

Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

И.В. Лавров, А.М. Терещенко

Теория функций комплексной переменной

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским советом университета

Москва 2015

УДК 517.53

Л13

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. *Т.И. Савёлова*;
докт. физ.-мат. наук, *А.В. Тищенко*

Лавров И.В., Терещенко А.М.

Л13 Теория функций комплексной переменной: учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: МИЭТ, 2015. – 168 с.: ил.

ISBN 978-5-7256-0788-8

Изложены основные понятия теории функций комплексной переменной. Разобраны задачи по различным темам, приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов, изучающих курс «Теория функций комплексной переменной».

ISBN 978-5-7256-0788-8

©МИЭТ, 2015

Предисловие

Операции, которые рассматриваются в математике, можно разделить на два класса: прямые и обратные. Так, действию сложения соответствует обратное действие – вычитание, умножению – деление, возведению в целую положительную степень – извлечение корня. Совокупность чисел целых и дробных, называемых рациональными числами, будет замкнутой по отношению к первым четырем основным действиям алгебры: сложению, вычитанию, умножению и делению, т.е. при выполнении любого из этих действий над двумя любыми рациональными числами (кроме деления на нуль), мы в результате получим элемент этой же совокупности – рациональное число. Извлечение корня, в простейшем случае квадратного корня, с одной стороны, дает нам примеры новых чисел, действительных, но не рациональных, называемых иррациональными, а с другой стороны, чисел вида $y\sqrt{-1}$, где y – действительное число. Числа вида $y\sqrt{-1}$, где y – любое действительное число, не равное нулю, называют чисто мнимыми. Приведенные примеры показывают, что обратные операции приводят с необходимостью расширения понятия числа. При решении квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, c – действительные числа, корнями могут быть числа вида $x + y\sqrt{-1}$, где x, y – действительные числа. Такие числа называются комплексными. В случае $y = 0$ комплексное число обращается в действительное.

В настоящем учебном пособии рассмотрены свойства функций комплексной переменной $z = x + y\sqrt{-1}$. Функции комплексной переменной находят многочисленные приложения как в прикладных математических дисциплинах (теоретической физике, гидродинамике, теории упругости), так и в различных разделах математики: алгебре, аналитической теории чисел, дифференциальных уравнениях, теории рядов, преобразованиях Фурье, Лапласа. Особенно широкое применение методы теории функций комплексной переменной нашли в теории электрических цепей. Раздел теории функций комплексной переменной – операционное исчисление – является одним из основных математических

инструментов решения различных задач из области автоматики и телемеханики.

Основное внимание в данном пособии уделяется методам теории функций комплексной переменной (ТФКП), которые имеют большое применение в прикладных задачах – разложению в ряды, вычислению интегралов с помощью вычетов, методам операционного исчисления. Для того чтобы студенты могли самостоятельно в полном объеме овладеть методами ТФКП, в пособии приведено большое количество примеров с решениями, а также задачи для самостоятельного решения, что даёт возможность не только глубже усвоить теоретический материал, но и приобрести необходимые практические навыки в решении задач.

Авторы благодарны заведующему кафедрой ВМ-2 С.Г. Кальнею, внимательно прочитавшему рукопись пособия и сделавшему полезные замечания, а также признательны И.В. Булаховой за помощь в подготовке оригинал-макета пособия.

1. Комплексные числа

1.1. Комплексные числа и действия над ними

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – некоторые действительные числа; i – символ, называемый *мнимой единицей*, обладающий свойством $i^2 = -1$.

Представление числа z имеет свойство коммутативности: $x + iy = iy + x$. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z :

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Модулем $|z|$ комплексного числа z называется действительное неотрицательное число, определяемое выражением

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Число $\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$ называют *комплексно сопряжённым* с числом z . Если $y = 0$, число z считается действительным; числа вида $0 + iy \equiv iy$ называются *чисто мнимыми*. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются *равными*, если равны их действительные и мнимые части соответственно:

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Принимается, что для символа i справедливы коммутативный по отношению к умножению и дистрибутивный законы:

$$iy = yi, \quad i(y_1 + y_2) = iy_1 + iy_2.$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом \mathbb{C} .

Арифметические операции с комплексными числами

1. Сумма и разность двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2).$$

2. Умножение комплексных чисел производится, как умножение многочленов с учётом перечисленных свойств числа i :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i y_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 i y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2). \end{aligned}$$

Заметим, что произведение числа на комплексно сопряжённое с ним есть действительное число, равное квадрату его модуля:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.1)$$

3. Частное двух комплексных чисел $z = \frac{z_1}{z_2}$ по определению есть

решение уравнения $z \cdot z_2 = z_1$.

а) При делении комплексного числа z_1 на действительное x_2 , очевидно, имеем:

$$z = \frac{z_1}{x_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} + i \frac{y_1}{x_2}.$$

б) Деление на произвольное комплексное число $z_2 \neq 0$ можно свести к делению на действительное число, домножив и числитель, и знаменатель на число, комплексно сопряжённое знаменателю, и воспользовавшись тождеством (1.1):

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{\overline{z_2 z_2}} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{|z_2|^2}. \quad (1.2)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{3+4i} &= \frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{2 \cdot 3 + 3i \cdot 3 - 2 \cdot 4i - 3i \cdot 4i}{3^2 + 4^2} = \\ &= \frac{6 - 12i^2 + 9i - 8i}{25} = \frac{6 + 12 + i}{25} = \frac{18}{25} + i \frac{1}{25}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что введенные выше операции сложения и умножения над комплексными числами обладают свойствами:

а) Ассоциативности

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3); \quad (z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 (z_2 \cdot z_3).$$

б) Коммутативности $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

в) Дистрибутивности $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Перечислим также свойства операции комплексного сопряжения:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Всякое комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой на плоскости с координатами x и y (рис.1.1).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*. Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке O и проекциями x и y на координатные оси. Длина вектора z равна $\sqrt{x^2 + y^2}$ – модулю комплексного числа, в этом состоит геометрический смысл модуля комплексного числа $|z|$. Из геометрической интерпретации комплексных чисел следует ряд полезных выводов и неравенств (рис.1.2).

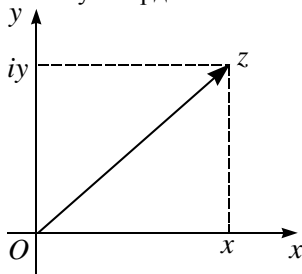


Рис.1.1.

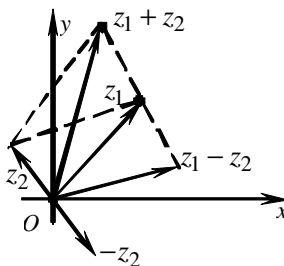


Рис.1.2.

- 1) $|\operatorname{Re} z_1| \leq |z_1|, |\operatorname{Im} z_1| \leq |z_1|$.
- 2) $|z_1 - z_2|$ – расстояние между точками z_1 и z_2 .

$$3) \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{неравенства треугольника}).$$

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

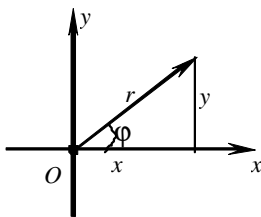


Рис. 1.3.

Положение точки на комплексной плоскости \mathbb{C} однозначно определяется расстоянием точки от начала координат $r = |z|$ и углом φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (рис.1.3). Этот угол называется *аргументом комплексного числа* z ($z \neq 0$), и обозначается $\arg z$. Для числа $z = 0$ $\arg z$ не определен. Из рис.1.3 видно, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.4)$$

Запись комплексного числа в виде (1.4) называется *тригонометрической формой комплексного числа*, в отличие от записи комплексного числа в виде $z = x + iy$, которая называется *алгебраической формой комплексного числа*. Для нахождения аргумента комплексного числа надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (1.5)$$

Система (1.5) имеет бесконечно много решений, задаваемых формулой $\varphi = \alpha + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где α – значение аргумента z , удовлетворяющее условию $-\pi < \alpha \leq \pi$. Это значение называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Все значения аргумента данного комплексного числа задаются функцией, называемой *многозначным аргументом*:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0; & (a) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; & (б) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, & (в) \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, & (г) \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. & (д) \end{cases} \quad (1.7)$$

Действительно, так как $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то:

а) если точка лежит в I или IV четверти ($x > 0$), $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
(рис.1.4а)

б) Если z лежит во второй четверти
($x < 0, y \geq 0$), то $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq 0$ и $\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (рис.1.4б)

в) если z находится в III четверти ($x < 0, y < 0$), то $0 < \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$ и
 $\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (рис.1.4в);

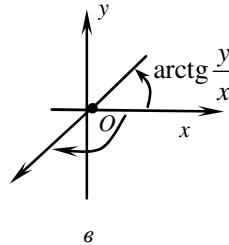
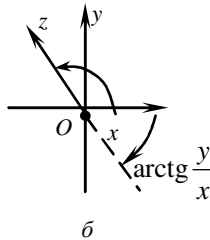
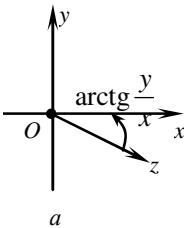


Рис.1.4.

с) и д) варианты формулы (1.7) очевидны.

Задача. Найти модули и главные значения аргументов следующих чисел $-2 + 2i$; -1 ; $3 + 4i$ и записать тригонометрическую форму этих чисел.

Решение. Воспользуемся формулой (1.7). В первом случае $x = -2$, $y = 2$, точка $z = -2 + 2i$ лежит во второй четверти

$$\arg(-2 + 2i) = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{2}\right) = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Найдем модуль этого числа: $|-2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, поэтому

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Во втором случае $x = -1 < 0$, $y = 0$, $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$, $\arg(-1) = \pi$, поэтому

$$-1 = (\cos \pi + i \sin \pi).$$

В третьем случае $x = 3 > 0$, $y = 4$, поэтому

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}, \quad |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

и тригонометрическая форма числа $3 + 4i$ записывается в виде

$$3 + 4i = 5 \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right).$$

С помощью тригонометрической формы (1.4) комплексного числа несложно установить, как изменяются модуль и аргумент комплексного числа при умножении или делении на другое комплексное число, а также при возведении его в целую степень. Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тогда, используя формулы элементарной тригонометрии, получаем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (1.8)$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда сразу получаем, что при делении на действительное число аргумент не изменяется, поскольку это равносильно умножению на обратное ему, также действительное число. Далее, поскольку

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)), \quad (1.9)$$

то

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\overline{z_1 z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2}{r_2^2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\end{aligned}\tag{1.10}$$

т.е. модуль частного двух комплексных чисел есть частное их модулей, а аргумент частного – разность аргументов. Из (1.8) и (1.10) следует формула, удобная для возведения комплексного числа в произвольную целую степень:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.\tag{1.11}$$

Замечание. Главное значение аргумента произведения или частного двух чисел может отличаться от суммы или разности аргументов на $\pm 2\pi$.

1.4. Показательная форма комплексного числа

Полагая $r_1 = r_2 = r = 1$ в формулах (1.8), (1.10), (1.11), найдём, что выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ обладает свойствами показательной функции, в частности справедлива *формула Муавра*:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.\tag{1.12}$$

Более того, поскольку

$$\frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

а также $\cos 0 + i \sin 0 = 1$, выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ имеет такое же разложение в ряд Тейлора по степеням φ , как и показательная функция $e^{i\varphi}$ (экспонента с чисто мнимым показателем), если считать правила дифференцирования показательной функции по действительному аргументу справедливыми и для экспоненты с комплексным коэффициентом в показателе (это будет показано позже). Поэтому выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ принимается за определение функции $e^{i\varphi}$ при произвольном действительном φ :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.13)$$

Перечислим свойства функции $e^{i\varphi}$.

1. Периодичность с периодом $T = 2\pi$.

$$2. \quad |e^{i\varphi}| = 1.$$

$$3. \quad \overline{e^{i\varphi}} = \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}. \quad (1.14)$$

$$4. \quad e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (1.15)$$

Из (1.13) и (1.14) сложением и вычитанием получим формулы Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (1.16)$$

Используя (1.13), представление (1.4) комплексного числа можно переписать в виде, который называется *показательной формой комплексного числа*:

$$z = re^{i\varphi}. \quad (1.17)$$

В показательной форме удобно проводить операции умножения и деления комплексных чисел.

Замечание. С помощью формулы Муавра можно получить различные тригонометрические равенства. Получим формулы для $\cos 3\varphi, \sin 3\varphi$. Для этого запишем равенство

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$. Преобразуем левую часть равенства

$$\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Из условия равенства комплексных чисел находим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

После преобразований, учитывая, что $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, получим искомые равенства

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.$$

1.5. Извлечение корня n -й степени

Пусть n – натуральное число, а z – заданное комплексное число. Определим $\sqrt[n]{z} = w$ так, что

$$w^n = z. \quad (1.18)$$

Пусть $w = |w|e^{i\psi}$, тогда

$$w^n = |w|^n e^{in\psi} = z = |z|e^{i \arg z}. \quad (1.19)$$

Из равенства (1.19) следуют равенства

$$|w|^n = |z|, \quad n\psi = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

второе из которых есть следствие многозначности аргумента. Выразая $|w|$ и ψ , получим

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \psi = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ – обычный арифметический корень n -й степени из положительного числа. Таким образом, для решений уравнения (1.18) имеем

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.20)$$

Выясним, сколько существует различных значений корня $\sqrt[n]{z}$. Подставляя в формулу (1.20) $k = 0, 1, \dots, n-1$, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$. Эти значения различны, так как разность аргументов каждых двух из них не кратна 2π . Поэтому, зная один корень w_0 , остальные

можно получить последовательными поворотами на угол $\frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки. При всех остальных целых k по формуле (1.20) будут получаться значения, совпадающие с одним из корней при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Например, при $k = n$ получим то же значение, что и при $k = 0$ и т.д. Таким образом, корень n -й степени из произвольного комплексного числа $z \neq 0$ имеет ровно n значений, которые определяются формулой

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\dots,n-1. \quad (1.21)$$

Пример. Найти все различные значения корня $\sqrt[3]{-27}$.

Решение. Обозначим $z = -27$, тогда $|z| = 27$, $\arg z = \arg(-27) = \pi$,

имеем $w_k = \sqrt[3]{27} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k=0,1,2$.

Найдем значения w_k :

$$k=0, w_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$k=1, w_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = -3;$$

$$k=2, w_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Изобразим эти числа на комплексной плоскости (рис.1.5). Точки w_0, w_1, w_2 – вершины правильного треугольника.

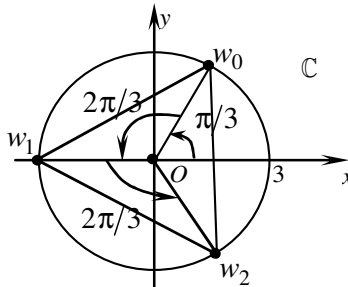


Рис 1.5.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить:

а) $\frac{1+i}{2-i}$, б) $(2-i)(3+4i)$, в) $\frac{(1+i)(2-i)}{4+i}$, г) $\frac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(1+i)}$.

1.2. Для заданных комплексных чисел найти модуль, главное значение аргумента и представить их в тригонометрической и экспоненциальной формах:

а) $z = -4$, б) $z = 2i$, в) $z = -2i$, г) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

д) $z = 5 + 3i$, е) $z = -2 - 3i$, ж) $z = 1 - i$, з) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$,

1.3. Вычислить:

а) $(1 - i)^7$; б) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{10}$; в) $(-4 + 3i)^3$; г) $(\sqrt{3} - 3i)^6$;

д) $(1 + i)^8 (1 - i\sqrt{3})^{-6}$.

1.4. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$; г) $\sqrt[3]{8}$; д) $\sqrt[3]{-1 + i}$; е) $\sqrt[3]{2 - 3i}$;

ж) $\sqrt[6]{-1}$; з) $\sqrt[8]{16}$.

2. Множества точек, кривые и области на комплексной плоскости

2.1. Множества точек на комплексной плоскости. Последовательности комплексных чисел

Комплексные числа можно рассматривать как элементы линейного нормированного пространства с нормой $\|z\| = |z|$. Расстояние между двумя комплексными числами z_1 и z_2 определяется как норма их разности, т.е.

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что уравнение $|z - z_0| = R$ задаёт множество точек z плоскости, находящихся на расстоянии R от фиксированной точки z_0 , т.е. окружность радиусом R с центром в точке z_0 . Соответственно, неравенство $|z - z_0| \leq R$ задаёт круг радиусом R с центром в точке z_0 , а неравенство $|z - z_0| > R$ – внешность этого круга. Двойное неравенство $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ задаёт кольцо между окружностями радиусами R_1 и R_2 с центром в точке z_0 .

Аналогичным образом, записывая условия на аргумент, действительную или мнимую часть комплексного числа, можно задавать некоторые множества точек. Например, уравнение $\arg z = \alpha$ задаёт луч, выходящий из начала координат и образующий угол α с положительным направлением действительной оси; неравенство $\operatorname{Im} z \leq b$ задаёт полуплоскость, ограниченную сверху прямой $y = b$.

Определение 1. ε -окрестностью точки z_0 называется множество точек z комплексной плоскости таких, что $|z - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Условимся ее обозначить символом $U_{z_0}^\varepsilon : U_{z_0}^\varepsilon = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Геометрически $U_{z_0}^\varepsilon$ представляет собой внутренность круга радиусом ε с центром в точке z_0 (рис.2.1).

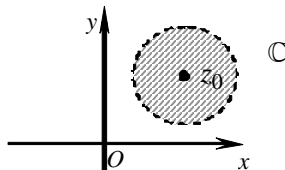


Рис.2.1.

Определение 2. Комплексное число a называется *пределом последовательности* комплексных чисел $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N$ выполняется

$|z_n - a| < \varepsilon$. Обозначают $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Последовательность, имеющая

предел, называется *сходящейся*.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n, n = 1, 2, \dots$. Справедлива

Теорема 1. Существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, где $a = \alpha + i\beta$, равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Доказательство вытекает из определения предела и из неравенств

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Из теоремы 1 следует, что сходящиеся последовательности комплексных чисел обладают такими же свойствами по отношению к арифметическим операциям, что и действительные последовательности, например $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \zeta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$.

Если члены последовательности представлены в тригонометрической (экспоненциальной) форме, наряду с данной последовательностью можно рассмотреть последовательности модулей и аргументов её членов. Справедливы утверждения:

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|$. (Очевидно из геометрических соображений).

2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho$, то

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho e^{i\alpha}$ (Достаточное условие сходимости). Следует из формулы

$z_n = r_n \cos \varphi_n + i r_n \sin \varphi_n$ и теоремы 1.

Заметим, что из сходимости последовательности комплексных чисел, вообще, не следует сходимость последовательности их аргументов.

Задача. Привести пример сходящейся последовательности, для которой не существует предела последовательности её аргументов.

Указание: воспользоваться многозначностью аргумента.

Определение 3. Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists R, \forall n: |z_n| < R$.

2.2. Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость

Понятие *бесконечность* или *бесконечно удалённая точка* вводится с помощью следующего определения:

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся к бесконечности* (или *бесконечно большой последовательностью*), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Из этого определения следует

Определение 2. Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|z| = R > 0$, называют *R-окрестностью бесконечно удаленной точки*, и обозначают U_∞^R . Бесконечно удаленную точку обозначают символом ∞ , а комплексная плоскость \mathbb{C} , вместе с точкой $z = \infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью*.

Согласно определению, бесконечно удалённая точка как бы «размазана» по всем направлениям и не имеет аргумента, как и точка $z = 0$.

Из свойств бесконечно больших комплекснозначных последовательностей по отношению к арифметическим операциям, которые анало-

гичны свойствам бесконечно больших действительных последовательностей, вытекают свойства бесконечно удалённой точки:

$$z \pm \infty = \infty, \quad \infty \cdot z = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty.$$

Операции $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ не имеют смысла. Для получения

геометрического изображения бесконечно удаленной точки $z=\infty$, используют сферу радиуса 1 – *сферу Римана* (рис.2.2). Каждая точка M_1 сферы – образ точки M комплексной плоскости, которая является пересечением прямой NM_1 с комплексной плоскостью, где N – верхний полюс сферы. При удалении M в бесконечность по любому на-

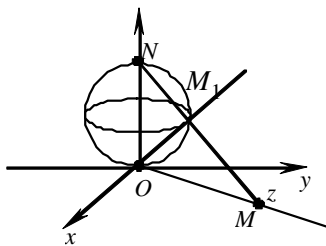


Рис.2.2.

правлению, соответствующие точки M_1 на сфере будут стремиться к N , т.е. точка N – изображение на сфере бесконечно удаленной точки комплексной плоскости $z=\infty$. Наглядным представлением расширенной комплексной плоскости является вся сфера. Данное соответствие между точками комплексной плоскости и точками на сфере Римана называется *стереографической проекцией*. Комплексная плоскость, образованная лишь конечными точками, представляется сферой Римана, из которой исключена одна точка N .

2.3. Комплекснозначные функции действительной переменной. Кривые на комплексной плоскости

Определение 1. Пусть на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$ заданы две действительные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$, тогда принимающая комплексные значения функция $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ называется *комплекснозначной функцией действительной переменной*. Действительные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются соответственно действительной и мнимой частями функции $\sigma(t)$: $\xi(t) = \operatorname{Re} \sigma(t)$, $\eta(t) = \operatorname{Im} \sigma(t)$. Функция $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ назы-

вается *непрерывной* в точке (на отрезке), если в этой точке (на этом отрезке) непрерывны функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Производная функции $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ определяется формулой $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$. Для комплекснозначных функций действительной переменной справедливы известные правила дифференцирования арифметических выражений, например, $(\sigma_1 \sigma_2)' = \sigma_1' \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2'$. *Дифференциалом* функции $\sigma(t)$ называется выражение $d\sigma(t, dt) = \sigma'(t)dt$.

Интеграл от функции $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ по отрезку $\alpha \leq t \leq \beta$ определяется формулой

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \xi(t)dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \eta(t)dt, \quad (2.2)$$

из которой вытекают известные свойства интеграла: линейность, аддитивность, формула Ньютона-Лейбница. Следует отметить, что для комплекснозначных функций теорема о среднем, вообще, неверна.

Комплекснозначную функцию $z = \sigma(t)$ можно трактовать как двумерную вектор-функцию, отображающую отрезок $\alpha \leq t \leq \beta$ на некоторое множество точек комплексной плоскости, которое можно рассматривать как «график» этой функции. Если $\sigma(t)$ непрерывна, то её «графиком» является некоторая непрерывная кривая на комплексной плоскости.

Определение 2. Пусть на конечном отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z = \sigma(t)$. Тогда говорят, что задана *непрерывная кривая*

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.3)$$

а уравнение (2.3) называется *параметрическим уравнением* этой кривой. При этом, если $z_1 = z(t_1)$, $z_2 = z(t_2)$, где $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, то говорят, что точка z_2 следует за точкой z_1 . Таким образом, кривая $z(t)$ является упорядоченным множеством точек комплексной плоскости. Кривая всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t . Направление движения точки z вдоль кривой, соответствующее возрастанию параметра t , называется *положительным*. Направление движения по кривой, соответствующее убыванию параметра t , называется *отри-*

цательным. Кривая, начальная и конечная точки которой совпадают, называется *замкнутой*. Если одна и та же точка кривой соответствует двум и более различным значениям параметра, из которых, по крайней мере, одно отлично от α и β , то такая точка называется *кратной* (*точкой самопересечения*). Кривая, не имеющая кратных точек, называется *простой* или *жордановой* кривой.

Определение 3. Простая замкнутая кривая называется *контуром*.

