信号处理原理-02

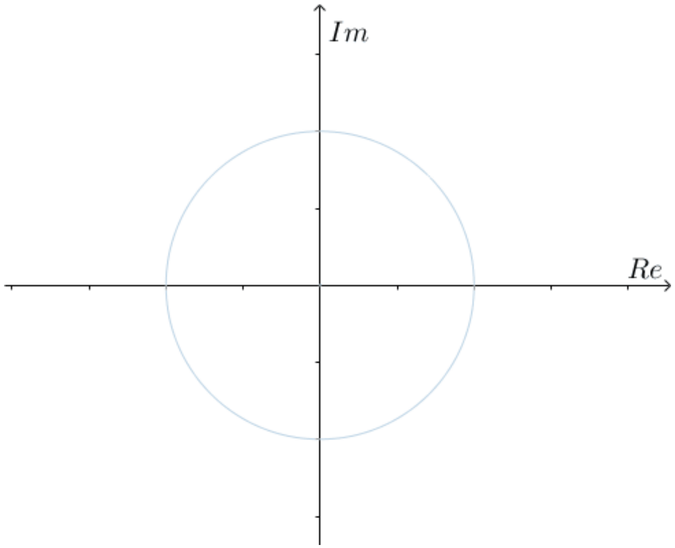
刘华平

清华大学

欧拉公式

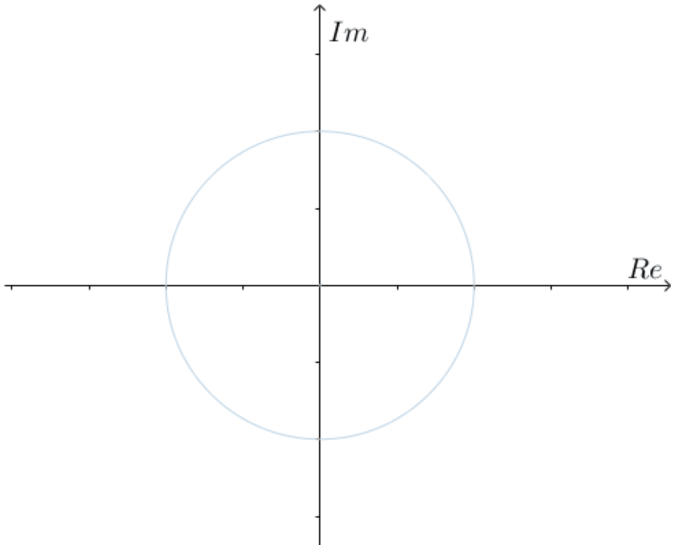
欧拉公式

欧拉公式将**三角函数**与**复数指数函数**相关联



欧拉公式

欧拉公式将三角函数与复数指数函数相关联

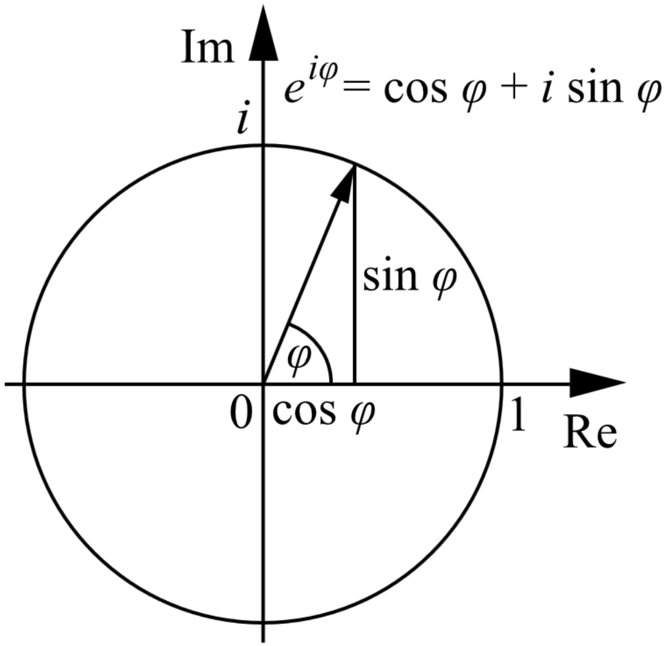


$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

欧拉公式把实数的三角运算变成了复数的旋转运算，把指数运算变成了乘积运算，把纯微分方程的求解过程变成了指数方程的求解过程，大大简化了运算。

欧拉公式

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$



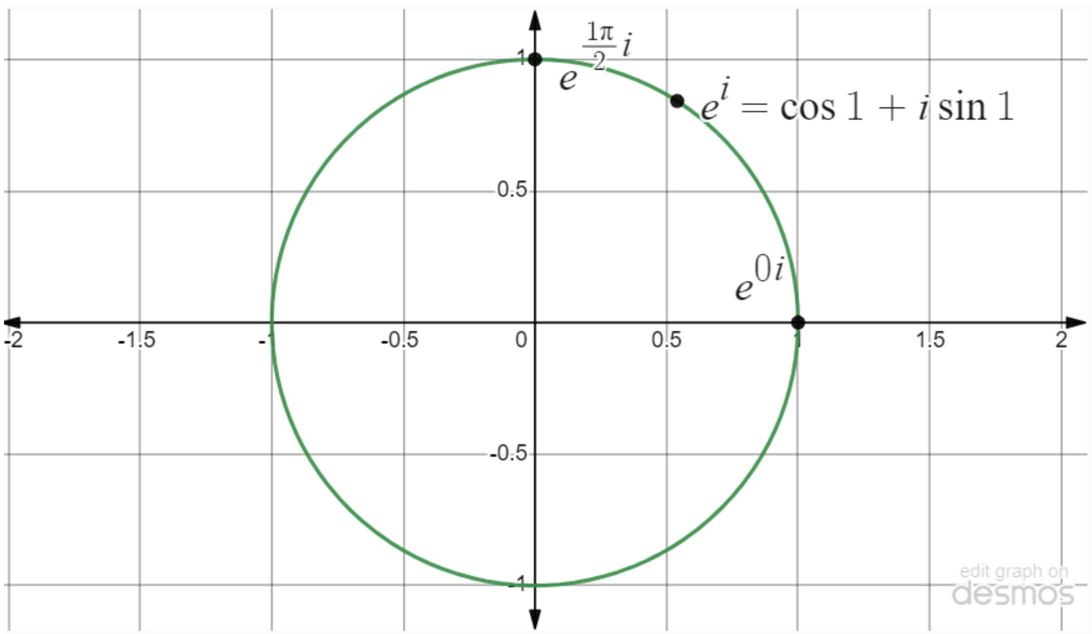
$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

欧拉公式

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$\left(e^{j}\right)^{\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$



$$e^{0} = \cos(0) + j\sin(0)$$

$$e^{j} = \cos(1) + j\sin(1)$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2})$$

$$e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi)$$

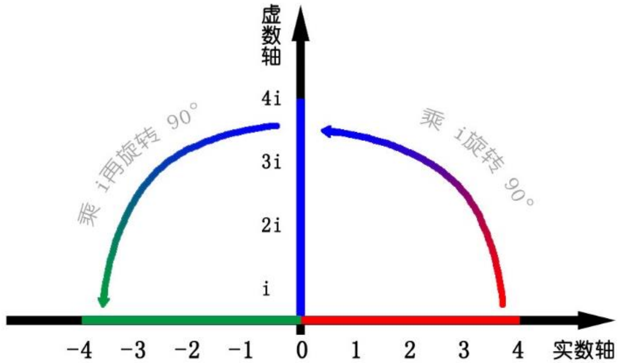
$$e^{j2\pi} = \cos(2\pi) + j\sin(2\pi)$$

欧拉公式

$$e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi)$$

上帝公式

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$



- 一个人第一次看到这个公式而不感到它的魅力，他不可能成为数学家。

欧拉公式——证明

➢ 方法一：泰勒级数法

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

欧拉公式——证明

- 方法二：微分法

$$f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x + i\cos x)\cdot e^{ix} - (\cos x + i\sin x)\cdot i \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} - i^2 \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} + \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2}$$

$$= 0$$

欧拉公式——应用

➢复指数信号

$$f(t) = Ke^{st}$$

复指数信号与正余弦信号之间的关系

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t}$$

$$= Ke^{\sigma t} \cdot e^{+j\omega t}$$

$$= Ke^{\sigma t} \cdot (\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

欧拉公式

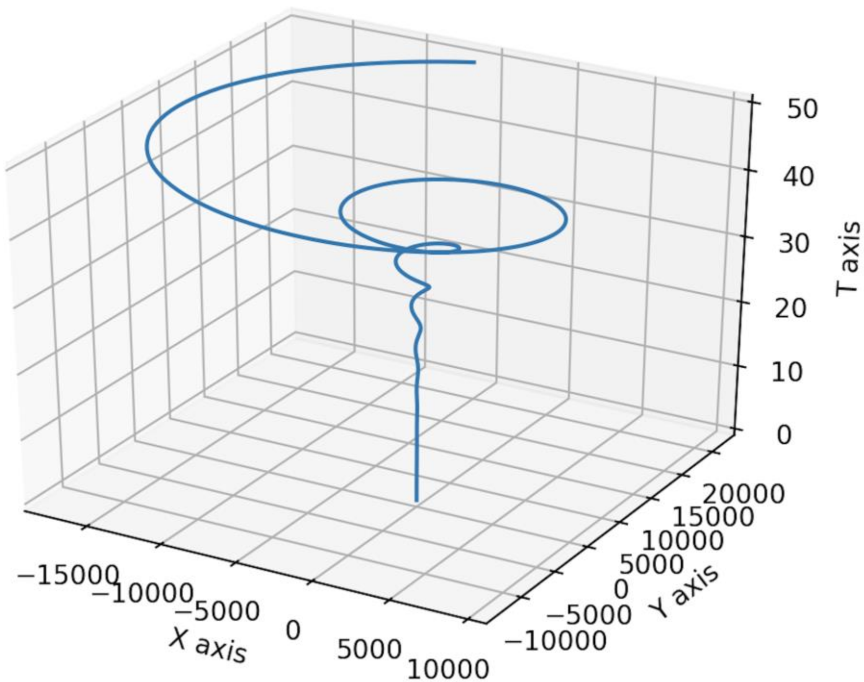
$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

欧拉公式——应用

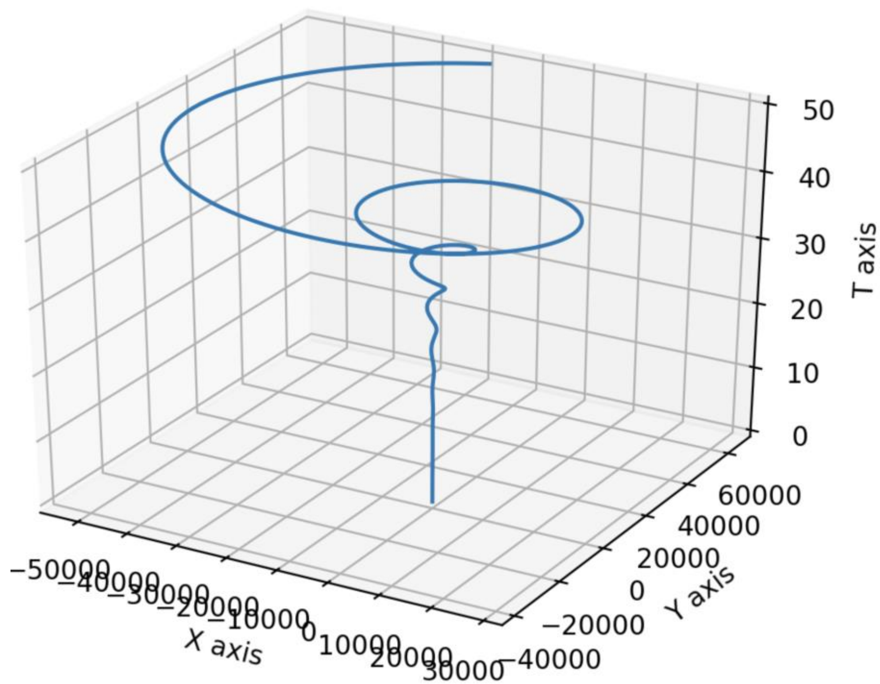
➢复指数信号　$f(t) = Ke^{st}$　$Ke^{\sigma t} \cdot (\cos\omega t + j\sin\omega t)$

K,σ和ω的取值不同，复指数信号有什么不同?

$\sigma = 0.2$，　$\omega = 1$，　K**取不同的值**



$K = 1$



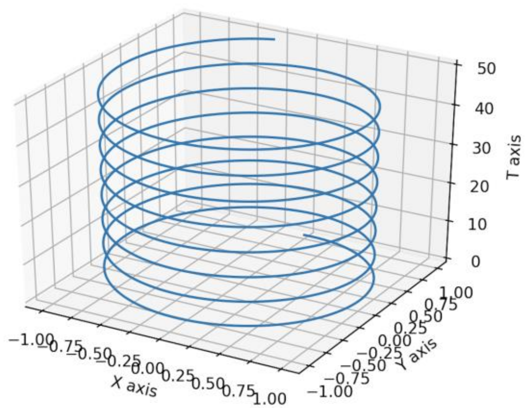
$K = 3$

欧拉公式——应用

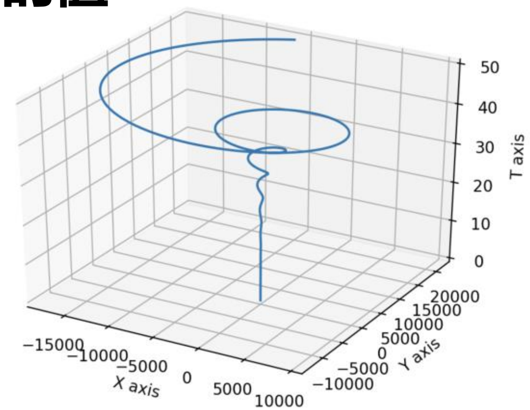
➢复指数信号 $f(t)=Ke^{st}$ $Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

K,σ和ω的取值不同，复指数信号有什么不同?

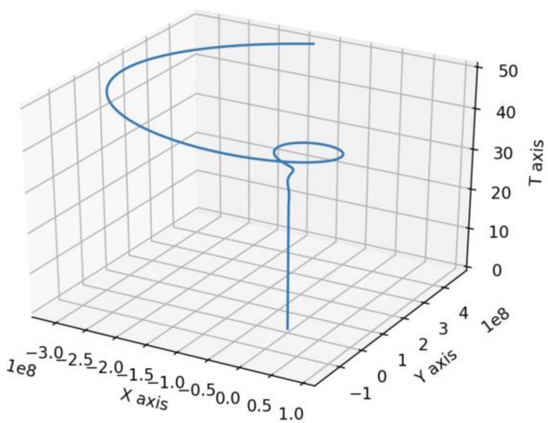
K=1， ω=1， σ取不同的值



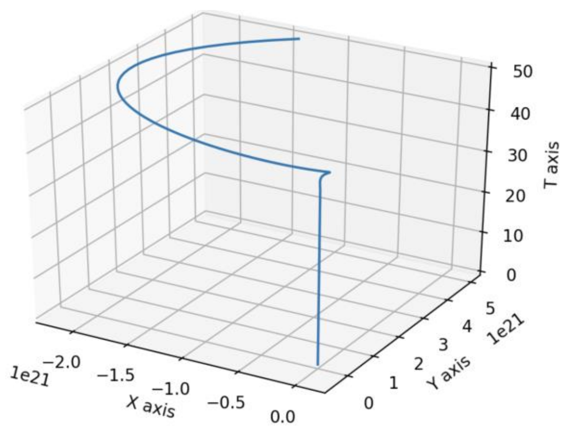
$\sigma=0$



$\sigma=0.2$



$\sigma=0.4$



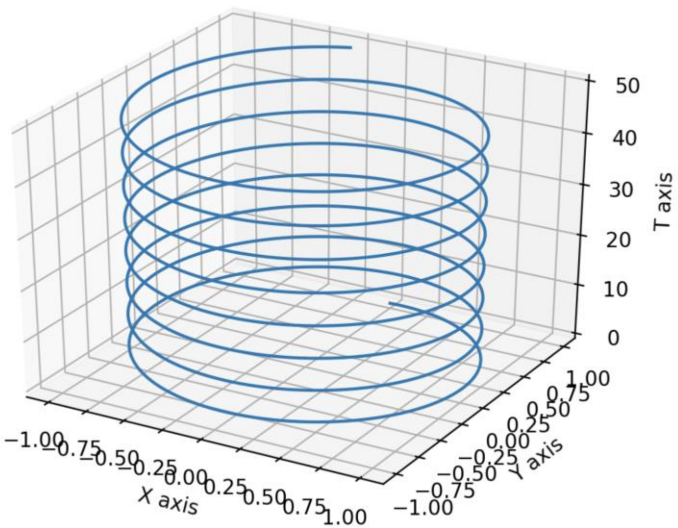
$\sigma=1$

欧拉公式——应用

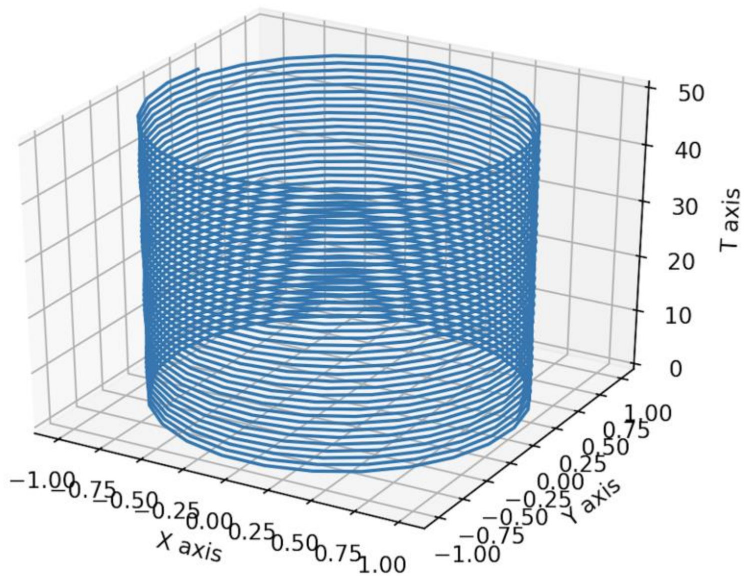
➢复指数信号 $f(t)=Ke^{st}$ $Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

K,σ和ω的取值不同，复指数信号有什么不同?

