В-9 Задание № 14

$f = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 8x_1x_2 - 9x_1x_3 - 2x_2x_3 - 5x_1 - 6x_2 + 2x_3$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 150$, $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 200$.

а) Составить ф-ю Лагранжа

Перепишем огр-я в неявном виде:

$\varphi_1(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 150 = 0$

$\varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 200 = 0$

$L(\lambda, x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 8x_1x_2 - 9x_1x_3 - 2x_2x_3 - 5x_1 - 6x_2 +$
$+ 2x_3 + \lambda_1(3x_1 - x_2 + 2x_3 - 150) + \lambda_2(2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 200)$

б) Определить стацион-ю т-ку и проверить её на экстремум.

Для того, чтобы точка (λ', Y') была стацион-й т-й $L(\lambda, x)$, должны выполняться необх-е усл-я экстремума:

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 14x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 + 8x_1 - 2x_3 - 6 - \lambda_1 + 3\lambda_2$

$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 18x_3 - 9x_1 - 2x_2 + 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 150$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 200$

Составим систему и решим её:

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 8x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 6 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -9x_1 - 2x_2 + 18x_3 + 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 150 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 54,9 \\ x_2 = 37,5 \\ x_3 = 11,29 \\ \lambda_1 = -119,74 \\ \lambda_2 = -302,13 \end{cases}$$

Решением системы явл-ся един-я стац. т-ка (λ', Y') с координатами: $Y' = (54,9; 37,5; 11,29)$; $\lambda' = (-119,74; -302,13)$

Рассмотрим, являются ли эти точки точками экстремума рассматриваемой функции $L(\lambda, x)$.

Для начала найдем вектор $\partial X = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)$, удовлетворяющий условиям:

$j_1: 3\partial x_1 - \partial x_2 + 2\partial x_3 = 0$

$j_2: 2\partial x_1 + 3\partial x_2 - 2\partial x_3 = 0$

Такой вектор имеет координаты $\partial X = \left(\left(-\frac{4}{11}\right)\partial x_3; \left(\frac{10}{11}\right)\partial x_3; \partial x_3\right)$

Вычислим м-цу $L''_{xx}(\lambda, x)$ функции $L(\lambda, x)$:

$$\left(L''\right)_{xx} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & -9 \\ 8 & 10 & -2 \\ -9 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

которую подставим в левую часть нер-ва

$$\delta X \cdot L''_{xx}(\lambda', Y) \cdot \delta X^T \leq (\geq) \, 0$$

Учтя полученный вектор ∂X, имеем:

$$\delta X \cdot (L'')_{xx}(x, \lambda) \cdot \delta X^T = \left(\frac{4\partial x_3}{11}, \frac{10\partial x_3}{11}, \partial x_3\right) \begin{pmatrix} 14 & 8 & -9 \\ 8 & 10 & -2 \\ -9 & -2 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4\partial x_3}{11} \\ \frac{10\partial x_3}{11} \\ \partial x_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\delta x \cdot (L'')_{xx}(x, \lambda) \cdot \delta X^T = \frac{2810}{121} \delta x_3^2.$$

Тогда в стацион-й точке (λ', Y'):

$$\delta x \cdot (L'')_{xx}(Y', \lambda') \cdot \delta x^T = \frac{2810}{121} \delta x_3^2 > 0$$, т.е.

точка Y' - точка минимума.

в) Найти стацион-ю точку методом Якоби, проверить ее на экстремум и исследовать решение на чувствительность:

$$\psi_1(X) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 150 = 0$$

$$\psi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 200 = 0$$

$$J_0(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$ и ее ранг равен 2

Выберем из N переменных $X = (x_1, x_2, x_3)$ $3 - 2 = 1$ свобод-ю переменную x_1, а оставшиеся в X переменные обозначим как зависимые. Введем м-цу Якоби $J(x)$ и м-цу управления $C(x)$.

$$J(x) = grad_{(x_2, x_3)} \psi = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C(x) = grad_{x_1} \psi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$grad_{(x_2, x_3)} f(x) = (8x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 6; -9x_1 - 2x_2 + 18x_3 + 2)$$

$$grad_{x_1} f(x) = (14x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5)$$

$$J^{-1} C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

$$grad\, f(x) = (14x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5) -$$

$$- (8x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 6; -9x_1 - 2x_2 + 18x_3 + 2) \cdot J^{-1} C =$$

$$= \frac{1}{4}(18 + 75x_1 - 46x_2 - 214x_3)$$

Теперь решим систему, чтобы найти стац-ю т-ку:

$$grad\, f(x) = \frac{1}{4}(18 + 75x_1 - 46x_2 - 214x_3) = 0$$

$$\psi_1(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 150$$

$$\psi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 200$$

Корни данной системы могут быть получены в результате численного решения. В процессе поиска корней системы обнаружено 1 корень - стацион. точка

$$Y' = \left(\frac{28538}{519}; \frac{19480}{519}; \frac{5858}{519}\right) \text{ или } Y' = (54,9; 37,5; 11,29)$$

$$M(Y) = \frac{75}{4} > 0; \quad f(Y') = 38955.$$

Таким образом, найденная стац-я т-ка является точкой минимума.

Анализ чувствительности

$$grad_{(x_2, x_3)} f(Y') = \left(\frac{408274}{519}; -\frac{189320}{519}\right)$$

$$J^{-1}(Y') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Тогда: $grad_{(x_2, x_3)} f(Y') \cdot J^{-1}(Y') = (119,745; 302,1304)$

При ↑ b_2 на единицу, ∂b_2, ф-я цели $f(Y')$ ↑ приблизительно на 119,745, а при ↑ b_3 на единицу, $\partial b_3 = 1$, ф-я цели ↑ на 302,1304.