Определение 4. Кривая $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ называется называется *гладкой*, если $\sigma(t)$ имеет на $[\alpha; \beta]$ непрерывную производную, причём $\sigma'(t) \neq 0$. Если кривая замкнута, то также должно выполняться условие $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$. Кривая называется *кусочно-гладкой*, если она непрерывна и её можно разбить на конечное число гладких кривых. В каждой точке гладкой кривой существует касательный вектор $z'(t)$ к кривой. В некоторых точках кусочно-гладкой кривой существуют несовпадающие предельные положения касательной слева и справа. В дальнейшем будут рассматриваться только кусочно-гладкие кривые. Простейшим примером кусочно-гладкой кривой является *ломаная*.

Примеры кривых.

а) Уравнение $z = it$ ($-1 \leq t \leq 1$) определяет кривую, изображённую отрезком мнимой оси $-1 \leq y \leq 1$. Для направления, соответствующего возрастанию параметра t , начальной точкой будет $z_1 = -i$, конечной $z_2 = i$. Кривая не замкнута, не имеет кратных точек, является простой.

б) $z = \cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$. Кривая является отрезком действительной оси $[-1, 1]$, проходимым дважды: сначала от точки $z = 1$, к точке $z = -1$. Это пример замкнутой кривой, у которой каждая точка интервала $(-1; 1)$ является кратной. Кривая не является простой.

в) Кривая $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ является верхней полуокружностью радиуса 1 с центром $z_0 = 0$, ориентированной против часовой стрелки.

г) Кривая $z = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ является окружностью радиуса R с центром z_0 , ориентированной против часовой стрелки. Начальной и конечной точкой является точка $z = z_0 + R$.

2.4. Области на комплексной плоскости. Односвязные и многосвязные области

Определение 1. Точка z_0 называется *внутренней точкой* множества G , если вместе с точкой z_0 множество G содержит некоторую окрестность точки z_0 . Множество, состоящее только из внутренних точек, называется *открытым* множеством.

Определение 2. Точка z_1 называется *граничной* точкой множества G , если в любой ее окрестности есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие G . Совокупность всех граничных точек называется *границей множества*, обозначается ∂G .

Определение 3. Открытое множество G называется *областью*, если оно *связно*, т.е. любые две точки $z_1, z_2 \in G$ можно соединить ломаной $\Gamma \subset G$. Пример открытого множества, не являющегося областью

$$E = \{z \mid |z+1| < 1\} \cup \{z \mid |z-1| < 1\}.$$

Множество, состоящее из области G и ее границы, называется *замкнутой областью* и обозначается $\bar{G} = G \cup \partial G$.

Определение 4. Множество G называется *ограниченным*, если существует круг $U_0^R = \{z \mid |z| < R\}$, такой, что $G \subset U_0^R$.

Определение 5. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый контур γ , целиком лежащий в G , ограничивает область $G_\gamma \subset G$. В противном случае область называется *многосвязной* (с «дырками»). Многосвязную область можно превратить в односвязную с помощью *разрезов*. Разрезом какой-либо области по данной кривой называют удаление из области точек этой кривой.

Примеры:

1) Область $G_1 = \{z \mid |z+1| < 1\}$ является односвязной.

2) Области $G_2 = \{z \mid 0 < |z+1| < 1\}$ и $G_3 = \{z \mid 1 < |z+1| < 2\}$ не

являются односвязными.

Теорема Жордана. Каждая замкнутая жорданова кривая Γ делит всю плоскость на две различные области G_1 и G_2 , общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена (она назы-

вается *внутренностью* Γ , обозначается $\text{int } \Gamma$), а другая не ограничена (она называется *внешностью* Γ).

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти и изобразить множества точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $|z| \leq 2$; б) $|z - 2i| \leq 4$; в) $\text{Im} \frac{z}{1+i} = 0$; г) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{3}$;

д) $|z - 1 - i| < 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$; е) $|z| \leq 1$, $\arg(z+i) \geq \frac{\pi}{4}$;

ж) $|z| > 1$, $-1 < \text{Im } z \leq 1$, $0 < \text{Re } z \leq 2$; з) $z \cdot \bar{z} < 2$, $\text{Re } z \leq 1$;

и) $|z - 2 - i| \geq 1$, $1 \leq \text{Re } z < 3$, $0 < \text{Im } z \leq 2$;

к) $|z - 1 - i| \leq 3$, $|z - 1 - i| \geq 2$, $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z - (1+i)) \leq \frac{\pi}{3}$;

л) $|z| \leq 2$, $|z - 1| \geq 1$; м) $\arg z = \frac{\pi}{3}$, $1 \leq |z| \leq 2$;

н) $z = e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot w$, $\arg w = \frac{\pi}{3}$, $1 \leq |w| \leq 2$.

2.2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2i + \frac{i}{n}}{2 + i - \frac{i}{n}}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + i}{(1 + 3i)n - 3i}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2i)n + 10i}{(3 - i)n - 100i}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(in + 5 - i)^2}{(6 + i)n^3}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in + i^n}{i^n - (2 + i)n}$; е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in + (2i)^n}{(2 + i)n + 2i}$;

ж) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i}{n}}$; з) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)}$; и) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n e^{i\frac{\pi n}{2}}$;

к) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n e^{i\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)}$; л) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} e^{i\pi n}$.

2.3. Исследовать на ограниченность последовательности:

а) $\{i^n\}$; б) $\{(1+i)^n\}$; в) $\left\{\frac{(1+i)^n}{n}\right\}$; г) $\{(1+i)^n - (1-i)^n\}$.

2.4. При каких значениях комплексного параметра a сходятся последовательности?

а) $\{a^n\}$; б) $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$; в) $\{na^n\}$; г) $\left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}$.

2.5. Используя определение функции $e^{i\varphi}$, покажите, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{i} (e^{i\beta} - e^{i\alpha}).$$

2.6. Изобразите кривые, заданные параметрически, и укажите стрелками их ориентации:

а) $z = 1 + it$, $1 \leq t \leq 2$; б) $z = (1+i)t$, $1 \leq t \leq 2$;

в) $z = 1 - i - (2-i)t$, $0 \leq t \leq 2$; г) $z = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$;

д) $z = 2i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$; е) $z = 1 + i + \sqrt{2}e^{i2t}$, $0 \leq t \leq \pi$;

ж) $z = 2\cos t + i\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; з) $z = 1 - i + e^{-it}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$;

и) $z = e^{\frac{i\pi}{4} \cdot t}$, $1 \leq t \leq 2$.

2.7. Задайте кривые в параметрическом виде:

а) отрезок прямой от точки $z_0 = 1$ до точки $z_1 = i$;

б) отрезок прямой от точки $z_0 = -1 + i$ до точки $z_1 = 2 - i$;

в) окружность с центром в точке $z_0 = 2 + i$ и радиусом $R = 2$, ориентированная против часовой стрелки; начальная точка $z_1 = 4 + i$;

г) окружность с центром в точке $z_0 = 2 + i$ и радиусом $R = 2$, ориентированная против часовой стрелки; начальная точка $z_1 = 2 + 3i$;

д) полуокружность $|z - 2 + i| = 3$, $\operatorname{Im}(z + i) \leq 0$, направление обхода — по часовой стрелке.

3. Функции комплексной переменной

3.1. Определение функции комплексной переменной.

Предел, непрерывность

Определение 1. Говорят, что на множестве G точек плоскости \mathbb{C} задана *функция комплексной переменной* $w = f(z)$, если указан закон, по которому каждой точке $z = x + iy \in G$ ставится в соответствие одно или совокупность комплексных чисел $w = u + iv$. Множество G называется *множеством определения функции*, множество всех значений w называется *множеством изменения функции* и обозначается E . Если каждому значению $z \in G$ соответствует единственное значение $w \in E$, то $f(z)$ называется *однозначной*, в противном случае – *многозначной*. Функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – действительные функции двух действительных переменных, называемые соответственно *действительной* и *мнимой частями* функции $f(z)$. Таким образом, задание функции комплексной переменной $w = f(z)$ равносильно заданию двух функций двух действительных переменных

$$u = u(x, y), v = v(x, y). \quad (3.1)$$

График функции комплексной переменной изобразился бы некоторой поверхностью в пространстве четырёх действительных переменных x, y, u, v , что затруднительно представить наглядно. Для наглядного представления условимся откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значение w на другой. Тогда функцию комплексной переменной можно геометрически представить как некоторое отображение множества G плоскости \mathbb{C} на множество E плоскости \mathbb{W} (рис.3.1).

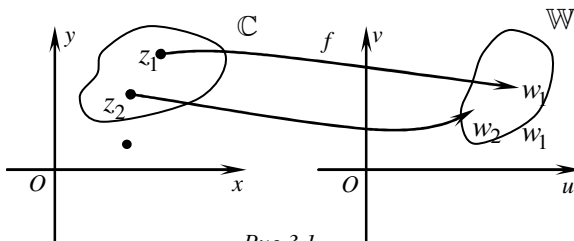


Рис.3.1.

Если $w = f(z)$ однозначна на множестве G и при этом $f(z_1) \neq f(z_2)$, где $z_1 \neq z_2$, то такое отображение называется *взаимно-однозначным*, или *однолиственным*. Точка $w \in E$ часто называется *образом* точки z на плоскости w , а саму точку z называют *прообразом*. Если отображение $w = f(z)$ взаимно-однозначно, то существует однозначная обратная функция $z = \varphi(w)$, которая называется *обратной* к $w = f(z)$. В общем случае функция $z = \varphi(w)$ может быть многозначной. Например, однозначная функция $w = z^2$ отображает плоскость z на всю плоскость w , однако любое число $w \neq 0$ является образом двух различных точек z (значений \sqrt{w}), обратная к $w = z^2$ функция $z = \sqrt{w}$ будет двузначной.

Предел функции. Пусть функция определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0 .

Определение 2. Число A называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$.

Имеет место обычная запись:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, A = a + ib. \quad (3.2)$$

Если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

то

$$A = \infty.$$

Комплексное соотношение $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ эквивалентно двум действительным:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

Основные свойства предельных переходов для действительных функций сохраняются для функций комплексного переменного. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0 , если она определена в некоторой окрестности точки z_0 и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция $f(z)$ на-

зывается *непрерывной в области* G , если она непрерывна в каждой точке этой области. Отметим без доказательства, что для функций, непрерывных на замкнутых ограниченных множествах (в замкнутых ограниченных областях, на замкнутых линиях или отрезках линий, содержащих свои концы), остаются справедливыми обычные свойства функций, непрерывных на замкнутых ограниченных множествах. Именно, функция $f(z)$:

- 1) ограничена на \bar{G} , т.е. $\exists M, \forall z \in \bar{G}: |f(z)| \leq M$;
- 2) достигает своего наибольшего и наименьшего значения (по модулю), т.е. в \bar{G} существуют z_1, z_2 , такие, что

$$|f(z_1)| \geq |f(z)|, |f(z_2)| \leq |f(z)|, \forall z \in \bar{G};$$

- 3) *равномерно непрерывна* на \bar{G} , т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall z_1, z_2 \in \bar{G}, \forall z_1, z_2 \in \bar{G}, |z_1 - z_2| < \delta$ справедливо неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Если $w = f(z)$ непрерывна в области G и осуществляет взаимно-однозначное отображение этой области на некоторое множество G_1 в плоскости w , то G_1 также является областью, ее обратная функция $z = \varphi(w)$ непрерывна в G_1 .

3.2. Элементарные функции комплексной переменной и их свойства

1. Линейная функция $f(z) = az + b$, где a, b – комплексные числа; является однолистной и непрерывной во всей комплексной плоскости.

2. Степенная функция с натуральным показателем $f(z) = z^n$, n – целое положительное число; является непрерывной во всей ком-

плескной плоскости, но не является в ней однолистной, так как обратная к ней функция $w = \sqrt[n]{z}$ – многозначная.

3. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ – **дробно-линейная функция**; является непрерывной во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $z = -\frac{d}{c}$; является однолистной и непрерывной в расширенной комплексной плоскости.

4. **Показательная функция** $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Свойства:

- 1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, $\forall z_1, z_2$.
- 2) Периодична с периодом $T = 2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$, $\forall z$.
- 3) Непрерывна во всей комплексной плоскости.
- 4) Для любого $z = x + iy$: $|e^z| = e^x$.
- 5) Принимает все значения, кроме нуля.
- 6) Однолистка в любой горизонтальной полосе, не содержащей пары точек z_1, z_2 , таких, что $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. **Логарифмическая функция (логарифм)** $w = \text{Ln } z$ определяется как обратная к показательной функции e^z . В силу периодичности функции e^z логарифм является многозначной функцией; все его значения описываются выражением:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\ln |z|$ – обычный действительный логарифм. Однозначная ветвь многозначного логарифма, определяющаяся выражением

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

называется *главным значением логарифма*. Функция $\ln z$ является непрерывной и однолистной в области $D: |z| > 0, -\pi < \arg z < \pi$.

6. Тригонометрические функции определяются по формулам:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Свойства:

1) Функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны во всей комплексной плоскости; $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ непрерывны во всех точках, в которых они определены.

2) Являются периодическими, для $\sin z$, $\cos z$ период равен 2π , для $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ период равен π .

3) Все формулы элементарной тригонометрии справедливы и для тригонометрических функций комплексной переменной, например

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z \text{ и т.д.}$$

4) В отличие от соответствующих функций действительной переменной функции комплексной переменной $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными, более того, уравнения $\sin z = A$ и $\cos z = A$ имеют решения при любом комплексном A .

7. Гиперболические функции определяются по формулам:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Свойства:

1) Гиперболические синус $\operatorname{sh} z$ и косинус $\operatorname{ch} z$ непрерывны во всей комплексной плоскости; гиперболические тангенс $\operatorname{th} z$ и котангенс $\operatorname{cth} z$ непрерывны во всех точках, в которых определены.

2) Являются периодическими, для $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ период равен $2\pi i$, для $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ период равен πi .

3) Формулы, имеющие место для гиперболических функций действительной переменной остаются справедливыми и для гиперболических функций комплексной переменной, например $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ и т.д.

4) Имеют место формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = -i \operatorname{ctg} iz.$$

8. Общая степенная функция $f(z) = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$.

9. Общая показательная функция $f(z) = a^z, a \neq 0$, определяется равенством $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$.

Общая степенная и общая показательная функции являются многозначными. Следует заметить, что для этих функций известные из элементарной математики свойства степеней не сохраняются, в частности,

$$z^{a_1+a_2} \neq z^{a_1} z^{a_2}, (z^a)^b \neq z^{ab},$$

здесь в левых и правых частях равенств подразумеваются множества значений функций, которые, вообще, не совпадают.

Пример. $(-1)^{2i} = e^{2i \operatorname{Ln}(-1)} = e^{2i^2(\pi+2\pi k)} = e^{-2\pi(2k+1)}, k \in \mathbb{Z};$

$$((-1)^2)^i = (e^{2 \operatorname{Ln}(-1)})^i = (e^{i(2\pi+2\pi k)})^i = 1^i = e^{i \operatorname{Ln} 1} = e^{i^2 2\pi k} = e^{-2\pi k}, k \in \mathbb{Z};$$

видно, что в первом и во втором случаях множества значений, хотя и пересекаются, но не совпадают.

Замечание. Несложно проверить, что общая степенная функции с целым показателем – однозначная; аналогично этому, общая показательная функция от целочисленного аргумента принимает единственное значение.

3.3. Производная функции $w = f(z)$ и дифференциал

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 , $z \in U_{z_0}^\delta$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то он называется *производной функции $f(z)$ в точке z_0* и обозначается $f'(z_0)$, т.е.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (3.3)$$

Функция, имеющая производную в точке z_0 , называется *дифференцируемой*. Если обозначить через Δz приращение аргумента, а через Δw приращение функции, то дифференцируемость $f(z)$ в точке z_0 означает, что

$$\Delta w = f'(z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z, \quad (3.4)$$

где $\varepsilon(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Из (3.4) следует, что функция, дифференцируемая в точке z_0 , является непрерывной в этой точке. Выражение $dw = f'(z_0) \cdot dz$ называется *дифференциалом функции*.

Пример: Функция $f(z) = z^3$ дифференцируема на всей комплексной плоскости, поскольку

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2}{\Delta z} = 3z^2 \Rightarrow f'(z) = 3z^2.$$

Из определения производной следует, что основные правила дифференцирования распространяются на функции комплексной переменной:

$$(f + g)' = f' + g', (fg)' = f'g + g'f, \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2},$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z), \varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}, (z = \varphi(w)).$$

В последней формуле f и φ – взаимно-обратные функции.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Замечание. В определении производной подразумевается требование, чтобы предел (3.3) не зависел от способа стремления Δz к нулю. Это накладывает на дифференцируемую функцию очень сильные ограничения, что приводит к появлению интересных и важных свойств дифференцируемых функций комплексной переменной.

3.4. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции $w=f(z)$. Условия Коши-Римана

Теорема [7,8]. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная и однозначная в окрестности точки $z = x + iy$, была дифференцируема в точке z , необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) ;

2) в точке (x, y) выполнялись условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

При выполнении этих условий производная $f'(z)$ может быть представлена в одной из следующих форм:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z . Тогда в силу (3.4) приращение функции при приращении переменной Δz может быть записано в виде

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha(\rho), \quad (3.7)$$

где $\alpha(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$, $\rho = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Функция $\alpha(\rho)$ – комплекснозначная, $\alpha(\rho) = \alpha_1(\rho) + i\alpha_2(\rho)$, где $\alpha_1(\rho) = \operatorname{Re} \alpha(\rho)$, $\alpha_2(\rho) = \operatorname{Im} \alpha(\rho)$, причём

$$\alpha_1(\rho) = o(\rho), \quad \alpha_2(\rho) = o(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Обозначим $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $f'(z) = A + iB$, тогда (3.7) примет вид

$$\Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2. \quad (3.9)$$

Приравнявая в (3.9) действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1, \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.10) и (3.8) вытекает дифференцируемость функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x, y) . Из (3.10) находим:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда следуют условия Коши–Римана (3.5) и формула (3.6), так как $f'(z) = A + iB$. Необходимость доказана.

Достаточность [8]. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и пусть они выполнены условия Коши–Римана (3.5). Тогда имеют место формулы (3.10) для приращений $\Delta u, \Delta v$, где $\alpha_1 = o(\rho)$, $\alpha_2 = o(\rho)$. Умножая второе из равенств (3.10) на i и складывая с первым, получаем

$$\Delta u + i\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2,$$

или

$$\Delta f = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2,$$

т.е. $\Delta f = (A + iB)\Delta z + \alpha(\rho)$, где $\alpha(\rho) = o(\rho)$, откуда вытекает дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z . Теорема доказана.

Пример 1. Функция $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ дифференцируема на всей комплексной плоскости, поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

По формуле (3.6)

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $w = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x \Rightarrow$$

условия Коши–Римана выполнены только при $x = y = 0$, т.е. функция $w = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$ дифференцируема только в точке $z = 0$, причём $w'(0) = (2x - 2y)|_{x=y=0} = 0$.

Условия Коши–Римана в полярных координатах

Пусть $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, тогда условия Коши–Римана имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (3.11)$$

Производная $f'(z)$ вычисляется по формулам:

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \quad (3.12)$$

Пример 3. Исследуем на дифференцируемость функцию $f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$, ($r > 0, -\pi < \varphi < \pi$). Имеем: $u = \ln r$, $v = \varphi$, $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \Rightarrow$ условия (3.11) выполнены, функция дифференцируема во всей своей области определения. Вычислим производную:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{z}.$$

3.5. Понятие аналитической функции. Свойства действительной и мнимой частей аналитической функции

Определение 1. Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z_0 , если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки z_0 . Функция, аналитическая в каждой точке области D , называется *аналитической в области* D . Условием аналитичности функции в точке z_0 является выполнение условия дифференцируемости функции в самой точке z_0 и во всех точках некоторой ее окрестности. Такими условиями являются условия Коши–Римана, т.е. выполнение условий Коши–Римана в некоторой области является условиями аналитичности функции. Существуют функции, дифференцируемые только в одной точке и не являющиеся аналитическими. Например $w = z|z$, $w'(0) = 0$, но условия Коши–Римана не выполнены ни в одной точке $z \neq 0$. (См. также пример 2 предыдущего пункта).

Задача. Найти область аналитичности функции $w = z^2$.

Решение.

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$v(x, y) = 2xy, \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Условие Коши–Римана выполнено для любой точки плоскости, т.е.

$$w = z^2 \text{ аналитическая функция, и } (z^2)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z.$$

Замечание 1. Из определения аналитической в области функции следует, что понятия дифференцируемости в области и аналитичности в области эквивалентны.

Замечание 2. Более строго, вместо термина «аналитическая функция» в приведённом выше определении 1 следовало бы использовать термин «однозначная аналитическая функция»; в литературе применяется также термин «регулярная функция» [8]. Термин «аналитическая функция» применяется к более сложному понятию, рассмотрение которого выходит за рамки данного курса.

Все однозначные элементарные функции, а также функции, полученные с помощью арифметических операций и суперпозиций с ними, являются аналитическими во всех точках, в которых они определены, причём их производные вычисляются по тем же правилам дифференцирования, как и для функций действительной переменной.

Определение 2. Действительная функция $u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в D уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.13)$$

называется *гармонической в области D* .

Определение 3. Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши–Римана, называются *сопряжёнными гармоническими*.

Свойство 1 действительной и мнимой частей аналитической функции формулирует

Теорема. Для аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были сопряжёнными гармоническими в этой области.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z) = u + iv$ – аналитическая в области D . В дальнейшем будет показано (без исполь-

зования данной теоремы), что функция, аналитическая в области, имеет в этой области производные любого порядка, следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают непрерывными частными производными любого порядка. Поэтому будем считать, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка. Запишем оператор Лапласа для функции $u(x, y)$ и преобразуем его, используя условия Коши–Римана:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,\end{aligned}$$

т.е. $u(x, y)$ – гармоническая в D . Аналогично показывается, что $\Delta v = 0$, т.е. $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряжённые гармонические в D .

Достаточность. Если в области D функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряжёнными гармоническими, то по теореме п. 3.4 функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в области D , поскольку $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и выполнены условия Коши–Римана. Поэтому $f(z)$ – аналитическая в D , поскольку дифференцируемость и аналитичность в области эквивалентны. Теорема доказана.

Свойство 2: Заданием вещественной или мнимой части аналитической в области D функция определяется с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – действительная часть аналитической в области D функции $f(z)$. Из условий Коши–Римана имеем

$$dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy. \quad (3.14)$$

Функция $v(x, y)$ находится интегрированием:

$$v(X, Y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} -u'_y dx + u'_x dy + c, \quad (3.15)$$

где (x_0, y_0) – произвольная точка области; интеграл берётся по любой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (X, Y) (символы X, Y , обознача-

чающие координаты конечной точки, выбраны, так чтобы они не совпадали с переменными интегрирования). Если задана мнимая часть $v(x, y)$, то действительная часть находится аналогичным образом.

Пример. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$ и дополнительному условию $f(0) = 2$.

Решение. Вначале проверим, является ли функция $u(x, y)$ гармонической. Найдем частные производные первого и второго порядков функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x \cos y,$$

откуда видно, что $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, т.е. $u(x, y)$ – гармоническая.

Вычислим теперь $v(x, y)$ по формуле (3.15). Так как функция $u(x, y)$ определена при всех значениях переменных x, y , возьмем в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ начало координат $(0, 0)$, тогда из (3.15) с учётом (3.16) имеем

$$v(X, Y) = \int_{(0,0)}^{(X,Y)} 2e^x \sin y dx + 2e^x \cos y dy + c.$$

Для вычисления криволинейного интеграла, не зависящего от формы пути интегрирования, возьмем за путь интегрирования ломаную Γ , состоящую из двух отрезков (рис.3.2):

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

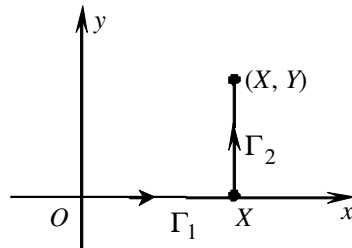


Рис.3.2.