K=1， σ=0， **ω取不同的值**



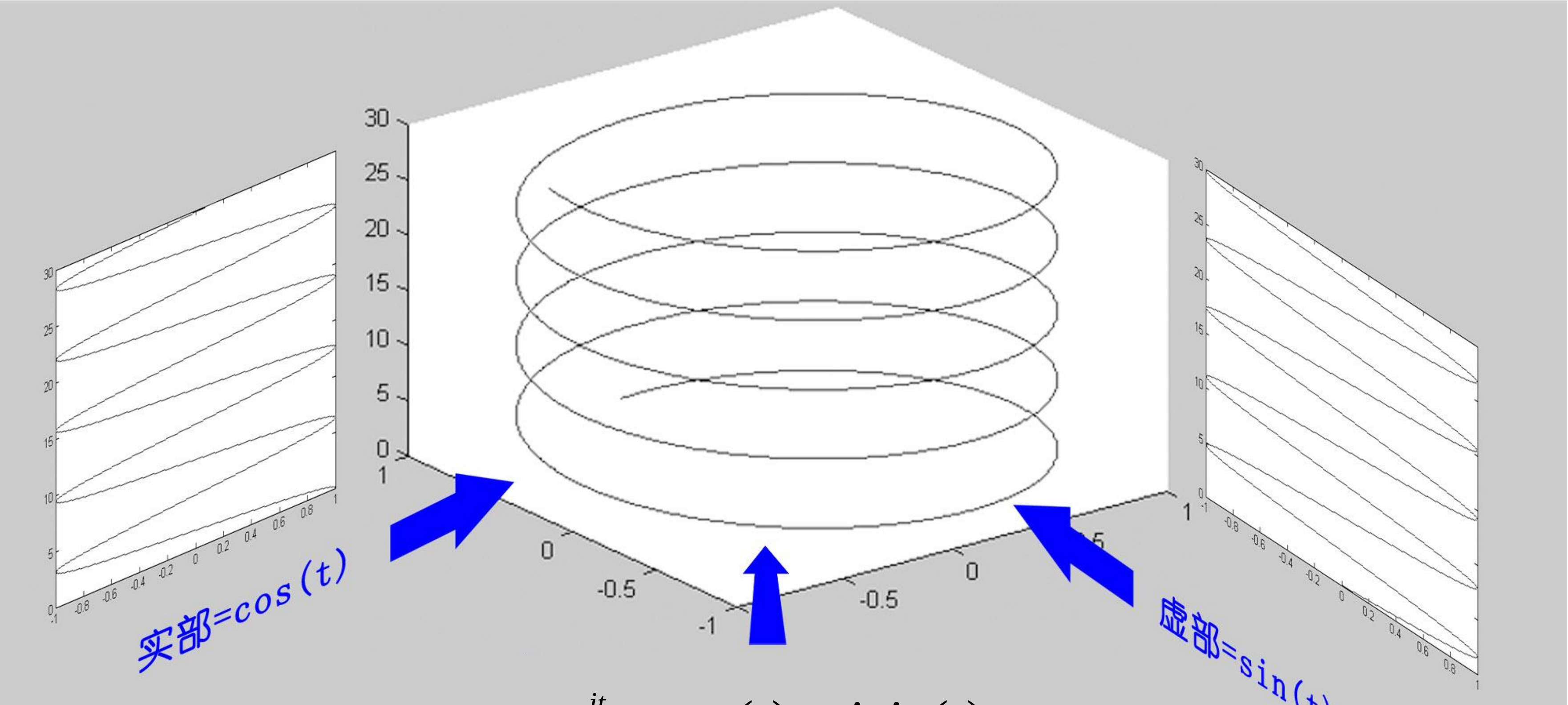
ω=1



ω=5

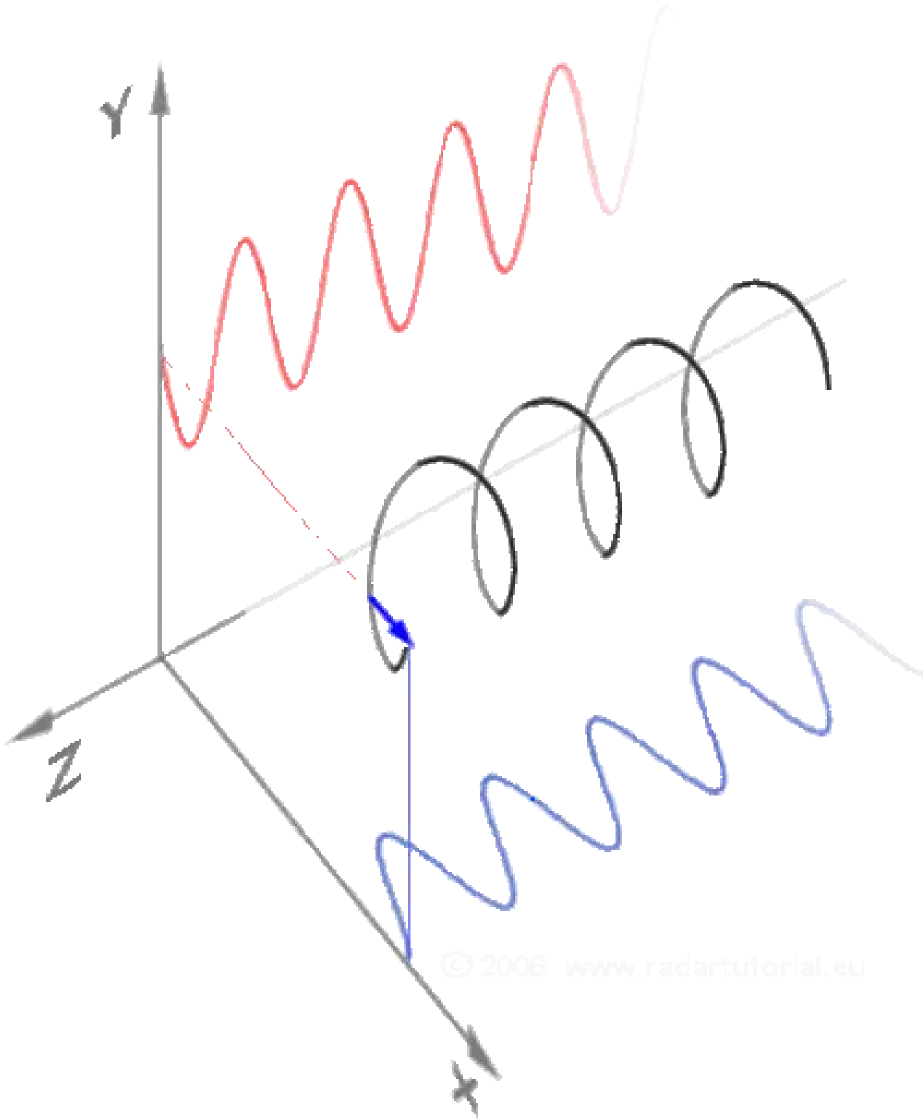
欧拉公式——应用

$$e^{jt}$$



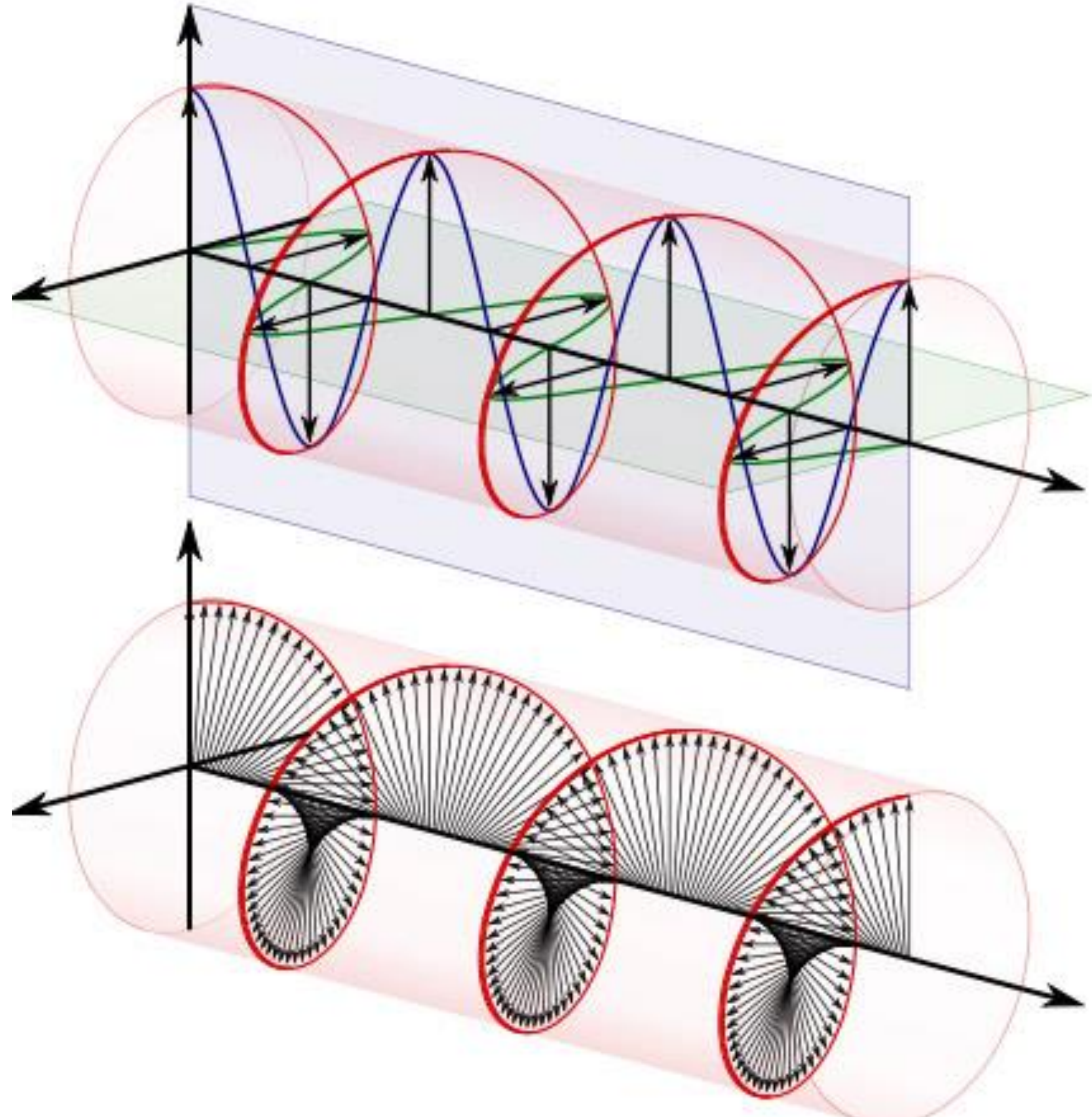
$$e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$$

欧拉公式——应用



欧拉公式——应用

- 难点：如何统一描述电场与磁场信号？
- Tips：电场与磁场90度垂直
- 解决方案：用复值信号的实数部分和虚数部分分别表示电场与磁场信号。



- 电场与磁场可以用复数完美地表示！

常规运算
- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

数学运算
- 微分运算 $\frac{df(t)}{dt}$
- 积分运算 $\int_0^t f(\tau)d\tau$

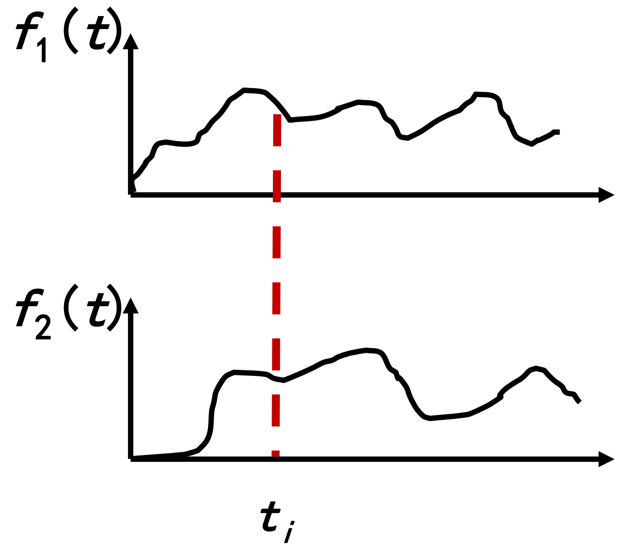
波形变换
- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

