МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТАТИКИ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине
«Исследование операций»

Тема: «Моделирование параметрического анализа задач линейного программирования»

Направление: 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Направленность: Прикладная математика и информатика в экономике и управлении

Студент(ка) Костыра Екатерина Сергеевна
ФИО полностью

Группа: ПМ1901
номер группы *подпись*

Проверил: Чернов В.П.

Должность: профессор кафедры ПМиЭММ, д.э.н., профессор

Оценка: ____________________ Дата: _____________

Подпись: ___________________

Санкт-Петербург
2022 год

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследованием операций называется специальная наука, занимающаяся рациональными способами организации целенаправленной человеческой деятельности. Методы исследования операций применяются в самых разных областях: в промышленности, торговле, на транспорте, в медицине, городском и сельском хозяйстве, военном деле – одним словом, везде, где приходится организовывать какие-то мероприятия, направленные к достижению определенной цели. Очевидно, организовывать их следует так, чтобы они наилучшим образом способствовали достижению поставленной цели, т.е. были максимально эффективными.

В исследовании операций нет единого метода решения всех математических моделей, которые встречаются на практике. Вместо этого выбор метода решения диктуют тип и сложность исследуемой математической модели.

Наиболее эффективными и известными методами исследования операций являются методы:

- линейного программирования, когда целевая функция и все ограничения являются линейными функциями;
- методы целочисленного программирования (если все переменные должны принимать только целочисленные значения);
- методы динамического программирования (где исходную задачу можно разбить на меньшие подзадачи);
- методы нелинейного программирования (когда целевая функция и/или ограничения являются нелинейными функциями);
- методы исследования функций классического анализа;
- методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа;
- вариационное исчисление;
- принцип максимума;

— метод геометрического программирования.

Как правило, нельзя рекомендовать какой-либо один метод, который можно использовать для решения всех без исключения задач, возникающих на практике. Одни методы в этом отношении являются более общими, другие – менее общими.

В данной курсовой работе я буду рассматривать метод линейного программирования, а точнее параметрический анализ в задачах линейного программирования.

Тема является актуальной на сегодняшний день, т.к. параметрический анализ в задачах линейного программирования является востребованным и эффективным.

Объект исследования – оптимизационная модель, решаемая с помощью параметрического анализа в задачах линейного программирования.

Цель данной курсовой работы: разработать математическую модель для общего случая и для конкретной задачи линейного программирования с использованием параметрического анализа и продемонстрировать её на конкретном примере.

Для достижения данной цели были выдвинуты следующие задачи:

- Изучить, что такое линейное программирование, а также параметрический анализ в нем;
- Сформулировать математическую модель задачи;
- Реализовать проект в среде Excel.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Оптимизация – целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Оптимизация в широком смысле слова находит применение в науке, технике, экономике и других областях человеческой деятельности.

К оптимизационным задачам относятся, например:

— задачи оптимального планирования деятельности предприятий;
— задачи оптимального прикрепления потребителей к поставщикам (транспортная задача);
— задачи оптимального распределения трудовых ресурсов;
— задача оптимального составления смесей;
— бинарные задачи распределения;
— задачи о раскрое;
— задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг (инвестиционных проектов) и др.

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов.

В качестве инструмента решения оптимизационных задач используется математическое программирование (планирование). До второй половины XX века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись достаточно редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев и невозможно. С появлением компьютеров для решения таких задач используются специализированные пакеты прикладных программ, языки программирования высокого уровня.

Применение математических моделей позволяет использовать средства вычислительной техники для анализа допустимых решений, поиска наиболее рационального оптимального решения.

Линейное программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных. Задачи линейного программирования (ЛП) находят применение при оптимизации производственных мощностей, распределении ресурсов, составлении планов, сопоставлении альтернативных проектов.

Для решения большого круга задач линейного программирования имеется практически универсальный алгоритм - симплексный метод, позволяющий за конечное число итераций находить оптимальное решение подавляющего большинства задач. Тип используемых ограничений (равенства или неравенства) не сказывается на возможности применения указанного алгоритма. Дополнительной проверки на оптимальность для получаемых решений не требуется. Как правило, практические задачи линейного программирования отличаются весьма значительным числом независимых переменных. Поэтому для их решения обычно используют вычислительные машины, необходимая мощность которых определяется размерностью решаемой задачи.

Для задач линейного программирования наибольший интерес представляет решение двух задач вариантного анализа:

- параметрического анализа, в ходе которого решаются задачи при различных значениях одного из параметров;
- сравнительный анализ нескольких моделей одной и той же ситуации.

Важным элементом практического использования математических моделей является параметрический анализ задачи ЛП.

Под параметрическим анализом понимается решение задачи оптимизации при различных значениях того параметра, который ограничивает улучшение целевой функции. В рассматриваемой мной задаче таким параметром могут быть финансовые ресурсы.

Параметрический анализ позволяет выяснить, как изменяется оптимальное значение целевой функции при изменении ее коэффициентов или правых частей ограничений. При этом предполагают, что изменяемые величины зависят от некоторого параметра (например, времени), и находят, как от этого же параметра зависит оптимальное значение целевой функции.

При математическом моделировании никогда нельзя учесть всех факторов, влияющих на поведение системы. Более того, ни один из параметров модели не может оставаться неизменным в реальных процессах. В задачах линейного и нелинейного программирования коэффициенты при переменных считаются постоянными. Если модель хорошо отображает действительность, то при малых изменениях параметров у нее, в общем случае, должны сохраняться те черты, которые характеризуют поведение рассматриваемой системы.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j$$

Рисунок 1 - Целевая функция

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = k + 1, \dots$$

Рисунок 2 – Ограничения задачи

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \le m$.

Функция (Рисунок 1) называется целевой функцией задачи, а условия (Рисунок 2) – ограничениями данной задачи. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется допустимым решением (или планом). Решение $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

В данной курсовой работе я сделаю математическую модель на примере распределения ресурсов.