где $\Gamma_1: y=0, dy=0, 0 \leq x \leq X, dx \neq 0$, $\Gamma_2: x=X, 0 \leq y \leq Y, dy \neq 0, dx=0$.

После вычислений получим

$$\begin{aligned} v(X, Y) &= 2e^X \int_0^Y \cos y dy + c = \\ &= 2e^X \sin y \Big|_0^Y + c = 2e^X \sin Y + c. \end{aligned}$$

Искомая функция

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + c) = \\ &= 2 \cdot e^x (\cos y + i \sin y) + ic = 2 \cdot e^x \cdot e^{iy} + ic = 2e^z + ic. \end{aligned}$$

По условию $f(0) = 2$, т.е. $2 + ic = 2, c = 0$. Окончательно, $f(z) = 2e^z$.

3.6. Геометрический смысл аргумента и модуля производной $f'(z_0)$

1. Геометрический смысл аргумента $f'(z_0)$. Пусть $w = f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Образ этой точки обозначим через w_0 . Пусть Γ_1 произвольная гладкая кривая в плоскости \mathbb{C} , проходящая через точку z_0 , а $\tilde{\Gamma}_1$ – ее образ в плоскости \mathbb{W} , проходящий через точку w_0 (рис.3.3), причём будем считать, что координатные оси Ox, Oy сонаправлены осям Ou, Ov соответственно.

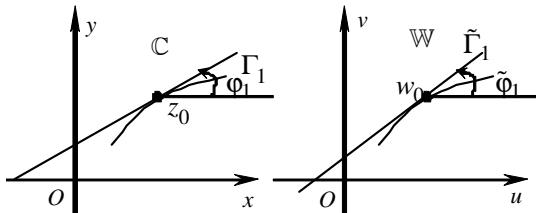


Рис.3.3.

Обозначим через φ_1 угол между касательной к кривой Γ_1 в точке z_0 с осью Ox , а через $\tilde{\varphi}_1$ – угол между касательной к $\tilde{\Gamma}_1$ в точке w_0 и осью Ou . Если точка $z_0 + \Delta z$ лежит на кривой Γ_1 , то её образ – точка $w_0 + \Delta w$ – лежит на кривой $\tilde{\Gamma}_1$. Тогда $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ являются углами, образуемыми секущими Δz и Δw с осями Ox и Ou соответственно, поэтому $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w = \tilde{\varphi}_1$ и $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \varphi_1$. Используя то, что главное значение аргумента частного равно разности главных значений аргументов с точностью до слагаемого $\pm 2\pi$ (см. замечание к п.1.3), имеем при достаточно малых Δz :

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z + \delta, \quad (3.17)$$

где δ – константа, принимающая одно из трёх значений: $0, \pm 2\pi$. Перейдём в (3.17) к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 + \delta. \quad (3.18)$$

Обозначим $\alpha = \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1$ и введём в рассмотрение функцию $\widetilde{\arg} z$ как одну из однозначных ветвей многозначного аргумента, для множества значений которой значение α не является граничным. Областью её значений можно, например, взять интервал $(\alpha - \pi; \alpha + \pi]$. Определим значения $\widetilde{\arg} z$ таким образом, чтобы при достаточно малых Δz , таких, что $z_0 + \Delta z \in \Gamma_1$,

$$\widetilde{\arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} - \delta,$$

тогда

$$\widetilde{\arg} f'(z_0) = \widetilde{\arg} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \widetilde{\arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 = \alpha.$$

Перестановочность предельного перехода и вычисления функции $\widetilde{\arg} z$ справедлива в силу её непрерывности в точке $f'(z_0)$, очевидной из геометрических соображений. Таким образом, окончательно имеем

$$\alpha = \widetilde{\arg} f'(z_0) = \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1, \quad (3.19)$$

т.е. аргумент производной (одно из значений аргумента), если $f'(z_0) \neq 0$, геометрически представляет собой угол, на который поворачивается любая кривая Γ_1 в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. В силу произвольности кривой Γ_1 отсюда следует, что отображение $w = f(z)$ при условии $f'(z_0) \neq 0$ сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0 .

2. Геометрический смысл модуля $f'(z_0)$. Пусть Γ_1 – некоторая кривая, проходящая через точку z_0 ; рассмотрим произвольную точку z кривой Γ_1 , расположенную достаточно близко к z_0 . Обозначим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0) \equiv w - w_0$. Заметим, что из определения производной следует: $|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$. Это равносильно тому, что

$$|\Delta w| = |f'(z_0)| |\Delta z| + o(|\Delta z|), \quad (3.20)$$

т.е. при условии $f'(z_0) \neq 0$ расстояние между точками, лежащими в малой окрестности точки z_0 , при отображении $w = f(z)$ увеличивается в $k = |f'(z_0)|$ раз с точностью до величин более высокого порядка малости, чем $|\Delta z|$. Коэффициент $k = |f'(z_0)|$ называется *линейным растяжением* кривой Γ_1 в точке z_0 при отображении $w = f(z)$, причём для всех кривых этот коэффициент одинаков, поэтому говорят, что отображение $w = f(z)$ обладает *постоянством растяжений* в точке z_0 . В частности, малые окружности $|z - z_0| = \delta < 1$ преобразуются в кривые, которые мало отличаются от окружностей $|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot \delta$.

Понятие конформного отображения. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке z_0* , если оно в этой точке обладает постоянством растяжений и сохраняет углы между кривыми. Из вышеизложенного в данном пункте следует, что если $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение является конформным в точке z_0 . Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в области D* , если оно однолистно в D и является конформным в каждой точке области D .

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти действительную и мнимую части указанных функций.

а) $w = z + z^2$; б) $w = i\bar{z} + 2z^2$; в) $w = 2i - z + iz^2$; г) $w = \frac{z+i}{i-\bar{z}}$; д)

$w = \frac{\bar{z}}{i} + \frac{i}{\bar{z}}$; е) $w = \operatorname{Re}(z^2 + i) + i \operatorname{Im}(z^2 - i)$; ж) $w = \frac{z^2 + z + 1}{iz + \bar{z}}$; з)

$w = \frac{1}{z}$; и) $w = e^{-z}$;

к) $w = \sin z$; л) $w = \operatorname{tg} z$.

3.2. Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

а) $z_0 = 1 + i$, $w = z^2 + i$; б) $z_0 = \frac{1+i}{2}$, $w = (z-i)^2$;

в) $z_0 = 1 - \frac{i}{2}$, $w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}$; г) $z_0 = 3 - 2i$, $w = \frac{z}{\bar{z}}$.

3.3. Найти образы координатных линий Ox и Oy при отображении

$$w = \frac{z+i}{z-i}.$$

3.4. Вычислить и представить в алгебраической форме все значения выражения:

а) $\cos(1+i)$; б) $\operatorname{ch} i$; в) $\operatorname{sh}(-2+i)$; г) $\operatorname{Ln}(-1)$; д) $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

е) $e^{-1+\frac{3\pi}{4}i}$; ж) i^i ; з) 1^i ; и) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$; к) $\sin \pi i$; л) $\operatorname{th} 2i$.

3.5. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из функций являются аналитическими:

а) $w = z^2 \cdot \bar{z}$; б) $w = z \cdot e^{\bar{z}}$; в) $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$; г) $w = z^n$;

д) $w = \sin z$; е) $w = e^{5z}$; ж) $w = \ln z$.

3.6. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной или мнимой части.

а) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$; б) $u(x, y) = e^{-y} \cos x$, $f(0) = 1$;

в) $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$, $f(0) = 1$; г) $u(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$, $f(0) = 2$.

д) $v(x, y) = 2(\operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $f(0) = 3$;

е) $u(x, y) = e^{-y} \cos x + x$, $f(0) = 1$.

3.7. Найти коэффициент линейного растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений в указанных точках:

а) $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$; б) $w = z^3$, $z_0 = 1+i$; в) $w = ie^{2z}$, $z_0 = 2\pi i$.

3.8. Найти множество точек, в которых при отображении $w = f(z)$ коэффициент линейного растяжения $k = 1$:

а) $w = (z-1)^2$; б) $w = z^2 - iz$; в) $w = \frac{1+iz}{1-iz}$; г) $w = z^{-3}$.

4. Интегрирование функций комплексной переменной

Важным понятием в теории функций комплексной переменной является понятие интеграла от функции комплексной переменной.

4.1. Определение интеграла от функции комплексной переменной

Пусть в каждой точке z заданной непрерывной кусочно-гладкой кривой Γ определена однозначная функция $f(z)$. Разобьем кривую Γ на n дуг с помощью точек z_0, z_1, \dots, z_n , где z_0 — начало кривой, z_n — конец кривой (рис.4.1). На каждой дуге возьмем точку η_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) и составим интегральную сумму

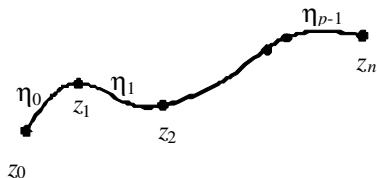


Рис.4.1.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)(z_{k+1} - z_k). \quad (4.1)$$

Определение. Предел интегральной суммы σ_n при $\lambda = \max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$, если он существует и не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек η_k , называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ и обозначается символом $\int_{\Gamma} f(z) dz$:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)(z_{k+1} - z_k). \quad (4.2)$$

Если Γ – кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция, то интеграл (4.2) всегда существует. Действительно, полагая

$$f(\eta_k) = u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + iv(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k),$$

где

$$\eta_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k, \quad z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + iv(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k) + \\ &+ i \sum_{k=0}^{n-1} (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k + v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Действительная и мнимая части равенства (4.3) являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов. В рассматриваемых условиях эти интегралы существуют, а следовательно, существует

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx - vdy + i \int_{\Gamma} udy + vdx. \quad (4.4)$$

С помощью формулы (4.4) вычисление интеграла от функции комплексной переменной сводится к вычислению действительных интегралов. Из равенства (4.4) следуют свойства интеграла от функции комплексной переменной, аналогичные свойствам криволинейных интегралов второго рода:

а) *линейность*:

$$\int_{\Gamma} (c_1 f(z) + c_2 g(z))dz = c_1 \int_{\Gamma} f(z)dz + c_2 \int_{\Gamma} g(z)dz, \quad c_1, c_2 = \text{const};$$

б) *аддитивность*:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(z)dz, \quad \text{где } \Gamma = \sum_{k=1}^N \Gamma_k - \text{объединение кривых, которые}$$

попарно пересекаются не более чем в конечном числе точек;

в) *зависимость от направления движения по кривой*:

$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = - \int_{\Gamma^+} f(z)dz$, где Γ^+, Γ^- – одна и та же кривая, в первом

случае с положительным направлением движения, во втором – с отрицательным;

$$г) \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds, \text{ где } ds - \text{длина дуги } z_k z_{k+1}.$$

Свойство г) следует из неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\eta_k)| \cdot |z_{k+1} - z_k|.$$

Из г) также следует, что

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq M \cdot L,$$

где L – длина кривой Γ , а $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$.

4.2. Вычисление интегралов

Если Γ – непрерывная кусочно-гладкая кривая, заданная уравнением $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, где комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, то интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ можно представить в виде

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt. \quad (4.5)$$

По формуле (4.5) вычисление интеграла от комплексной переменной сводится к вычислению определенного интеграла по действительной переменной от комплекснозначной функции.

Примеры. а) Вычислить

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, \text{ где } \Gamma = \{z \mid |z - z_0| = R\}.$$

Решение. Уравнение кривой Γ : $z = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Рассмотрим сначала случай $n = -1$, тогда

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^{-1} dz = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Заметим, что интеграл не зависит от R . Пусть $n \neq -1$, тогда

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} Re^{it} dt = iR^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Сведём полученные результаты вместе, поскольку они имеют большое значение:

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1; \\ 0, & n \neq -1. \end{cases} \quad (4.6)$$

б) Вычислить $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, где Γ – отрезок, соединяющий точки

$$z = 0, z = 1 + i.$$

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки $z = 0, z = 1 + i$, есть $y = x$. Возьмём x в качестве параметра, тогда для точек отрезка Γ имеем:

$$z = x + ix = (1 + i)x, \quad \bar{z} = (1 - i)x, \quad dz = (1 + i)dx, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Окончательно

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 x(1 - i)(1 + i)dx = 2 \cdot \int_0^1 x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1.$$

в) Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} dz$, где Γ – отрезок, соединяющий точки

a и b .

Решение. Пусть $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ – некоторое разбиение отрезка Γ , тогда интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (z_{k+1} - z_k) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1} = b - a$$

не зависит от разбиения, поэтому

$$\int_{\Gamma} dz = \int_a^b dz = b - a, \quad (4.7)$$

причём из решения задачи следует, что данный интеграл не зависит от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Вычислить интегралы по заданным кривым.

а) $\int_{\Gamma} (2z + 1)\bar{z}dz, \quad \Gamma = \{z \mid |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\};$

б) $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz, \quad \Gamma = \{(x, y) \mid y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\};$

в) $\int_{\Gamma} (iz^2 - 2\bar{z})dz, \quad \Gamma = \left\{z \mid |z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right\};$

г) $\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(z + z^2)dz, \quad \Gamma = \{(x, y) \mid y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\};$

д) $\int_{\Gamma} (\bar{z}^2 - z)dz, \quad \Gamma = \{z \mid |z| = 1, \pi \leq \arg z \leq 2\pi\};$

е) $\int_{\Gamma} \bar{z}e^z dz, \quad \Gamma - \text{отрезок прямой от точки } z_0 = 1 \text{ до точки } z_1 = i;$

ж) $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz, \quad \Gamma - \text{отрезок прямой от точки } z_0 = \pi \text{ до точки } z_1 = -i\pi.$

4.3. Интегральные теоремы Коши

В общем случае $\oint f(z)dz$ зависит как от подынтегральной функции $f(z)$, так и от кривой Γ . Однако если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области, содержащей кривую Γ , то интеграл не зависит от формы пути.

Теорема 1. (Интегральная теорема Коши для односвязной области). Пусть функция $f(z)$ – однозначная аналитическая в односвязной области G . Тогда для любого контура $\Gamma \subset G$,
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство приведём для случая, когда производная функции $f(z)$ непрерывна в G . Для общего случая доказательство можно найти, например, в [7,8].

Доказательство. Так как
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + \oint_{\Gamma} u dy + v dx,$$

то, применяя формулу Грина
$$\left(\oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy = \iint_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right)$$
 и

учитывая условия Коши–Римана, находим

$$\oint_{\Gamma^+} u dx - v dy = \iint_{D_{\Gamma}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\oint_{\Gamma^+} u dy + v dx = \iint_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

где D_{Γ} – область, ограниченная контуром Γ .

Следствие 1. Если $f(z)$ – однозначная аналитическая в односвязной области G с границей ∂G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G} = G + \partial G$, то
$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 0.$$

Доказательство выходит за рамки настоящего курса.

Следствие 2. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G , то интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, т.е. если кривые Γ_1^+, Γ_2^+ лежат в области G и имеют общие начало и конец, то

$$\oint_{\Gamma_1^+} f(z) dz = \oint_{\Gamma_2^+} f(z) dz. \quad (4.8)$$

Доказательство. Рассмотрим контур $\Gamma = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$, лежащий в области G , тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2^-} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0,$$

откуда вытекает формула (4.8).

Теорема 2. (Интегральная теорема Коши для многосвязной области). Пусть функция $f(z)$ однозначная аналитическая в многосвязной области G с границей ∂G , состоящей из внешнего контура Γ и внутренних контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G} = G + \partial G$, тогда имеет место равенство

$$\int_{\partial G^+} f(z)dz = 0, \text{ где } \partial G^+ = \Gamma^+ + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^-.$$

или

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz.$$

Доказательство. С помощью разрезов e_1, e_2, \dots, e_n превратим многосвязную область в односвязную (рис.4.2) с полной границей

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial G}^+ &= \Gamma^+ + e_1^+ + e_1^- + \dots + e_n^+ + e_n^- + \\ &+ \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \dots + \Gamma_n^- = \\ &= \partial G^+ + e_1^+ + e_1^- + \dots + e_n^+ + e_n^-. \end{aligned}$$

Согласно интегральной теореме Коши для односвязной области $\oint_{\widetilde{\partial G}^+} f(z)dz = 0$. В силу свойства

в) интегралов

$$\int_{e_k^-} f(z)dz = - \int_{e_k^+} f(z)dz,$$

поэтому с учётом аддитивности интеграла

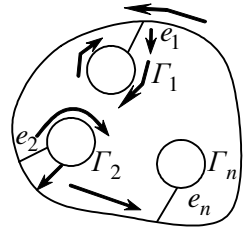


Рис. 4.2.

$$\oint_{\widetilde{\partial G}^+} f(z)dz = \oint_{\partial G^+} f(z)dz = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы 2 справедлива формула

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz. \quad (4.9)$$

Пример. Вычислить $\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^n dz$, где Γ – любой замкнутый

контур, внутри которого находится точка z_0 .

Решение. При $n \geq 0$, $f(z) = (z - z_0)^n$ аналитическая на всей плоскости, и следовательно по теореме Коши $\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^n dz = 0$. Если $n < 0$, то $f(z) = (z - z_0)^n$

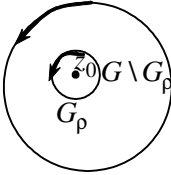


Рис. 4.3.

аналитическая, если $z \neq z_0$. Пусть $\rho > 0$, достаточно мало, такое, что окружность $\gamma_\rho = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$ лежит в области $G = \text{int } \Gamma$ (рис.4.3). Тогда в двусвязной области $\tilde{G} = G \setminus G_\rho$, где $G_\rho = \text{int } \gamma_\rho$, функция $f(z)$ однозначная аналитическая, и можно при-

менить формулу (4.9):

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^n dz = \oint_{\gamma_\rho^+} (z - z_0)^n dz,$$

откуда с учётом (4.6) получим:

$$\oint_{\Gamma^+} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

4.4. Интеграл и первообразная

Определение. Пусть функция $f(z)$ – определена и однозначна в области G , а функция $F(z)$ – дифференцируема в G . Если

$F'(z) = f(z)$ для $\forall z \in G$, то функция $F(z)$ называется *первообразной функции* $f(z)$ в области G .

Теорема. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области G , то она имеет в этой области первообразную.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad (4.10)$$

где z_0 – некоторая точка области G , интеграл берётся по любой кривой, лежащей в G . Поскольку интеграл (4.10) не зависит от пути интегрирования, то функция $F(z)$ однозначна в G . Покажем, что

$$F'(z) = \left(\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right)' = f(z). \quad (4.11)$$

Пусть $z + \Delta z$ – точка области G , лежащая в достаточно малой окрестности точки $z \in G$. Тогда

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta. \quad (4.12)$$

Поскольку $\int_z^{z + \Delta z} d\zeta = \Delta z$ для любой кривой, соединяющей точки z

и $z + \Delta z$ (см. (4.7)), то $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta. \quad (4.13)$$

Покажем, что разность $s = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)$ стремится к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$. Оценим s , используя (4.12) и (4.13), взяв в качестве пути интегрирования отрезок, соединяющий точки z и $z + \Delta z$:

$$s = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta,$$

$$|s| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta|. \quad (4.14)$$

Вследствие аналитичности функция $f(z)$ непрерывна в точке z , т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall \zeta: |\zeta - z| < \delta$ выполняется

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon. \quad (4.15)$$

Так как в (4.14) $\zeta \in [z; z + \Delta z]$, то $|\zeta - z| \leq |\Delta z|$, поэтому неравенство (4.15) будет справедливо, если $|\Delta z| < \delta$. Таким образом, из (4.14) и (4.15) получаем, что при условии $|\Delta z| < \delta$

$$|s| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon \int_z^{z+\Delta z} |d\zeta| = \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall \Delta z: |\Delta z| < \delta$ выполнено $|s| < \varepsilon$, т.е. $s \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, откуда следует, что

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Теорема доказана.

Из доказательства данной теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой, лежащей в

G , равен нулю. Тогда функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ есть первообразная

функции $f(z)$ в области G .

Очевидно, что если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$, то и функция $F(z) + C$ также является первообразной функции $f(z)$. Несложно доказать и то, что разность любых двух первообразных функции $f(z)$ есть константа, поэтому справедливо

Следствие 2. При условиях теоремы любая первообразная функции $f(z)$ выражается формулой

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C, \quad (4.16)$$

где C – некоторая комплексная постоянная.

Следствие 3. При условиях теоремы имеет место *формула Ньютона–Лейбница*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = F(z_1) - F(z_0). \quad (4.17)$$

Следствие 4. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условиям теоремы, то справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta = [f(\zeta) g(\zeta)]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta. \quad (4.18)$$

Следует отметить, что интегралы от элементарных аналитических функций комплексной переменной и арифметических выражений от них в односвязной области вычисляются с помощью тех же методов и приёмов, что и в случае действительных функций.

Задачи для самостоятельного решения

4.2. Вычислить интегралы.

а) $\int_{\Gamma} e^z dz, \quad \Gamma = \{(x, y) \mid y = x^3, 1 \leq x \leq 2\};$

б) $\int_{\Gamma} \sin z dz, \quad \Gamma = \{z \mid z = t^2 + it, 1/2 \leq x \leq 3/2\};$

в) $\int_{\Gamma} z^2 \cos z dz, \quad \Gamma - \text{отрезок прямой от точки } z_0 = i \text{ до точки } z_1 = 1;$

г) $\int_{\Gamma} \operatorname{tg} z dz, \quad \Gamma = \{(x, y) \mid x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}.$

4.5. Интегральная формула Коши

Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексной переменной – интегральная формула Коши.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области G и непрерывна в её замыкании \bar{G} , тогда справедлива *интегральная формула Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (4.19)$$

где ∂G^+ – граница области G , проходимая так, что область G остается все время слева; z – внутренняя точка области G .

Доказательство. Подынтегральная функция $\frac{f(\eta)}{\eta - z}$ является аналитической во всех точках области G относительно переменной η , кроме случая, когда $\eta = z$. Построим окружность $\gamma_r = \{\eta \mid |\eta - z| = r\}$ радиусом r с центром в точке z , ограничивающую замкнутый круг K_r .

В области $\tilde{G} = G \setminus K_r$ функция $\frac{f(\eta)}{\eta - z}$ является аналитической, по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} + \oint_{\gamma_r^-} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} = 0, \quad (4.20)$$

окружность γ_r^- проходится по часовой стрелке. Из (4.20) следует, что

$$\oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} = \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (4.21)$$

На окружности $\gamma_r: \eta - z = re^{i\varphi}$, поэтому имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z)d\eta}{\eta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{d\eta}{\eta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z), \quad (4.22)$$

Учитывая формулы (4.21), (4.22), получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta, \quad (4.23)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части равенства (4.23):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta \right| &\leq \frac{\max_{\eta \in \gamma_r} |f(\eta) - f(z)|}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{|d\eta|}{r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \max_{\eta \in \gamma_r} |f(\eta) - f(z)| \cdot \frac{2\pi r}{r} = \max_{\eta \in \gamma_r} |f(\eta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Так как в силу аналитичности функция $f(z)$ непрерывна в точке z , то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall \eta: |\eta - z| < \delta$ выполняется $|f(\eta) - f(z)| < \varepsilon$. Выбрав $0 < r < \delta$, получим, что

$$\max_{\eta \in \gamma_r} |f(\eta) - f(z)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta = 0.$$

С другой стороны, как видно из левой части равенства (4.23), интеграл $\oint_{\gamma_r^+} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta$ не зависит от r . Переходя к пределу в равенстве

(4.23) при $r \rightarrow 0$, получим интегральную формулу Коши (4.19). Теорема доказана.