常规运算

- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

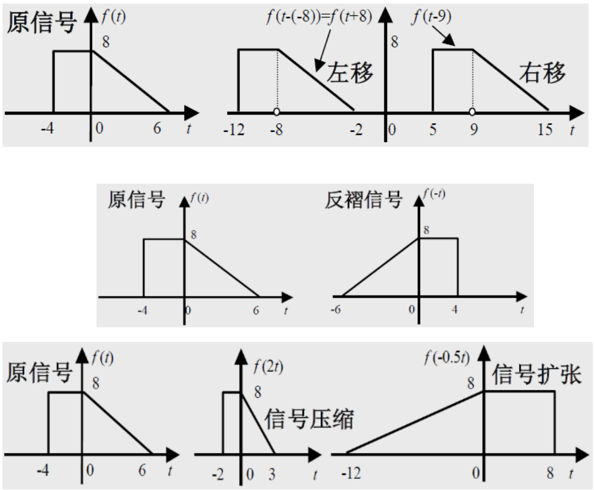
因变量



波形变换

- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

自变量



常规运算
- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

数学运算
- 微分运算 $\frac{df(t)}{dt}$
- 积分运算 $\int_0^t f(\tau)d\tau$

波形变换
- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

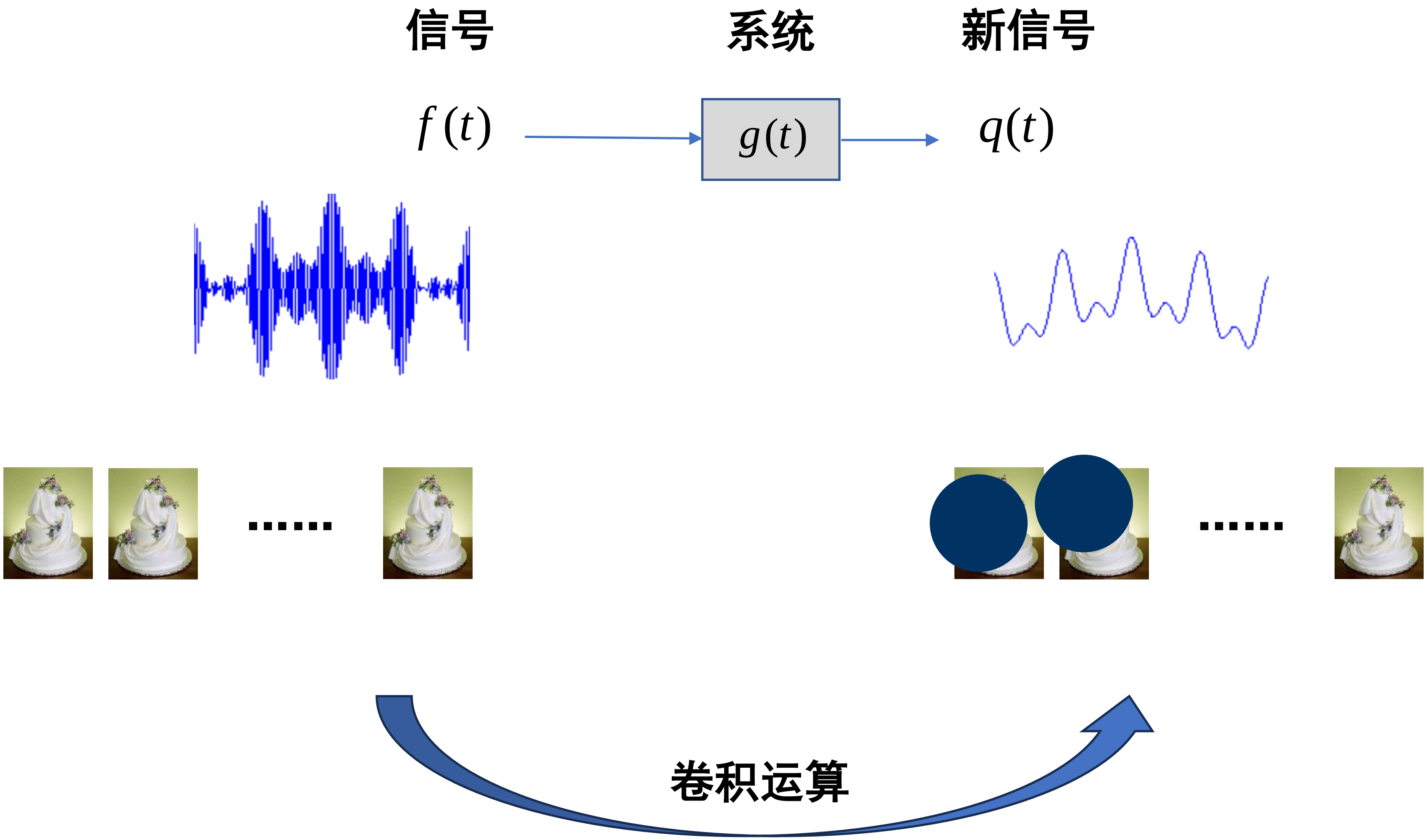
信号的卷积运算

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

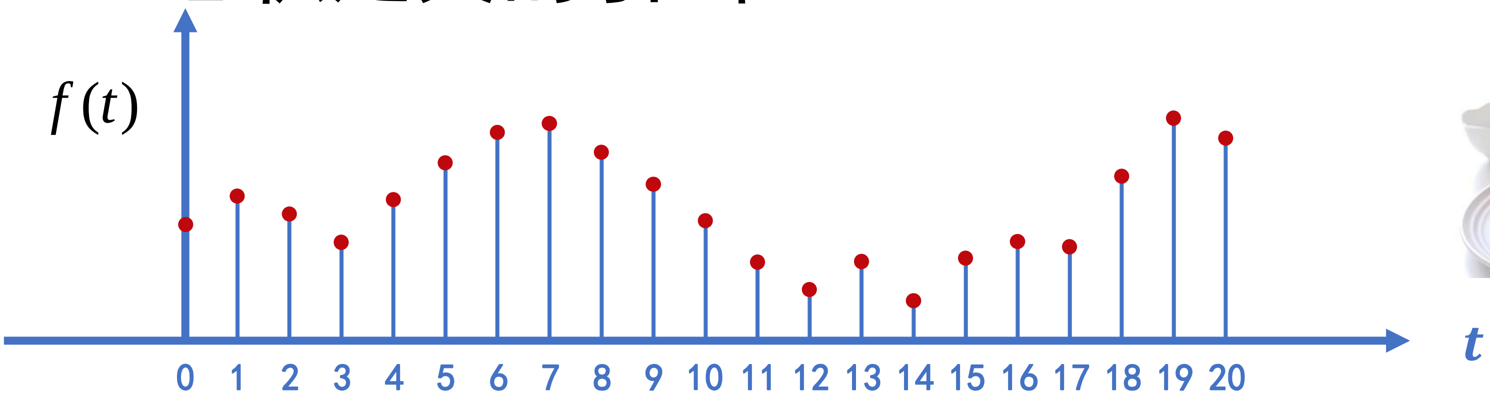
信号的卷积运算——定义

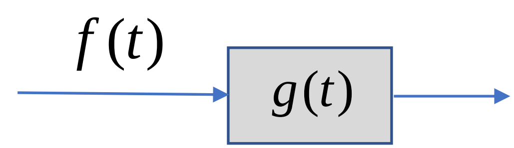
➢ 卷积定义的引出



信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

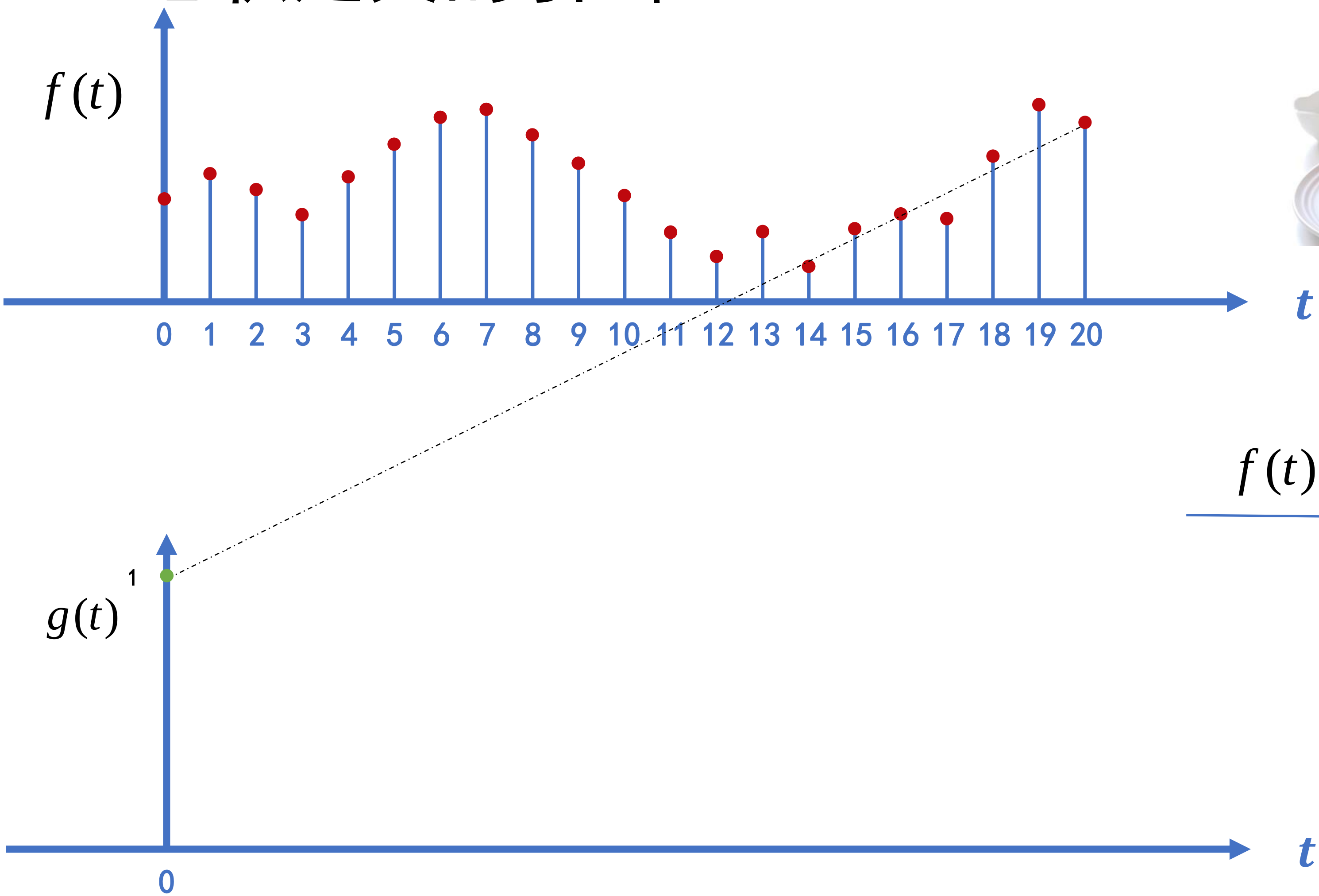


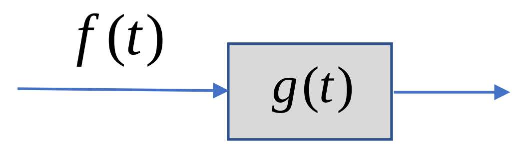


保质期
1天

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

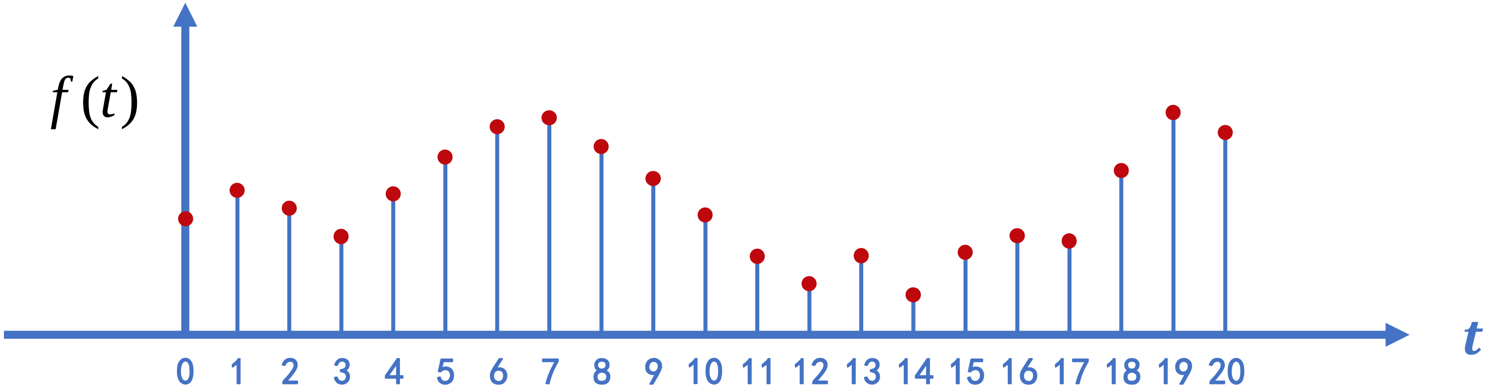


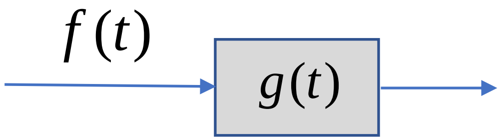


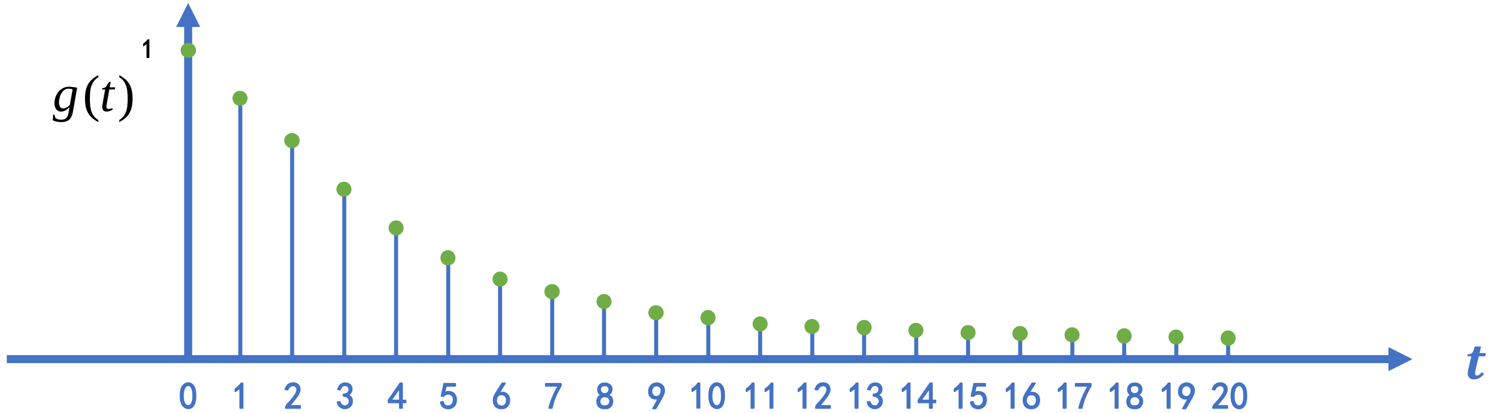
保质期
1天

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出

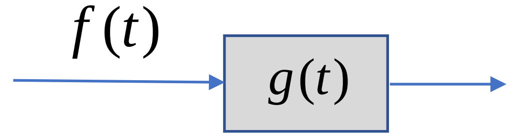


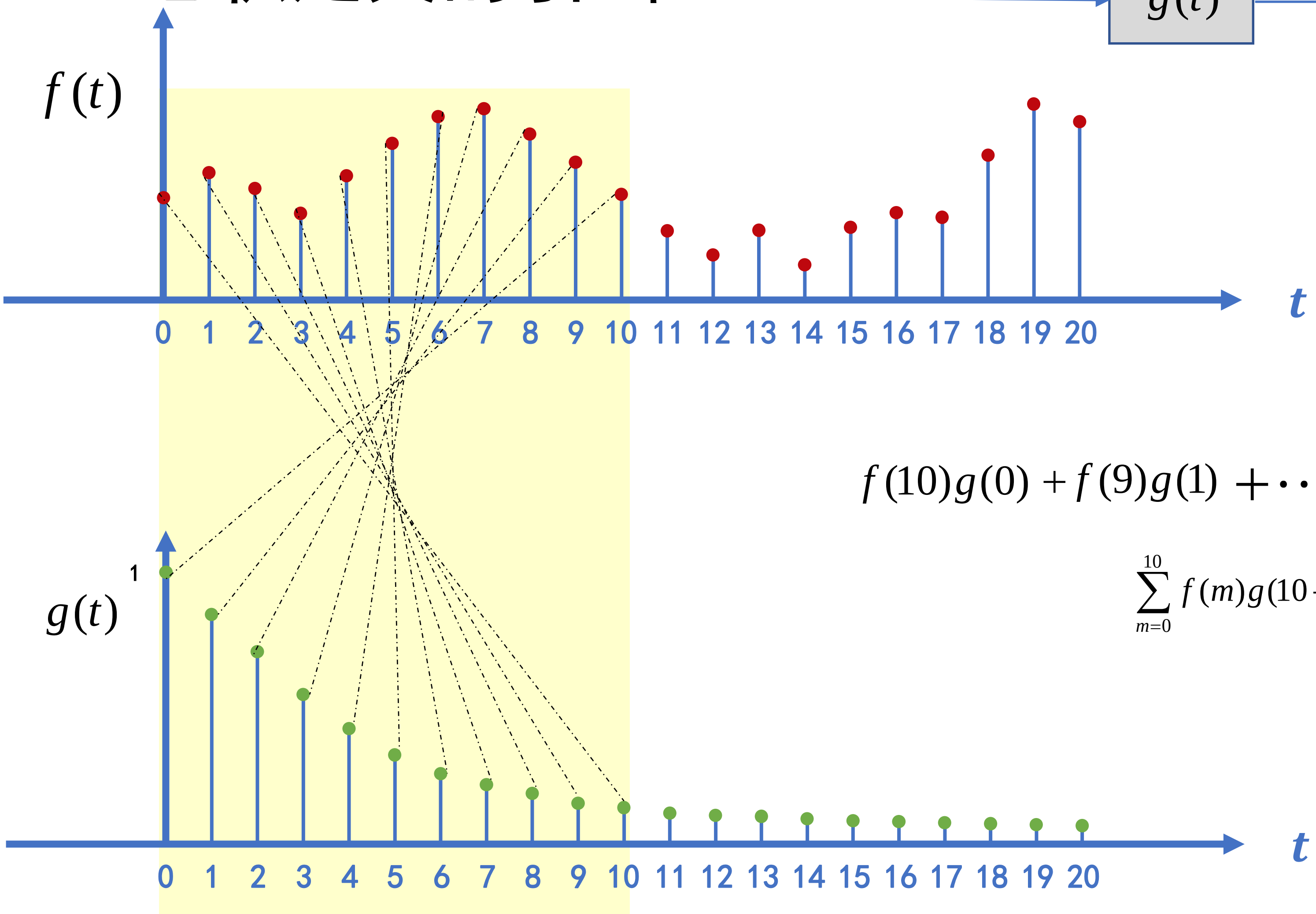




信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



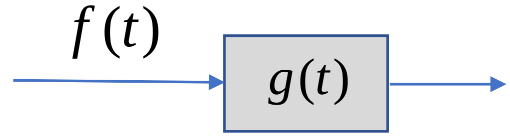


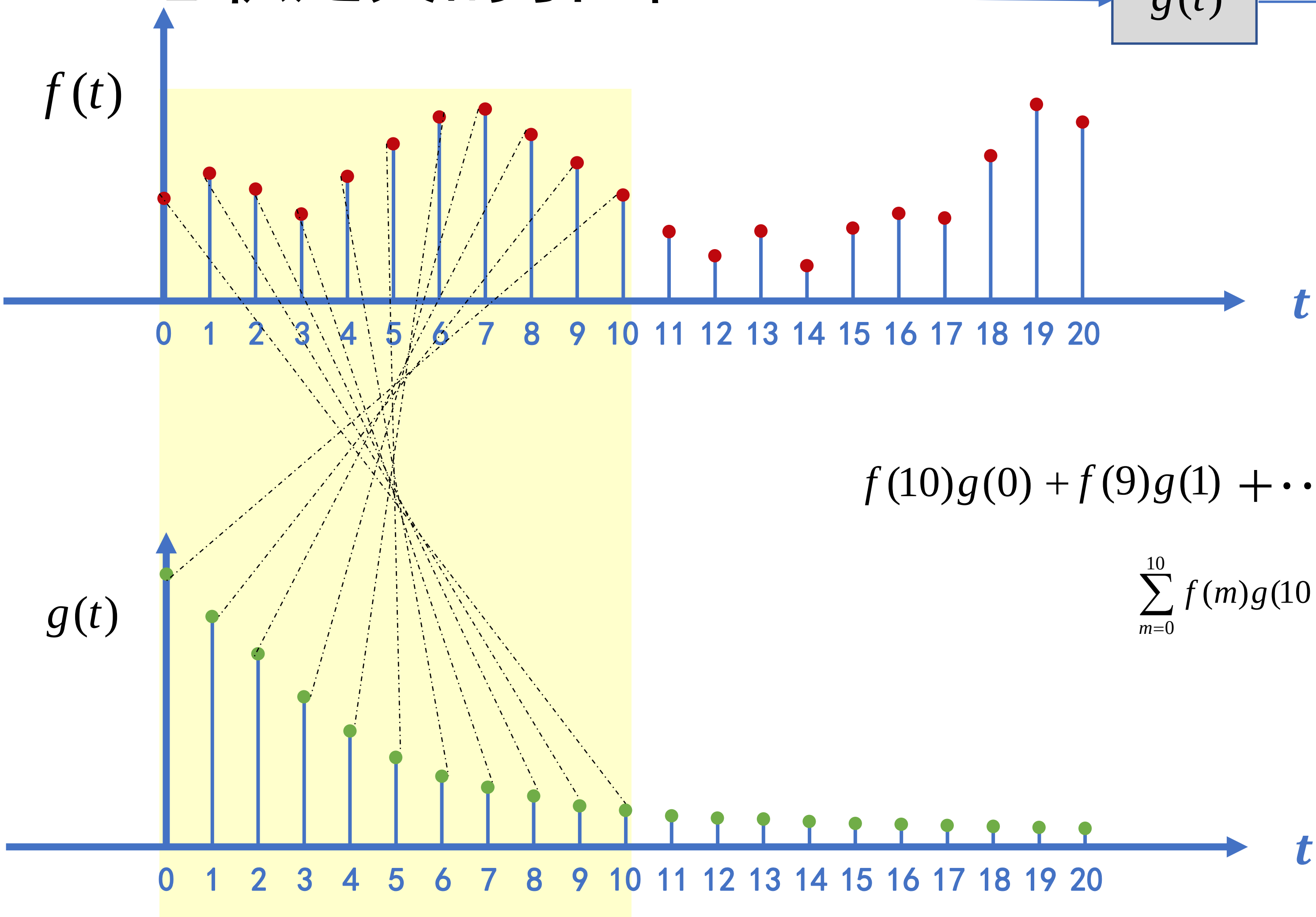
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



