Динамические кратчайшие пути

Екатерина Рыбина, 371 гр.

1 а

Нам дан ориентированный взвешенный граф G с положительными весами. Обновление — увеличение веса ребра (уменьшения запрещены). Предполагается, что кратчайшие пути уникальны (между парой вершин x и y есть только один кратчайший путь). Из этого следует, что если между вершинами x и y есть несколько однородных путей, то вершины в этих путях попарно различны (кроме самих конечных вершин x и y)
Доказать следующее утверждение:
Не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра *становятся* однородными. В качестве доказательства придумать такой худший случай.

Решение:
Увеличим вес ребра (v, x).
Зафиксируем вершину y.
Для пути $(v, x)\pi y$ может быть не более одного однородного пути. Если есть путь из x в y, то по условию задачи только один кратчайший путь. Следовательно и из v в y через вершину x только один однородный путь. Тогда для любой комбинации ребра и вершины может быть не более одного однородного пути.
Всего рёбер m, значит есть возможность выбрать m различными способами ребро. Количество вершин n - n способов выбрать вершину. Значит однородных путей не может быть не более, чем nm. Но так как рёбер в графе не может быть больше n^2, то однородных путей не более n^3.

Теперь приведём пример худшего случая.

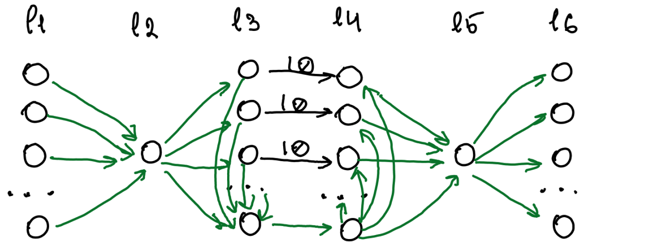

рис.1

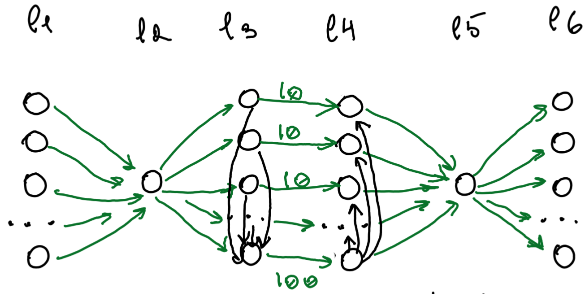

рис.2

В данном графе, если не указан вес ребра, то он равен 1. Зелёным обозначены однородные пути (рис.1). Граф разделен на слои, в каждом из которых порядка n вершин (кроме слоя 2 и 4).
Пусть вес ребра из третьего слоя в четвертый, измениться с 1го на 100. Тогда пути из слоя 3 в слой 4 будут идти по рёбрам с весом 10 (рис.2).
1) Из вершины первого слоя есть n путей в третий, тогда всего путей из 1 в 3 n^2.
2) Из вершины 4го слоя в 6й так же n путей.
Итого однородных путей из 1го в 6й слой n^3.

2 а

Доказать, что не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра *перестают быть* однородными.

Решение:
Увеличим вес ребра (v, x).
По определению однородного пути все его подпути являются кратчайшими. Тогда путь, который содержит (v, x) перестанет быть однородным, если подпуть, содержащий его, станет не кратчайшим. Другими слова-

ми нам надо посчитать сколько максимум однородных путей проходит через (v, x).
1) Допустим (v, x) начало или конец этого пути. Тогда мы можем выбрать не более n возможных вершин, которые образуют с нашим ребром однородный путь. Из предыдущего утверждения знаем, что таких путей не более одного для одной вершины, а значит всего путей не больше n.
2) Если же (v, x) внутри однородного пути (то есть v и x не начало и не конец), мы можем выбрать не более n возможных вершин для начала и не более n для конца. Тогда максимум таких путей не более n^2.
И того получаем не более n^2 путей перестанет быть однородными после увеличения веса ребра (v, x).