Теорема 2. (Теорема о среднем для аналитических функций)

Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге и аналитическая внутри этого круга, то ее значение в центре круга равно среднему арифметическому значений на границе этого круга, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|\eta - z| = R} f(\eta) ds. \quad (4.24)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma: |\eta - z| = R$ – окружность с центром в точке z , тогда по интегральной формуле Коши получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} \cdot i Re^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Учитывая, что $d\varphi = \frac{ds}{R}$, получим формулу (4.24). Теорема доказана.

Примеры вычисления контурных интегралов с помощью интегральной формулы Коши

Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz,$$

если

- 1) $\Gamma: |z - 2| = 1$; 2) $\Gamma: |z - 2| = 3$; 3) $\Gamma: |z - 2| = 5$.

Решение: 1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z - 2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу

интегральной теоремы Коши $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0$.

2) Внутри области, ограниченной окружностью $|z - 2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z} \frac{z-6}{z} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши при $|z-2|=3$, получим

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{z^2}}{z-6} \right)_{z=0} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеем две точки $z=0$, $z=6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Непосредственно формулу Коши применять нельзя.

Существует несколько способов вычисления интеграла в этом случае.

3.1) Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z=0$, $z=6$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2|\leq 5$.

В полученной многосвязной области подынтегральная функция аналитична, поэтому на основании интегральной теоремы Коши для многосвязной области получим (см. (4.9)):

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}.$$

К каждому интегралу в правой части можно применить интегральную формулу Коши. В результате получим

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = 2\pi i \left(\frac{e^{z^2}}{z-6} \right)_{z=0} + 2\pi i \left(\frac{e^{z^2}}{z} \right)_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3} \pi i.$$

3.2) Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на сумму простейших дробей. Имеем

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{z(z-6)} = \frac{1}{6} \frac{z-(z-6)}{z(z-6)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z} \right).$$

Подставляя в интеграл вместо дроби $\frac{1}{z^2-6z}$ ее разложение, полу-

чим

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} dz = \frac{1}{6} \oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z-6} - \frac{1}{6} \oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z} = \frac{1}{6} 2\pi i e^{36} - \frac{1}{6} 2\pi i =$$

$$= \frac{e^{36} - 1}{3} \pi i.$$

4.6. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

Определение. Семейство функций $f_\alpha(z)$, зависящих от непрерывного комплексного параметра α , называется *равномерно сходящимся* к $f(z)$ на множестве G при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall \alpha: 0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta$, $\forall z \in G$ выполняется $|f_\alpha(z) - f(z)| < \varepsilon$. Обозначается: $f_\alpha(z) \xrightarrow[G]{} f(z)$, $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Пример 1. Пусть $f_\alpha(z) = \frac{1}{z - z_0 - \alpha}$, $\alpha_0 = 0$, $z \in \Gamma$, где Γ – контур, $z_0 \in \text{int } \Gamma$. Покажем, что $f_\alpha(z) \xrightarrow[\Gamma]{} f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, $\alpha \rightarrow 0$.

Пусть $r = \min_{z \in \Gamma} |z - z_0|$, тогда для $\forall \alpha: |\alpha| < \delta < r$, $\forall z \in \Gamma$ имеем

$$|f_\alpha(z) - f(z)| = \left| \frac{1}{z - z_0 - \alpha} - \frac{1}{z - z_0} \right| = \frac{|\alpha|}{|z - z_0 - \alpha| |z - z_0|} < \frac{\delta}{(r - \delta)r}.$$

Возьмём некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$, тогда для $\forall \alpha$:

$$|\alpha| < \delta = \frac{\varepsilon r^2}{1 + \varepsilon r}, \quad \forall z \in \Gamma \text{ будет выполнено } |f_\alpha(z) - f(z)| < \varepsilon, \text{ т.е. имеет}$$

место указанная выше равномерная сходимость.

Приведём свойства равномерно сходящихся семейств функций, которые доказываются аналогично свойствам равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Теорема 1. Пусть $f_\alpha(z)$ – семейство непрерывных на множестве G функций при всех α из некоторой проколотой окрестности числа α_0 и пусть $f_\alpha(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ на множестве G при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, тогда $f(z)$ – непрерывная на G функция.

Теорема 2. Пусть Γ – непрерывная кривая, тогда при условиях теоремы 1, если в качестве множества G рассматривается кривая Γ , имеет место перестановочность предельного перехода и вычисления интеграла, т.е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\Gamma} f_\alpha(z) dz = \int_{\Gamma} \left(\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(z) \right) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (4.26)$$

Оказывается, что дифференцируемость функции в области влечёт её бесконечную дифференцируемость, этот факт устанавливает

Теорема 3. Если функция $f(z)$ аналитическая в области G и непрерывна на её границе ∂G , то она обладает в этой области производными всех порядков, причём n -я производная в любой точке $z \in G$ представляется формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z)^{n+1}}. \quad (4.27)$$

Доказательство. Пусть z – произвольная точка области G . По определению производной и интегральной формуле Коши (4.19) имеем

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\partial G^+} f(\eta) \left(\frac{1}{(\eta - z - h)} - \frac{1}{(\eta - z)} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z - h)(\eta - z)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Функция $\frac{1}{(\eta - z - h)}$ равномерно сходится к $\frac{1}{(\eta - z)}$ при $h \rightarrow 0$ для

$\forall \eta \in \partial G$ (см. пример 1), и поскольку функция $\frac{f(\eta)}{(\eta - z)}$ непрерывна на

∂G , то и подынтегральная функция в правой части (4.28) равномерно сходится к $\frac{f(\eta)}{(\eta-z)^2}$ при $h \rightarrow 0$ для $\forall \eta \in \partial G$, поэтому по теореме 2 предельный переход в (4.28) можно перенести под знак интеграла, и в итоге получим, что

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta-z)^2}, \quad (4.29)$$

т.е. утверждение теоремы для $n=1$ доказано. По индукции аналогичным образом можно доказать это утверждение и для произвольного n .

Из этой теоремы следует, что все производные аналитической функции также являются аналитическими функциями.

Из формулы (4.26) следуют важные неравенства Коши. Обозначим через $M = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)|$, через R – расстояние от точки z до границы G и через L – длину границы. Тогда из (4.26) имеем:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{\partial G^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta-z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!ML}{2\pi R^{n+1}}. \quad (4.30)$$

Если G – круг радиусом R , $|z - z_0| < R$, то получим

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Пользуясь этими неравенствами, докажем две теоремы.

Теорема 4 (Лиувилль). Если $f(z)$ аналитическая во всей плоскости и ограничена, то она постоянна.

Доказательство. Пусть для всех z выполнено неравенство $|f(z)| \leq M$. Для произвольной точки z комплексной плоскости и для

любого R имеет место неравенство: $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$. В этом неравенстве левая часть не зависит от R , а правая при увеличении R может быть сделана сколь угодно малой, т.е. $|f'(z)| = 0$, т.е. $f(z) = \text{const}$.

Следующая теорема – обратная интегральной теореме Коши.

Теорема 5 (Морера). Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и интеграл $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ по любому замкнутому контуру лежащему в G равен нулю, то $f(z)$ аналитическая в этой области.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что в области G интеграл $\int_{z_0}^z f(\eta)d\eta$ не зависит от пути интегрирования. Но тогда согласно

следствию 1 пункта 4.4 функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\eta)d\eta$ есть первообразная

функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$, поэтому функция $F(z)$ является аналитической. Но функция $f(z)$ как производная аналитической функции также является аналитической функцией.

Формула (4.27) так же, как и интегральная формула Коши, может быть использована для вычисления контурных интегралов.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2 - 1)^2}, \text{ где } \Gamma = \{z \mid |z - 1| = 1\}.$$

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2}$ является аналитиче-

ской в области $|z - 1| \leq 1$ всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z - 1| \leq 1$. Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} = \frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2} \cdot \frac{1}{(z - 1)^2}.$$

Взяв в качестве $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2}$, полагая $n = 1$, получим

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

Найдём производную:

$$f'(z) = \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z \cdot (z+1) - 2 \sin \pi z}{(z+1)^3}.$$

Значение производной в точке $z_0 = 1$ равно

$$f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz = -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.3. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z-2i}; \quad \text{б) } \oint_{|z|=4} \frac{z^2 dz}{z-2i}; \quad \text{в) } \oint_{|z|=4} \frac{e^{2z} dz}{z-\pi i}; \quad \text{г) } \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} dz}{z-\pi i};$$

$$\text{д) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2 + 2z}; \quad \text{е) } \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 1}; \quad \text{ж) } \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16};$$

$$\text{з) } \oint_{|z|=1} \frac{(2 + \sin z) dz}{z^2 + 2z}; \quad \text{и) } \oint_{|z|=1} \frac{(e^{zi} + 2) dz}{z}; \quad \text{к) } \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2};$$

$$\text{л) } \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z+9)}; \quad \text{м) } \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2} dz}{z^2 + 2z - 3}; \quad \text{н) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin iz dz}{z^2 - 4z + 3}.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{o)} \oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}; & \text{п)} \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^3}; & \text{р)} \oint_{|z|=5} \frac{z \cdot dz}{(z-2)^3(z+4)}; \\
\text{с)} \oint_{|z|=1/2} \frac{1-\sin z}{z^2} dz; & \text{т)} \oint_{|z|=2} \frac{1+\cos z^2}{z^2} dz; & \text{у)} \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{z^2}+1}{z^2} dz; \\
\text{ф)} \oint_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3} dz; & \text{х)} \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}+1}{z^2} dz; & \text{ц)} \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z+\sin z}{z^2} dz. \\
\text{р)} \oint_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3} dz; & \text{с)} \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}+1}{z^2} dz; & \text{т)} \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z+\sin z}{z^2} dz.
\end{array}$$

5. Функциональные ряды

5.1. Определение и основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Определение 1. Последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \dots$ называется *равномерно сходящейся к функции $f(z)$ на множестве G* (в области или на кривой), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число n_0 , зависящее только от ε , такое, что при $n \geq n_0$ для всех $z \in G$ имеет место неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Справедливы теоремы, аналогичные соответствующим теоремам анализа.

Теорема 1. Предел $f(z)$ последовательности непрерывных функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, равномерно сходящейся на некотором непрерывном множестве G (в области или на кривой), также является непрерывной функцией.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и обозначим через z_0 произвольную точку множества G . В силу равномерной сходимости $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall z \in G$

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.1)$$

В силу непрерывности $f_n(z)$ в точке z_0 найдется такое число $\delta > 0$, что для всех z из G , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$,

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.2)$$

Тогда $\forall z \in G$, таких, что $|z - z_0| < \delta$, и для $\forall n \geq n_0$ будет выполнено:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

а это и означает непрерывность $f(z)$.

Теорема 2. Если последовательность непрерывных функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ на кривой Γ равномерно сходится к $f(z)$, то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz. \quad (5.3)$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости найдется такое число n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и для всех z на Γ

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L},$$

где L – длина Γ . Для таких n

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma} f_n(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (f(z) - f_n(z)) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon,$$

а это и означает справедливость равенства (5.3).

Доказанная теорема даёт возможность переходить к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости последовательности функций.

С понятием равномерной сходимости последовательности функций тесно связано понятие равномерно сходящегося функционального ряда, но прежде введём понятие числового ряда с комплексными членами.

Определение 2. Пусть имеется последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$. Числовым рядом называется выражение вида

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k. \quad (5.4)$$

Отдельные элементы z_k , из которых образовано выражение (5.4), называются членами данного ряда.

Ряд (5.4) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k,$$

при этом предел s последовательности $\{s_n\}$ называется суммой ряда (5.4):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Таким образом, исследование сходимости ряда сводится к исследованию сходимости последовательности его частичных сумм.

Определение 3. *Остатком r_n ряда (5.4) называется ряд, составленный из членов ряда (5.4), начиная с $(n+1)$ -го члена:*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k.$$

Для сходящегося ряда, очевидно, $r_n = s - s_n$. Исходя из определения предела последовательности можно дать определение сходящегося ряда на языке ε, n :

Определение 4. Ряд (5.4) называется *сходящимся*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0$ выполняется $|r_n| < \varepsilon$.

Другими словами, ряд сходится, если его остаток r_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Определение 5. Ряд (5.4) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей членов ряда (5.4):

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|. \quad (5.5)$$

Естественно, для исследования абсолютной сходимости ряда можно применять все известные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Как и в случае рядов с действительными членами, справедливо

Утверждение. Если сходится ряд (5.5), то сходится и ряд (5.4).

Обобщением понятия числового ряда является понятие функционального ряда.

Определение 6. Пусть имеется последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z), \dots, z \in G \subset \mathbb{C}$. *Функциональным рядом* называется выражение вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_k(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (5.6)$$

Аналогично числовому ряду (5.4) ряд (5.6) называется *сходящимся в точке* $z \in G$, если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z), \quad n=1, 2, \dots,$$

а её предел $s(z)$ называется *суммой ряда (5.6) в точке* $z \in G$:

$$s(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z). \quad (5.7)$$

Множество всех точек z , в которых ряд (5.4) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Определение 7. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *равномерно сходящимся в области G (или на кривой Γ)*, если последовательность его частичных сумм $s_1(z), s_2(z), \dots$ сходится в этой области (на этой кривой) равномерно.

Другими словами, функциональный ряд (5.6) сходится равномерно на множестве G , если его остаток $r_n(z)$ равномерно стремится к нулю на множестве G при $n \rightarrow \infty$.

Для исследования равномерной сходимости функциональных рядов часто применяется достаточный признак равномерной сходимости – признак Вейерштрасса.

Теорема 3. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в области G мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$), т.е. если для $\forall z \in G$ выполнено $|f_n(z)| \leq a_n$ ($n=1, 2, \dots$), то данный функциональный ряд сходится в G равномерно.

Доказательство. По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ сходится в любой точке $z \in G$, поэтому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится при $\forall z \in G$.

Обозначим его сумму через $s(z)$. Для любого n остаток ряда $r_n(z) = s(z) - s_n(z)$ при $\forall z \in G$ удовлетворяет неравенству

$$|r_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (5.8)$$

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его остаток стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \text{ а следовательно, и неравенство } |r_n(z)| < \varepsilon \text{ для } \forall z \in G, \text{ что}$$

и означает равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в области G .

Из теорем 1, 2 следует, что сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна, и такой ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

Свойства функциональных рядов из аналитических функций

Рассмотрим равномерно сходящиеся ряды из аналитических функций. Эти свойства содержатся в двух теоремах, доказанных Вейерштрассом.

Теорема 4 (1-я теорема Вейерштрасса). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из функций, аналитических в односвязной области G , равномерно сходится в этой области, то его сумма $s(z)$ также является аналитической функцией в G .

Доказательство. Действительно, сумма ряда – непрерывная функция в G . Пусть Γ – произвольный замкнутый контур, лежащий в G . В силу равномерной сходимости ряда его можно почленно интегрировать вдоль контура Γ , и мы получим:

$$\oint_{\Gamma} s(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\Gamma} f_n(z) dz = 0.$$

Так как Γ – произвольный контур, по теореме Морера можно утверждать, что $s(z)$ – аналитическая в области G .

Теорема 5 (2-я теорема Вейерштрасса). Произвольный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из аналитических функций в области G и непрерывных в \bar{G} , равномерно сходящийся в \bar{G} , можно почленно дифференцировать в G любое число раз. Получаемые при этом ряды равномерно сходятся в каждой замкнутой области $G_1 \subset G$.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного курса.

Замечание. Необходимо отметить, что равномерная сходимость ряда из аналитических функций в области G следует из равномерной сходимости ряда на границе области.

5.2. Степенные ряды

Важным частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ по степеням z и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ по степеням $(z - z_0)$. Фундаментальное значение в исследовании сходимости степенных рядов имеет

Теорема (Абель). Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке $z_0 \neq 0$. Тогда он абсолютно сходится в любой точке z , для которой $|z| < |z_0|$, и равномерно сходится в круге $|z| \leq r < |z_0|$. Если степенной ряд расходится в точке z_1 , то он расходится во всех точках z , таких, что $|z| > |z_1|$.

Доказательство теоремы Абеля аналогично случаю степенных рядов с действительной переменной x . Из теоремы Абеля следует, что существует круг радиусом R , в котором степенной ряд сходится. Этот круг

называется *кругом сходимости*. Для определения радиуса сходимости R применяется либо признак Даламбера, либо радикальный признак Коши

для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n$.

Замечание. Для исследования сходимости ряда на границе круга сходимости, часто используется признак Дирихле: Если $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq L$,

$n = 1, 2, 3, \dots$, а b_k – последовательность положительных чисел, монотон-

но стремящихся к нулю, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Пример. Найти область сходимости и исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ на границе области сходимости.

Решение. Применяя радикальный признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}$ из условия сходимости найдем радиус сходимости, именно

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n}} = |z|$; $|z| < 1$, $R = 1$. Исследуем сходимость ряда на границе круга сходимости. Здесь $|z| = 1$, поэтому ряд из абсолютных величин рас-

ходится. При $z = 1$ ряд расходится. При $z \neq 1$, но $|z| = 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ сходится на основании признака Дирихле (полагая

$$b_n = \frac{1}{n} (b_n > b_{n+1} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0),$$

а

$$S_n = \left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right| < \frac{2}{|1 - z|}, z \neq 1.$$

Свойства степенных рядов

Так как степенные ряды – частный случай функциональных рядов, то они обладают всеми свойствами сходящихся функциональных рядов, в частности, сумма степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией, степенные ряды можно почленно интегрировать, дифференцировать в круге сходимости, причём радиусы сходимости полученных степенных рядов совпадают с радиусом сходимости исходного степенного ряда.

5.3. Разложение функций в ряд Тейлора

Предположим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в круге $|z - z_0| < R$ к функции $f(z)$, тогда, как уже упоминалось выше, $f(z)$ – аналитическая в этом круге, причём

$$c_0 = f(z_0), \quad c_1 = f'(z_0), \quad n!c_n = f^{(n)}(z_0),$$

т.е.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

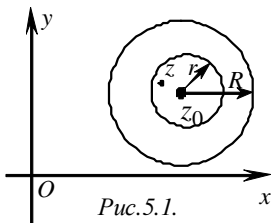
Числа c_n называются коэффициентами Тейлора функции $f(z)$, а степенной ряд с этими коэффициентами называется рядом Тейлора функции $f(z)$ по степеням $(z - z_0)$. Если $z_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена. Имеет место и обратное утверждение – теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора в некотором круге.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, то она однозначно представляется в нем своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta - z_0| = r} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}, \quad 0 < r < R.$$



Доказательство. Пусть z – произвольная точка внутри круга $|z - z_0| < R$ (рис.5.1). Выберем число r так, чтобы выполнялось неравенство $0 < r < R$ и точка z лежала в круге $|z - z_0| < r$. По интегральной формуле Коши получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z},$$

(5.9)

где $\gamma_r : |\eta - z_0| = r$.

Представим дробь $\frac{1}{\eta - z}$ в виде:

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\eta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)}, \quad \left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < 1,$$

так как $|z - z_0| < |\eta - z_0|$.

Дробь $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{z - z_0}{\eta - z_0}$, следовательно,

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\eta - z_0)^{k+1}}. \quad (5.10)$$

Ряд (5.10) при каждом фиксированном z равномерно сходится по η для всех $\eta \in \gamma_r$, действительно

$$\left| \frac{(z - z_0)^k}{(\eta - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{r} \cdot \frac{|z - z_0|^k}{r^k}.$$

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{r^k}$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$, по признаку Вейерштрасса равномерно

сходится по η ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\eta-z_0)^{k+1}}$, так как $|f(\eta)| \leq M, \eta \in \gamma_r$, поэтому

равномерно сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\eta)(z-z_0)^k}{(\eta-z_0)^{k+1}}$, и его можно почленно интегрировать. В результате подстановки (5.10) и почленного интегрирования формула (5.9) принимает вид

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\eta)}{\eta-z} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(\eta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\eta-z_0)^{k+1}} \right) d\eta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \end{aligned}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta-z_0)^{k+1}}, k=0,1,2,\dots \quad (5.11)$$

Ранее получено, что $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Полученное разложение единственно. Действительно, если имеется другое разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-z_0)^k, \text{ то, так как}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

то

$$\tilde{c}_k = c_k.$$

Следствие из теоремы Тейлора. Теорема Тейлора доказывает справедливость разложения аналитической функции в круге. Если функция $f(z)$ аналитическая в области G и $z_0 \in G$, то $f(z)$ можно разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$, который будет сходиться к $f(z)$ в круге

$$|z - z_0| < R_{z_0},$$

где

$$R_{z_0} = \min |\eta - z_0|, \quad \eta \in \partial G,$$

∂G – граница области аналитичности функции $f(z)$.

Ряды Тейлора для элементарных функций

Справедливы равенства

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Эти ряды сходятся при любых значениях z

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n},$$

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} z^k, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Эти ряды сходятся в круге $|z| < 1$.

Доказательство этих разложений такие же, как в обычном анализе.

При решении задачи разложения функции в ряд Тейлора часто применяются искусственные приёмы. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$

функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$. Найти радиус сходимости ряда.

Решение. Разложим данную функцию на элементарные дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3) + B(z+1)}{(z+1)(z-3)}.$$

Из тождества $z = A(z-3) + B(z+1)$, полагая последовательно $z = -1$, $z = 3$, находим

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{3}{4},$$

т.е.

$$f(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть равенства следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя разложение функции $\frac{1}{1+z}$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{4} \left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{3}z + \frac{8}{9}z^2 - \frac{28}{27}z^3 + \dots \right).$$

Радиус сходимости можно определить двумя способами. Ряд в первой скобке сходится в круге $|z| < 1$, ряд во второй скобке в круге $|z| < 3$.

Оба ряда сходятся в круге $|z| < 1$, поэтому радиус сходимости $R = 1$.

Второй способ определения R следует из формулы для

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}.$$

Радиус сходимости R равен расстоянию от центра разложения z_0 до ближайшей точки η , в которой функция $f(\eta)$ не определена. В нашем случае $z_0 = 0$, а точка $\eta = -1$. Поэтому радиус сходимости равен

$$|\eta - z_0| = |-1| = 1.$$

Пример 2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 3$

функцию $f(z) = \frac{1}{3-2z}$.

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Используя разложение для $f_1(z) = \frac{1}{1+z}$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{3-2z} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3} \right)^n (z-3)^n.$$

Ряд сходится в круге $|z-3| < \frac{3}{2}$.

При разложении в ряды Тейлора отношения двух функций, ряды Тейлора которых известны, полезно применять метод неопределённых коэффициентов. Суть метода рассмотрим на конкретном примере. Теоретической основой метода является единственность разложения функции в ряд Тейлора.

Пример 3. С помощью метода неопределённых коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в окрестности точки $z = 0$.

Решение. $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$. По методу неопределённых коэффициентов

справедливо равенство $\frac{\sin z}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$

Здесь a_0, a_1, a_2, \dots – неопределённые коэффициенты.

Так как функция $\operatorname{tg} z$ нечётная, то $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = 0$.

Учитывая известные разложения для функций $\sin z$, $\cos z$, получим тождество

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) (a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots).$$

После преобразований, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим уравнения для неизвестных коэффициентов a_1, a_3, a_5 :

$$\begin{array}{l|l} z & 1 = a_1, \\ z^3 & -\frac{1}{3!} = -\frac{a_1}{2!} + a_3, \\ z^5 & \frac{1}{5!} = a_5 + \frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{2!}. \end{array}$$

Решая эту систему, получим

$$a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{2}{15}.$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Используя разложения элементарных функций, разложить в ряды Тейлора заданные функции и найти радиусы сходимости

а) $\sin 2z$; б) $\cos 3z$; в) e^{z^2} ; г) $\frac{1}{3z+1}$, $z_0 = -2$;

д) $\frac{z}{z+i}$, $z_0 = 0$; е) $\ln(2-z)$, $z_0 = 0$; ж) $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$, $z_0 = 0$;

з) $\frac{1}{1+z+z^2}$, $z_0 = 0$.