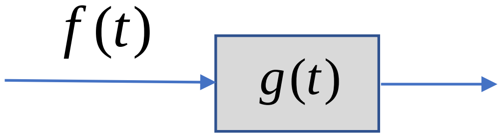


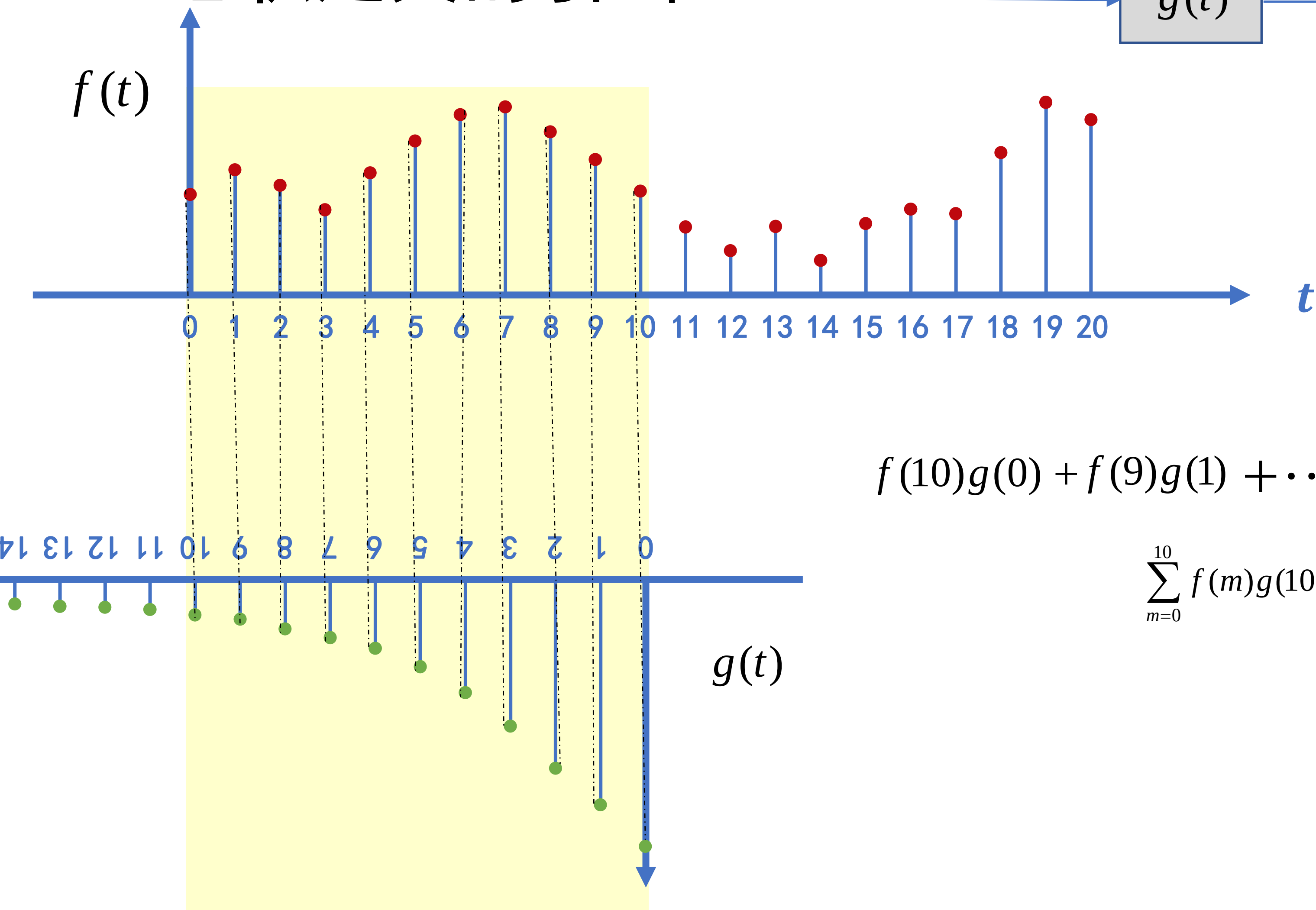
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



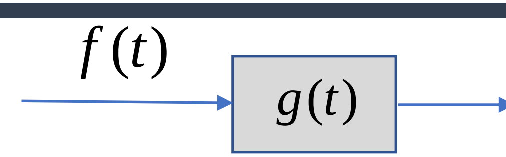


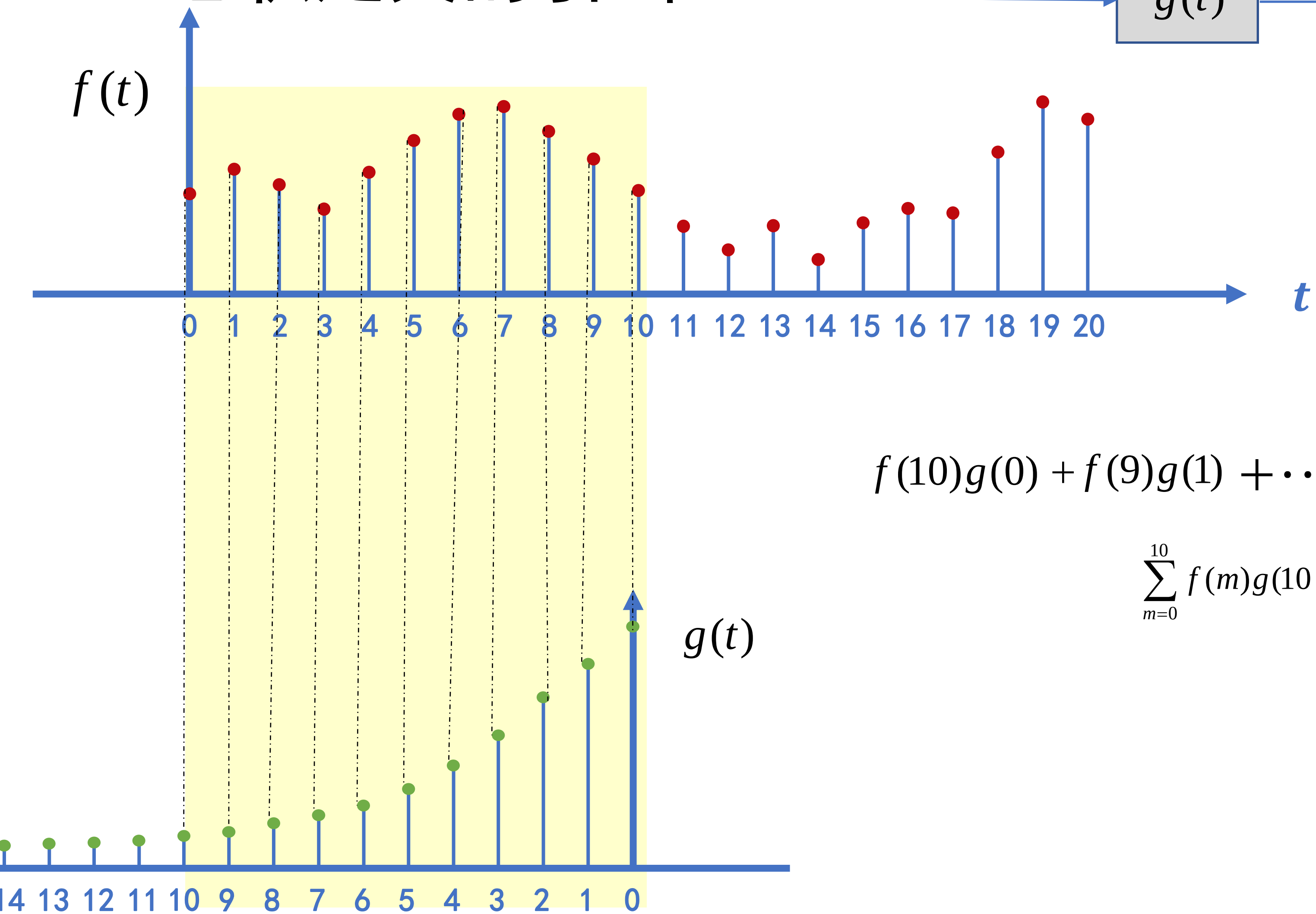
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



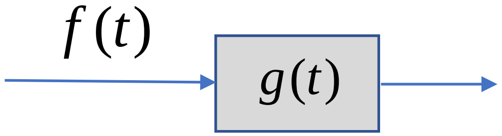


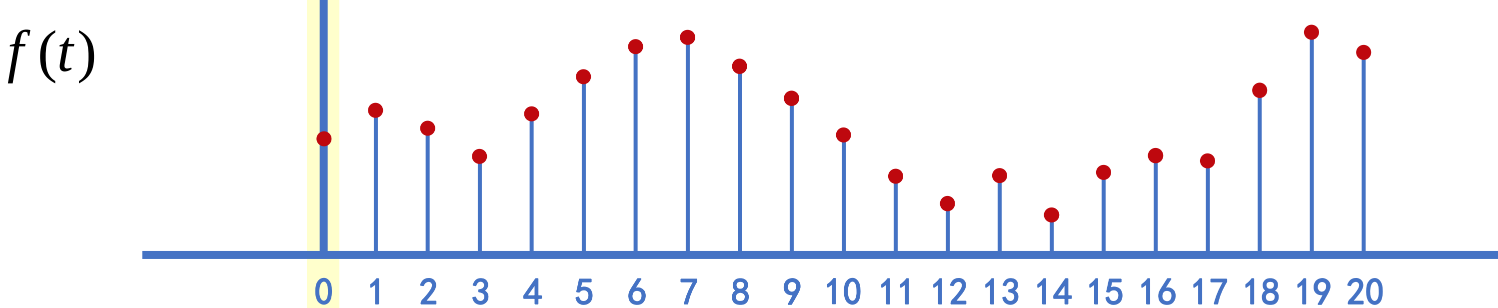
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

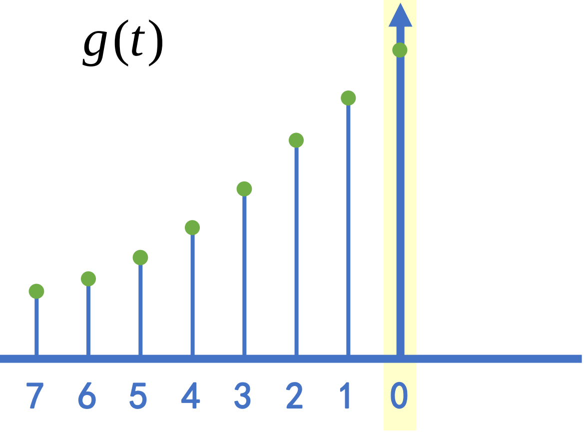
$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



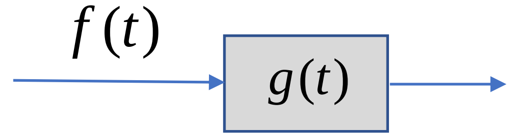


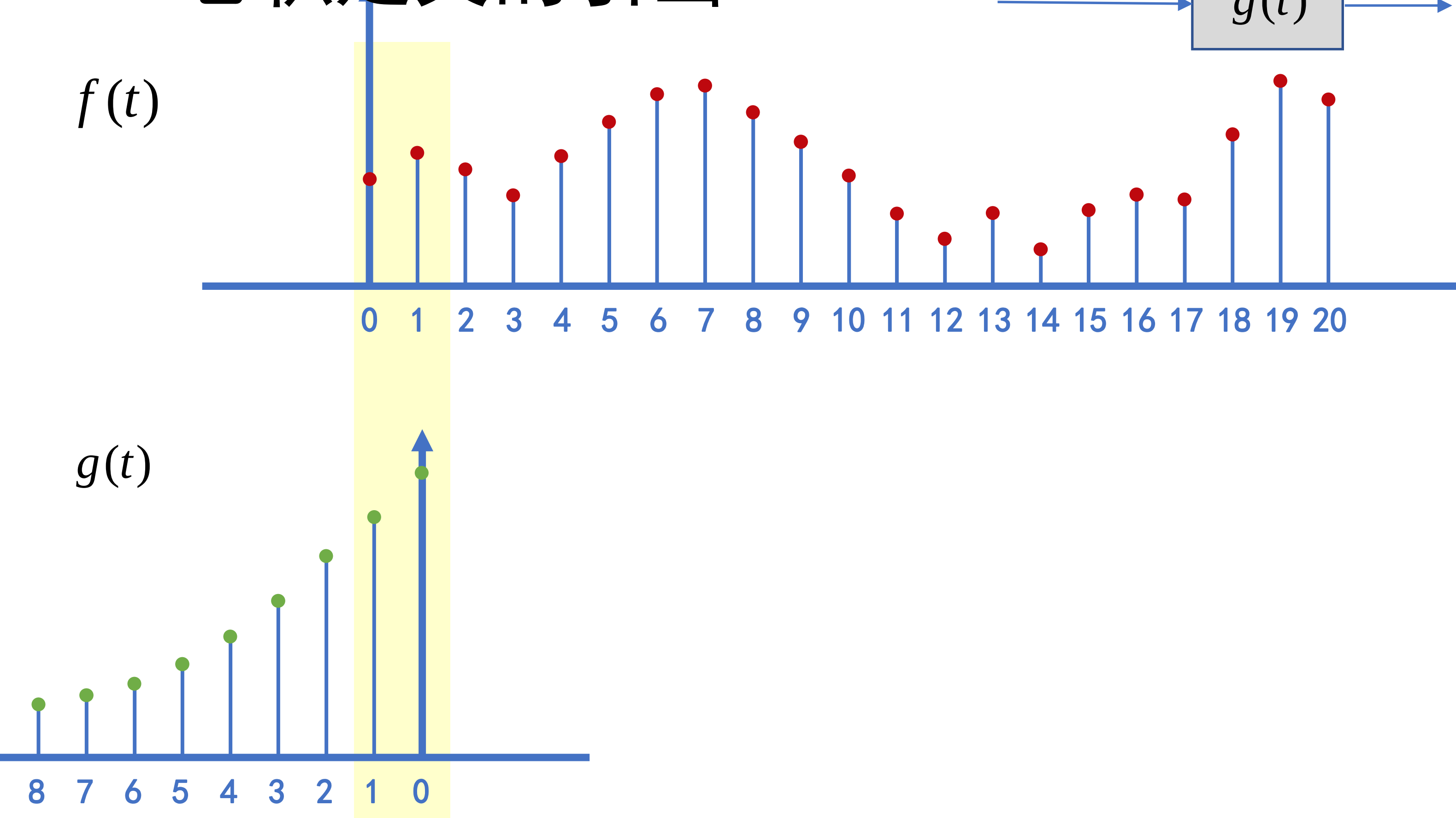


$$(f * g)(0) = f(0)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

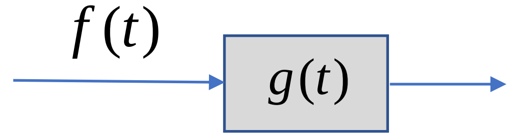


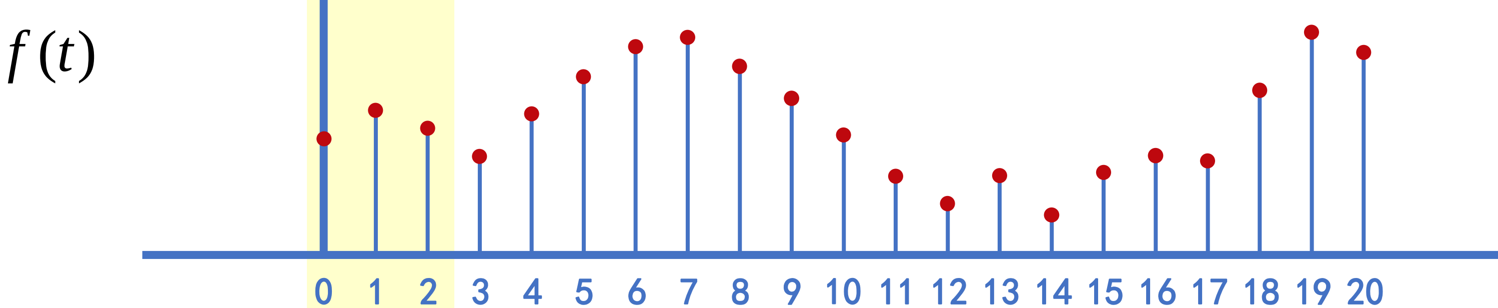


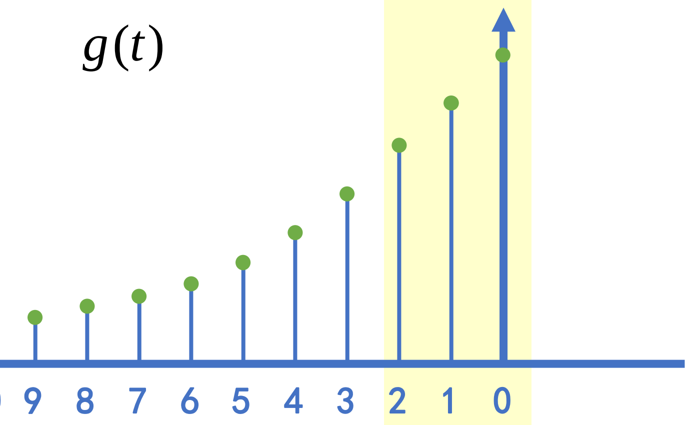
$$(f*g)(1)=f(0)g(1)+f(1)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



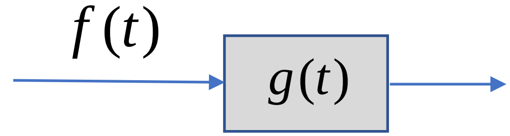


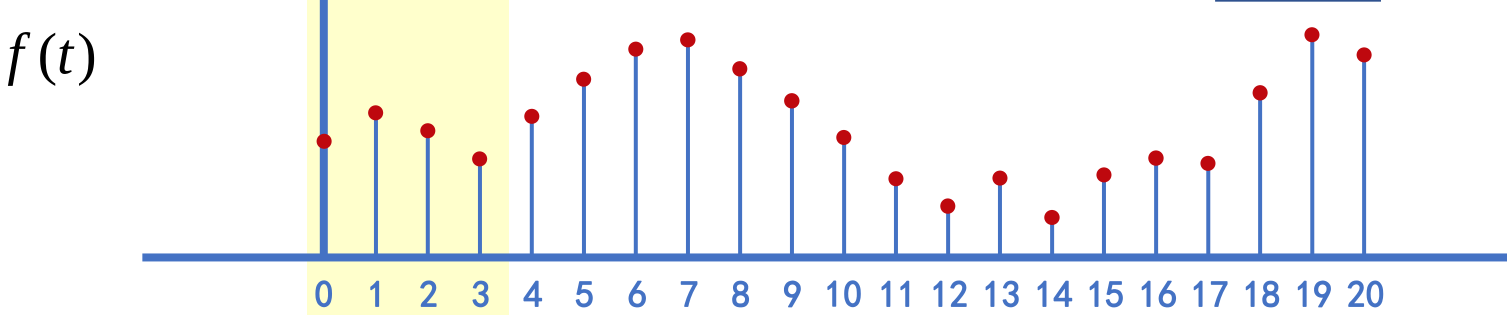


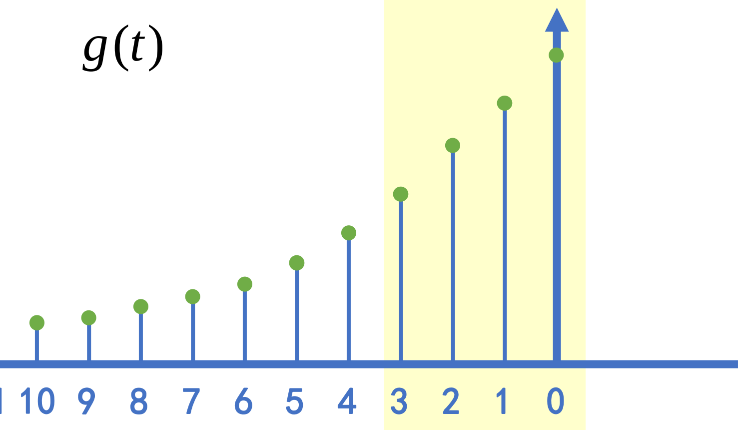
$$(f*g)(2)=f(0)g(2)+f(1)g(1)++f(2)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