Допустим, для производства продукции P_1, P_2,…, P_N используются некоторые ресурсы R_1, R_2,..., R_M (сырье, оборудование, финансы, рабочая сила) в количествах b_1, b_2,..., b_M. Стоимость единицы ресурса равна d_1, d_2,..., d_M рублей. Производство продукции P_i ограничено спросом, который оценивается в количестве S_i штук. Единица продукции P_i может быть продана по цене c_i рублей, и для ее производства необходимо a_{ji} единиц ресурса R_j. В этой ситуации возникает естественный вопрос: какое количество продукции необходимо выпустить, чтобы получить максимальную прибыль при ее реализации?

Для удобства запишем сформулированные условия в виде таблицы (**Рисунок 3**). Если j-й ресурс не используется для изготовления продукции P_i, то $a_{ji} = 0$.

Опишем данную ситуацию математической моделью. Обозначим через $X = (x_1, x_2,…, x_N)$ количество единиц (управляемые переменные) выпускаемой продукции P_1, P_2,…, P_N, которое следует подобрать так, чтобы прибыль от ее реализации была максимальна.

Продукция	Ресурсы						Сто мос
	R_1	R_2	…	R_j	…	R_M	
P_1	a_{11}	a_{21}	…	a_{j1}	…	a_{M1}	c_1
P_2	a_{12}	a_{22}	…	a_{j2}	…	a_{M2}	c_2
…	…	…	…	…	…	…	…
P_i	a_{1i}	a_{2i}	…	a_{ji}	…	a_{Mi}	c_i
…	…	…	…	…	…	…	…
P_N	a_{1N}	a_{2N}	…	a_{jN}		a_{MN}	c_N
Количество ресурса	b_1	b_2	…	b_j	…	b_M	

Рисунок 3 - Параметры задачи распределения ресурсов

Ясно, что не надо выпускать продукции больше, чем диктуется спросом, т. е.

$$xi \le Si, i = 1, N.$$

Формула 1

Далее, например, количество ресурса R_1, израсходованного на производство всех рассматриваемых видов продукции P_1, P_2,…, P_N, будет равно

$$a11x1 + a12x2 + \ldots + a1NxN.$$

Формула 2

Учитывая, что количество ресурса R_1 равно b_1, получим ограничение, определяющее расход ресурса R_1

$$a11x1 + a12x2 + \ldots + a1NxN \le b1.$$

Формула 3

Аналогично записываются ограничения, определяющие фактический расход любого из ресурсов R_j,

$$aj1x1 + aj2x2 + \ldots + ajNxN \le bj, j = 1, M.$$

Формула 4

Таким образом, учет ограниченности ресурсов приводит к системе линейных неравенств для переменных x_1, x_2,…, x_N которую можно записать в более компактной форме

$$\sum^{N} a_{ji} x_i \le b_j,\ j = \overline{1}$$

Рисунок 4

Очевидно, что количество единиц производимой продукции не может быть отрицательным числом, поэтому систему ограничений **Формула 1 Рисунок 4** необходимо дополнить естественными ограничениями

$$xi \ge 0, i = 1, N.$$

Формула 5

Найдем зависимость прибыли f от объема выпускаемой продукции X. Прибыль f(X), получаемая от реализации продукции, определяется разностью между ценой произведенной продукции и ее себестоимостью. Цена произведенной продукции равна $\sum_i c_i x_i$, а ее себестоимость, зависящая от расхода и стоимости использованных ресурсов, имеет вид $\sum_j d_j \sum_i a_{ji} x_i$ (внутренняя сумма определяет объем использованного ресурса R_j). Поэтому прибыль f(X) от реализации всей продукции X есть

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i - \sum_{j=1}^{M} d_j \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{N} \left(c_i - \sum^{M} \right.$$

Рисунок 5

где $\sum_j a_{ji} d_j$ имеет смысл себестоимости единицы продукции P_i.

Формула (**Рисунок 5**) имеет простой и очевидный экономический смысл. Если c_i больше себестоимости P_i, то прибыль положительна, если равна, то прибыль отсутствует, если меньше, то предприятие терпит убытки.

В итоге получаем математическую форму записи рассматриваемой задачи о распределении ресурсов: определить количество выпускаемой продукции X, которое удовлетворяет линейным неравенствам (**Рисунок 4 Формула 1 Формула 5**) и обеспечивает максимум прибыли, f(X) $\to$ max, которая описывается линейной целевой функции (**Рисунок 5**).

4. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

4.1. ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ

Если под ресурсами понимать все, что используется в процессе производства: финансы, оборудование, сырье, материалы, людей (в смысле заработной платы), то значительное число задач с позиции экономических критериев можно рассматривать как задачи планирования ресурсов. Математической моделью таких задач является задача линейного программирования, которая является достаточно распространенной задачей принятия оптимальных решений.

Рассмотрим пример решения задачи оптимизации плана производства, где требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой предприятие использует ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы.

Исходные данные приведены в таблице ниже.

Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Общее количество ресурсов
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	50
Коэф.ЦФ	60	70	120	130	

Таблица 1 - Исходные данные

Предлагается провести расчет задачи при трех значениях параметра Финансы 50 (вариант 1), 100 (вариант 2), 150 (вариант 3).

Составим математическую модель задачи, для чего введем следующие обозначения:

x_j – количество выпускаемой продукции j–го типа, j=1–4;

b_i, – количество располагаемого ресурса i – го вида, i = 1–3;

a_{ij} – норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа;

c_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j–го типа.

1. Рассмотрим первый случай решения задачи, когда параметр Финансы не превышает 50.

Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия ресурсами и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что объем изготовляемой продукции не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 + x4 \le 16 \\ 6x1 + 5x2 + 4x3 + 3x4 \le 110 \\ 4x1 + 6x2 + 10x3 + 13x4 \le 50 \\ xj \ge 0, j = 1{,}4 \end{cases}$$

Прибыль от реализации продукции составит:

$$\mathrm{F} = 60\mathrm{x}1 + 70\mathrm{x}2 + 120\mathrm{x}3 + 130\mathrm{x}4 \to \max.$$

Среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение F_{max}.

Введем условия задачи путем совершения следующих основных шагов.

