2^2-x_3^2+1) = -0,51$$

$$x_3^2 = x_3^2 - t_3(x_1^2-x_2^2+2x_3^2+1) = -1,3$$

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока погрешность определения точки минимума не станет достаточно малой. Результаты итерационного процесса и относительные погрешности δ1, δ2 и δ, приведены в таблице ниже.

Точное значение целевой функции в точке минимума равно

$f(X^*) = -6.1$ и $X^* = (1.9, -0.7, -1.85)$.

k	t_k	x^k	y^k	z^k	$f(x^k, y^k, z^k)$	$\delta 1^k$	$\delta 2^k$	$\delta 3^k$
0	-	0	0	0	0	-	-	-
1	0.31	1.55	-0.31	-0.31	-4.2377	-	-	1.226
2	0.31	1.37	-0.62	-1	-5.4024	0.485	0.276	0.466
3	0.31	1.72	-0.51	-1.3	-5.7991	0.265	0.074	0.266
4	0.31	1.7	-0.8	-1.5	-5.9600	0.159	0.0255	0.192
5	0.31	1.86	-0.61	-1.66	-6.0137	0.125	0.0093	0.162
6	0.31	1.8	-0.88	-1.7	-6.0268	0.109	0.0034	0.15
7	0.31	1.9	-0.64	-1.79	-6.0397	0.104	0.0012	0.146
8	0.31	1.8	-0.9	-1.78	-6.0276	0.1013	0.0003	0.146
9	0.31	1.9	-0.7	-1.85	-6.0552	0.1012	0.00003	0.146
10	0.31	1.9	-0.92	-1.81	-6.1000	0.1009	0.00016	0.148
11	0.31	1.95	-0.7	-1.86	-6.0694	0.102	0.0002	0.150
12	0.31	1.86	-0.93	-1.83	-6.0327	0.102	0.0002	0.152
13	0.31	1.9	-0.66	-1.87	-6.0475	0.104	0.0002	0.154
14	0.31	1.86	-0.93	-1.83	-6.0327	0.104	0.0003	0.155