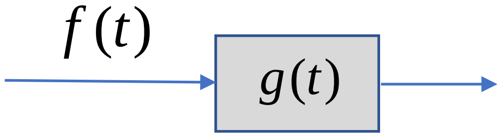


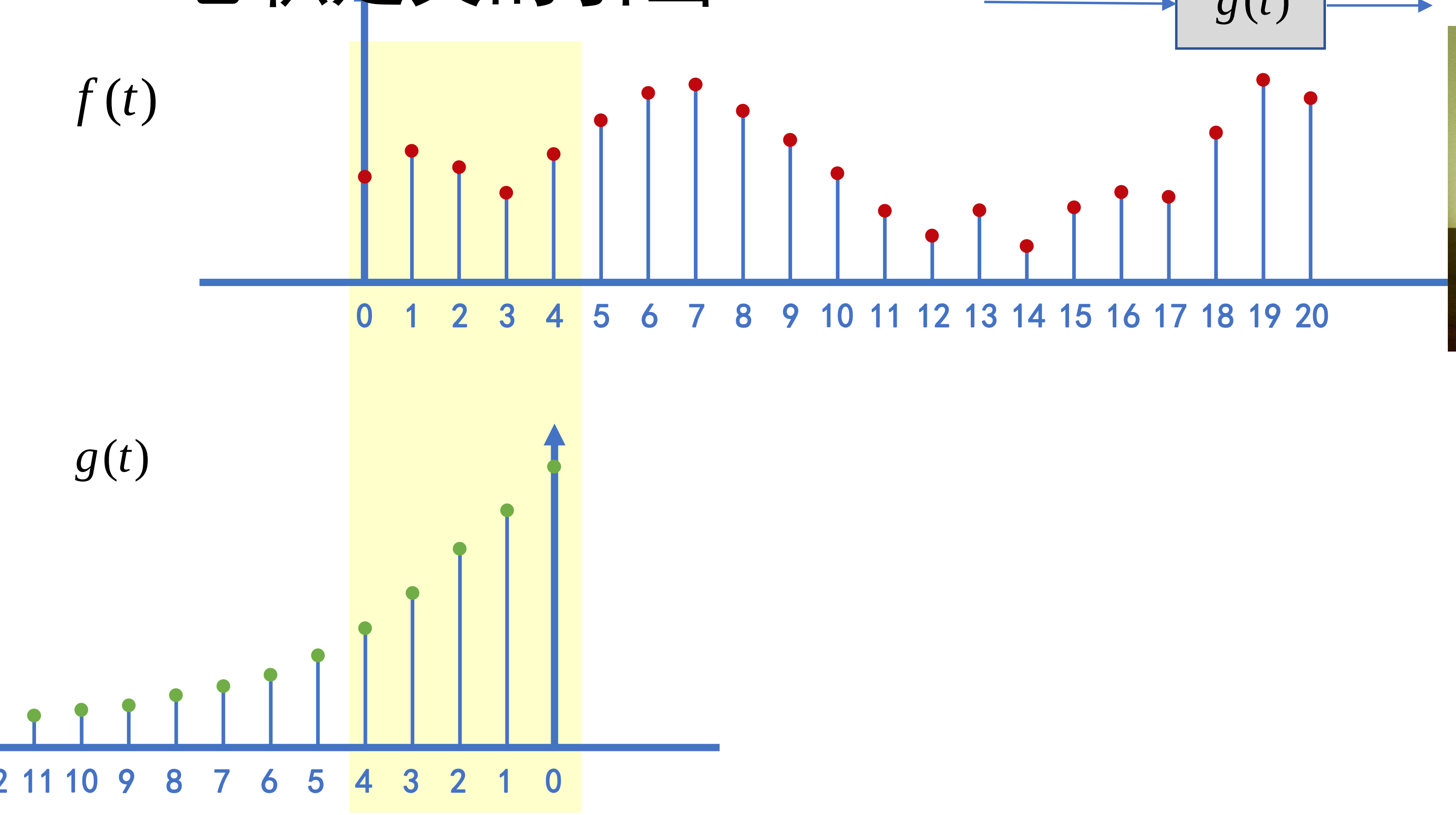


$$(f*g)(3) = f(0)g(3) + f(1)g(2) + f(2)g(1) + f(3)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出

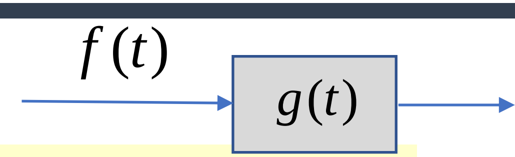


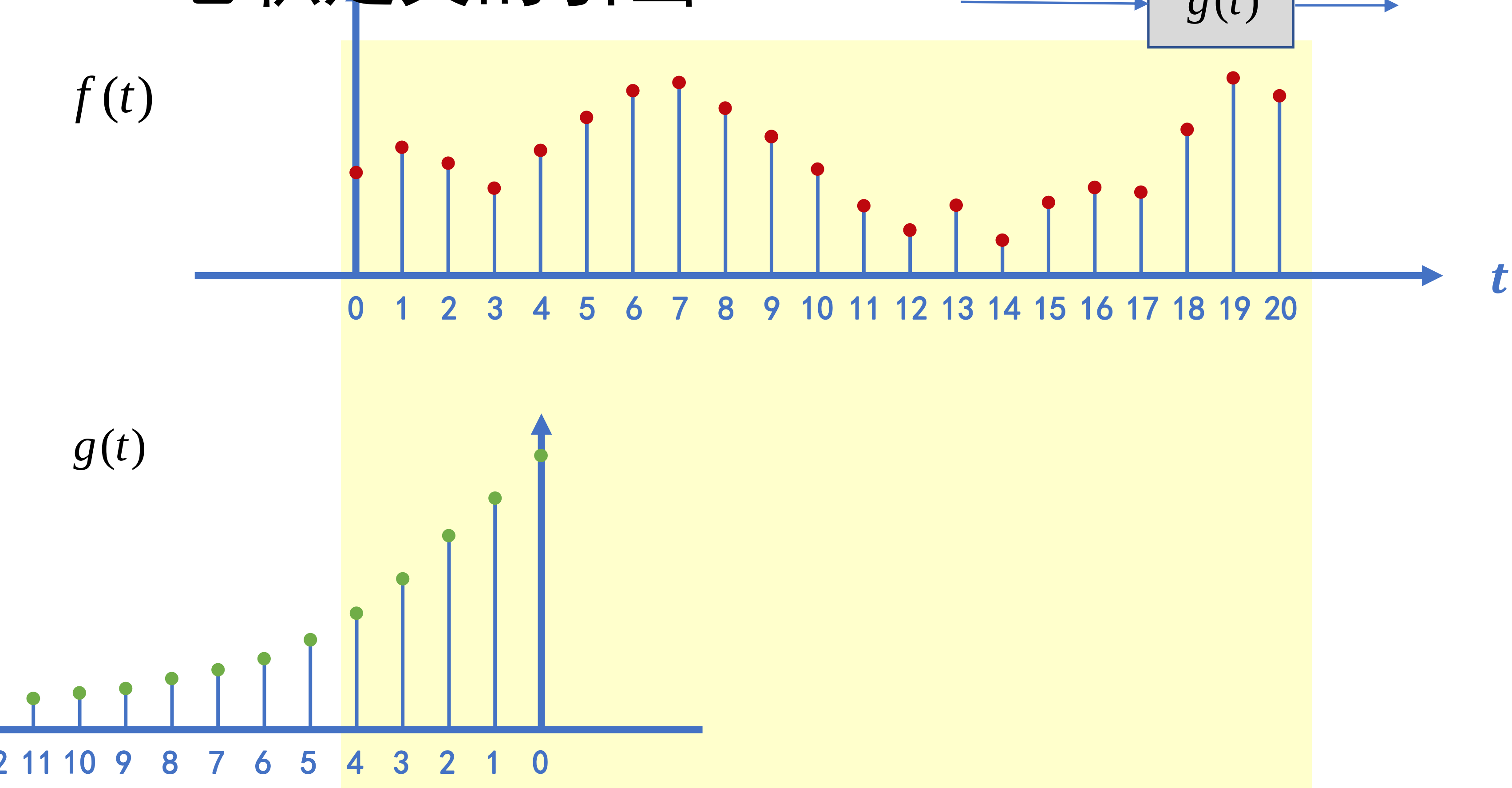


$$(f*g)(4)=f(0)g(4)+f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)+f(4)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



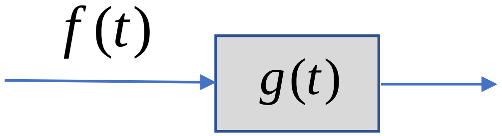


$$(f*g)(n)=\sum_{m=0}^{n} f(m)g(n-m) \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

信号的卷积运算——定义

➢ 连续信号的卷积



f, g为两个连续时间信号函数，其卷积定义为：

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

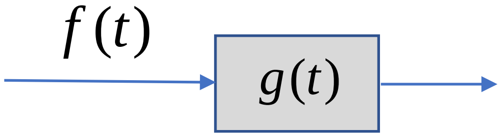
$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

两个信号的卷积是否存在是有条件的：

- f， g**是可积函数**
- f， g**卷积运算得到的结果是有界的**

信号的卷积运算——定义

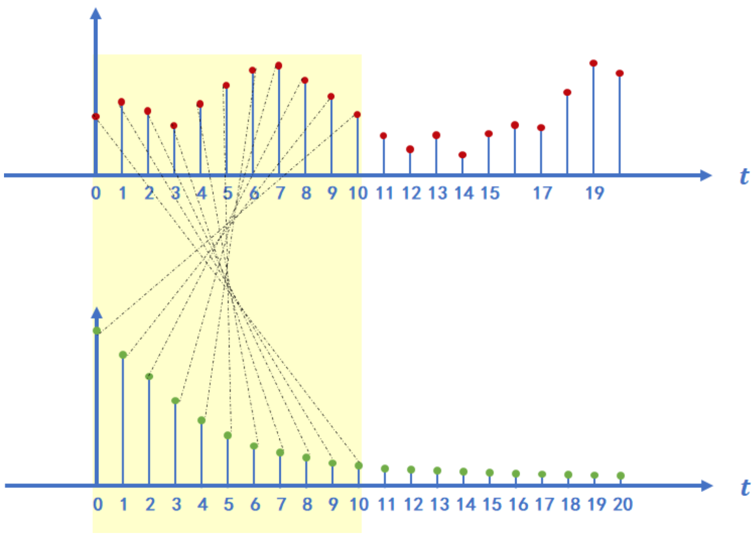
➤ 连续信号的卷积



卷积就是一个函数的加权积分

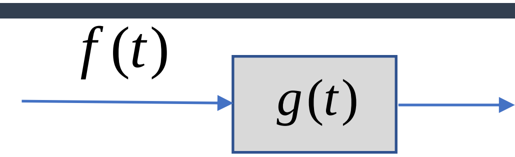
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau$$

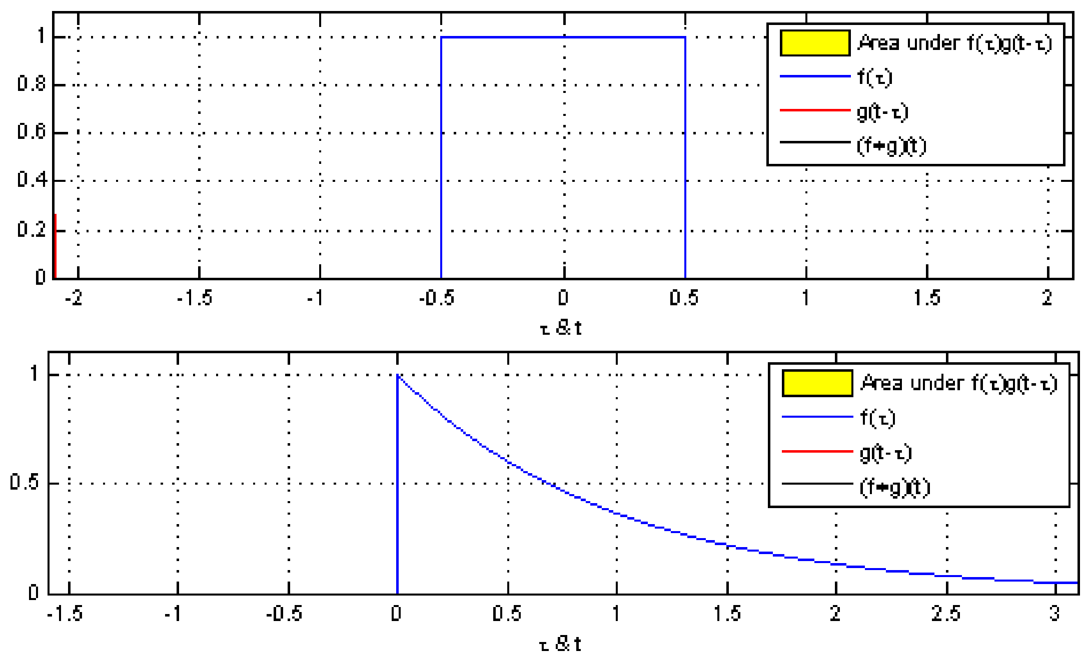
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



信号的卷积运算——定义

➢ 连续信号的卷积

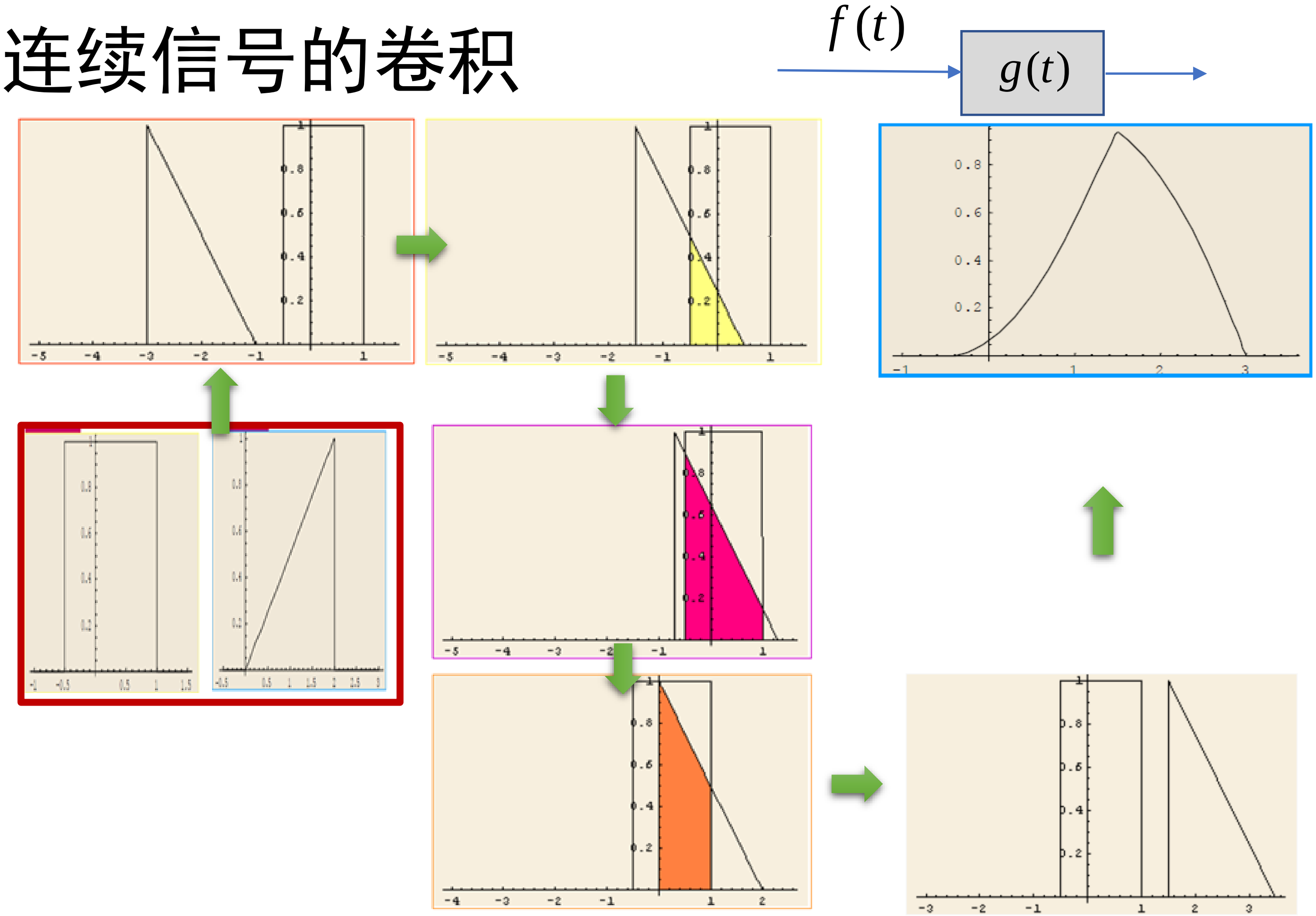




- 一个信号的反褶信号的在 t轴滑动过程中，它与另外一个信号重合部分相乘得到的新信号的面积随 t的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。
- 不是求图形相交部分的面积，而是求相乘结果函数的面积

信号的卷积运算——定义

➢ 连续信号的卷积



对卷积这个名词的理解：所谓两个函数的卷积，本质上就是先将一个函数翻转，然后进行滑动叠加。

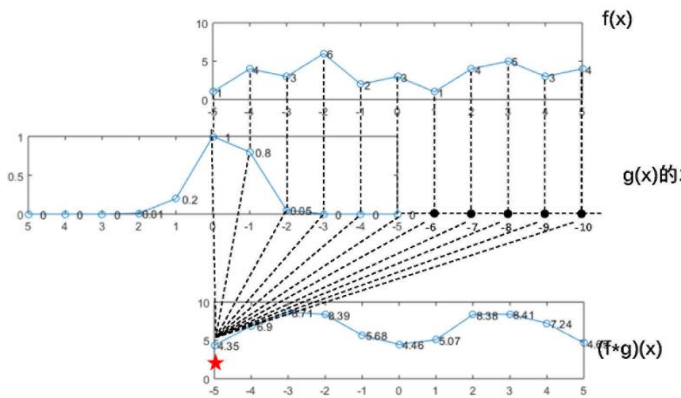
信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积

f, g为两个离散时间信号，其卷积定义为：

$$(f*g)(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$



$$\left(x^2+2x+3\right)\left(2y^2+3y+1\right)$$

```
1.a=[1,2,3];
2.b=[2,3,1];
3.y=conv(b,a);
```