1. Создание формы для ввода исходных данных задачи.
2. Ввод исходных данных.
3. Ввод зависимостей из математической модели.
4. Назначение целевой функции.
5. Ввод ограничений и граничных условий.

Для исходной задачи сделаем форму для ввода условий задачи и введем исходные данные с помощью режима формул. В задаче оптимальные значения вектора $X = (x_1, x_2,\ldots, x_N)$ будут помещены в ячейках B15:E15, оптимальное значение целевой функции - в ячейке F11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Планирование оптимального выпуска проду**						
2	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукц типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой треб трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
3							
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Знак
6	Трудовые	1	1	1	1	0	<=
7	Сырье	6	5	4	3	0	<=
8	Финансы	4	6	10	13	0	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Напр
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130		max

Рисунок 6 - Исходная форма для решения ЗЛП

Ввод зависимости для целевой функции.

— Курсор в F5;

— Выбираем кнопку «мастер функции»;

— В окне «категория» выделяем категорию «математические»;

— В окне «функции» выбираем «суммпроизв»;

— В Массив 1 введите B15:E15;

— В Массив 2 введите B11:E11;

— ОК. В ячейке F11 появится значение 0.

Ввод зависимостей для левых частей ограничений производим по аналогии.

На этом ввод данных в таблицу закончен

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Планирование оптимального выпуска проду**						
2	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукц						
3	типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой треб трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Знак
6	Трудовые	1	1	1	1	0	<=
7	Сырье	6	5	4	3	0	<=
8	Финансы	4	6	10	13	0	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Напр
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	0	max

Рисунок 7 - Ввод исходных данных (Вариант 1)

Далее работаем в диалоговом окне «Поиск решений» (меню «Данные» –> «Анализ» –> «Поиск решения»…).

Назначение целевой функции:

В окне «Установить целевую ячейку» вводим адрес F11.

Выберем направление изменения целевой функции: максимальному значению.

Ввод ограничений и граничных условий проводим при помощи курсора «Добавить» … .

На экране появится диалоговое окно «Добавление ограничения» (Рисунок 8). Введем граничные условия и ограничения на переменные.

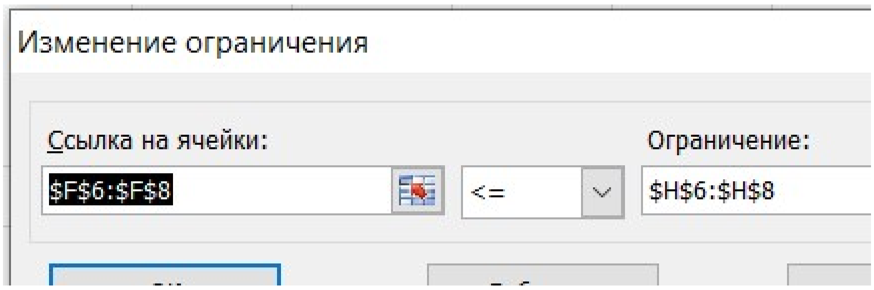

Рисунок 8 - Изменение ограничения

После ввода последнего ограничения вместо «Добавить» выбираем «ОК». В результате на экране появилось диалоговое окно «Поиск решения» с введенными условиями (Рисунок 9).

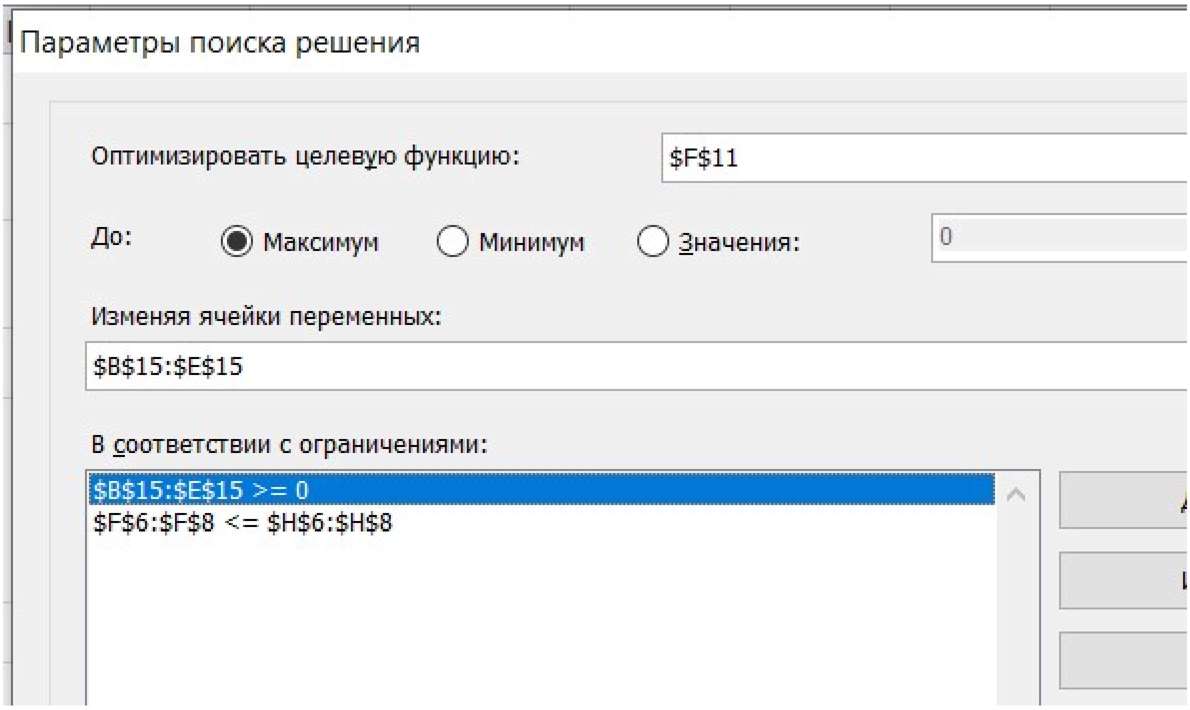

Рисунок 9 - Параметры поиска решения

Таким образом, условия задачи введены. Далее следует приступить к решению.

