

# Динамическое обращение и нижние оценки

Екатерина Рыбина, 371 гр.

## 1 а

Пусть нам дан ориентированный граф со следующим свойством: какие бы ребра не удалялись и не добавлялись в него, длина любого пути в таком графе не превышает некоторого  $k$ . Придумайте, как использовать динамическое обращение матриц для поддержки динамического транзитивного замыкания в таком графе.

*Решение:*

Докажем, что если есть такое  $k$ , что  $A^k = 0$ , то

$$(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i$$

*Док-во:*

Домножим обе части на  $(I - A)$

$$(I - A) \sum_{i=0}^{k-1} A^i = \sum_{i=0}^{k-1} (I - A) A^i = \sum_{i=0}^{k-1} (A^i - A^{i+1}) = A^0 - A^1 + A^1 - A^2 + \dots + A^{k-2} - A^{k-1} + A^{k-1} - A^k$$

$A^0 = I$  и  $A^k = 0$  по условию, остальное сокращается.

Заметим, что  $\sum_{i=0}^{k-1} A^i$  это матрица расстояний, длина которых не больше чем  $k$ . Другими словами если мы можем использовать динамическое обращение матриц, то нам достаточно хранить  $(I - A)$ , чтобы поддерживать динамическое транзитивное замыкание в графе, где любой путь не больше чем  $k$ , вместо того чтобы постоянно вычислять  $\sum_{i=0}^{k-1} A^i$ .