信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积

有两枚骰子，把它们都抛出去，两枚骰子点数加起来为4的概率是多少？

f	1	2	3	4	5	6

f表示第一枚骰子
f 1 表示投出1的概率
f 2 , f 3 ,⋯ 以此类推

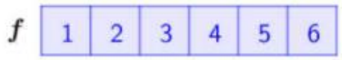
$$f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)$$

g	1	2	3	4	5	6

g表示第二枚骰子

信号的卷积运算——定义

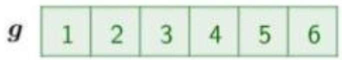
➢ 离散信号的卷积



f表示第一枚骰子

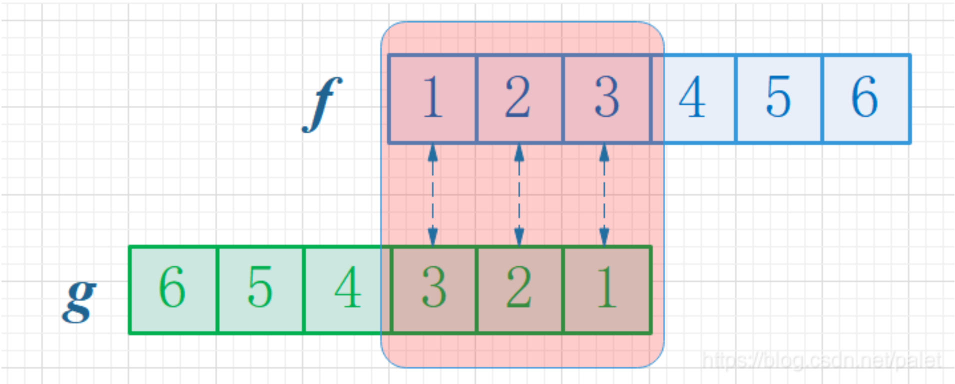
$f\ 1$ 表示投出1的概率

$f\ 2$, $f\ 3$,⋯ 以此类推



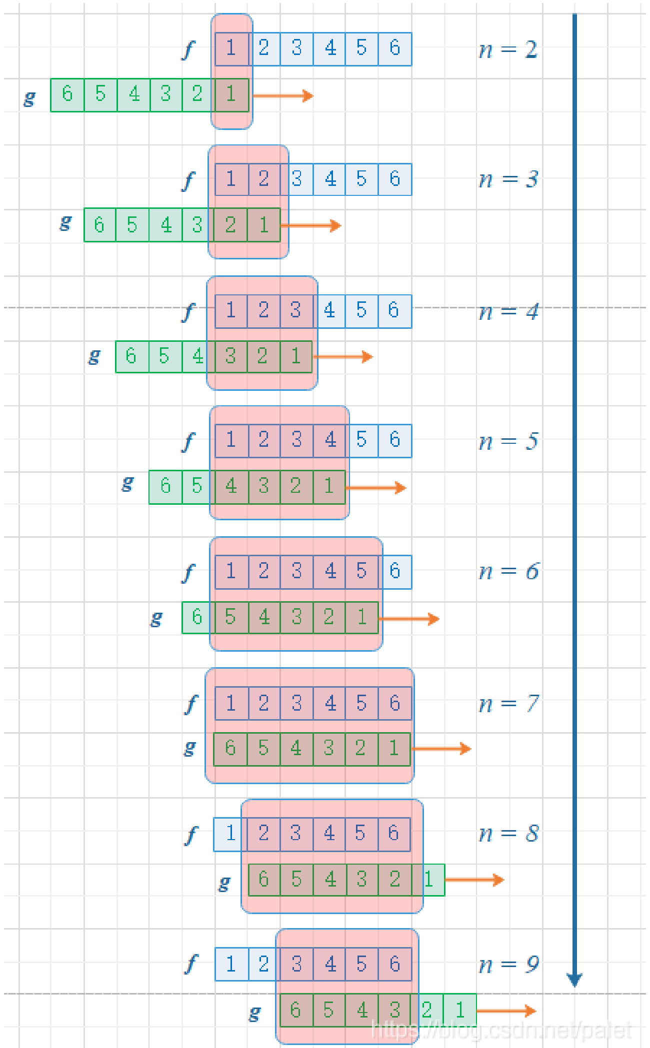
g表示第二枚骰子

$$f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)$$



信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积



$$f(1)g(n-1)+f(2)g(n-2)+\cdots+f(n)g(0)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m) \qquad (f*g)(n)$$

信号的卷积运算——定义

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$t=\tau+(t-\tau)$$

$$n=m+(n-m)$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

信号的卷积运算——性质

I 交换律

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

II 分配律

$$f_1 * \left(f_2 + f_3 \right) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

III 结合律

$$\left(f_1 * f_2 \right) * f_3 = f_1 * \left(f_2 * f_3 \right)$$

信号的卷积运算——性质

I 交换律

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

（通过变换积分变量来证明）

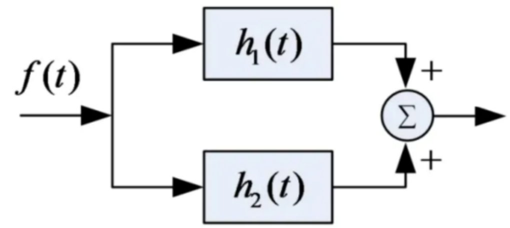
$$\left(f_1 * f_2\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\xlongequal{b=t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-b) f_2(b) db$$

$$= \left(f_2 * f_1\right)(t)$$

信号的卷积运算——性质

II 分配律



$$f_1 * \left(f_2 + f_3 \right) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

（利用积分运算的线性性来证明）

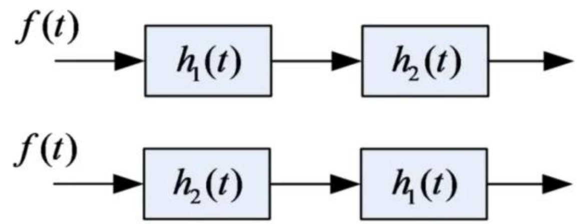
$$\left(f_1 * \left(f_2 + f_3 \right) \right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left(f_2(t-\tau) + f_3(t-\tau) \right) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_3(t-\tau) d\tau$$

$$= \left(f_1 * f_2 \right)(t) + \left(f_1 * f_3 \right)(t)$$

信号的卷积运算——性质

III 结合律



$$f_1 * f_2 \;\; * f_3 = f_1 * \;\; f_2 * f_3$$

$$\big((f_1 * f_2) * f_3\big)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(b-\tau)\,d\tau\right] f_3(t-b)\,db$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(b-\tau)\, f_3(t-b)\,d\tau db$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(b-\tau) f_3(t-b)\,db\right] d\tau$$

$$\underline{\underline{b=\tau+c}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(c) f_3(t-\tau-c)\,dc\right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\big[(f_2 * f_3)(t-\tau)\big]\,d\tau$$

$$= \big(f_1 * (f_2 * f_3)\big)(t)$$

信号的卷积运算——性质

➢ 卷积的微分

（f_1，f_2为R上的连续可导函数）

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

信号的卷积运算——性质

- 卷积的微分

（f_1，f_2为R上的连续可导函数）

$$\left(f_1 * f_2\right)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的m、n及n-m取正整数时为导数的阶次，而取负整数时为重积分的次数。

- 卷积的积分

$$\int_{-\infty}^{t}\left(f_1 * f_2\right)(\lambda)d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)d\lambda = \left(\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)d\lambda\right) * f_2(t)$$

常规运算
- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

数学运算
- 微分运算 $\frac{df(t)}{dt}$
- 积分运算 $\int_0^t f(\tau)d\tau$

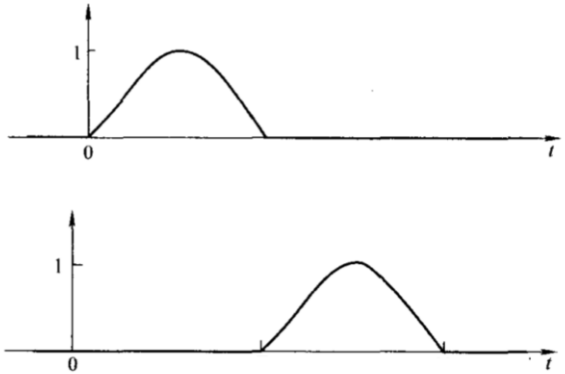
波形变换
- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

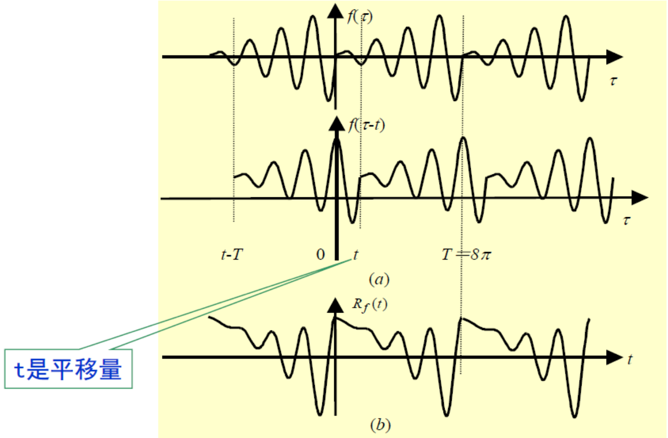
相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

信号的相关运算

➢ 相关分析

- 为了表示其中一个信号在时间轴上平移后两个信号的相似性





互相关函数

$$R_{f_1f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau-t)f_2(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau-t)f_1(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R_{f_1f_2}(-t)$$

自相关函数

$$R_{f_1f_1}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_1(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau-t)f_1(\tau)d\tau$$

$$R_{f_1f_1}(t)=R_{f_1f_1}(-t)$$

信号的相关运算

➢ 相关与卷积

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$R_{f_1 f_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau + t) d\tau$$

两种运算非常相似，都有一个位移、相乘、求和(积分)的过程，差别仅仅在于卷积运算先要进行翻转，所以有

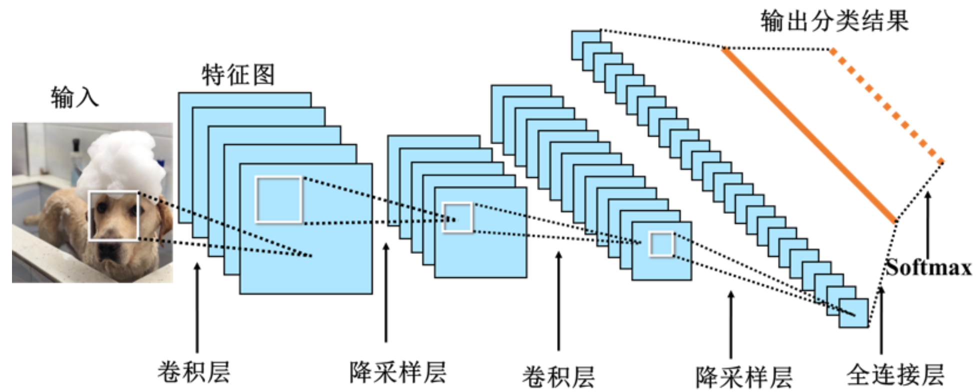
$$R_{f_1 f_2}(-t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

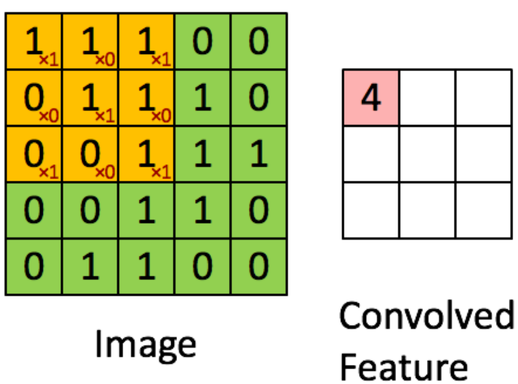
$$R_{f_1 f_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

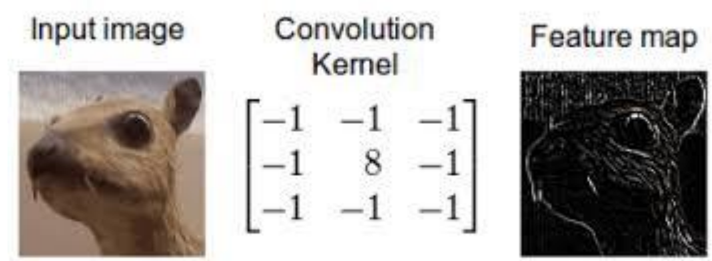
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(-(t-\tau)) d\tau$$

卷积、相关的拓展应用

- 图像卷积运算
- 卷积神经网络
- 深度学习



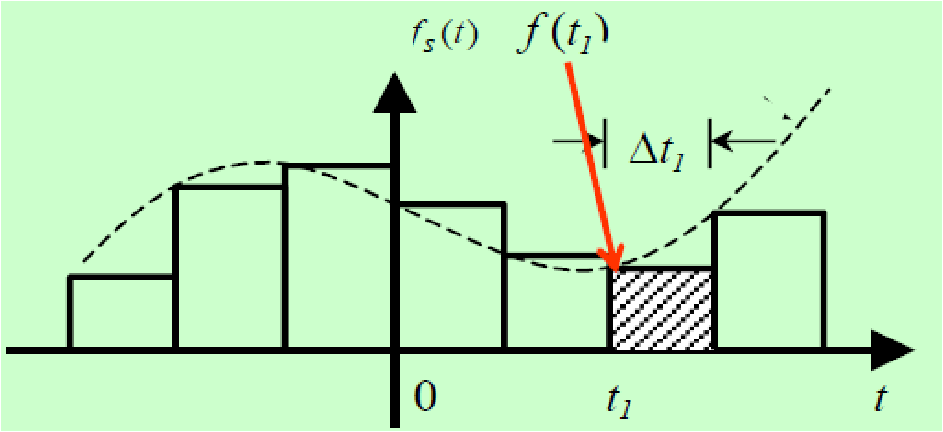




奇异信号

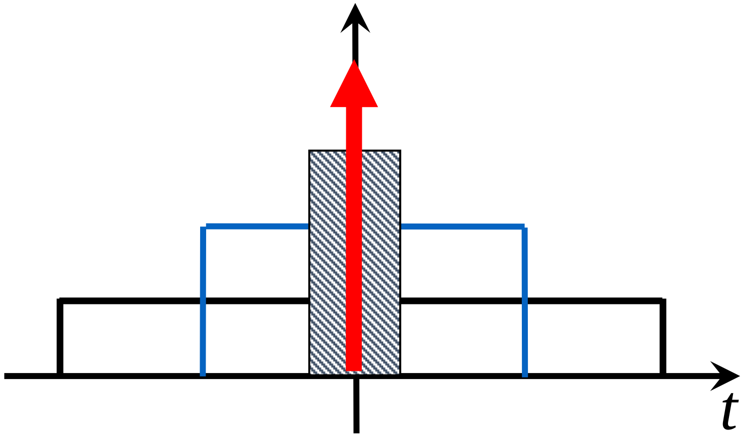
奇异信号

➢ 奇异信号的引出



$$g_{t_1}(t) = \begin{cases} 1 & t_1 \le t < t_1 + \Delta t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{t_1}(t) = f(t_1) g_{t_1}(t)$$

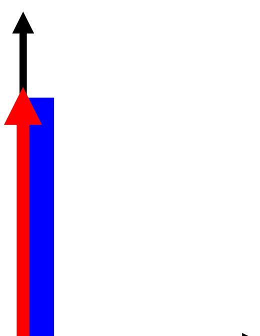


$$f(t) \approx \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f_{t_1}(t) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) g_{t_1}(t)$$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

用于描述自然界中那些发生后持续时间很短的现象。



“嘭嘭”：熟瓜

“当当”：未熟

“噗噗”：过熟

奇异信号

➢ 单位冲激信号

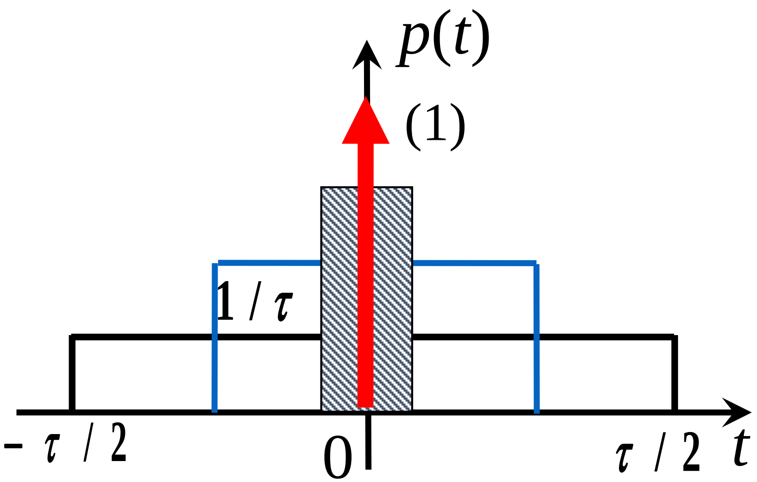
工程模型

矩形脉冲信号：

宽度为 τ ，高度为$1/\tau$，

面积为1

$\tau \to 0, \quad 1/\tau \to \infty$



矩形脉冲信号→冲激信号

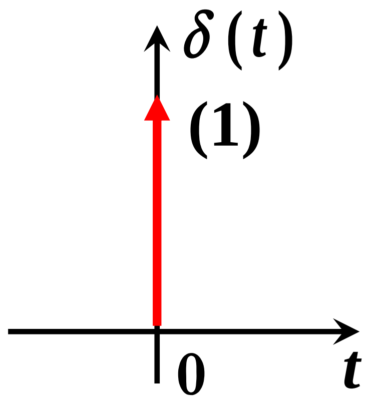
物理含义：

- 冲激信号是对作用时间极短，而相应物理量极大的物理过程的理想描述；
- 冲激信号是时域信号分析的基础。

奇异信号

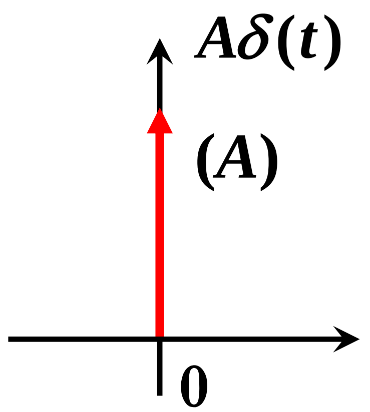
- 单位冲激信号——定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$