Указание: умножить и разделить на $(z-1)$;

и) $f(z) = \frac{\frac{z}{z^2-4}}{1+z^2}$, $z_0 = 0$; к) $\sin^2 z$, $z_0 = 0$;

л) $\ln(2+z-z^2)$, $z_0 = 0$.

С помощью метода неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения функций в ряд Тейлора, полагая $z_0 = 0$.

м) $\frac{z}{\ln(1+z)}$; н) $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$.

5.4. Разложение функций в ряды Лорана

Рассмотренные ряды Тейлора применяются для представления аналитических функций в круговых областях. Важно уметь представлять функции степенными рядами в областях другого вида. Например, при изучении функций аналитических в окрестности точки z_0 всюду, кроме самой точки, надо рассматривать кольцевые области $r < |z - z_0| < R$, где $r \geq 0$, $R \leq \infty$. Оказывается, что для функций, аналитических в кольцевых областях можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням $(z - z_0)^n$.

Определение. *Рядом Лорана* называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n . \quad (5.12)$$

Ряд (5.12) понимается как сумма двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5.13)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (5.14)$$

и называется *сходящимся* в точке z , если в этой точке сходятся оба ряда (5.13) и (5.14). Ряд (5.13) называется *правильной частью* ряда Лорана (5.12), ряд (5.14) – *главной частью* ряда (5.12).

Ряд (5.13) является степенным рядом, он сходится в некотором круге $|z - z_0| < R$. Если в (5.14) сделать подстановку $(z - z_0)^{-1} = t$, получим

степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n$, область сходимости которого есть круг $t < \alpha$,

поэтому область сходимости ряда (5.14) есть внешность круга $|z - z_0| > r = 1/\alpha$. Отсюда следует, что, если $r < R$, то ряд Лорана (5.12) сходится в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$, а его сумма является аналитической функцией в этом кольце как сумма двух аналитических функций, к которым сходятся ряды (5.13) и (5.14). Если же $r > R$, то ряд (5.12) не сходится нигде.

Справедливо и обратное утверждение, т.е.

Теорема (Лоран). Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$, где $0 \leq r$, $R \leq \infty$, тогда она единственным образом представляется в этом кольце сходящимся к ней рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n , \quad (5.15)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_p^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1; \pm 2, \dots, \quad (5.16)$$

$$\gamma_p : |\eta - z_0| = \rho, \quad r < \rho < R.$$

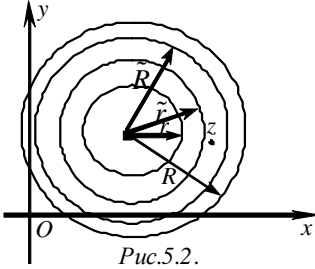


Рис.5.2.

Доказательство. Функция $f(z)$ – аналитическая в любом замкнутом кольце $r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$ (рис.5.2). В произвольной внутренней точке этого кольца можно представить $f(z)$ по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^-} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z},$$

где

$$\Gamma_{\tilde{R}} = \{\eta \mid |\eta - z_0| = \tilde{R}\}, \quad \Gamma_{\tilde{r}} = \{\eta \mid |\eta - z_0| = \tilde{r}\}.$$

Для первого слагаемого аналогично доказательству формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta = \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} (z - z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{R}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Второе слагаемое представим в виде ряда следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^-} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^-} \frac{f(\eta) d\eta}{-(z - z_0) \left(1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right)} = \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^+} f(\eta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \right) d\eta = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится вне круга $|z - z_0| < \tilde{r}$. Для \tilde{c}_n имеем формулу

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^+} f(\eta) (\eta - z_0)^{n-1} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^+} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-n+1}} d\eta = c_{-n},$$

т.е. при $n < 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\tilde{r}}^+} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}, \quad n = -1, -2, \dots$$

Окружности $\Gamma_{\tilde{R}}, \Gamma_{\tilde{r}}$ можно заменить любой окружностью $\gamma_\rho : |\eta - z_0| = \rho$, где $\tilde{r} < \rho < \tilde{R}$.

Таким образом, доказано разложение (5.15), (5.16). Единственность разложения можно доказать следующим образом. Пусть существует другое разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n$ в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Покажем, что \tilde{c}_n совпадают с коэффициентами Лорана. Возьмем окружность γ_ρ , принадлежащую кольцу, $r < \rho < R$. Так как степенной ряд сходится равномерно и остается равномерно сходящимся после ум-

ножения на $(z - z_0)^{-n+1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то умножив $f(z)$ на $(z - z_0)^{-k-1}$, получим

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^{n-k-1}.$$

Проинтегрировав это равенство по z , получим, что

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_p} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

т.е. $\tilde{c}_n = c_n$. Таким образом, разложение в ряд Лорана единственно. При разложении в ряд Лорана в окрестности точки z_0 область сходимости определяется расстоянием до ближайшей точки z , в которой функция $f(z)$ не определена. Для разложения в ряд Лорана обычно используются, если это возможно, известные разложения функции в ряд Тейлора.

Пример. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в

ряд Лорана по степеням z ($z_0 = 0$).

Решение. Функция $f(z)$ аналитическая в областях: $G_1: |z| < 1$; $G_2: 1 < |z| < 2$; $G_3: |z| > 2$ (рис.5.3).

Для решения задачи представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{(z-1) - (z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Найдём разложения в областях G_1, G_2, G_3 :

$$\text{ - если } |z| < 2, \text{ то } \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n};$$

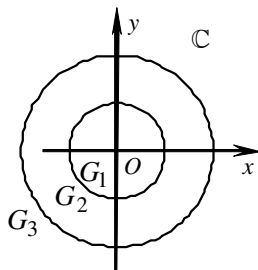


Рис.5.3.

- если $|z| > 2$, то $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$;
- если $|z| < 1$, $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$;
- если $|z| > 1$, то $-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$.

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad z \in G_1, |z| < 1;$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad z \in G_2, 1 < |z| < 2;$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}, \quad z \in G_3 : |z| > 2.$$

5.5. Ряд Лорана функции в окрестности точки $z = \infty$

Пусть функция $f(z)$ представляется в окрестности бесконечно удалённой точки, т.е. в области $R < |z| < \infty$, сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (5.17)$$

Определение. Ряд (5.17) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n, \quad (5.18)$$

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^{-n} \quad (5.19)$$

называются соответственно главной и правильной частями ряда (5.17).

Замечание [8]. Главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 (конечной или бесконечно удалённой) – это сумма всех тех и только тех членов ряда Лорана, которые стремятся к бесконечности при $z \rightarrow z_0$. Главная часть – функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, кроме точки z_0 , а правильная часть – функция, аналитическая в точке z_0 .

Пример. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^5 + 2}{3 - 2z^3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Поскольку требуемое разложение – по степеням z при больших $|z|$, то делаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^5 + 2}{-2z^3 \left(1 - \frac{3}{2}z^{-3}\right)} = \left(-\frac{1}{2}z^2 - z^{-3}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}z^{-3}\right)^n = \\ &= \left(-\frac{1}{2}z^2 - z^{-3}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n z^{-3n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^{-3n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n z^{-3(n+1)}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.2. Найти все разложения заданных функций в ряды Лорана по степеням $(z - z_0)$ или разложения в указанных кольцевых областях.

- а) $\frac{1}{z+2}$, $z_0=0$; б) $\frac{1}{2z-3}$, $z_0=0$; в) $\frac{1}{2z-3}$, $z_0=1$;
 г) $\frac{1}{5-z}$, $z_0=i$; д) $\frac{1}{1-3z}$, $z_0=2i$; е) $\frac{1}{4-z}$, $z_0=1+i$;
 ж) $\frac{e^z}{z^3}$, $z_0=0$; з) $z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$; и) $\frac{e^z-1}{z}$, $z_0=0$,

$$\kappa) \frac{1 + \cos z}{z^4}, z_0 = 0; \quad \text{л) } \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 1) 2 < |z| < 3; \quad 2) |z| > 3;$$

$$\text{м) } \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, 1 < |z| < 2; \quad \text{н) } \frac{1}{z^2+1}, 0 < |z-i| < 2;$$

$$\text{о) } \sin \frac{z}{z-3}, z_0 = 3; \quad \text{п) } e^{\frac{z}{z-3}}, z_0 = 3.$$

5.3. Найти разложение заданных функций в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.

$$\text{а) } \frac{z^3}{z+2}; \quad \text{б) } \frac{z^2-1}{2z-3}; \quad \text{в) } \frac{2}{z^3+z}; \quad \text{г) } \frac{3z^2}{(z-2)(z-3)}.$$

6. Теория вычетов и её приложения

6.1. Изолированные особые точки аналитической функции. Вид ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки

Определение 1. Конечная точка z_0 называется *изолированной особой точкой* (И.О.Т.) однозначной аналитической функции $f(z)$, если в самой точке z_0 функция $f(z)$ не аналитична, но существует проколота окрестность $0 < |z - z_0| < R$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична. В самой точке z_0 функция $f(z)$, как правило, не определена. Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции $f(z)$ в их окрестности:

1) точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$;

2) точка z_0 называется *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, т.е. $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$;

3) точка z_0 называется *существенно особой точкой*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Примеры. 1) Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является *устранимой*, т.к.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + o(z^4)}{z} = 1.$$

2) Для функции $f(z) = \frac{z}{z+1}$ точка $z_0 = -1$ является полюсом, т.к.

$f(z)$ аналитична при $z \neq -1$ и $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z+1} = \infty$.

3) Для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ точка $z_0 = 0$ является существенно особой. Чтобы показать это, рассмотрим два способа стремления $z \rightarrow 0$.

На действительной оси $z = x$ и $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$, $e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. На мнимой оси $z = iy$, $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}}$, $\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0$. Следовательно, предел $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ не существует, точка $z_0 = 0$ – существенно особая точка.

4) Для функции $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ точки $z_n = \frac{1}{\pi n}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) явля-

ются полюсами; точка $z_0 = 0$ не является изолированной особой точкой, поскольку $z_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow z_0 = 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. в любой окрестности точки $z_0 = 0$ содержится бесконечно много других особых точек. Другими словами, точка $z_0 = 0$ есть предельная точка для полюсов z_n .

Определение 2. Бесконечно удалённая точка $z = \infty$ называется *изолированной особой точкой* однозначной аналитической функции $f(z)$, если в самой точке $z = \infty$ функция $f(z)$ не аналитична, но существует проколота окрестность $R < |z| < \infty$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.

Следует заметить, что поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ эквивалентно поведению функции $\varphi(\eta) = f\left(\frac{1}{\eta}\right)$, где $z = \frac{1}{\eta}$ в окрестности нуля.

Для изолированной особой точки $z = \infty$ имеет место аналогичная классификация в зависимости от поведения функции в окрестности этой точки: 1) устранимая особая точка, если существует конечный предел функции при $z \rightarrow \infty$; 2) полюс, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$; 3) существенно особая точка, если не существует предел функции при $z \rightarrow \infty$.

Вид ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки зависит от характера особой точки. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы точка z_0 , конечная или бесконечно удалённая, была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержало главной части.

Рассмотрим доказательство в случае конечной особой точки z_0 , в случае бесконечно удалённой точки оно аналогично, с учётом определения (5.18) главной части ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Необходимость. Если z_0 – конечная устранимая особая точка, то из существования конечного предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ следует, что функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0 , т.е. $|f(z)| \leq M$, $0 < |z - z_0| < \delta$.

Запишем формулу для вычисления коэффициентов ряда Лорана: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$, где $\gamma_\rho: |\eta - z_0| = \rho$. Пользуясь произвольностью выбора радиуса окружности γ_ρ , возьмем $0 < \rho < \delta$, тогда $|f(\eta)| \leq M$, $\eta \in \gamma_\rho$,

$$|c_n| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\varphi}{\rho^{n+1}} = M\rho^{-n},$$

т.е.

$$|c_{-n}| \leq M \cdot \rho^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

При $\rho \rightarrow 0$ $|c_{-n}| \rightarrow 0$, но, поскольку c_n не зависят от ρ , все $c_{-n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Достаточность. Если $c_{-n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ и существует конечный предел } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$$

(следует из аналитичности правой части в точке $z = z_0$).

Название «устраняемая точка» оправдывается тем, что такую особую точку можно «устранить», полагая $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$. После

этого функция будет аналитической и в точке z_0 , т.к. в круге $|z - z_0| < R$ представляется сходящимся степенным рядом. В дальнейшем в некоторых случаях для уменьшения громоздкости рассуждений функции, имеющие устранимые особые точки, будем считать аналитическими в этих точках, т.е. предполагать, что они доопределены в этих точках до аналитичности.

Исследуем поведение функции в окрестности полюса. Из определения полюса следует, что $f(z)$ отлична от нуля в некоторой окрестности этой точки. В этой окрестности является аналитической функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \text{ для которой } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0. \text{ Следовательно, } z_0 - \text{устрани-}$$

мая точка для $g(z)$. Положив $g(z_0) = 0$, получим, что z_0 является нулем функции $g(z)$. Обратно, если $g(z)$ имеет в точке $z = z_0$ нуль, то функция

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} \text{ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки } z_0;$$

очевидно, $f(z)$ имеет в этой точке полюс.

Введём понятия порядка нуля и порядка полюса аналитической функции.

Определение 3. Говорят, что конечная точка z_0 является *нулём порядка n* ($n = 1, 2, \dots$) аналитической функции $g(z)$, если $g(z_0) = 0$ и она представляется в окрестности точки z_0 в виде

$$g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad (6.1)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 , причём $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример. Доказать критерий порядка нуля аналитической функции.

Точка $z_0 \neq \infty$ является нулём порядка n аналитической функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда $g(z_0)=0$, $g'(z_0)=0$, ..., $g^{(n-1)}(z_0)=0$, $g^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Определение 4. Бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является нулём порядка n ($n=1,2,\dots$) аналитической функции $g(z)$, если $g(\infty)=0$, и она представляется в окрестности точки $z = \infty$ в виде

$$g(z) = z^{-n} \varphi(z), \quad (6.2)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке $z = \infty$, причём $\varphi(\infty) \neq 0$.

Определение 5. Точка z_0 (конечная или бесконечно удалённая) является полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, если для

функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ она является нулём порядка n .

Теорема 2. Для того чтобы точка z_0 (конечная или бесконечно удалённая) была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала лишь конечное число членов, т.е.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad (6.3)$$

если $z_0 \neq \infty$, и

$$f(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \quad (6.4)$$

если $z_0 = \infty$. При этом номер старшего члена главной части разложения соответствует порядку полюса.

Доказательство приведём для случая конечной точки z_0 ; в случае бесконечно удалённой точки оно аналогично с учётом определений (5.18) и (5.19) главной и правильной частей ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$, а также определения (6.2) нуля порядка n для точки $z = \infty$.

Необходимость. Пусть конечная точка z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$. Тогда функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, имеет в точке z_0 нуль порядка n и может быть представлена в окрестности точки z_0 в виде $g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция и $\varphi(z_0) \neq 0$.

В этой окрестности

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \quad (6.5)$$

Но функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 , следовательно, раскладывается в этой окрестности в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(z)} &= c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + c_{-n+2}(z - z_0)^2 + \dots + c_0(z - z_0)^n + \\ &+ c_1(z - z_0)^{n+1} + \dots, \end{aligned}$$

где $c_{-n} \neq 0$. Подставляя это разложение в формулу (6.5), получим разложение (6.3).

Достаточность. Пусть теперь в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{z_0}^R$ точки z_0 имеет место разложение (6.3), причем $c_{-n} \neq 0$. Тогда функция $\varphi(z) = (z - z_0)^n f(z)$, где $\varphi(z_0) = c_{-n}$, в круге $|z - z_0| < R$ представляется рядом Тейлора:

$$\varphi(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \dots, \quad (6.6)$$

а следовательно, является аналитической. Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = c_{-n} \neq 0$,

то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} = \infty$, точка z_0 – полюс порядка n функции

$f(z)$, так как $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n}{\varphi(z)}$ имеет в точке z_0 нуль n -го поряд-

ка.

Следствие. Для того чтобы точка z_0 (конечная или бесконечно удалённая) была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представлялась в виде

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z), \quad (6.7)$$

если z_0 – конечная точка, и

$$f(z) = z^n h(z), \quad (6.8)$$

если z_0 – бесконечно удалённая точка; $h(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0 , причём $h(z_0) \neq 0$.

Можно обобщить понятия порядков полюса и нуля, определив нуль отрицательного порядка $-n$ как полюс положительного порядка n и наоборот. С учётом данного обобщения для определения порядка полюса бывает полезно

Утверждение 1. Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в некоторой, вообще говоря, проколотой окрестности точки z_0 , причём z_0 является для $\varphi(z)$ нулём n -го порядка, а для $\psi(z)$ – нулём m -го порядка. Тогда для функции $f(z)$ точка z_0 является полюсом порядка $(m - n)$.

Из доказанных теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. Точка z_0 тогда и только тогда является существенно особой для функции $f(z)$, когда главная часть ряда Лорана этой функции в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки определяется следующей теоремой Сохоцкого.

Теорема 4 (Сохоцкий). Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_n \rightarrow z_0$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Примеры. Найти конечные изолированные особые точки и исследовать их характер:

$$\begin{array}{lll}
1) f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; & 2) f(z) = \frac{z+1}{z^4}; & 3) f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}; \\
4) f(z) = \frac{1}{e^z - 1}; & 5) f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.
\end{array}$$

Решение. 1) Особая точка $z_0 = 0$. Для исследования характера точки воспользуемся разложением функции e^z в ряд по степеням z :

$$e^z - 1 = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots - 1 = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = z \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$ – аналитическая функция и $\varphi(0) \neq 0$, поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \varphi(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = 1,$$

таким образом, установлено, что $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

2) Особая точка $z_0 = 0$. Для выяснения характера точки, построим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^4}{(z+1)}$, откуда следует, что $z_0 = 0$, нуль порядка четыре функции $g(z)$ а следовательно, это полюс четвертого порядка $f(z)$.

3) Особая точка $z_0 = 0$, т.к. разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ содержит бесконечное число отрицательных степеней, то z_0 – существенно особая точка. (Этот пример был уже разобран, с использованием определения существенно особой точки).

4) Изолированные особые точки этой функции – это нули функции $g(z) = \frac{1}{f(z)} = e^z - 1$. Решим уравнение $e^z = 1, z_k = 2k\pi i$; так как $g'(z) = e^z \neq 0$ при $z = z_k$, то z_k – простые полюса (полюса первого порядка).

5) Особая точка $z_0 = 0$, это полюс, поскольку

$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \frac{1}{z^2} = \infty$. Для определения порядка полюса можно воспользоваться утверждением 1. Числитель $\varphi(z) = \sin z$ имеет в точке $z_0 = 0$ нуль 1-го порядка, т.к. $(\sin z)'_{z=0} = 1 \neq 0$; знаменатель $\psi(z) = z^3$ – нуль 3-го порядка. Поэтому $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ имеет в точке $z_0 = 0$ полюс 2-го порядка.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Определить характер особых точек

- а) $\frac{1}{z \sin z}$; б) $\frac{1}{e^{2z} + i}$; в) $\frac{1}{1 - \sin z}$; г) $\frac{1}{e^{z+2}}$;
 д) $e^{\frac{1}{z^2}}$; е) $\sin \frac{\pi}{z+1}$; ж) $\frac{1 - \sin z}{\cos z}$; з) $\frac{z}{\sin^3 z}$;
 л) доказать, что $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, если $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

6.2. Вычет функции в изолированной особой точке

При вычислении различных интегралов большое применение имеет теория вычетов.

Определение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной конечной особой точке z_0 называется число $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz$, где

γ – контур, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 и ориентированный против часовой стрелки. Вычет обозначается записью $\text{res}[f(z); z = z_0]$ или $\text{выч}[f(z); z = z_0]$, т.е.

$$\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz. \quad (6.9)$$

Из формул для коэффициентов ряда Лорана в окрестности точки z_0 при $n = -1$ непосредственно следует, что

$$\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz = c_{-1}, \quad (6.10)$$

т.е. вычет функции $f(z)$ в особой точке z_0 равен коэффициенту при минус первой степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

Отсюда следует, что в устранимой особой конечной точке вычет равен нулю.

Вычет в полюсе порядка n находится с помощью формулы:

$$\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)), \quad (6.11)$$

Эта формула получается после умножения ряда Лорана в окрестности полюса порядка n на $(z - z_0)^n$, $(n-1)$ -кратного дифференцирования и перехода к пределу при $z \rightarrow z_0$. Для полюса первого порядка имеем

$$\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (6.12)$$

Если в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является отношением двух аналитических в этой точке функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем

$\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то формулу (6.12) можно заменить следующей:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z); z = z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{\psi(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Если z_0 – существенно особая точка, то вычет в этой точке находится как коэффициент c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$.

Вычет в бесконечно удалённой точке $z = \infty$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки $z = \infty$ ($|z| > R$), под вычетом функции в точке $z = \infty$ понимают число

$$\operatorname{res}[f(z); z = \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где γ^- – окружность достаточно большого радиуса, чтобы все конечные особые точки функции находились внутри γ^- , проходимая по часовой стрелке. Из этого определения следует, что

$$\operatorname{res}[f(z); z = \infty] = -c_{-1}, \quad (6.14)$$

где c_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Примеры. Найти вычеты функций в их особых точках 1)

$$f(z) = \frac{e^z}{1-z}; \quad 2) \quad f(z) = z^2 \cdot \sin \frac{1}{z}; \quad 3) \quad f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}.$$

Решение. 1) Особая точка $z_0 = 1$, полюс первого порядка, т.к. $z_0 = 1$ нуль первого порядка функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Найдём вычет по формуле (6.13):

$$\operatorname{res}[f(z); z_0 = 1] = \left(\frac{e^z}{(1-z)} \right)'_{z=1} = \left(\frac{e^z}{-1} \right)'_{z=1} = -e.$$

2) Особая точка $z_0 = 0$ – существенно особая точка, для нахождения вычета разложим функцию в ряд Лорана в окрестности нуля:

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots$$

Следовательно, $\operatorname{res}[f(z); z = 0] = c_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

3) Особая точка $z_0 = 1$, полюс второго порядка, так как $z_0 = 1$ нуль 2-го порядка функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. По формуле (6.11) получим при $n = 2$:

$$\operatorname{res}[f(z); z=1] = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^3 \cdot (z-1)^2}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} 3z^2 = 3.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.2. Найти вычеты в конечных особых точках следующих функций:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}; & \text{б) } f(z) = z^4 e^{\frac{2}{z}}; & \text{в) } f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}; \\ \text{г) } f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^3; & \text{д) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-2)}; & \text{е) } f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}; \\ \text{ж) } f(z) = \frac{e^z}{1+z}; & \text{з) } f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^5}; & \text{и) } f(z) = \frac{e^{zi}}{\sin \pi z}. \end{array}$$

6.3. Основные теоремы о вычетах

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих в этой области.

Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k], \quad (6.15)$$

где Γ – контур, лежащий внутри области G и содержащий внутри себя точки z_1, z_2, \dots, z_n .

Доказательство. Опишем вокруг каждой из точек z_k окружности

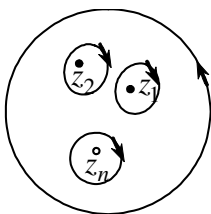


Рис.6.1.