Решение задачи производится сразу же после ввода данных в диалоговом окне «Поиск решения».

Во вкладке «Параметры» в качестве метода решения данной задачи выбираем «Поиск решения линейных задач симплекс-методом». Также необходимо установить галочку в разделе «Сделать переменные без ограничений неотрицательными». Затем нажимаем «Найти решение» и получаем найденное решение.

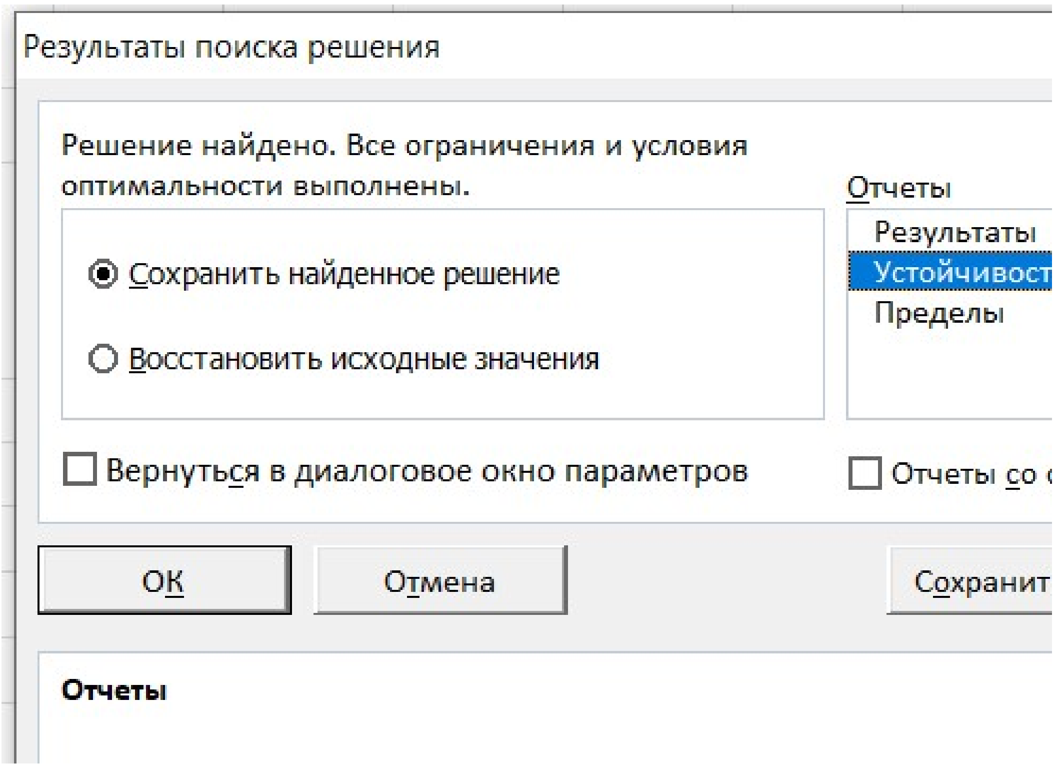

Рисунок 10 - Результаты поиска решения

Если решение не найдено, окно выведет соответствующее сообщение.

Если решение найдено, можно выделить все три типа отчетов (Результаты, Устойчивость, Пределы). На экране – результаты решения задачи (рис. Результаты решения задачи).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Планирование оптимального выпуска проду**						
2	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукі типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой треб						
3	трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Знак
6	Трудовые	1	1	1	1	12,5	<=
7	Сырье	6	5	4	3	75	<=
8	Финансы	4	6	10	13	50	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Напр
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	750	max

Рисунок 11 - Решение задачи (Вариант 1)

Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 750 д.е. при следующем плане производства: 12,5 – объем продукции типа Прод1; 0 – объем продукции типа Прод2; 0 – объем продукции типа Прод3; 0– объем продукции типа Прод4.

Также наглядно можно увидеть, как распределяются ресурсы при следующих параметрах, когда изменяемый параметр Финансы = 50:

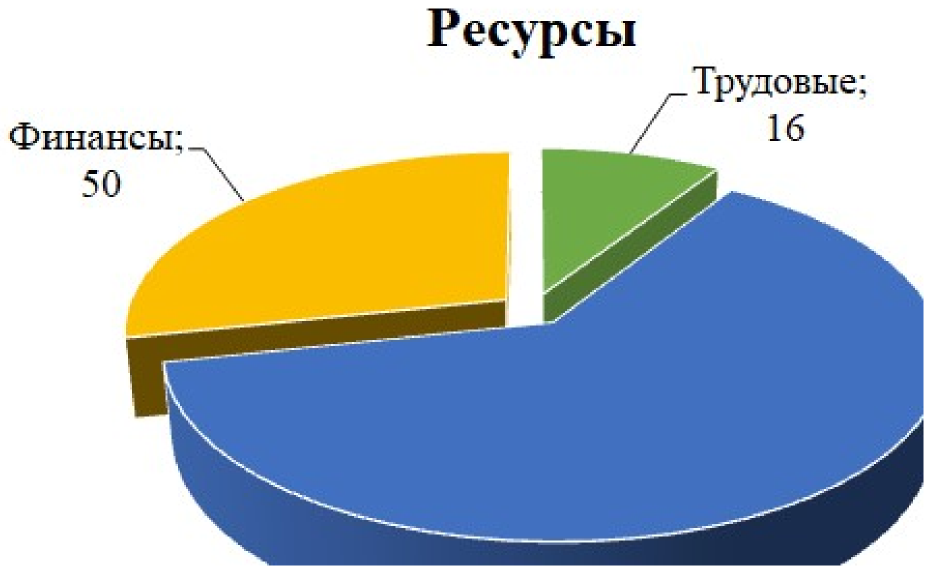

Рисунок 12 - Диаграмма распределения ресурсов при заданном параметре Финансы = 50

Оптимальное распределение выпускаемой продукции выглядит следующим образом:

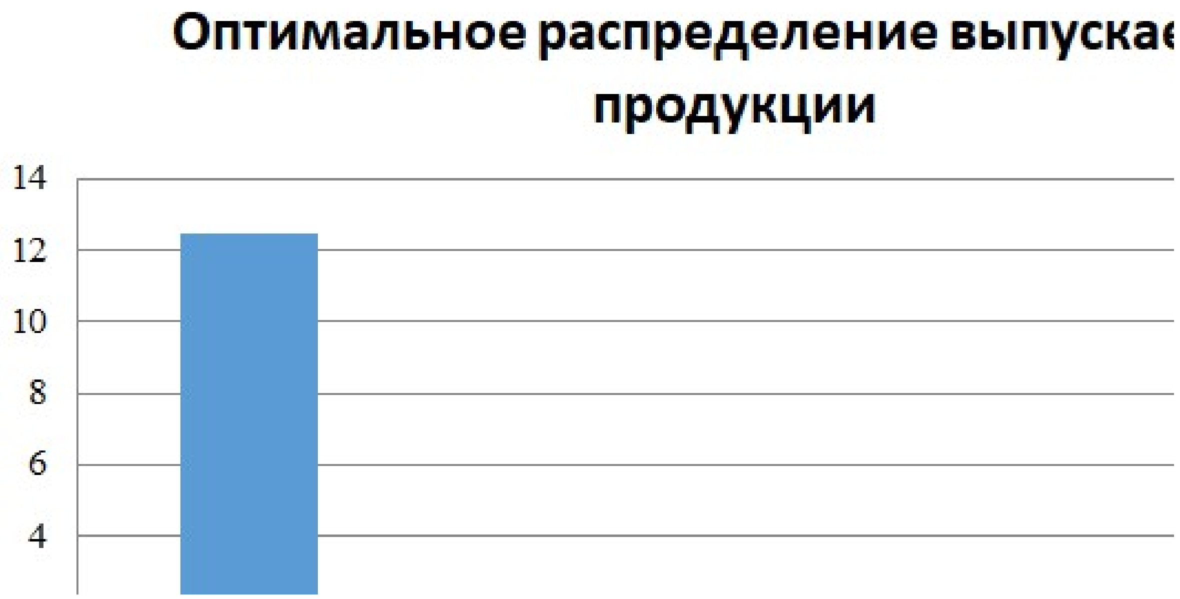

Рисунок 13 - Оптимальное распределение ресурсов

Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки, для анализа полученного оптимального решения «Поиск решения» позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: Результаты, Устойчивость и Пределы. Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога Результаты поиска решения (Рисунок **10**). Для выбора нескольких отчетов из списка использовать клавишу Shift.

Рассмотрим более подробно каждый из них.

В отчете по результатам приведены сведения о целевой функции, значениях искомых переменных и результаты оптимального решения для ограничений (Рисунок 14).

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$F$11	Коэфф. ЦФ ЦФ (прибыль)	0	750

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Цел
$B$15	Значения xj Прод1	0	12,5	Прс
$C$15	Значения xj Прод2	0	0	Прс
$D$15	Значения xj Прод3	0	0	Прс
$E$15	Значения xj Прод4	0	0	Прс

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	С
$F$6	Трудовые Левая часть	12,5	$F$6<=$H$6	Без
$F$7	Сырье Левая часть	75	$F$7<=$H$7	Без
$F$8	Финансы Левая часть	50	$F$8<=$H$8	При

Рисунок 14 - Отчёт по результатам

Для ограничений в столбце Формула приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно ПОИСК РЕШЕНИЯ; в столбце Значение – величины использованного ресурса; в столбце Допуск – количество неиспользованного ресурса. Если ресурс расходуется полностью, то в столбце Состояние указывается «привязка»; при неполном использовании ресурса в этом столбце указывается «без привязки». Для переменных показывается разность между значениями переменных в найденном оптимальном решении и заданным для них граничным условием.

В отчете по устойчивости (Рисунок 15) дан анализ по переменным и ограничениям. Исследование устойчивости оптимального решения – это изучение влияния изменений отдельно взятых параметров модели (оценок целевой функции, технико-экономических коэффициентов, объемов ограничений по ресурсам и продуктам, значений базисных переменных и др.) и ее структуры (введение новых ограничений и переменных или их сокращение) на показатели оптимального решения. Такой анализ позволяет судить о пределах допустимых изменений в оптимальном плане и о его устойчивости.

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допус Увели
$B$15	Значения xj Прод1	12,5	0	60	
$C$15	Значения xj Прод2	0	-20	70	
$D$15	Значения xj Прод3	0	-30	120	
$E$15	Значения xj Прод4	0	-65	130	

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допус Увели

Рисунок 15 - Отчёт по устойчивости

В результате решения в разделе Ячейки переменных приведены следующие данные:

- окончательные значения переменных;
- приведенная стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется значение целевой функции при принудительном включении единицы этой переменной в оптимальное решение;
- коэффициенты целевой функции;
- допустимые значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В разделе Ограничения приведены значения:

— величин используемых ресурсов;

— теневые цены, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;

— значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор двойственных переменных, входящих в оптимальное решение.

В отчете по пределам (Рисунок 16) показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

	Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение
$F$11	Коэфф. ЦФ Ц(	750

	Переменная		Нижний	Целевая функция	Верхний
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел
$B$15	Значения xj П	12,5	0	0	12,5
$C$15	Значения xj П	0	0	750	0

Рисунок 16 - Отчёт по пределам

Выводы

На основе «Отчета по результатам» можно сделать следующие выводы об оптимальном решении поставленной задачи:

- максимальное значение прибыли от продажи производимых товаров составляет 750 тыс. руб.;
- оптимальный план предусматривает производство Прод1 в количестве 12,5 шт.;
- ресурсы 3 вида расходуются полностью, и остается неиспользованным 3,5 и 35 ед. сырья 1 и 2 вида. Следовательно, ресурс 3 типа является дефицитным.

