В - 9 Задание № 17 (Метод сопр-х градиентов)

$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - 5x_1 + x_2 + x_3$ 1 л.

Вычисление градиент и м-цу Гессе:

$grad f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3 - 5,\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 1,\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 1)$

$H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_1(H) = 4$, $M_2(H) = 23$, $M_3(H) = 34$

М-ца H - положительно определена $\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ - выпуклая ф-я, к-я имеет min в точке x^*.

Выберем в кач-ве нач. точки $x^0 = (0, 0, 0)$. Тогда:

$f(x^0) = 0$, $grad f(x^0) = (-5; 1; 1)$, $S^0 = -grad f(x^0) = -(-5; 1; 1)$

$$t_1 = \frac{-grad f(x^0) \cdot S^0}{S^0 H S^{0t}} = \frac{-(-5;1;1)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{-(-5;1;1)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 0,31$$

$x^1 = x^0 + t_1 \cdot S^0 = (0, 0, 0) + 0,31(5; -1; -1) = (1,55; -0,31; -0,31)$

$f(x^1) = -4,2377$; $grad f(x^1) = (0,58;\ 1; 2,24)$

$$\beta_0 = \frac{(HS^{0t})\ grad f(x^1)}{S^0 H S^{0t}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (0,58; 1; 2,24)}{-(-5;1;1)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{(5,56; 4,34; 4,06) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{86} = \frac{20,4}{86} = 0,237$$

На втором шаге имеем:

$S^1 = -\text{grad} f(x^1) + \beta_0 S^0 = (0{,}605; -1{,}237; -2477)$

2 л.

$t_2 = 0{,}523$

$x^2 = (1.867; -0.954; -1.606)$

$f(x^2) = -5{,}922$

$\text{grad} f(x^2) = (-0{,}035; -1{,}269; 0{,}612)$

$\beta_1 = 0{,}303$.

На третьем шаге итерации:

$S^2 = (0{,}278; 0{,}894; -1.363)$

$t_3 = 0.181$

$x^3 = (1.918; -0{,}735; -1.853)$

$f(x^3) = -6.1$

$\text{grad} f(x^3) = (0, 0, 0)$

$\beta_2 = 0$

На этом шаге вычисления можно остановить, т.к. $\beta_2 = 0$ и $S^3 = 0$. Таким образом, точное решение $x^* = (1.918; -0{,}735; -1.853)$, $f(x^*) = -6.1$.