$\gamma_k : |z - z_k| = \rho$ столь малого радиуса, чтобы круг $|z - z_k| \leq \rho$ содержался в G и каждая окружность γ_k лежала во внешности всех остальных (рис.6.1). Функция $f(z)$ аналитическая в области G_1 , получаемой из G удалением всех кругов $|z - z_k| \leq \rho$. В силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k^+} f(z) dz,$$

но

$$\oint_{\gamma_k^+} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}[f(z); z = z_k],$$

следовательно,

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k].$$

Теорема 2. Если функция $f(z)$ аналитическая на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \infty$, то имеет место

равенство $\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = 0$.

Доказательство. Выберем контур Γ , охватывающий точки z_1, z_2, \dots, z_{n-1} . Тогда по теореме 1 получим, что

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = - \oint_{\Gamma^-} f(z) dz = \\ &= -2\pi i \operatorname{res}[f(z); z = \infty], \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = 0.$$

Примеры. Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$$1. \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z^2-1}; 2. \oint_{|z-1|=3} \frac{e^z dz}{z^2-1}; 3. \oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}.$$

Решение: 1) Точки $z_1 = -1, z_2 = 1$ – простые полюсы функции

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}, \text{ из них только точка } z = 1 \text{ попадает в область, ограниченную контуром, поэтому}$$

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{(z^2-1)} = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{e^z}{z^2-1}; z=1 \right] = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{2z} \right)_{z=1} = e\pi i.$$

2) Обе особые точки $z_1 = -1, z_2 = 1$ попадают в область, ограниченную контуром, поэтому

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=3} \frac{e^z dz}{z^2-1} &= 2\pi i \left(\operatorname{res} \left[\frac{e^z}{z^2-1}; z=-1 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{e^z}{z^2-1}; z=1 \right] \right) = \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{\pi i (e^2 - 1)}{e}. \end{aligned}$$

3) Функция $f(z) = \frac{1}{(z^4-1)(z+2)}$ имеет внутри контура $|z+1|=\frac{3}{2}$

четыре особые точки $-2, -1, i$ и $-i$, а во внешности контура – только одну, именно 1. Сумма вычетов в особых точках внутри контура, в силу теоремы 2, отличается только знаком от суммы вычетов во внешности окружности $|z+1|=1,5$. Следовательно,

$$\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} f(z) dz = -2\pi i (\operatorname{res}[f(z); z=\infty] + \operatorname{res}[f(z); z=1]).$$

Но вычет $f(z)$ в точке $z = \infty$ равен нулю, т.к. в разложении $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ нет степени с z^{-1} . Точка $z = 1$ – простой полюс, поэтому:

$$\operatorname{res}[f(z); z=1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{(z-1)(z+1)(z^2+1)(z+2)} = \frac{1}{12}.$$

В итоге получим

$$\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)} = -2\pi i \left(0 + \frac{1}{12} \right) = -\frac{\pi i}{6}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.3. С помощью вычетов вычислить контурные интегралы:

а) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)};$

б) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz;$

в) $\oint_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3};$

г) $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1};$

д) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2 z - 1}{z^3} dz;$

е) $\oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz;$

ж) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz;$

з) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^5 + 32};$

и) $\oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz;$

к) $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^z}{z^2} dz;$

л) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} + 2}{\sin 3zi} dz;$

м) $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{e^z + 1};$

н) $\oint_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz.$

6.4. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов

Вычеты успешно применяются для вычисления определённых интегралов. Рассмотрим некоторые наиболее характерные случаи применения вычетов.

1. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$, где $R(u, v)$ – непрерывная рациональная функция. Для вычисления интеграла с помощью вычетов введем замену $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При изменении φ на промежутке $[0; 2\pi]$ точка z один раз обойдет окружность радиусом 1 в положительном направлении. Заменяя по формулам Эйлера $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ и $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, преобразуем заданный интеграл к контурному интегралу

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} R_1(z) dz, \quad (6.16)$$

где

$$R_1(z) = \frac{1}{iz} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right).$$

Для вычисления последнего интеграла применима основная формула теории вычетов:

$$\oint_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[R_1(z); z = z_k]. \quad (6.17)$$

В формуле (6.17) учитываются только те особые точки z_k , для которых выполнено неравенство $|z_k| < 1$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $\frac{1}{\cos \varphi - 2}$ непрерывна на отрезке $[0; 2\pi]$, то интеграл существует. Полагая $z = e^{i\varphi}$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(\frac{z+z^{-1}}{2} - 2 \right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Функция $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$ имеет два простых полюса

$z_1 = 2 + \sqrt{3}, z_2 = 2 - \sqrt{3}$ (нули знаменателя). Так как $|z_1| > 1$, а $|z_2| < 1$, то внутрь контура попадает только z_2 , поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^2 - 4z + 1}; z = z_2 \right].$$

Вычет удобно вычислять, используя разложение квадратного трехчлена на множители:

$$\operatorname{res} \left[\frac{1}{z^2 - 4z + 1}; z = z_2 \right] = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_2 - z_1}.$$

Окончательно получим:
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2} = \frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2. Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где $P_m(x), Q_n(x)$ –

многочлены степени m и n , причем $n \geq m + 2$, $Q_n(x) \neq 0$ на действительной оси. Для вычисления интеграла с помощью вычетов введем

функцию $F(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$. Особые точки

этой функции – это полюса – нули знаменателя, они расположены внутри некоторого круга $|z| < R_0$, где R_0 – достаточно большое число. Для применения теоремы о вычетах возьмем замкнутый контур C_R (рис.6.2), кото-

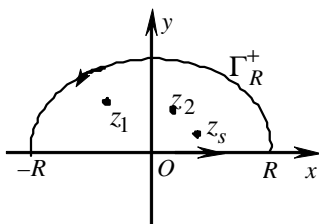


Рис.6.2.

рый состоит из полуокружности $\Gamma_R^+ : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$, где $R > R_0$, и от-

резка действительной оси $\Gamma_1: -R \leq x \leq R$, $C_R = \Gamma_R + \Gamma_1$. Если обозначить через z_1, z_2, \dots, z_s все различные полюсы $F(z)$ в верхней полуплоскости, то получим

$$\oint_{C_R^+} F(z) dz = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\Gamma_R^+} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}[F(z); z = z_k]. \quad (6.18)$$

Покажем, что при $R \rightarrow \infty$, предел $\int_{\Gamma_R^+} F(z) dz$ равен нулю. Так как

степень знаменателя $n \geq m + 2$, то функция $z^2 \cdot F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z = \infty$, т.е. $\exists M > 0, \forall z, |z| \geq R_1$, где $R_1 \geq R_0$:

$$|z^2 F(z)| \leq M \Rightarrow |F(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Поэтому при $R > R_1$ имеем:

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Переходя в равенстве (6.18) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res} \left[\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right]. \quad (6.19)$$

Суммирование в (6.19) производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в верхней полуплоскости.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ удовлетворяет усло-

виям применения теории вычетов: $P_m(x) = 1, m = 0$, $Q_n(x) = (x^2 + 1)^2, n = 4; n \geq 2$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res} \left[\frac{1}{(z^2+1)^2}; z = z_k \right].$$

В верхней полуплоскости находится особая точка $z=i$ – полюс второго порядка, следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \text{res} \left[\frac{1}{(z^2+1)^2}; z=i \right].$$

Так как

$$\text{res} \left[\frac{1}{(z^2+1)^2}; z=i \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i},$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание. При вычислении интегралов $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где

$F(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – чётная функция, необходимо использовать равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx.$$

3. На практике часто встречаются интегралы вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx, \quad \text{где } \alpha > 0 \text{ – параметр. Эти}$$

интегралы (при условии, что они существуют) можно рассматривать как действительную и мнимую части комплекснозначного интеграла

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Для вычисления интеграла I_3 можно применить теорию вычетов к функции $F(z) = e^{iaz} f(z)$ при условии, что справедлива лемма Жордана.

Лемма (Жордан). Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $|z| \geq R_0 > 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где

$\Gamma_R : |z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ – полуокружность; пусть $\alpha > 0$, тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (6.21)$$

Доказательство. Оценим интеграл $\int_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz$. Параметризуем

полуокружность $\Gamma_R : z = R e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, тогда

$$dz = i R e^{i\varphi} d\varphi, \quad |e^{iaz}| = \left| e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| = e^{-aR \sin \varphi},$$

поэтому

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq M_R \cdot R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi.$$

График функции $\sin \varphi$ на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ симметричен относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно, с учётом условия $\alpha > 0$ получим

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

Таким образом, при выполнении условий леммы получаем, что

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \frac{M_R \pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0,$$

при $R \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим интегралы вида

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n , причём $n \geq m+1$, а $Q_n(x) \neq 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$. В курсах математического анализа доказано, что в данных условиях интеграл I_3 сходится. Покажем, что его значение вычисляется по формуле

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res} \left[e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right]. \quad (6.22)$$

Все особые точки подынтегральной функции $F(z) = e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$

лежат внутри окружности достаточно большого радиуса R_0 . Как и в случае с доказательством формулы (6.19) для интеграла от рациональной функции рассмотрим контур C_R (см. рис.6.2), который состоит из полуокружности $\Gamma_R^+ : |z| = R, \text{Im } z \geq 0$, где $R > R_0$, и отрезка действительной оси $\Gamma_1 : -R \leq x \leq R$, $C_R = \Gamma_R^+ + \Gamma_1$. По теореме 1 имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{C_R^+} e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz &= \int_{\Gamma_R^+} e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz + \int_{-R}^{+R} e^{iax} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \\ &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res} \left[e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right], \end{aligned} \quad (6.23)$$

где суммирование производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в верхней полуплоскости. Функция $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ удов-

летворяет лемме Жордана, поэтому $\int_{\Gamma_R} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{iaz} dz \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, и, переходя в (6.23) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем формулу (6.22). При этом интегралы $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \cos \alpha x dx$ и $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \sin \alpha x dx$ вычисляются по формуле (6.20).

Замечание. Если $\alpha < 0$, можно использовать формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k < 0} \text{res} \left[e^{iaz} F(z); z = z_k \right],$$

где суммирование производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в нижней полуплоскости.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx$.

Решение. Функция $F(z) = \frac{(z-1)e^{5iz}}{z^2 - 2z + 5}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, имеет в верхней полуплоскости один полюс первого порядка $z_1 = 1 + 2i$. Найдем вычет:

$$\begin{aligned} \text{res} \left[\frac{z-1}{z^2 - 2z + 5} \cdot e^{5iz}; z = 1 + 2i \right] &= \left(\frac{(z-1) \cdot e^{5iz}}{2z-2} \right)_{z=1+2i} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-10} (\cos 5 + i \sin 5). \end{aligned}$$

По формуле (6.22) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{5ix}}{x^2 - 2x + 5} dx = \pi i e^{-10} (\cos 5 + i \sin 5),$$

откуда, выделяя действительную часть, окончательно имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx = -\pi \cdot e^{-10} \cdot \sin 5.$$

В оптике часто применяются *интегралы Френеля* $\int_0^\infty \cos x^2 dx, \int_0^\infty \sin x^2 dx$. Для вычисления этих интегралов можно применить теорию функций комплексной переменной, специально выбрав контур интегрирования.

Выберем контур интегрирования $\Gamma = \gamma_1 + \Gamma_R^+ + \gamma_2$, как показано на рисунке 6.3: γ_1 – отрезок действительной оси $0 \leq x \leq R$, $\Gamma_R^+ : z = R e^{i\varphi}$,

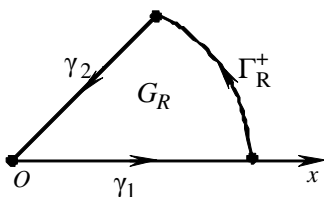


Рис.6.3.

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ – дуга окружности радиуса R , $\gamma_2 : 0 < r < R, \varphi = \frac{\pi}{4}$ – отрезок. Для

вычисления интеграла введем функцию $f(z) = e^{iz^2}$.

В области G_R , ограниченной контуром Γ , функция $f(z)$ является аналитической и непрерывной на границе области, по интегральной теореме Коши $\oint_\Gamma f(z) dz = 0$, откуда по свойству аддитивности

интеграла можно записать равенство

$$\int_0^R f(x) dx + \int_{\gamma_2^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz = 0. \quad (6.24)$$

Оценим интеграл по Γ_R . При $z \in \Gamma_R$ получим

$|e^{iz^2}| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \leq e^{-\frac{4R^2}{\pi} \varphi}$, т.к. $\sin 2\varphi \geq \frac{4}{\pi} \varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Для интеграла по γ_2 имеем: используем параметризацию

$\gamma_2: z = t \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad 0 \leq t \leq R, \quad dz = e^{\frac{\pi i}{4}} dt$, тогда

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{it^2 e^{\frac{\pi i}{2}}} dt = -e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt. \quad (6.25)$$

Перейдя в (6.24) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим с учётом (6.25):

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Известно, что $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона), поэтому в итоге

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.4. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sin \varphi};$

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{13 + 12 \sin \varphi};$

в) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi;$

г) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{5 + 4 \cos \varphi};$

д) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(6 + 5 \cos \varphi)^2};$

е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)};$

ж) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx;$

з) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 25};$

и) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \sin x}{x^2 - 2x + 2} dx;$

к) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}(x-3)}{x^2 - 6x + 109} dx;$

л) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{5x^2 + 4} dx;$

м) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 9} dx;$

н) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x dx}{(x^2 + 4)^2};$

о) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 5} dx.$

7. Элементы операционного исчисления

При решении многих прикладных задач с неизвестной функцией $x(t)$ действительной переменной t значительно проще решать задачи с образами этих функций, полученными в результате их интегрального преобразования. При этом часто дифференциальные, интегральные уравнения относительно $x(t)$ заменяются на более простые алгебраические уравнения относительно образа этой функции. Такой метод решения задач называется операционным. Применение операционного метода можно сравнить с логарифмированием, когда: 1) от чисел переходят к логарифмам; 2) над логарифмами проделывают операции; 3) от найденных логарифмов возвращаются к числу.

В этой главе излагаются основные положения операционного метода, а также некоторые его приложения к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики.

7.1. Определения изображения, оригинала. Преобразование Лапласа

Определение 1. *Изображением* функции $f(t)$ называют функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = a + ib$, определяемую выражением

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (7.1)$$

Функция $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа функции $f(t)$* . Также и само интегральное преобразование (7.1) называется *преобразованием Лапласа функции $f(t)$* . Выражение: «функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$ » будем записывать символическим равенством

$$f(t) \doteq F(p) \text{ или } F(p) \doteq f(t).$$

Определение 2. Функции, для которых изображение существует и является аналитической функцией в некоторой области, называются *оригиналами*. Для того чтобы функция $f(t)$ была оригиналом, она должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ может иметь только конечное число точек разрыва первого рода на конечном промежутке;

3) функция $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M > 0, \alpha \geq 0$, что для всех $t \geq t_0 > 0$ имеет место оценка $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Число α называют показателем роста функции $f(t)$. Для ограниченных оригиналов можно полагать $\alpha = 0$.

Пример 1. Проверить, является ли оригиналом функция

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Условие 1) выполнено, так как $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Условие 2) выполнено, так как $f(t)$ – непрерывна. Условие 3) также выполнено, так как, взяв $M = 2, \alpha = 1$, при $\forall t > 0$ имеем очевидное неравенство $t^2 < 2e^t = 2(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots)$.

Пример 2. Функция $f(t) = \begin{cases} e^{t^2}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ не является оригиналом,

поскольку невозможно подобрать постоянные $M > 0, \alpha \geq 0$, чтобы выполнялась оценка $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ при всех достаточно больших t .

Если $f(t)$ удовлетворяет условиям 1) – 3), то её изображение $F(p)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Re} p > \alpha$ (рис.7.1), т.е. существует $F'(p)$, причём имеет место формула

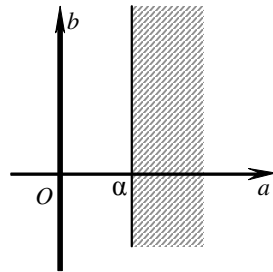


Рис.7.1.

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt. \quad (7.2)$$

Для доказательства справедливости формулы (7.2), т.е. справедливости дифференцирования подынтегральной функции по параметру p , достаточно показать равномерную сходимость интеграла от продиффе-

ренцированного выражения при $\forall p: \operatorname{Re} p > \alpha$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{dp} \left[e^{-pt} f(t) \right] \right| dt &= \int_0^{\infty} \left| t e^{-pt} f(t) \right| dt = \left[\begin{array}{l} p = a + ib, \\ |e^{-pt}| = e^{-at} \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\infty} t e^{-at} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} t e^{-at} M e^{\alpha t} dt = M \int_0^{\infty} t e^{-(a-\alpha)t} dt = \\ &= M \left(-\frac{t}{a-\alpha} e^{-(a-\alpha)t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-\alpha)t}}{a-\alpha} dt \right) = \\ &= -M \frac{e^{-(a-\alpha)t}}{(a-\alpha)^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{(a-\alpha)^2} < \infty \end{aligned}$$

при $a > \alpha$, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dp} \left[e^{-pt} f(t) \right] dt \text{ сходится равномерно при } \forall p \text{ таком, что } \operatorname{Re} p > \alpha,$$

таким образом, справедливость формулы (7.2) и аналитичность функции $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$ доказаны.

Замечание 1. Если p стремится к бесконечности, так, что $\operatorname{Re} p = a$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (7.3)$$

Доказательство следует из оценки

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} M e^{-(a-\alpha)t} dt = \frac{M}{a-\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow +\infty.$$

Пример 3. Найти изображения заданных функций:

а) $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ (функция Хевисайда); б) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, 0 при $t < 0$.

Решение. Указанные функции являются оригиналами. Для них выполнены все условия, поэтому получим:

$$\text{а) } F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sigma(t) dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

$$\text{б) } F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} = \frac{1}{p-a},$$

$$\operatorname{Re}(p-a) > 0.$$

Замечание 2. Интегральное преобразование Лапласа часто записывают в виде $F(p) = L[f(t)]$, где L – интегральный оператор

$$L = \int_0^{\infty} (\bullet) e^{-pt} dt.$$

Замечание 3. В дальнейшем изложении все функции предполагаются умноженными на функцию Хевисайда, что автоматически делает их тождественно равными нулю при $t < 0$.

7.2. Свойства преобразования Лапласа

В дальнейшем изложении, если специально не оговорено иное, будет подразумеваться, что функция $F(p)$ – это изображение функции $f(t)$, а функция $G(p)$ – изображение функции $g(t)$, т.е.

$$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p).$$

1. Свойство линейности. Для любых комплексных чисел α, β и для любых оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ справедливо равенство

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Это свойство вытекает из свойства линейности интеграла. Используя это свойство, получим важные соотношения:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad \operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}; \quad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

2. Теорема подобия. Для любого постоянного $c > 0$

$$f(ct) \doteq \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L[f(ct)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(ct) dt = \left| \begin{array}{l} u = ct \\ dt = \frac{du}{c} \end{array} \right| = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{c}u} f(u) du = \\ &= \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right). \end{aligned}$$

3. Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t)$, $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (7.4)$$

где

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Действительно,

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left(f(t) \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Так как $\operatorname{Re} p = a > \alpha$, то $\left| f(t) \cdot e^{-pt} \right| \leq M e^{(\alpha-a)t}$, и $f(t) e^{-pt} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а при $t = 0$ имеем $f(0)$, поэтому:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Применив эту формулу дважды, получим:

$$f''(t) \doteq p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \text{ и т.д.}$$

Пример 1. Найти изображение $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$. $L[f'(t)] = L[\sin 2t] = \frac{2}{p^2 + 4}$.

С другой стороны, $\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p) - f(0)$, где $F(p) \doteq \sin^2 t$,
 $f(0) = \sin^2 0 = 0$, поэтому $F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$.

Замечание. Из (7.4) следует, что $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$.

4. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала,

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t), \quad (7.5)$$

или

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p). \quad (7.5')$$

При $n=1$ частный случай формулы (7.5) доказан – см. (7.2). Продолжая дальнейшее дифференцирование по p под знаком интеграла, получаем:

$$F''(p) = \int_0^{\infty} (-t)^2 f(t) e^{-pt} dt = (-1)^2 L[t^2 f(t)] \text{ и т.д.}$$

Применим свойство 4) для нахождения изображения степенной функции. Возьмём $f(t) = \sigma(t)$, тогда $F(p) = \frac{1}{p}$ и, применяя вторую из формул (7.5), найдём, что

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (7.6)$$

5. Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала соответствует делению изображения на p :

$$\int_0^t f(u) du \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (7.7)$$

Доказательство. Функция $g(t) = \int_0^t f(u)du$ является оригиналом.

Действительно, первые два условия выполнены, а третье вытекает из неравенства

$$|g(t)| \leq \int_0^t f(u)du \leq M \int_0^t e^{\alpha u} du = \frac{M}{\alpha} e^{\alpha u} \Big|_0^t \leq M_1 e^{\alpha t}.$$

Обозначив изображение $g(t)$ через $G(p)$ и учтя, что $g(0)=0$, по свойству дифференцирования оригинала получим

$$L[g'(t)] = p \cdot G(p) - g(0) = F(p), \quad G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

6. Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^\infty F(u)du$ схо-

дится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, т.е.

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(u)du. \quad (7.8)$$

Действительно, обозначим $\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt$. Поскольку $\Phi(p)$ изображение, то $\Phi(\infty) = 0$. По теореме о дифференцировании изображения

$$\Phi'(p) \doteq (-t) \cdot \frac{f(t)}{t} = -f(t), \text{ но } -f(t) \doteq -F(p),$$

поэтому $\Phi'(p) = -F(p) \Rightarrow -\Phi(p) = -\int_p^\infty F(u)du + c$, но $\Phi(\infty) = 0$,

поэтому $c = 0$, следовательно, $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(u)du$.

Пример 2. Найти изображение $f_1(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

Решение.

$$\begin{aligned} f(t) = e^t - 1 &\doteq \frac{1}{p(p-1)} = F(p); \\ \frac{e^t - 1}{t} &\doteq \int_p^\infty \frac{du}{u(u-1)} = \int_p^\infty \frac{(u-(u-1))du}{u(u-1)} = \int_p^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = \\ &= \ln \frac{u-1}{u} \Big|_p^\infty = -\ln \frac{p-1}{p} = \ln \frac{p}{p-1}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \end{aligned}$$

7. Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$

$$f(t-\tau)\sigma(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p). \quad (7.9)$$

Доказательство. Так как $f(t-\tau) = 0$, при $t < \tau$, то

$$\begin{aligned} L[f(t-\tau)] &= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} t-\tau=u \\ t=u+\tau \\ dt=du \end{array} \right| = \int_0^\infty f(u)e^{-pu-p\tau} du = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

8. Теорема смещения. Для любого комплексного числа λ

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p-\lambda). \quad (7.10)$$

Доказательство. Имеем

$$L[e^{\lambda t} f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\lambda t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t} f(t) dt = F(p-\lambda).$$

9. Изображение свёртки функций. Свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$, $0 \leq t < \infty$, обозначаемой $(f * g)$, называется интеграл

$$\varphi(t) = (f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (7.11)$$

Функция $\varphi(t)$ является оригиналом, первые два свойства выполнены, а третье следует из оценки

$$\left| \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| \leq M \left| \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} e^{\alpha_1 (t-\tau)} d\tau \right| = M t e^{\alpha_1 t},$$

где α_1 – наибольший из показателей роста функций $f(t)$, $g(t)$.

Отсюда следует, что

$$\left| \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| \leq M_1 e^{\alpha_2 t}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L[(f * g)] &= \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau) dt = F(p) \cdot G(p), \end{aligned}$$

так как $\int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau) dt = e^{-p\tau} G(p)$ по теореме запаздывания. Таким

образом, изображение свёртки оригиналов есть произведение их изображений:

$$L[(f * g)] = F(p) \cdot G(p). \quad (7.12)$$

10. Интеграл Дюамеля. В приложениях операционного исчисления часто изображения приводятся к виду $p \cdot F(p) \cdot G(p)$. Оказывается, что с помощью оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ можно найти оригинал и для выражения $p \cdot F(p) \cdot G(p)$.