Согласно «Отчету по устойчивости» можно сделать следующие выводы:

- двойственная оценка (теневые цены) 3 вида ресурсов положительная. Это еще раз подтверждает, что ресурс 3 вида являются дефицитным. Двойственная оценка 3 вида ресурсов показывает, что при его изменении на 1 единицу значение целевой функции измениться на 15 единиц.
- интервалы изменения объемов используемых ресурсов, при которых сохраняется текущие оптимальные двойственные оценки, следующие:

1 вид ресурсов: [16-3,5; 16+0]

2 вид ресурсов: [110-35; 110+0]

3 вид ресурсов: [50-50; 50+14]

2. Рассмотрим второй случай решения задачи, когда параметр Финансы не превышает 100.

Математическая модель будет иметь следующий вид:

Прибыль от реализации продукции составит:

$$\mathrm{F} = 60\mathrm{x}1 + 70\mathrm{x}2 + 120\mathrm{x}3 + 130\mathrm{x}4 \rightarrow \max.$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 + x4 \le 16 \\ 6x1 + 5x2 + 4x3 + 3x4 \le 110 \\ 4x1 + 6x2 + 10x3 + 13x4 \le 100 \\ xj \ge 0, j = 1,4 \end{cases}$$

Среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение F_{max}.

Для исходной задачи сделаем форму для ввода условий задачи и введем исходные данные с помощью режима формул. В задаче оптимальные значения вектора X = (x_1, x_2,…, x_N) будут помещены в ячейках **B15:E15,** оптимальное значение целевой функции - в ячейке **F11.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	Планирование оптимального выпуска проду						
2	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукц типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой треб трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
3							
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Знак
6	Трудовые	1	1	1	1	0	<=
7	Сырье	6	5	4	3	0	<=
8	Финансы	4	6	10	13	0	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Напр
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	0	max

Рисунок 17 – Ввод исходных данных (Вариант 2)

С помощью «Поиска решения» найдем решение задачи при заданном изменяемом параметре Финансы = 100.

Планирование оптимального выпуска проду

Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукц
типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой треб
трех видов: трудовые, сырье, финансы.

Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Знак
Трудовые	1	1	1	1	16	<=
Сырье	6	5	4	3	84	<=
Финансы	4	6	10	13	100	<=
					ЦФ (прибыль)	Напр
Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	1320	max

Рисунок 18 - Решение задачи (Вариант 2)

Таким образом получаем, что максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 1320 д. е. при следующем плане производства: 10 – объем продукции типа Прод1; 0 – объем продукции типа Прод2; 6 – объем продукции типа Прод3; 0– объем продукции типа Прод4.

Также наглядно можно увидеть, как распределяются ресурсы при следующих параметрах, когда изменяемый параметр Финансы = 100:

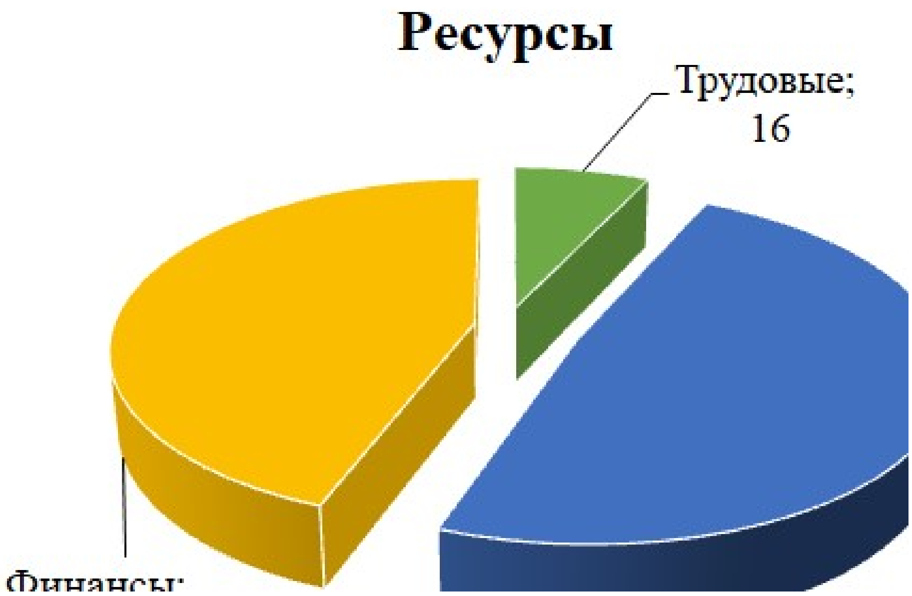

Рисунок 19 - Диаграмма распределения ресурсов при заданном параметре Финансы = 100

Оптимальное распределение выпускаемой продукции выглядит следующим образом:

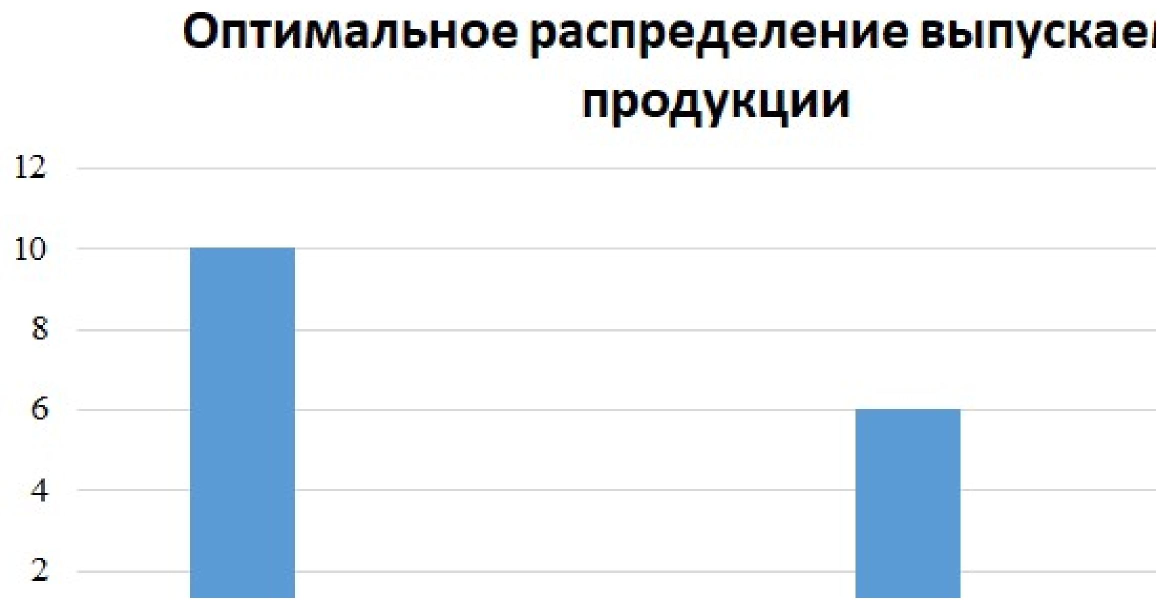

Рисунок 20 - Оптимальное распределение ресурсов

3. Рассмотрим первый случай решения задачи, когда параметр Финансы не превышает 100.