冲激信号定义：

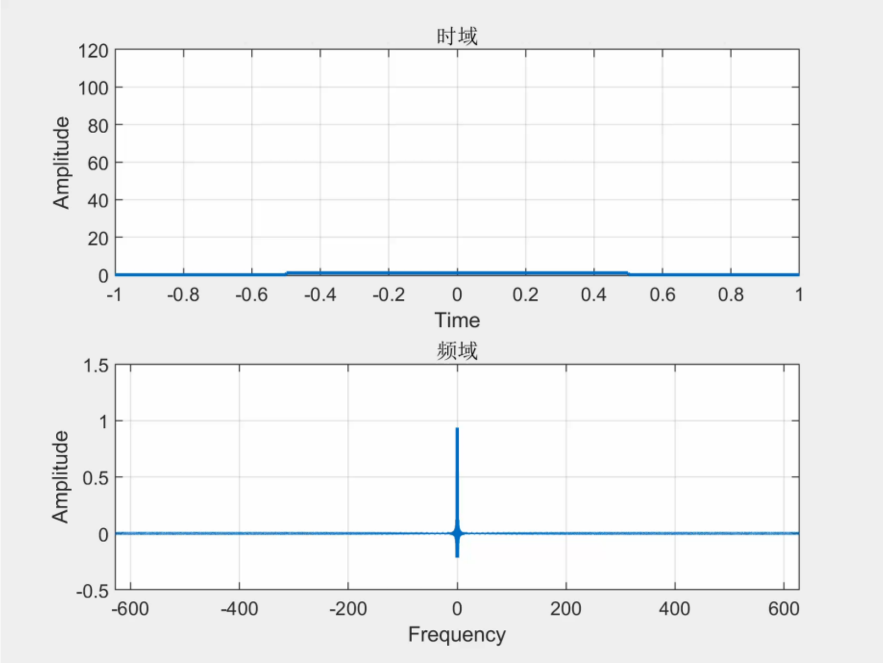
$$\begin{cases} A\delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ A\delta(t) = \infty & t = 0, \quad A\text{为常量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t)dt = A \end{cases}$$



在冲激点处画一条带箭头的线，线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致。

奇异信号

➢ 单位冲激信号



保罗·狄拉克
（1902-1984）

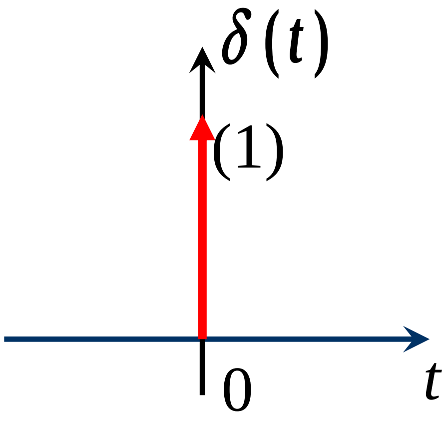
δ 函数包含了所有频率的分量

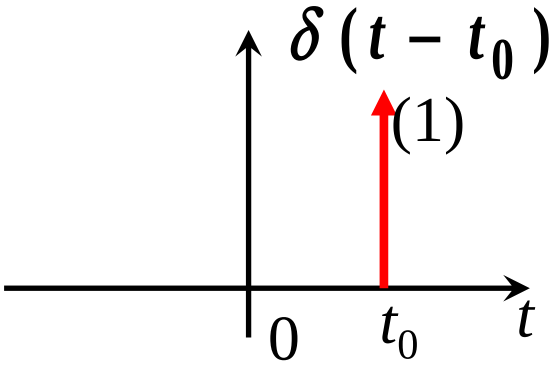
➢ 单位冲激信号

性质

（1）时移性质

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & t\neq t_0 \\ \delta(t-t_0)=\infty & t=t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$





$$\int_a^b \delta(t-t_0)dt=? \quad \begin{cases} t_0\in[a,b] \\ t_0\notin[a,b] \end{cases}$$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

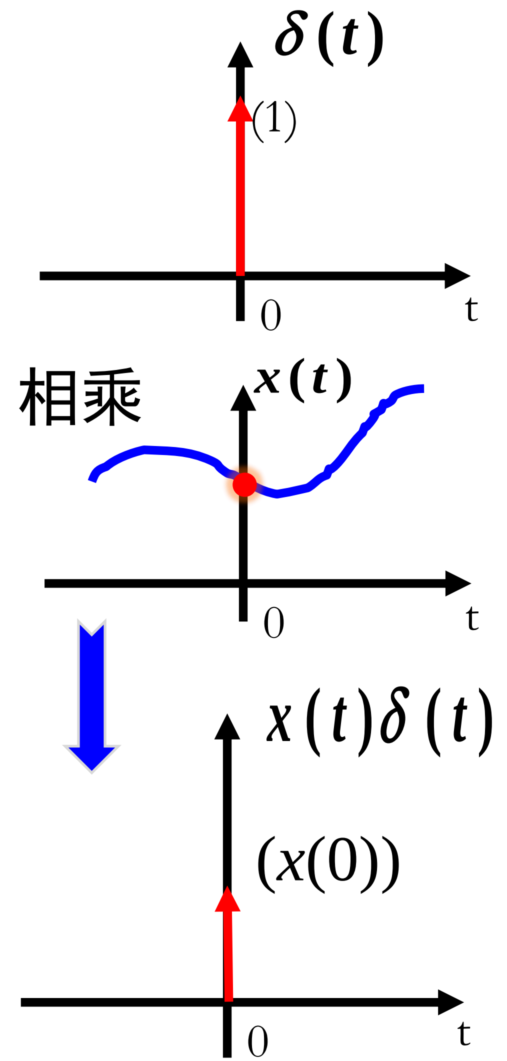
性质

（2）筛选特性

——$\delta(t)$乘以普通函数$x(t)$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$



奇异信号

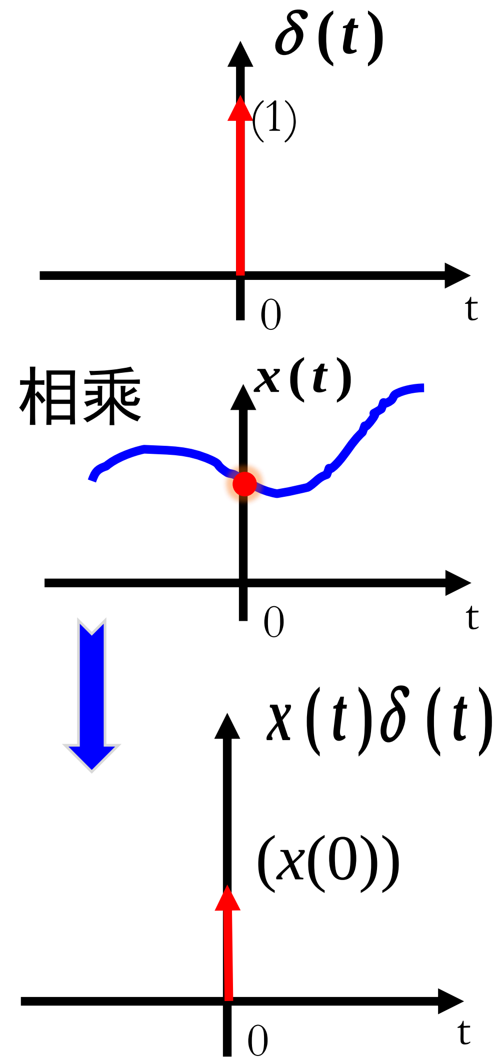
➢ 单位冲激信号

性质

（3）取样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



一个函数 $x(t)$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 乘积下的面积等于 $x(t)$ 在冲激所在时刻的值

➢ 单位冲激信号

性质

（3）取样特性

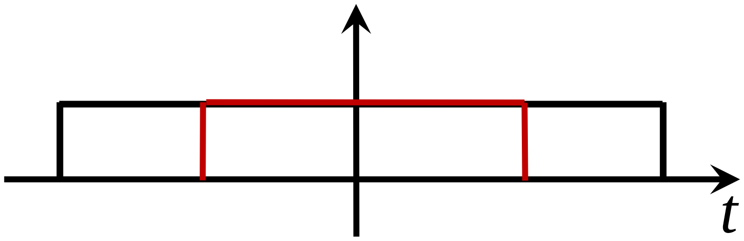
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{-1}^{1}\cos(2t)\delta(t)dt = \cos 0 = 1$$

$$\int_{0}^{5}\cos(t)\delta(t+\pi)dt = \cos(-\pi) = -1$$ ✗

奇异信号

- 单位冲激信号



性质

（4）时扩特性 $$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

展缩特性 $$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

推论：当a=-1,b=0时，有$\delta(-t)=\delta(t)$

即：冲激信号是偶函数。

奇异信号

➢ 单位冲激信号

$$(1)\ x(t+t_0)\delta(t) \qquad (2)\ [e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$$

$$(3)\ \left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega) \qquad (4)\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$(5)\ \int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt \qquad (6)\ \int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\,\delta(t+1)dt$$

解：(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

$$= x(t_0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\frac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

$$(2)\ [e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$ (2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\frac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解：(3) $(\frac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

$$=k(\frac{\sin k\omega}{k\omega})\delta(\omega)=k\delta(\omega)$$

- 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\frac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解:

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t)$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$ (2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$ (4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解：

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt=0$

- 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

(3) $(\frac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

(6) $\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt$

解:

(6) $\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt \;=0$

➢ 单位冲激信号——平移抽样特性

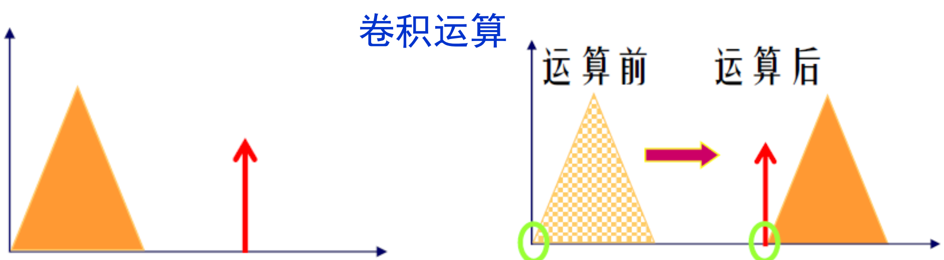
函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数**平移**到单位冲激函数的冲激点位置。

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(a)\delta(t-t_0-a)da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\delta(t-t_0-a)da=f(t-t_0)$$



注意参考点位置的变化

抽样特性☆：

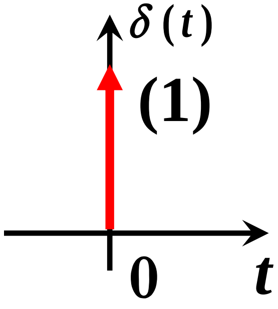
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

也称“筛选特性”

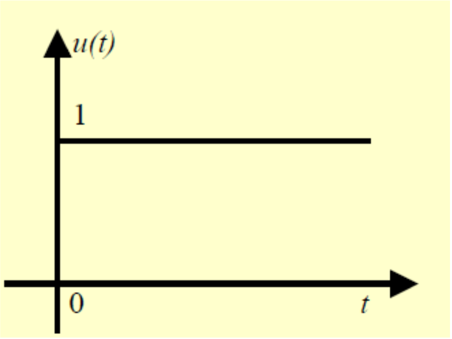
奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$$



$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



特点：

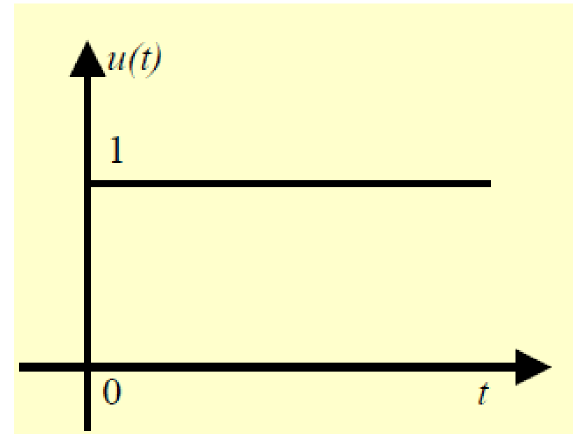
(1) 与单位冲激信号是积分/微分关系

(2) 用于描述分段信号

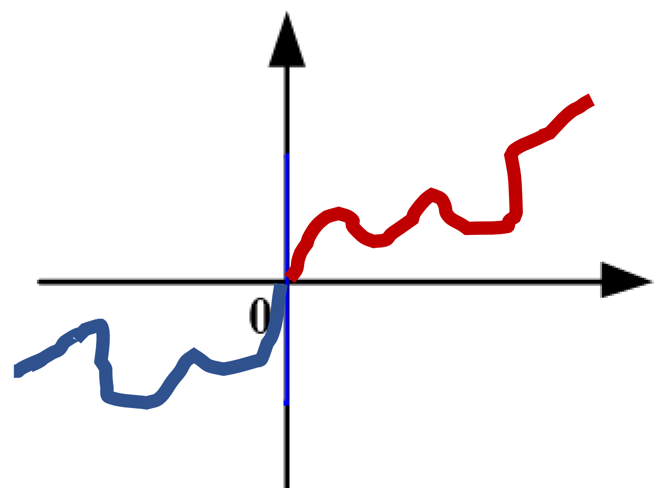
奇异信号——拓展

- 单位阶跃信号——单边特性

$$x(t)u(t)=\begin{cases} x(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



可以表示 $t=0$ 时刻合上开关接入电源或电池。

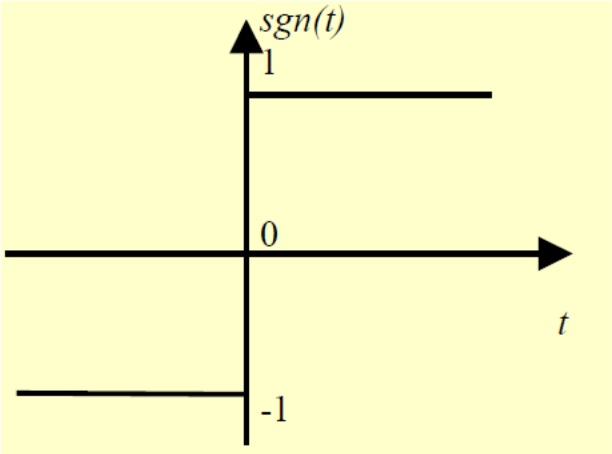


奇异信号——拓展

- 单位阶跃信号应用——符号函数信号

用于表示自变量的符号特性

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

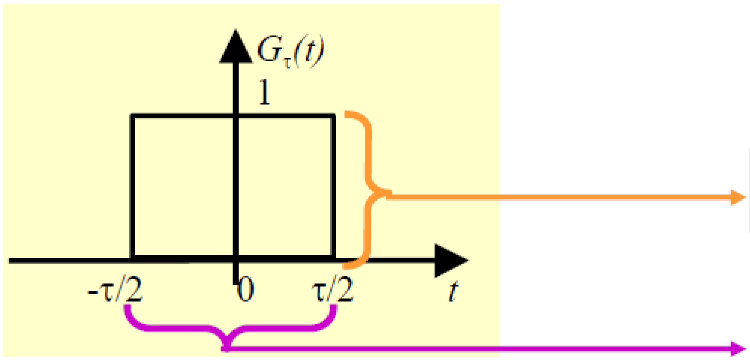


$$\boxed{\operatorname{sgn}(t)+1=2u(t)}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1}$$

奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号应用——矩形脉冲信号

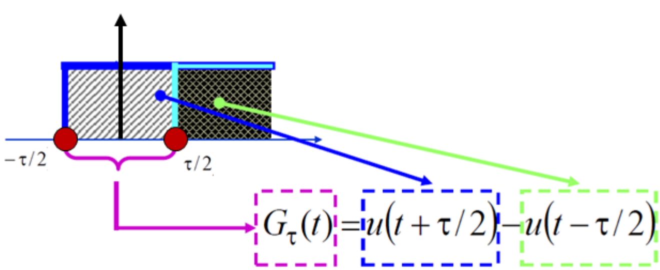


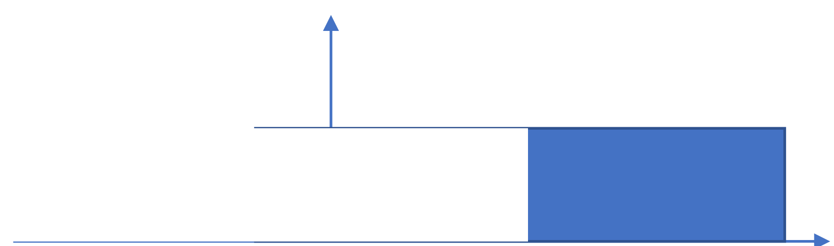
$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