Для этого запишем это выражение следующими двумя способами:

$$pF(p)G(p) = f(0) \cdot G(p) + (pF(p) - f(0))G(p)$$

или

$$pF(p)G(p) = g(0) \cdot F(p) + (pG(p) - g(0))F(p).$$

Но

$$pF(p) - f(0) \doteq f'(t), \quad pG(p) - g(0) \doteq g'(t),$$

поэтому

$$pF(p)G(p) \doteq f(0) \cdot g(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t-\tau) dt \quad (7.13a)$$

или

$$pF(p) \cdot G(p) \doteq g(0) \cdot f(t) + \int_0^t g'(\tau) \cdot f(t-\tau) dt. \quad (7.13b)$$

11. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Пусть функция зависит не только от переменной t , но и от некоторого параметра s , т.е. $f = f(t, s)$. Если существуют производная $\frac{\partial f(t, s)}{\partial s}$ и интеграл

$\int_{s_1}^{s_2} f(t, s) ds$ и они являются оригиналами по отношению к преобразованию Лапласа по переменной t , то их изображения находятся по формулам:

$$\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} \doteq \frac{\partial F(p, s)}{\partial s}, \quad \int_{s_1}^{s_2} f(t, s) ds \doteq \int_{s_1}^{s_2} F(p, s) ds. \quad (7.14)$$

Пример 3. Найти изображение периодической функции $f(t)$ с периодом T , если известно изображение $G(p)$ функции $g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (0, T); \\ 0, & t \notin (0, T). \end{cases}$

Решение. Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Используя свойство периодичности функции $f(t)$ и изображение $G(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$, преобразуем изображение $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} f(t-kT) e^{-pt} dt.$$

Интеграл $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t-kT)e^{-pt} dt$ заменой $t-kT=u$ приводится к ви-

ду

$$\int_0^T f(u)e^{-pu-pTk} du = e^{-pTk} \int_0^T f(u)e^{-pu} du .$$

После преобразований запишем изображение $F(p)$:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pTk} \int_0^T f(u)e^{-pu} du = G(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{G(p)}{1-e^{-pT}} .$$

Окончательно: $F(p) = \frac{G(p)}{1-e^{-pT}} .$

При решении задач нахождения изображения полезно использовать таблицы 1, 2.

Таблица 1. Свойства изображений

	Оригинал	Изображение
1	$\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n c_i F_i(p), c_i = \text{const}$
2	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right), c = \text{const}, c > 0$
3	$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
4	$e^{\lambda t} f(t)$	$F(p-\lambda)$
5	$f^{(n)}(t)$	$p^n \left(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right)$
6	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
7	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(u) du$

	Оригинал	Изображение
8	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$
9	$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(p) \cdot G(p)$
10	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$	$\lim_{t \rightarrow 0+0} f(t)$

Таблица 2. Изображение некоторых функций

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$1(\sigma(t))$	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
4	$t^a, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
6	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^n} \quad n=1, 2, \dots$
7	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
12	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
13	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
14	$e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha)$	$\frac{\omega \cos \alpha + (p + \lambda) \sin \alpha}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
16	$e^{-\alpha^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4\alpha^2}} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{p}{2\alpha} \right) \right),$ $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}}$
18	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$e^{-\alpha\sqrt{p}}$
19	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right)$	$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = e^t$; б) $f(t) = \sin 3t$; в) $f(t) = t \cdot e^t$;

г) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2), & 2 \leq t \leq 6 \\ 4, & t > 6 \end{cases}$; д) $f(t) = t \cdot \cos bt$.

Используя свойства оригиналов и изображений и табл. 1, 2, найти изображения следующих функций:

е) $f(t) = \sin^2 t$; ж) $f(t) = \cos^2 \omega t$; з) $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 4t$;

и) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$; к) $f(t) = t^2 \cos t$; л) $f(t) = \frac{e^{-at} \cdot \sin mt}{t}$;

м) $f(t) = t^2 e^{3t}$; н) $\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$; п) $\int_0^t \frac{e^t - 1}{t} dt$.

7.3. Нахождение оригиналов

При решении задачи нахождения оригинала по известному изображению (обратная задача операционного исчисления) используется таблица 2.

Пример 1. Найти оригинал, если $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2}$.

Решение. Наличие множителя e^{-2p} указывает, на то, что необходимо использовать теорему об изображении функции $f(t - \tau)$, именно

$$\frac{e^{-2p}}{p^2} \doteq (t-2)\sigma(t-2).$$

Пример 2. $F(p) = \frac{p+2}{p^2+6p+10}$. Для нахождения $f(t)$ с помощью

таблицы 2 преобразуем дробь, определяющую $F(p)$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p+2}{p^2+6p+10} = \frac{p+2}{(p+3)^2+1} = \frac{(p+3)-1}{(p+3)^2+1} = \\ &= \frac{p+3}{(p+3)^2+1} - \frac{1}{(p+3)^2+1} \doteq e^{-3t} \cos t - e^{-3t} \cdot \sin t = e^{-3t} (\cos t - \sin t). \end{aligned}$$

В более сложных случаях для нахождения функции оригинала используются следующие теоремы.

Теорема существования оригинала. Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

1) $F(p)$ аналитическая для $\operatorname{Re} p > \alpha$;

2) в области $\operatorname{Re} p > \alpha$ равномерно относительно $\arg p \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$F(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$;

3) для всех $x > \alpha$ сходится интеграл $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(x+iy)| dy \leq M$. Тогда

при $\operatorname{Re} p > \alpha$ функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, которая определяется обращением преобразования Лапласа – интегралом Меллина:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad x > \alpha. \quad (7.15)$$

Вычисление интеграла (7.15) в общем случае затруднительно. Рассмотрим частные случаи.

1. Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ разлагается в ряд по отрицательным степеням p и, кроме того, $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то эта функция является изображением и может быть представлена в

виде $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p^{k+1}}$. Тогда оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t)$,

определяемая при $t > 0$, сходящимся рядом

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} \quad (7.16)$$

2. Вторая теорема разложения. Пусть $F(p)$ аналитическая при $\operatorname{Re} p > \alpha$, а при $\operatorname{Re} p < \alpha$ удовлетворяет условиям леммы Жордана: $F(p)$ имеет конечное число изолированных особых точек p_1, p_2, \dots, p_n и равномерно относительно $\frac{\pi}{2} \leq \arg p \leq \frac{3\pi}{2}$ стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$.

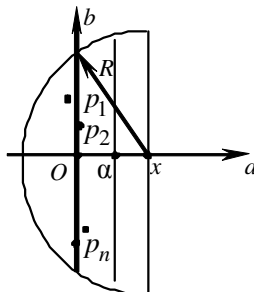


Рис. 7.2.

Тогда для $t > 0$, $\int_{\Gamma_R} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0$ при

$R \rightarrow \infty$, где Γ_R – левая половина окружности $|p - x| = R$, $x > \alpha$ (рис. 7.2).

Применяя теорию вычетов к (7.15), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left(e^{pt} F(p); p = p_k \right). \quad (7.17)$$

3. Если $F(p) = \frac{R_m(p)}{Q_n(p)}$, где $n > m$, $R_m(p), Q_n(p)$ – многочлены

степени m, n соответственно, для нахождения оригинала можно применить метод неопределенных коэффициентов (разложение $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей, аналогично случаю интегрирования рациональных дробей) или использовать формулу (7.17), вычисляя вычеты по соответствующим формулам. В общем случае, когда изображение является рациональной функцией

$$F(p) = \frac{R_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_l)^{k_l}},$$

$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$, оригинал $f(t)$ определяется по формуле:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{i=1}^l \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k_i-1}}{d^{k_i-1}} \left((p - p_i)^{k_i} F(p) e^{pt} \right) \quad (7.18)$$

Если все корни простые, то $k_i = 1$ и формула (7.18) принимает вид:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{R_m(p_i)}{Q'_n(p_i)} e^{p_i t}, \quad t > 0.$$

В частном случае, если $Q_n(p) = pQ_1(p)$ и $Q_1(p)$ имеет только простые корни $p_i \neq 0$, то

$$f(t) = \frac{R_m(0)}{Q_1(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_m(p_i)}{p_i Q'_1(p_i)} e^{p_i t}. \quad (7.19)$$

Пример 3. Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$.

Решение. Найдем $f(t)$ несколькими способами. Сначала используем формулу (7.17). Так как $F(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$, аналитическая во всех точках комплексной плоскости, за исключением точек $p_1 = 1, p_2 = 2$, которые являются простыми полюсами, то по формуле (7.17), где $x > 2$, имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)} dp = \\ &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)}; p = p_k \right] = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{e^{pt}(p-1)}{(p-1)(p-2)} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt}(p-2)}{(p-1)(p-2)} = \frac{e^t}{-1} + \frac{e^{2t}}{1} = e^{2t} - e^t, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Этот же пример решим с помощью метода неопределенных коэффициентов с использованием таблицы 2.

$$\text{Имеем } \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2}.$$

После приведения к общему знаменателю получим из равенства числителей уравнение для определения A, B : $1 \equiv A(p-2) + B(p-1)$. Полагая соответственно $p = 1, p = 2$, находим $A = -1, B = 1$. Следовательно, $\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$. Используя таблицу 2, получим

$f(t) = e^{2t} - e^t$, $t > 0$. Эту же задачу можно решить с помощью теоремы о свертке. Здесь $\frac{1}{(p-1)(p-2)} = F(p) \cdot Q(p)$. Используя таблицу 2, находим

$$Q(p) = \frac{1}{p-1} \div \varphi(t) = e^t, \quad F(p) = \frac{1}{p-2} \div g(t) = e^{2t},$$

следовательно, по теореме о свертке:

$$f(t) = \int_0^t \varphi(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \left(-e^{-\tau} \right) \Big|_0^t = e^{2t} - e^t.$$

Пример 4. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$.

Решение. Разложим $\cos \frac{1}{p}$ в ряд по степеням $\frac{1}{p}$; тогда

$$F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2!p^3} + \frac{1}{4!p^5} - \frac{1}{6!p^7} + \dots$$

Применяя формулу (7.16) получим:

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \frac{t^6}{(6!)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{((2k)!)^2}, \quad t > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.2. Используя различные методы, найти оригиналы следующих изображений

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|---|
| а) $\frac{p+8}{p^2+4p+5}$; | б) $\frac{2}{p(p^2+4)}$; | в) $\frac{1}{(p^2+4)(p^2+9)}$; |
| г) $\frac{1}{p(p-2)(p-3)}$; | д) $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; | е) $\frac{p}{(p-2)(p^2-1)}$; |
| ж) $\frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$; | з) $\frac{e^{-1/p}}{p}$; | и) $p \ln \left(1 + \frac{1}{p^2} \right)$; |

$$\begin{aligned} \text{к)} \quad & \frac{1}{p^2+1} \left(e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p} \right); & \text{л)} \quad & \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}; \\ \text{м)} \quad & \frac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}; & \text{н)} \quad & \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}. \end{aligned}$$

7.4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Одним из важнейших применений операционного исчисления является решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим алгоритм решения на примере задачи Коши для неоднородного уравнения 2-го порядка:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \quad x(0) = a, \quad x'(0) = b. \quad (7.20)$$

Операционный метод решения уравнения (7.20) состоит в следующем. Предполагая, что $f(t)$, $x(t)$ являются оригиналами, от уравнения (7.20) переходят к уравнению для изображений. Пусть $f(t) \doteq F(p)$, $x(t) \doteq X(p)$. Используя свойство дифференцирования оригинала, находим $x'(t) \doteq pX(p) - a$, $x''(t) \doteq p^2 X(p) - ap - b$. Уравнению (7.20) соответствует уравнение для изображений

$$X(p) \cdot (p^2 + a_1 p + a_2) = F(p) + a_1 a + ap + b. \quad (7.21)$$

Из уравнения (7.21) получим

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{ap + b + a_1 a}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (7.22)$$

Далее по известному изображению находят оригинал. Если в формуле (7.20) начальные значения считать не заданными, а произвольными постоянными, то из (7.22) получается при решении обратной задачи общее решение уравнения (7.20).

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$x'' + 2x' + x = f(t), \quad \text{где} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 2 \\ 3, & t > 2 \end{cases}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Уравнение для изображений имеет вид

$$X(p) \cdot (p^2 + 2p + 1) = F(p),$$

где $F(p) \doteq f(t) = \sigma(t) + 2\sigma(t-2) \doteq \frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-2p}$.

Выражение для изображения $X(p)$:
$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} + \frac{2e^{-2p}}{p(p+1)^2}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$X(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \cdot (1 - e^{-2p}).$$

Переходя к оригиналам с помощью таблицы 2 и используя теорему запаздывания, имеем:

$$x(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})\sigma(t) + 2(1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)})\sigma(t-2).$$

Замечание. При обозначении оригиналов, являющимися соответствующими функциями запаздывающего аргумента, необходимо указывать единичную функцию соответствующего аргумента

$$F(p)e^{-\alpha p} \doteq f(t - \alpha)\sigma(t - \alpha), \text{ где } f(t) \doteq F(p).$$

Это особенно важно при решении дифференциальных уравнений в случае, когда функция $f(t)$ задается различными формулами на участке интегрирования дифференциального уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

7.3. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

а) $x'' - 9x = 2 - t, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $x'' - 4x = 4t, x(0) = 1, x'(0) = 0$;

в) $x'' + x' = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2; \\ 1, & 2 \leq t < 4; \\ 0, & t \geq 4. \end{cases} \quad x(0) = 0, x'(0) = 2.$

г) $x'' - x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$

- д) $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;
 е) $x'' + 2x' = t \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;
 ж) $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$;
 з) $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

7.5. Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений математической физики

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений применение преобразования Лапласа по переменной, по которой ведётся дифференцирование, позволяет сразу перейти от дифференциального уравнения к алгебраическому. Для уравнений в частных производных применением одномерного преобразования Лапласа, т.е. преобразования по одной переменной, это сделать не удаётся, но можно уменьшить количество переменных, по которым ведётся дифференцирование в уравнении, и, таким образом, упростить задачу. Покажем это на примере решения уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня.

Рассмотрим однородный полубесконечный тонкий цилиндрический стержень с теплоизолированными боковыми стенками, на левом конце которого температура с течением времени изменяется по заданному закону $\Psi(t)$. В начальный момент $t=0$ температура всех точек стержня равна нулю. Внутренние источники тепла внутри стержня отсутствуют. Ставится задача найти распределение температуры в стержне в зависимости от времени.

Направим ось x вдоль оси стержня, а начало координат совместим с левым его концом. Введём функцию $u(x, t)$, физический смысл которой – температура в момент времени t точек стержня, находящихся в его сечении плоскостью $x = \text{const}$ (так как стержень тонкий, можно считать, что температура всех точек такого сечения одинакова). Тогда математическая формулировка задачи будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (\text{уравнение теплопроводности}), \quad (7.23)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (\text{начальное условие}), \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \psi(t), \quad t \geq 0; \\ |u(+\infty, t)| &< \infty, \end{aligned} \quad (\text{граничные условия}), \quad (7.25)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коэффициент теплопроводности материала стержня, c , ρ – его удельная теплоёмкость и плотность соответственно. Второе из граничных условий – неявное, вытекает из физического смысла решения задачи.

Сделаем преобразование Лапласа по переменной t , пусть

$$u(x, t) \doteq U(x, p), \quad u(0, t) = \psi(t) \doteq \Psi(p), \quad (7.26)$$

тогда согласно свойствам преобразования Лапласа (см. (7.4), (7.14)) с учётом начального условия имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \doteq pU(x, p), \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}. \quad (7.27)$$

Таким образом, после перехода к изображению получаем задачу для нахождения изображения решения $U(x, p)$:

$$pU(x, p) = a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}, \quad (7.28)$$

$$U(0, p) = \Psi(p), \quad |U(\infty, p)| < \infty. \quad (7.29)$$

Граничные условия (7.29) вытекают из граничных условий для оригинала (7.25).

Уравнение (7.28) – фактически обыкновенное линейное дифференциальное, поскольку в него входят только производные по переменной x , причём его коэффициенты не зависят от x , а являются функциями только от параметра p , поэтому его можно решать как уравнение с постоянными коэффициентами. Перепишем уравнение (7.28) в стандартном для линейного уравнения виде, заменив с учётом вышесказанного частную производную второго порядка по x на полную производную, поскольку x и p независимы:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U = 0. \quad (7.30)$$

Характеристическое уравнения для (7.30) и его корни:

$$\lambda^2 - \frac{p}{a^2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{p}}{a}, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{p}}{a}.$$

Без ограничения общности можно считать, что действительная часть корня λ_1 положительна, т.е.

$$\operatorname{Re} \frac{\sqrt{p}}{a} > 0. \quad (7.31)$$

Общее решение уравнения (7.30) имеет вид

$$U(x, p) = A(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + B(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad (7.32)$$

где $A(p)$, $B(p)$ – произвольные функции параметра p , поскольку коэффициенты уравнения (7.30) зависят от p . Потребуем от (7.32) удовлетворения граничных условий (7.29). В силу (7.31) при $x \rightarrow +\infty$ первое слагаемое в правой части (7.32) не ограничено, поэтому для выполнения второго из условий (7.29) нужно, чтобы $A(p) = 0$. Используя первое из условий (7.29), находим, что

$$U(0, p) = B(p) = \Psi(p).$$

Таким образом, получаем выражение для изображения решения исходной задачи:

$$U(x, p) = \Psi(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad x \geq 0. \quad (7.33)$$

Чтобы найти решение задачи (7.23)–(7.25), нужно найти оригинал для (7.33). Используем соответствие, приведённое в таблице 2 (строка 18):

$$e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteq \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{x}{a},$$

тогда

$$F(x, p) \equiv e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \doteq \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \equiv f(x, t). \quad (7.34)$$

Поскольку (7.33) есть произведение изображений $\Psi(p)F(x, p)$, его оригинал можно найти как свёртку оригиналов, т.е. (с учётом (7.26))

$$u(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) f(x, t - \tau) d\tau = \int_0^t \psi(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)}} d\tau. \quad (7.35)$$

Таким образом, решение исходной задачи даётся выражением (7.35).

Примеры решения более сложных задач с помощью операционного исчисления можно найти, например, в [11–13].

Задачи для самостоятельного решения

7.4. Решить с помощью преобразования Лапласа следующие задачи математической физики.

а) Уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня с теплоизолированными боковыми стенками, на левом конце которого поддерживается постоянная температура u_0 , а в начальный момент температура всех точек стержня равна 0. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u(0, t) = u_0, \quad t > 0; \quad (\text{граничные условия})$$

$$|u(+\infty, t)| < \infty.$$

б) Уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня с теплоизолированными боковыми стенками, на левом конце которого поддерживается нулевая температура, а в начальный момент распределение температуры в точках стержня имеет вид $h(x) = \alpha \sin kx$. Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$u(x, 0) = \alpha \sin kx, \quad x > 0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0; \quad (\text{граничные условия})$$

$$|u(+\infty, t)| < \infty.$$

в) Уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня с теплоизолированными боковыми стенками, на левом конце которого поддерживается нулевая температура, а в начальный момент распределение температуры в точках стержня имеет вид $h(x) = \alpha \sin kx$. Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$u(x, 0) = \alpha \sin kx, \quad x > 0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0; \quad (\text{граничные условия})$$

$$|u(+\infty, t)| < \infty.$$

г) Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня с теплоизолированными боковыми стенками, если в начальный момент распределение температуры в точках стержня имеет вид $h(x) = \alpha \sin kx$. Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$u(x, 0) = \alpha \sin kx, \quad x > 0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$|u(\pm\infty, t)| < \infty. \quad (\text{неявные граничные условия})$$

д) Задачу о свободных колебаниях бесконечной струны, если в начальный момент струна имела форму $h(x) = \alpha \sin kx$, начальные скорости всех точек были равны нулю. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение колебаний струны}),$$

$$u(x, 0) = \alpha \sin kx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0; \quad (\text{начальные условия}),$$

$$|u(\pm\infty, t)| < \infty; \quad (\text{неявные граничные условия}),$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения волн по струне, T – сила натяжения струны, ρ – линейная плотность струны.

е) Задачу о свободных колебаниях полубесконечной струны с закреплённым левым концом, если в начальный момент отклонения точек струны равны нулю, а профиль начальных скоростей точек струны имел вид $v(x) = \alpha \sin kx$. Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{уравнение колебаний струны}),$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \alpha \sin kx; \quad (\text{начальные условия}),$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$|u(+\infty, t)| < \infty; \quad (\text{граничные условия})$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения волн по струне, T – сила натяжения струны, ρ – линейная плотность струны.

7.5. Решить с помощью преобразования Лапласа краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(0, t) = U_0, \quad u(x, 0) = 0.$$

В какой момент времени t температура в точке x_0 достигнет значения αU_0 , $0 < \alpha < 1$.

7.6. Решить с помощью преобразования Лапласа краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(0, t) = t, \quad u'_x(0, t) = 0.$$

7.7. Решить с помощью преобразования Лапласа краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u(x, t) = e^{-t}, \quad u(0, t) = A \sin t, \quad u(x, 0) = 0.$$

Указание. Воспользоваться операторным равенством

$\frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}} \doteq I_0(2\sqrt{xt})$, I_0 – функция Бесселя 1-го рода с нулевым индексом.

7.8. Решить с помощью преобразования Лапласа телеграфное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial u}{\partial t} + RGU$, $x \geq 0$, где $u(x, t)$ – напряжение линии в точке с абсциссой x в момент времени t , C – ёмкость, R – сопротивление, L – индуктивность, G – коэффициент утечки, при условиях $R = G = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = \sin t$.

7.9. Решить телеграфное уравнение задачи 7.8 при условии $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \mu$.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить значение выражения:

1. $\left(\frac{2+i}{1-i/3}\right)^8$
2. $\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^6$
3. $\left(\frac{2+i}{2i-1}\right)^6$
4. $\left(\frac{-2-3i}{-6+4i}\right)^8$
5. $\left(\frac{-3+i}{-1-3i}\right)^6$
6. $\left(\frac{-2+i}{-1+3i}\right)^8$
7. $\left(\frac{3+i}{4-2i}\right)^8$
8. $\left(\frac{-5+i}{-4+6i}\right)^4$
9. $\left(\frac{1+2i}{3+i}\right)^6$
10. $\left(\frac{1-3i}{-2-4i}\right)^8$
11. $\left(\frac{5+i}{6-4i}\right)^6$
12. $\left(\frac{1+3i}{2+i}\right)^8$
13. $\left(\frac{1-5i}{-2-3i}\right)^6$
14. $\left(\frac{1-4i}{6+10i}\right)^8$
15. $\left(\frac{1+4i}{5+3i}\right)^6$
16. $\left(\frac{4+i}{5-3i}\right)^{10}$
17. $\left(\frac{-4+i}{-3+5i}\right)^6$
18. $\left(\frac{-1+2i}{3-i}\right)^8$
19. $\left(\frac{-2+i}{3+i}\right)^6$
20. $\left(\frac{-1-3i}{-1+2i}\right)^8$
21. $\left(\frac{2+i}{-1-3i}\right)^6$
22. $\left(\frac{4+i}{3+5i}\right)^8$
23. $\left(\frac{-3+i}{2+i}\right)^6$
24. $\left(\frac{3+i}{1+2i}\right)^8$
25. $\left(\frac{4-i}{5+3i}\right)^6$
26. $\left(\frac{1-4i}{5-3i}\right)^{10}$
27. $\left(\frac{-5+i}{3+2i}\right)^8$
28. $\left(\frac{6-i}{7+5i}\right)^6$
29. $\left(\frac{5-i}{6+4i}\right)^{10}$
30. $\left(\frac{3-i}{4+2i}\right)^8$

Задание 2. Найти и записать в алгебраической форме все корни уравнения:

1. $z^2 - 2z + 1 + i = 0$.
2. $z^2 - 2z + 1 - i = 0$.
3. $z^3 - 8i = 0$.
4. $z^3 + 8i = 0$.
5. $z^3 + 27 - 27i = 0$.
6. $z^3 + 3\sqrt{3} = 0$.