Математическая модель будет иметь следующий вид:

Прибыль от реализации продукции составит:

$$F = 60x1 + 70x2 + 120x3 + 130x4 \rightarrow \max.$$

При ограничениях:

$$
\begin{cases}
x1 + x2 + x3 + x4 \leq 16 \\
6x1 + 5x2 + 4x3 + 3x4 \leq 110 \\
4x1 + 6x2 + 10x3 + 13x4 \leq 150 \\
xj \geq 0, j = 1,4
\end{cases}
$$

Среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение F_{max}.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Планирование оптимального выпуска продук						
2	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукци типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой требу						
3	трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Зна
6	Трудовые	1	1	1	1	0	<=
7	Сырье	6	5	4	3	0,00	<=
8	Финансы	4	6	10	13	0	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Нап
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	0	max

Рисунок 21 - Ввод исходных данных (Вариант 3)

С помощью «Поиска решения» найдем решение задачи при заданном изменяемом параметре Финансы = 150.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Планирование оптимального выпуска проду**						
2–3	Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукци типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой требу трех видов: трудовые, сырье, финансы.						
4							
5	Ресурсы	Норма расхода i – го ресурса для выпуска единицы продукции j – го типа				Левая часть	Зна
6	Трудовые	1	1	1	1	16	<=
7	Сырье	6	5	4	3	67,33	<=
8	Финансы	4	6	10	13	150	<=
9							
10						ЦФ (прибыль)	Нап
11	Коэфф. ЦФ	60	70	120	130	1820	ma

Рисунок 22 - Решение задачи (Вариант 3)

Таким образом получаем, что максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 1820 д. е. при следующем плане производства: 1,67 – объем продукции типа Прод1; 0 – объем продукции типа Прод2; 14,33 – объем продукции типа Прод3; 0– объем продукции типа Прод4.

Также наглядно можно увидеть, как распределяются ресурсы при следующих параметрах, когда изменяемый параметр Финансы = 150:

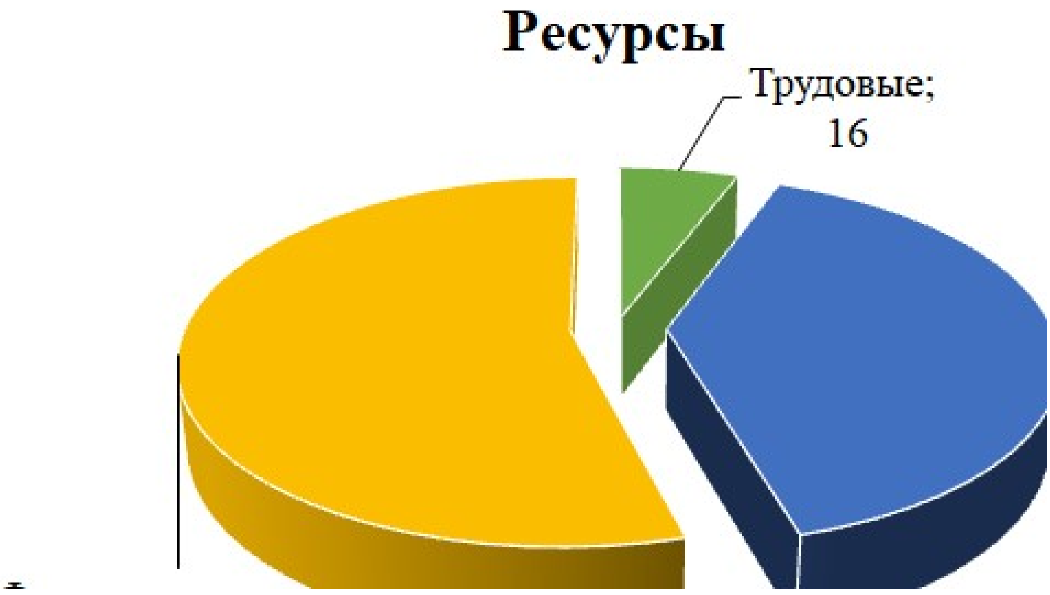

Рисунок 23 - Диаграмма распределения ресурсов при заданном параметре Финансы = 150

Оптимальное распределение выпускаемой продукции выглядит следующим образом:

Рисунок 24 - Оптимальное распределение ресурсов

Найдя оптимальное распределение ресурсов в трех вариантах с изменяемым параметром Финансы, мною также был выполнен отчет по параметрическому анализу и выглядит он следующим образом:

	A	B	C	
1	Отчёт по параметрическому ана			
2				
3		Финансы = 50	Финансы = 100	Фи
4	Прод1	12,5	10	
5	Прод2	0	0	
6	Прод3	0	6	
7	Прод4	0	0	
8	Прибыль	750	1320	
9	Трудовые	12,5	16	

Рисунок 25 - Отчёт по параметрическому анализу

Глядя на таблицу, можно сделать следующие выводы:

1. Говоря о выпущенной продукции, объём продукции типа Прод2 и Прод4 остаётся неизменным на протяжении всего времени и равняется 0. Если же рассматривать объём продукции типа Прод1, то мы можем наблюдать, как с ростом параметра Финансы, объём продукции Прод1 уменьшается. Глядя на объём продукции типа Прод3 видно, как при увеличении изменяемого параметра Финансы, объём продукции увеличивается.

