Ekananda Zhafif Dean - 2306264420

Tugas Aljut 16.10 dan 16.11

16.10 - Rumus posisi akhir S_N untuk unit massa :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} (N - k + 0{,}5)\, f_k$$

Untuk $N = 10$, vektor koefisiennya (c) adalah :

$$c = \begin{bmatrix} 9{,}5 \\ 8{,}5 \\ 7{,}5 \\ 6{,}5 \\ 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Dimana elemen ke-j adalah $(10 - j + 0{,}5)$

Masalah Optimasi :

1. Minimalkan energi / gaya : $\|f\|^2$
2. Kendala : Posisi akhir = 1 (Tak ada kendala kecepatan)

Solusi :

Rumus solusi Least Norm $\hat{x} = C^T (CC^T)^{-1} d$ menjadi lebih sederhana ketika c adalah vektor baris $c^T \Rightarrow \hat{f} = c(c^T c)^{-1} \cdot 1 = \dfrac{c}{\|c\|^2}$ (vektor gaya optimal $\hat{f}$ sejajar dengan vektor koef. c)

Hitung $\|c\|^2$:

$$c = [9.5, 8.5, 7.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 2.5, 1.5, 0{,}5]^T$$

$$\|c\|^2 = 9{,}5^2 + 8{,}5^2 + \ldots + 0{,}5^2 \rightarrow \left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4}(19^2 + 17^2 + \ldots + 1^2)$$

Jumlah kuadrat bil. ganjil dari 1 sampai $2n-1$ (dimana $n = 10$) rumusnya $\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$:

$$\text{Sum} = \frac{10(19)(21)}{3} = 10 \cdot 19 \cdot 7 = 1330$$

$$\|c\|^2 = \frac{1330}{4} = 332{,}5$$

Solusi urutan gayanya :

$$\hat{f} = \frac{1}{332{,}5} \begin{bmatrix} 9{,}5 \\ 8{,}5 \\ 7{,}5 \\ 6{,}5 \\ 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nilai gaya menurun secara linear dari awal $(t = 1)$ hingga akhir $(t = 10)$. Gaya terbesar diberikan di awal.

Dipindai dengan CamScanner

Perbandingan dengan contoh halaman 343 :

- Contoh hal 343 (Posisi = 1, kecepatan = 0) : Pada contoh ini kita memiliki 2 kendala. Untuk berhenti tepat di posisi 1, kita perlu gaya positif di awal untuk mempercepat, dan gaya negatif di akhir untuk memperlambat agar kecepatan menjadi 0 saat sampai. Grafik gayanya akan terlihat naik lalu turun menembus 0 (menjadi negatif). Normnya ($\|f\|^2$) akan lebih besar karena perlu energi ekstra untuk mengerem.

- Soal ini (Posisi 1, Kecepatan bebas) : Solusi diatas ($f \propto C$) menunjukkan semua gaya bernilai positif. Kita hanya mendorong benda tersebut searah target. Karena tak perlu berhenti, kita tidak perlu membuang energi untuk pengereman.

Penjelasan intuitif $\Rightarrow$ Tanpa syarat kecepatan akhir 0, kita tidak perlu melakukan pengereman (gaya negatif) pada mobil, sehingga total gaya yang dibutuhkan lebih kecil (efisien).

16.11 - Masalah optimasi $\Rightarrow \hat{x} = a - C^{+}(Ca - d)$ (dengan asumsi baris-baris matriks C independen linear).

Misal, kita definisikan variabel baru y sebagai selisih antara x dan a :

$y = x - a$

Kita tulis x sebagai :

$x = y + a$

Transformasi fungsi objektif dan kendala :

1) Fungsi objektif :

$\|x - a\|^2$

Subtitusi $x - a = y$, jadi $\Rightarrow \|y\|^2$

2) Kendala :

$Cx = d$

Subtitusi $x = y + a$:

$C(y + a) = d$

Distribusi matriks C

$Cy + Ca = d$

Pindahkan Ca ke ruas kanan agar variabel y berdiri sendiri di ruas kiri :

$Cy = d - Ca$

Menyelesaikan masalah Least Norm baru (lebih sederhana) :

minimize $\|y^2\|$

subject to $Cy = (d - Ca)$

$\Rightarrow$ Jika kita memiliki masalah meminimalkan $\|y\|^2$ dengan kendala $Cy = b_{baru}$, dan baris-baris C independen linear, solusi analitiknya adalah :

$\hat{y} = C^T(CC^T)^{-1} b_{baru}$

$\Rightarrow$ Solusi untuk y $\Rightarrow \hat{y} = C^{+}(d - Ca)$, $C^{+} = C^T(CC^T)^{-1}$

CS Dipindai dengan CamScanner

Mengembalikan ke variabel asli x :

$$\hat{x} = \hat{y} + a$$

$$\hat{x} = a + C^{+} (d - Ca)$$

$$\hat{x} = a + C^{+} [-(Ca - d)]$$

$$\hat{x} = a - C^{+} (Ca - d)$$

Jadi, terbukti bahwa solusi dari masalah least distance tersebut adalah $\hat{x} = a - C^{+} (Ca - d)$

CS Dipindai dengan CamScanner