脉高： 矩形脉冲的高度

脉宽： 矩形脉冲的宽度

与单位阶跃信号之间的关系





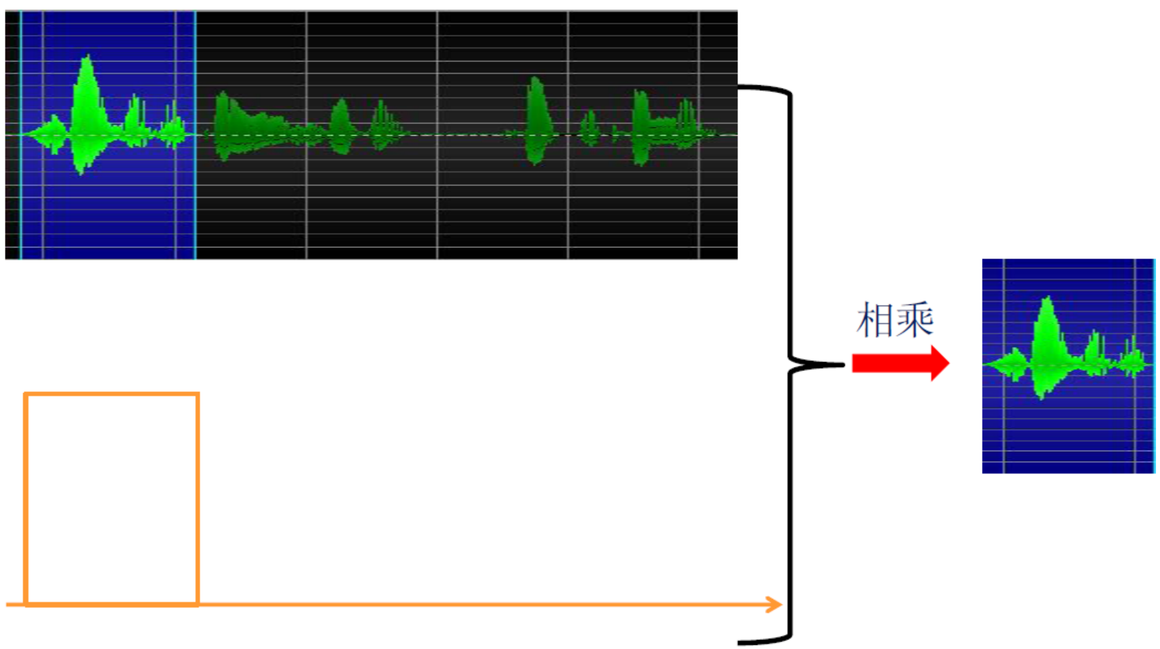
通过单位阶跃信号的运算结果，可以不必再用分段的形式表示信号了！

奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号应用——矩形脉冲信号

与单位阶跃信号之间的关系：

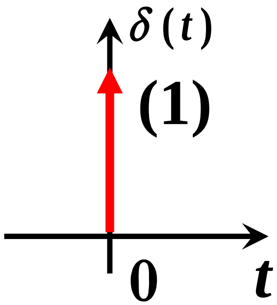
- 其他信号与矩形信号相乘时，只有在矩形信号对应的区间内，其他信号的信息才被保留下来，
- 用矩形信号和乘法运算，可以截取信号的特定区间片段！
- 窗函数

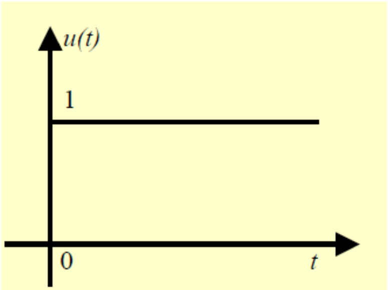


奇异信号——拓展

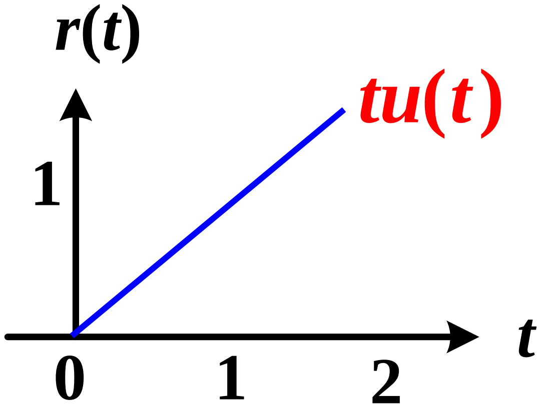
➢ 单位斜变信号

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$



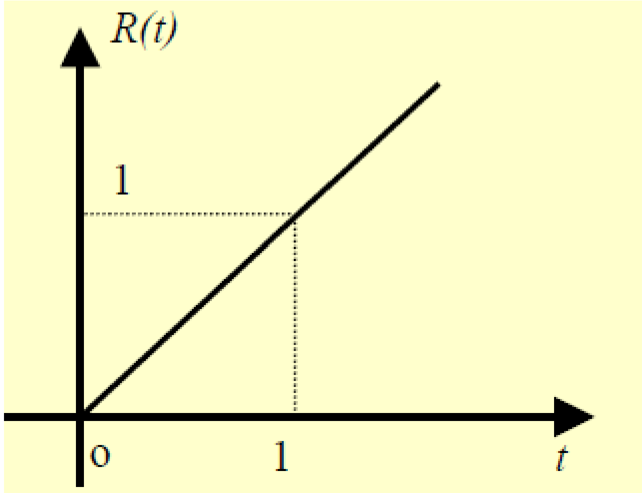


$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t)$$



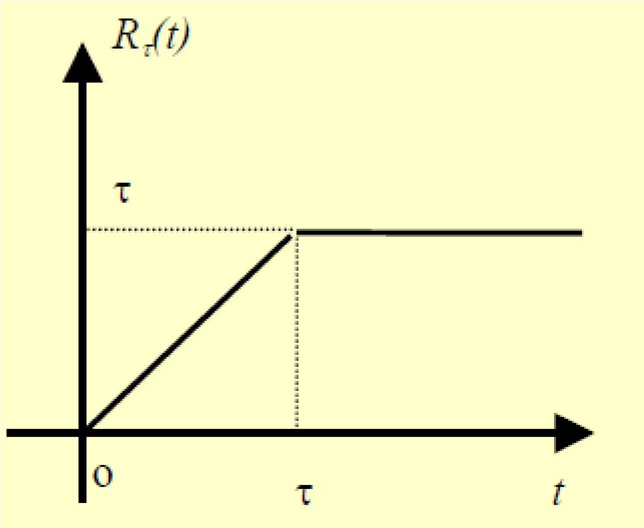
奇异信号——拓展

- 单位斜变信号



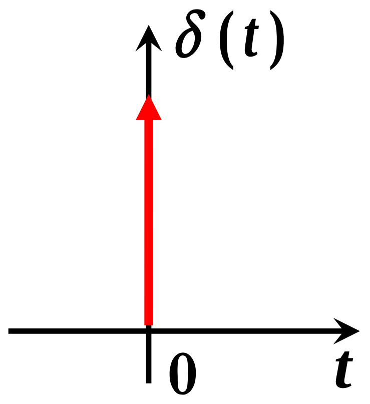
$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

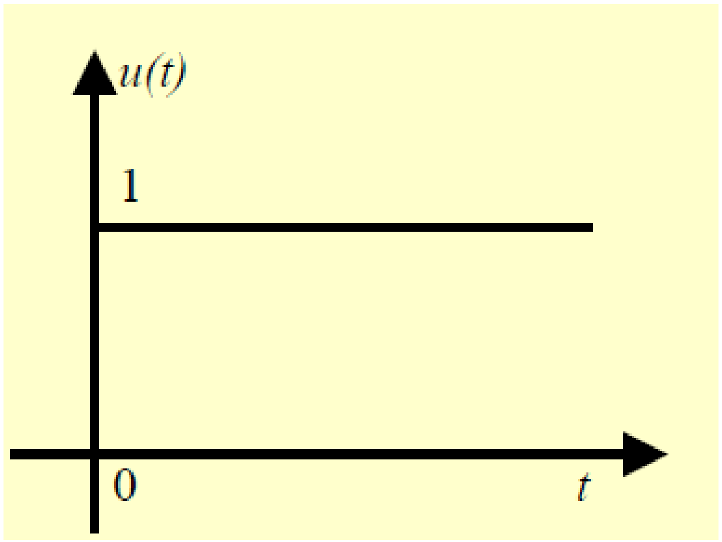
截顶的单位斜变信号：

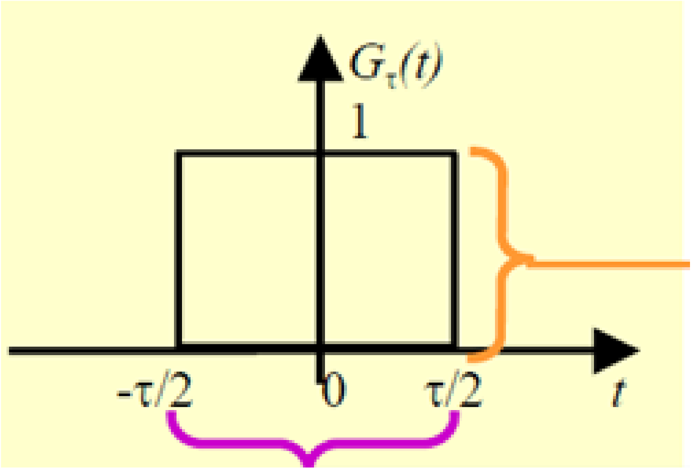


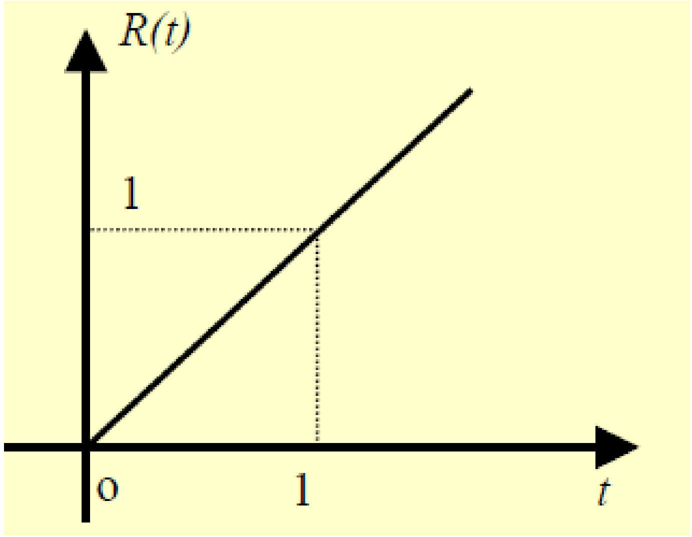
$$=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & \tau>t>0\\ \tau, & t\geq\tau\end{cases}$$

奇异信号——总结





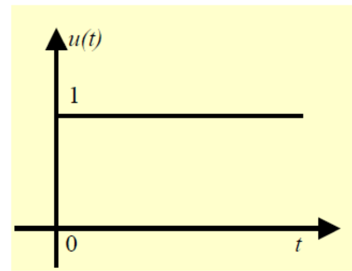


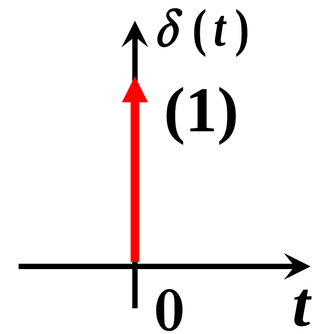


奇异信号——总结

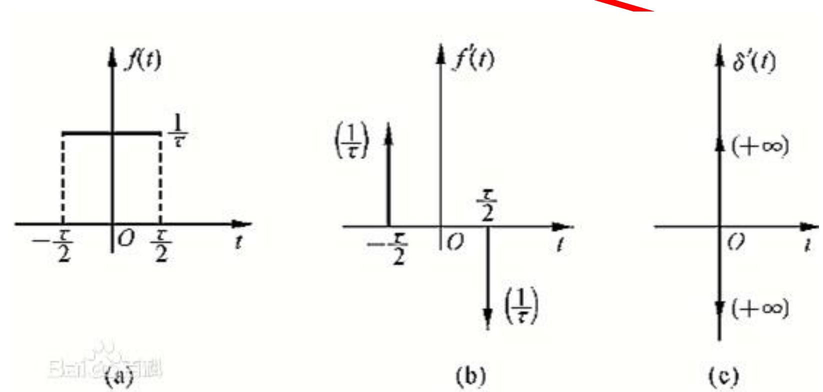
➢ 冲激信号微积分会派生出何种信号？

$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$





$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$$ ——冲激偶信号



奇异信号——总结

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t) = r(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \delta^{(n)}(t)$$

所有从单位冲激信号导出的这些信号（连续求导和积分）统称为**奇异信号**。

奇异信号——练习

$$x(-2t+1)=2\delta(t-1) \qquad x(t)=?$$

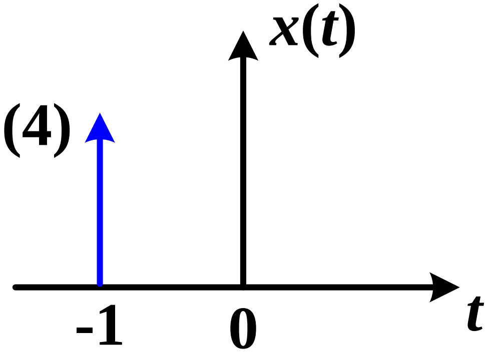
$$1-2t=t' \quad \rightarrow \quad t=\frac{1-t'}{2}$$

$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

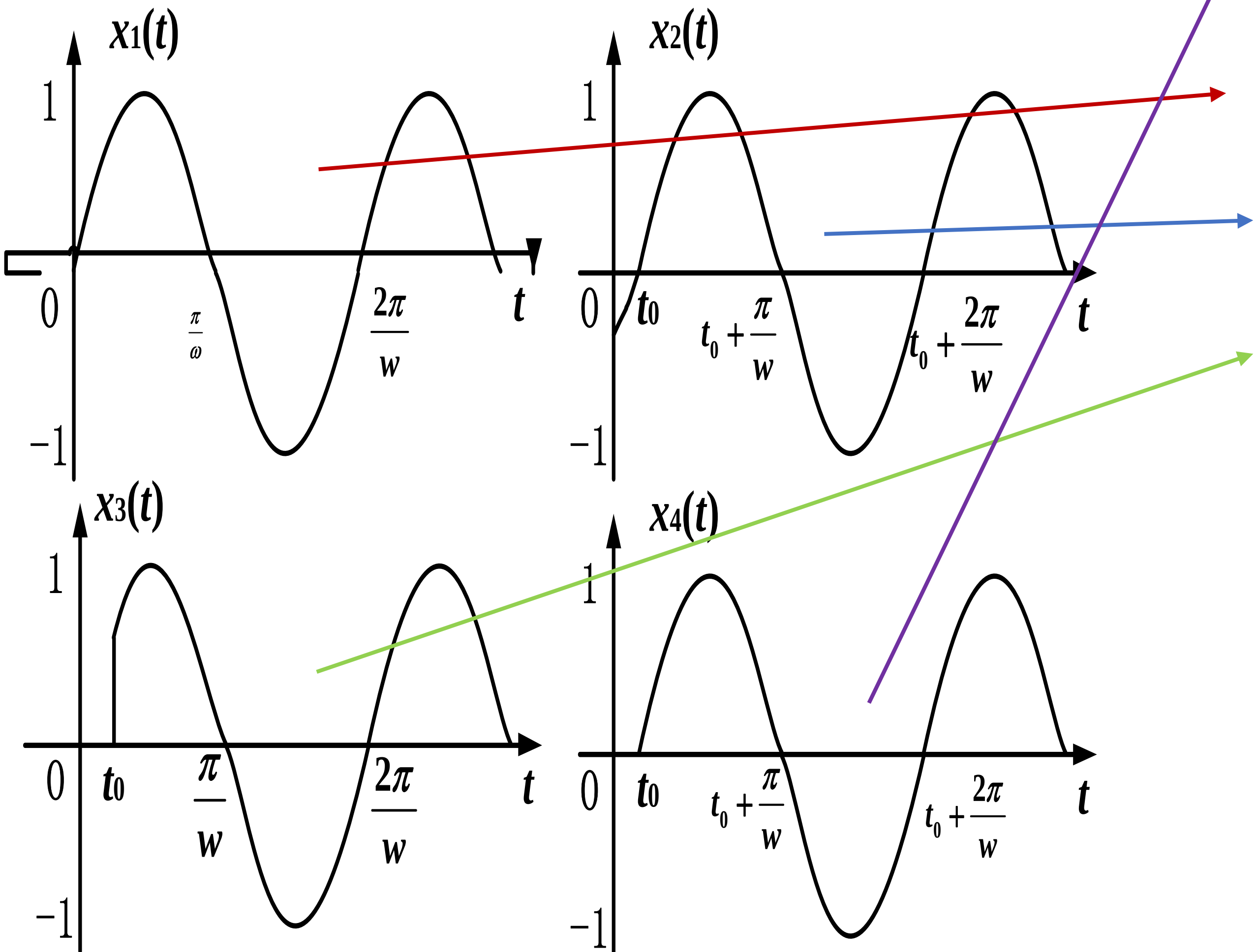
$$x(t')=2\delta(\frac{1-t'}{2}-1)=2\delta(-\frac{t'}{2}-\frac{1}{2})$$

$$x(t)=2\delta(-\frac{t}{2}-\frac{1}{2})$$

$$=2\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\delta(t+1)=4\delta(t+1)$$



奇异信号——练习



$\sin[\omega(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$

$\sin(\omega t)\cdot u(t)$

$\sin[\omega(t-t_0)]\cdot u(t)$

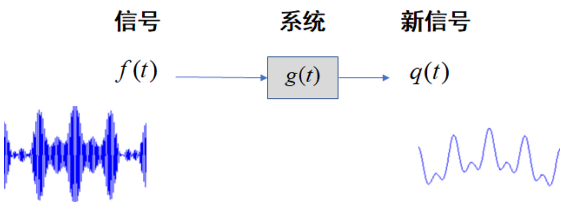
$\sin(\omega t)\cdot u(t-t_0)$

总结

Why

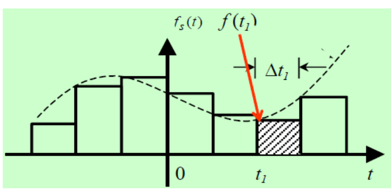
What

How

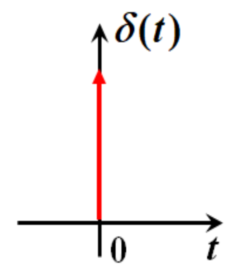


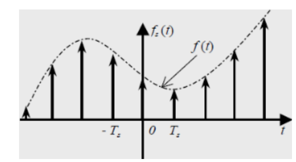
卷积计算

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

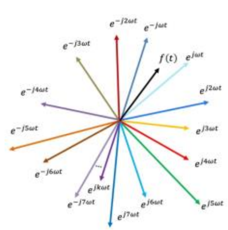


奇异信号





傅里叶级数
傅里叶变换



欧拉公式

$$e^{j\varphi}=\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)$$


中秋

作业

作业1：任选一种不同于课程上介绍的方法理解欧拉公式。

作业

作业2：

已知某信号 $f_0(t)$是一个关于纵轴对称的三角波，设它的底边长为2，高为1，试绘出信号 $f(t)$ 的波形：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t)*\delta(t-2n)$$

并回答 $f(t)$ 是否是周期信号？如是，其周期为多少？

作业

作业3：推导卷积的微分公式

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

作业4：推导一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分，即

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$$