2. Прибыль при увеличении Финансов соответственно увеличивается. Максимальная прибыль при реализации продукции равняется 1820 при изменяемом параметре Финансы равном 150.

3. Трудовые ресурсы во всех трёх случаях примерно равны. По максимальному спросу трудовые ресурсы не превышали 16, и в двух решениях задачи использовалось максимальное количество ресурса.

4. При изменении параметра Финансы ресурс Сырье изменяется без какой-либо закономерности. Можно сказать, что при максимальном параметре Финансы равном 150, используется минимальное количества сырья.

Также мною была составлена диаграмма, на которой наглядно видно изменение прибыли при разных параметрах ресурса Финансы.

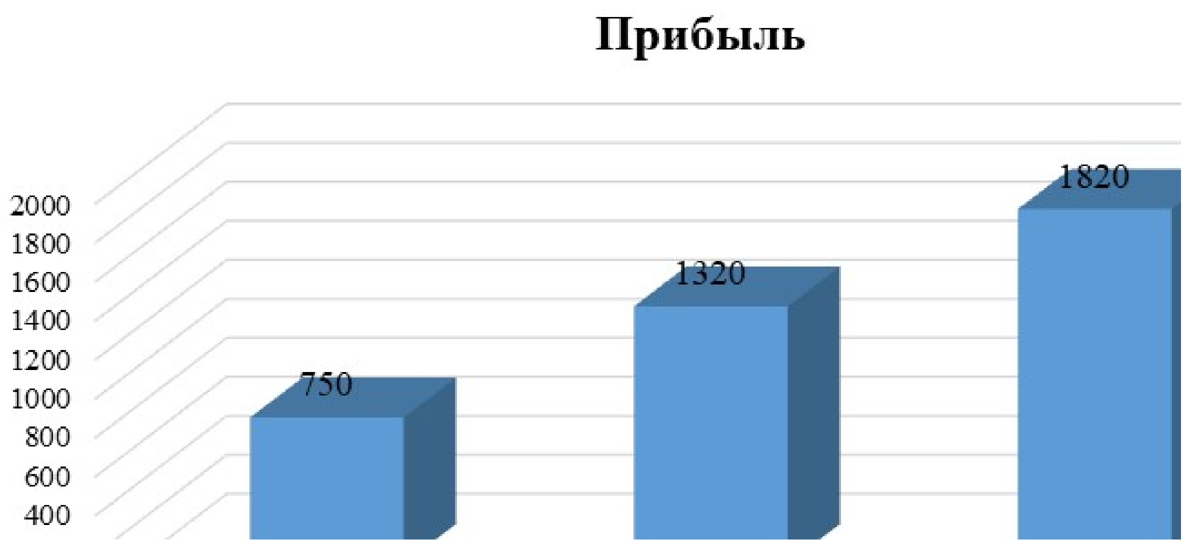

Рисунок 26 - Изменение прибыли при изменяемом параметре Финансы

На рисунке ниже (**Рисунок 27**) можно увидеть, как распределилось количество сырья в зависимости от того, как изменялся параметр Финансы:

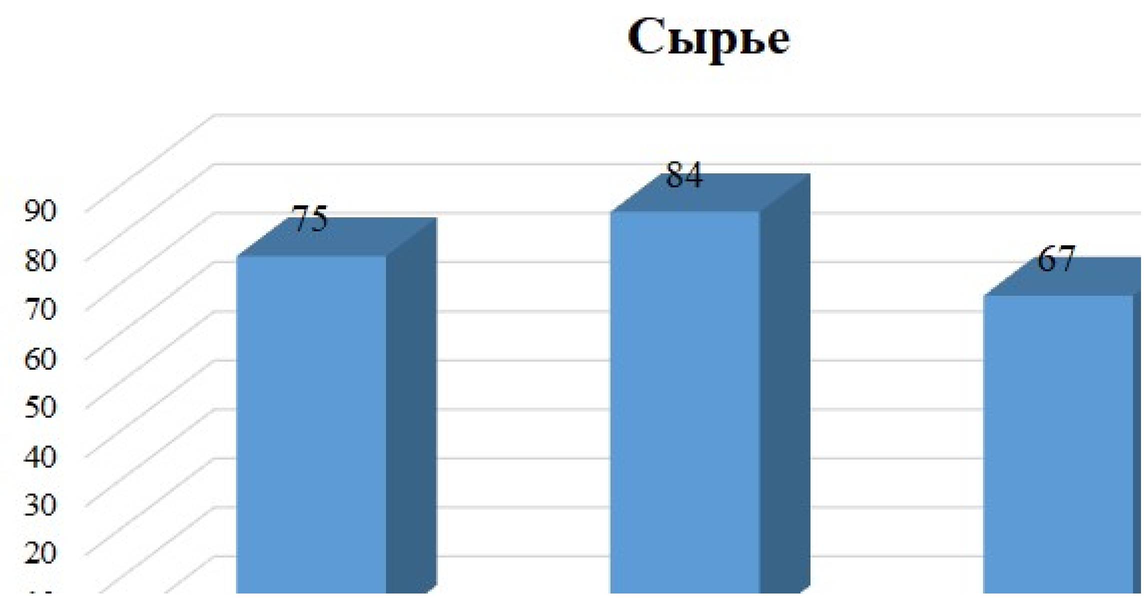

Рисунок 27 - Количество использованного сырья при изменяемом параметре Финансы

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере систем, которые описываются системой линейного программирования, исследованы основные закономерности поведения оптимального решения задачи в зависимости от его параметров. Показано, что существуют ключевые значения параметров, в которых происходит скачкообразное изменение целевой функции. В этом случае требуется провести анализ адекватности самой модели и обратить внимание на корректность моделирования ключевых параметров.

Именно исследование поведения целевой функции в окрестности ключевых значений является основным фактором максимизации маржинальной прибыли в задачах оптимального планирования.

6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. https://de.unecon.ru/pluginfile.php/834056/mod_resource/content/1/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%B0%2005.pdf
2. http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/99999999_West_2010_3/24.pdf