7. $z^2 + 4z + 4 + 2i = 0$.
8. $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.
9. $z^2 + 2z + 1 - 3i = 0$.
10. $z^2 + 4z + 1 - 3i = 0$.
11. $z^2 - 4z + 2 - 2i = 0$.
12. $2z^2 + 2z + 0,5 + i = 0$.
13. $2z^2 + 2z + 0,5 - i = 0$.
14. $0,5z^2 + 2z + 2 + 4i = 0$.
15. $0,5z^2 - 2z + 2 - 4i = 0$.
16. $z^2 + 2z - 1 + 2i = 0$.
17. $z^2 + 4z + 1 + 3i = 0$.
18. $z^2 + 2z + 2 - i = 0$.
19. $0,5z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$.
20. $0,5z^2 - 4z + 2 + 6i = 0$.
21. $0,5z^2 - 2z + 4 - 2i = 0$.
22. $z^2 + 4z + 2 + 2i = 0$.
23. $z^2 + 4z - 1 + 5i = 0$.
24. $z^2 + 6z + 1 + 8i = 0$.
25. $z^2 + 6z + 2 + 7i = 0$.
26. $z^2 - 6z - 1 + 10i = 0$.
27. $z^2 - 4z - 1 - 5i = 0$.
28. $z^2 - 6z + 2 - 7i = 0$.
29. $z^3 - \sqrt{3} - 3i = 0$.
30. $z^3 + \sqrt{3} - 3i = 0$.

Задание 3. Изобразить множество точек на плоскости, удовлетворяющее условиям:

1. $|z + 1 - 2i| \leq 4$, $|z + 2 - i| \geq 1/2$, $\operatorname{Re}(z + 2) \geq 0$.
2. $|z + 2 - i| \leq 5$, $|z + 1 - 2i| \geq 1$, $\operatorname{Im}(z - 2i) \leq 0$.
3. $|z - 1 - i| \leq 4$, $|z - i| \geq 1$, $\operatorname{Im}(z - i) \geq 0$.
4. $1 < |z - 1 + i| \leq 3$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.
5. $0,5 < |z + 2 + 3i| < 4$, $-\pi < \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$.
6. $|z - 2 + i| \leq 3$, $\operatorname{Re}(z - 1) > 0$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$.
7. $|z + 2i| \leq 4$, $|z + 1 + i| > 1$, $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.
8. $z\bar{z} \leq 9$, $|z + i| > \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

9. $z\bar{z} \geq 1, \quad |z-1-i| \leq 5, \quad \operatorname{Im}(z-i) \leq 0.$
10. $2 \leq |z+1-3i| < 4, \quad |z+1-5i| \geq 1.$
11. $1 < |z+3-3i| \leq 5, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$
12. $\frac{1}{2} < |z-1-3i| < 3, \quad \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}.$
13. $1 < (z-1)\overline{(z-1)} \leq 9, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{6}.$
14. $\frac{1}{4} < (z+i)\overline{(z+i)} \leq 4, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}.$
15. $1 < (z-i)(\bar{z}+i) \leq 9, \quad \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$
16. $1 < (z+1)(\bar{z}+1) < 4, \quad \arg z \geq \frac{\pi}{2}.$
17. $|z+3-2i| \geq 2, \quad |\operatorname{Im}(z-2i)| \leq 2.$
18. $z^2 + \bar{z}^2 \leq 0, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}.$
19. $\operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}^2) \geq 0, \quad \arg z \geq 0.$
20. $\frac{1}{2} < |z-3+i| \leq 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}.$
21. $1 \leq |z+3+i| \leq 4, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{6}.$
22. $|z-1-i| \leq 3, \quad |z-1+i| \leq 3, \quad \operatorname{Re}(z-1) \geq 0.$
23. $|\bar{z}+i| \leq 2, \quad \arg z \geq \frac{\pi}{4}.$
24. $|\bar{z}-1| \leq 3, \quad \arg z \geq \frac{\pi}{3}.$
25. $|z+3i| \leq 5, \quad \arg \bar{z} \geq 0.$
26. $|z+2-3i| \geq 2, \quad |\operatorname{Re}(z+2)| \leq 2.$

$$27. 1 < |\bar{z} - 2i| < 3, \quad \operatorname{Re}(z + 2) \leq 0.$$

$$28. 2 < |\bar{z} + 2| < 3, \quad \operatorname{Im}(z + 2) > 0.$$

$$29. 0 < |z + 3i| < 2, \quad |\operatorname{Re} z| \leq 1.$$

$$30. 1 < z \bar{z} < 4, \quad -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{6}.$$

Задание 4. Вычислить и записать в алгебраической форме все значения выражения.

$$1. \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right). \quad 2. \operatorname{Ln}(-1 + i). \quad 3. \operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{3}\right).$$

$$4. \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right). \quad 5. \operatorname{ch}(1 - \pi i). \quad 6. (-i)^{5i}.$$

$$7. \operatorname{Ln}(-6). \quad 8. i^{2i}. \quad 9. (-1)^{8i}.$$

$$10. (-1 - i)^{4i}. \quad 11. \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right). \quad 12. \sin 6i.$$

$$13. \cos 5i. \quad 14. (4 - 3i)^{2i}. \quad 15. \operatorname{Ln}\left(\frac{3 + 4i}{5}\right).$$

$$16. 4^{2i}. \quad 17. (-\sqrt{3} + i)^{6i}. \quad 18. i^{2i}.$$

$$19. (\sqrt{3} - i)^i. \quad 20. \operatorname{Ln} 3i. \quad 21. (-1)^i.$$

$$22. (-4 + 3i)^i. \quad 23. \sin(1 + i). \quad 24. (2 - i)^{8i}.$$

$$25. \operatorname{Ln}(-1 + 2i). \quad 26. (-1 + i)^{10i}. \quad 27. \operatorname{sh}(2 - 4i).$$

$$28. (-1 + i)^{4i}. \quad 29. \operatorname{Ln}(1 - i). \quad 30. \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2i\right).$$

Задание 5. Выяснить характер особых точек функции $w = f(z)$.

$$1. \text{ а) } f(z) = \frac{z^3}{1 + z^4}; \quad \text{ б) } f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}.$$

$$2. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2};$$

$$\text{б) } f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \sin \frac{1}{z} \right).$$

$$3. \text{ a) } f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z-i)^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \sin \frac{1}{z-2}.$$

$$4. \text{ a) } f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$5. \text{ a) } f(z) = \frac{z}{z+z^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z+1}{\sin z}.$$

$$6. \text{ a) } f(z) = \frac{z+1}{z^4+16};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

$$7. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z+2)^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{z^2-4} e^{\frac{1}{z+2}}.$$

$$8. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^3(z^{10}-1)};$$

$$\text{б) } f(z) = \sin \frac{1}{1-z}.$$

$$9. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{1+z^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{\sin z}{z(z^3+1)}.$$

$$10. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

$$11. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^3+1)};$$

$$\text{б) } f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

$$12. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^5-4z^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}.$$

$$13. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+16} \cos \frac{1}{z}.$$

$$14. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-1)^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \operatorname{ctg} z.$$

$$15. \text{ a) } f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2(z-1)^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{e^z - 1}.$$

$$16. \text{ a) } f(z) = \frac{\cos z}{(z^3+1)z^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{z} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{z}.$$

$$17. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z+1)};$$

$$\text{б) } f(z) = \sin z - \sin \frac{1}{z}.$$

$$18. \text{ a) } f(z) = \frac{z^3}{(z^4+1)\sin z};$$

$$\text{б) } f(z) = \operatorname{ctg} z \cdot \frac{1}{z}.$$

$$19. \text{ a) } f(z) = \frac{z^3+1}{(z+3)^2(z+1)};$$

$$\text{б) } f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}.$$

$$20. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2+1}{(z^4+1)z^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z^2}{\sin z}.$$

$$21. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2+3}{z^2-z-2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}.$$

$$22. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^4+z};$$

$$\text{б) } f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}.$$

$$23. \text{ a) } f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z^2(z+1)};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+1} \cdot \cos \frac{1}{z}.$$

$$24. \text{ a) } f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^5+1)};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2z})}.$$

$$25. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{z-1};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{\cos 3z}.$$

$$26. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{(z+5)^2} \sin \frac{1}{z}.$$

$$27. \text{ a) } f(z) = \frac{z+1}{z^4 + 1};$$

$$\text{б) } f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}.$$

$$28. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5};$$

$$\text{б) } f(z) = \sin \frac{5}{z-1}.$$

$$29. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{z} - e^{\frac{2}{z}}.$$

$$30. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2}{(z^3 + 1)};$$

$$\text{б) } f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}.$$

Задание 6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

$$1. f(z) = \frac{e^z}{z+2}, z_0 = -2.$$

$$2. f(z) = e^{\frac{1}{z+3}}, z_0 = -3;$$

$$3. f(z) = \cos \frac{z+1}{z}, z_0 = 0;$$

$$4. f(z) = (z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}}, z_0 = 1;$$

$$5. f(z) = \sin \frac{z+2}{z}, z_0 = 0;$$

$$6. f(z) = \sin \frac{z}{1-z}, z_0 = 1;$$

$$7. f(z) = \cos \frac{z}{2-z}, z_0 = 2;$$

$$8. f(z) = z e^{\frac{z}{z-5}}, z_0 = 5;$$

$$9. f(z) = z \cdot \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2;$$

$$10. f(z) = \cos \frac{3z}{z-i}, z_0 = i.$$

$$11. f(z) = z \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1;$$

$$12. f(z) = z e^{\frac{1}{z+2}}, z_0 = -2;$$

13. $f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2;$ 14. $f(z) = z \sin \frac{\pi(z+2)}{z}, z_0 = 0;$
15. $f(z) = \sin \frac{3z-i}{3z+i}, z_0 = -i/3;$ 16. $f(z) = e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}, z_0 = 1;$
17. $f(z) = \sin \frac{z+i}{z-i}, z_0 = i;$ 18. $f(z) = z e^{\frac{z}{z-3}}, z_0 = 3;$
19. $f(z) = (z-3) \cos \pi \frac{z-3}{z}, z_0 = 0;$
20. $f(z) = z \cdot \cos \frac{z}{z+2i}, z_0 = -2i;$ 21. $f(z) = (z+1) e^{\frac{1}{z-1}}, z_0 = 1;$
22. $f(z) = \cos \frac{z}{z+i}, z_0 = -i;$ 23. $f(z) = \cos \frac{2z}{z-1}, z_0 = 1;$
24. $f(z) = z e^{\frac{1}{z-2}}, z_0 = 2;$ 25. $f(z) = \sin \frac{2z}{1+z}, z_0 = -1;$
26. $f(z) = z \sin \frac{1}{z-1}, z_0 = 1;$ 27. $f(z) = (z+2) \cos \frac{1}{z-1}, z_0 = 1;$
28. $f(z) = \cos \frac{3z}{1-z}, z_0 = 1;$ 29. $f(z) = z \cos \frac{5z}{z-2i}, z_0 = 2i;$
30. $f(z) = z \cdot \sin \frac{2}{z-2}, z_0 = 2.$

Задание 7. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. а) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^2+1)};$ б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4}.$
2. а) $\oint_{|z-i|=1} \frac{sh \frac{\pi z}{2} dz}{(1+z^2)^2};$ б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4};$ в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin dx}{(x^2+1)^2}.$

3. a) $\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z^2+4)(z^2+9)}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$; в) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2+9}$.
4. a) $\oint_{|z|=5} \sin \frac{1}{z} dz$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$; в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx$.
5. a) $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z \pi dz}{z^2(z+1)}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{(x^2+1)^2}$.
6. a) $\oint_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos x}$.
7. a) $\oint_{\left|z-\frac{5}{2}\right|=3} \frac{\sin z}{z^2+4}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+9}$.
8. a) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4}-\cos x}$.
9. a) $\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z dz}{z(z+1)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+16}$.
10. a) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6+\cos x}$.
11. a) $\oint_{|z|=4} \frac{z dz}{(z^2+1)(z^2+2)}$; б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$; в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+25}$.
12. a) $\oint_{|z-2i|=2} \frac{z dz}{z^4-1}$; б) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$; в) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+64}$.

$$13. \text{ a) } \oint_{|z|=5} \frac{(z^2+1)dz}{(2z+3)z^2}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+9}.$$

$$14. \text{ a) } \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2};$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(0,5+0,3\cos x)^2}.$$

$$15. \text{ a) } \oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2};$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}.$$

$$16. \text{ a) } \oint_{|z|=3} \frac{\cos z dz}{(z-1)^2(z-2)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)dx}{(x^2+1)(x^2+4)}; \quad \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}.$$

$$17. \text{ a) } \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z dz}{z^2(z-2)}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+16}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^4} dx.$$

$$18. \text{ a) } \oint_{|z|=3} \frac{\cos z dz}{(z+1)^2(z-2)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

$$19. \text{ a) } \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)dx}{(x^2+1)(x^2+25)}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx.$$

$$20. \text{ a) } \oint_{|z|=1} \frac{2z+1}{z^4+1} dz; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-4)dx}{(1+x^2)(9+x^2)}; \quad \text{B) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$21. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4-1}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)};$$

$$\text{B) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x dx}{x^2-2x+2}.$$

$$22. \text{ a) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-25)}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x^2+4}{x^4+16} dx; \quad \text{B) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-2x+10}.$$

$$23. \text{ a) } \oint_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2+4)(z-i)^2}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-4)dx}{(x^2+1)(x^2+9)};$$

$$\text{B) } \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+8x^2+16}.$$

$$24. \text{ a) } \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3(z^2-4)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}; \quad \text{B) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin x dx}{x^2-6x+18}.$$

$$25. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-9)(z^3-1)}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+4)dx}{x^4+1}; \quad \text{B) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+4}.$$

$$26. \text{ a) } \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2+9} dz; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+256}; \quad \text{B) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4x+5)^2}.$$

$$27. \text{ a) } \oint_{|z|=1/2} z^2 \sin \frac{1}{z} dz; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}; \quad \text{B) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$\begin{array}{lll}
28. \text{ а) } \oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^2 + 2z + 1}; & \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}; & \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}. \\
29. \text{ а) } \oint_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz; & \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 3}{1 + x^4} dx; & \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{16}}. \\
30. \text{ а) } \oint_{|z|=1/3} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz; & \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(2 + 4x^2)^2}; & \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{4 + 2 \cos x}.
\end{array}$$

Задание 8. Найти изображение оригиналов.

$$\begin{array}{lll}
1. t^2 \sin 2t. & 2. \frac{\sin 5t}{t}. & 3. \sin 2t \cdot \cos 8t. \\
4. \sin^2 5t. & 5. \cos^2 3t. & 6. \frac{\sin 2t}{t}. \\
7. \int_0^t \frac{\sin 2u}{u} du. & 8. \frac{e^{2t} - 1}{t}. & 9. \frac{1 - \cos 2t}{t}. \\
10. \frac{\cos 4t - \cos 2t}{t}. & 11. e^{-t} \sin^2 t. & 12. t \cdot \cos 2t. \\
13. \operatorname{sh}^3 t. & 14. \operatorname{ch} t \cdot \sin t. & 15. e^t \cos^3 t. \\
16. e^{-2t} \cos^2 3t. & 17. \int_0^t \frac{e^{3u} - 1}{u} du. & 18. \frac{1 - \cos 3t}{t}. \\
19. t \cos 2t \cdot \cos 6t. & 20. \operatorname{ch} t \cdot \cos 2t. & \\
21. \sin 2(t-4) \cdot e^{4(t-4)} \sigma(t-4). & & \\
22. \cos 2t \cdot \operatorname{ch}(3t-2). & 23. \operatorname{ch}^3 t. & 24. e^{2t} \sin^2 3t. \\
25. e^{-2t} \cos^2 4t. & 26. t \cdot e^t \cdot \sin 5t. & 27. \frac{\cos 6t - \cos 8t}{t}.
\end{array}$$

$$28. \int_0^t \frac{e^{4u} - 1}{u} du.$$

$$29. \operatorname{ch} 2t \cdot \sin 8t; \quad 30. t \cdot \cos 9t \cdot \sin 8t.$$

Задание 9. Найти оригиналы для заданных изображений.

$$1. \text{ а) } \frac{1}{p(p^2 + 4)};$$

$$\text{б) } \frac{1}{p} \cos \frac{2}{p}.$$

$$2. \text{ а) } \frac{1}{p^3(p+4)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-3p}}{(p+1)(p-2)}.$$

$$3. \text{ а) } \frac{1}{p^2(p^2+1)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-p}}{(p+1)^2(p+3)}.$$

$$4. \text{ а) } \frac{1}{p^2(p+3)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-4p}}{p^2(p+3)}.$$

$$5. \text{ а) } \frac{1}{p(p+1)^3};$$

$$\text{б) } \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{1}{(p+1)(p-2)^2};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-p}}{(p-1)(p+3)}.$$

$$7. \text{ а) } \frac{1}{p^2(p+1)^2};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-2p}}{p(p^2+9)}.$$

$$8. \text{ а) } \frac{1}{p^2(p^2+9)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-3p}}{p^2(p+1)}.$$

$$9. \text{ а) } \frac{3+p}{p^2(p^2+1)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-4p}}{(p+1)(p-4)^2}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{p}{(p+1)^2(p+5)};$$

$$\text{б) } \frac{e^{-p}}{(p+2)^2(p-3)}.$$

$$11. \text{ а) } \frac{p+2}{p^2(p^2+4)};$$

$$\text{б) } \frac{1}{p} \sin \frac{3}{p}.$$

- | | |
|--|---|
| 12. a) $\frac{1}{(p^2+1)^2};$ | б) $p \ln \left(1 + \frac{1}{p^2} \right).$ |
| 13. a) $\frac{1}{p(p^4-1)};$ | б) $\frac{e^{-p}}{p^2+1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2+4}.$ |
| 14. a) $\frac{3p^2}{(p^3-1)};$ | б) $\frac{e^{-2p}+3e^{-p}}{p^2+4}.$ |
| 15. a) $\frac{p}{(p-1)^2(p+3)};$ | б) $\frac{e^{-p/3}}{(p+1)(p^2+4)}.$ |
| 16. a) $\frac{p+1}{p^3(p^2+1)};$ | б) $\frac{e^{-2p}}{(p+2)^2(p-5)}.$ |
| 17. a) $\frac{p+3}{(p^2+9)(p-1)^2};$ | б) $\frac{8}{p-1}e^{\frac{2}{p-1}}.$ |
| 18. a) $\frac{p+7}{p(p-1)(p-2)};$ | б) $\frac{e^{-4p}}{(p-1)^2(p+2)}.$ |
| 19. a) $\frac{p+3}{p^2(p-5)};$ | б) $\frac{1}{p+1} \sin \frac{3}{p+1}.$ |
| 20. a) $\frac{1-p}{(p^2+4)^2};$ | б) $p \ln \left(\frac{3+p^2}{p^2} \right).$ |
| 21. a) $\frac{p-3}{p(p^4-4)};$ | б) $\frac{e^{-3p}}{(p-1)^2(p+2)}.$ |
| 22. a) $\frac{3p+7}{(p^2+4)(p-2)};$ | б) $\frac{e^{-0,5p}}{p(p^2+4)}.$ |
| 23. a) $\frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+4p)};$ | б) $\frac{1}{p+2} \cos \frac{2}{p+2}.$ |

24. а) $\frac{p+5}{(p^2+4)(p-1)^2};$	б) $\frac{e^{-4p}}{(p^2+9)(p-3)}.$
25. а) $\frac{p+2}{(p-1)(p+3)};$	б) $\frac{e^{-3p}}{(p^2+4)(p-3)}.$
26. а) $\frac{1}{p^2(p^2-9)};$	б) $\frac{e^{-6p}}{(p+1)^2(p-2)^3}.$
27. а) $\frac{1}{p^2(p^2-9)};$	б) $\frac{e^{-8p}}{(p-2)^2(p+3)}.$
28. а) $\frac{1}{7-p+p^2};$	б) $\frac{e^{-p}}{p^2-4} + \frac{pe^{-3p}}{p^2+9}.$
29. а) $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)};$	б) $\frac{e^{-3p}}{p^2-16} + 2\frac{e^{-4p}}{p+5}.$
30. а) $\frac{p}{(p^2+1)^2};$	б) $\frac{e^{-p/3}}{p(p+1)(p^2+4)}.$

Задание 10. Методами операционного исчисления решить задачу Коши.

1. $x'' + x = \frac{1}{2}t^2e^t,$	$x(0) = x'(0) = 0.$
2. $x'' + 2x' + x = t^2,$	$x(0) = 1, x'(0) = 0.$
3. $x'' - x' - 6x = 2,$	$x(0) = 1, x'(0) = 0.$
4. $x'' - x' = t \cdot e^t,$	$x(0) = 1, x'(0) = 0.$
5. $4x'' + 16x' + 15x = 4e^t,$	$x(0) = 3, x'(0) = 1.$
6. $x'' - 6x' = 0,$	$x(0) = 15, x'(0) = 2$
7. $x'' + 4x' = \sin t,$	$x(0) = x'(0) = 1.$
8. $x'' - 2x' = 2t - 1 - 3e^t,$	$x(0) = x'(0) = 0.$
9. $x'' - 3x' + 2x = \sin 3t,$	$x(0) = 1, x'(0) = 0.$

- | | |
|---|---------------------------|
| 10. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 11. $x'' + 2x' = t \sin t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 12. $x'' - 2x' = e^{2t}$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 13. $x'' - 4x' + 3x = 0$, | $x(0) = 5, x'(0) = 10$. |
| 14. $4x'' + 4x' + x = e^t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 15. $x'' + x = \sin t - 2e^{-t}$, | $x(0) = x'(0) = 1$. |
| 16. $x'' - x' + x = e^t$, | $x(0) = x'(0) = 1$. |
| 17. $x'' - 2x' - 8x = \cos 2t$, | $x(0) = 1, x'(0) = 0$. |
| 18. $x'' + 2x' = 2 \sin 3t$, | $x(0) = 1, x'(0) = 1$. |
| 19. $x'' + x' = \cos t$, | $x(0) = 1, x'(0) = 0$. |
| 20. $x'' + 2x' + 5x = 3$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 21. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 22. $x'' - 2x' = te^{2t}$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 23. $x'' + 2x' + x = t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 24. $x'' - x' + x = e^{-5t}$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 25. $x'' + x' = 2e^{3t}$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 26. $x'' + x' + x = te^t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 27. $x'' + 3x' - 4x = \sin t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 28. $x'' - 2x' = t^2$, | $x(0) = 0, x'(0) = 1$. |
| 29. $x'' + 4x = 2 \cos t \cdot \cos 3t$, | $x(0) = x'(0) = 0$. |
| 30. $x'' + x' = 4 \sin^2 t$, | $x(0) = 0, x'(0) = -1$.m |

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. а) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; б) $10 + 5i$; в) $\frac{13}{17} + \frac{1}{17}i$; г) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.

1.2. а) $4(\cos \pi + i \sin \pi)$; $4e^{i\pi}$; б) $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; $2e^{\frac{i\pi}{2}}$;

в) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $2e^{-\frac{i\pi}{2}}$; г) $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; $2e^{\frac{i3\pi}{4}}$;

д) $\sqrt{34}\left(\cos\left(\arctg\left(\frac{3}{5}\right)\right) + i \sin\left(\arctg\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right)$; $\sqrt{34}e^{i \arctg \frac{3}{5}}$;

е) $\sqrt{13}\left(\cos\left(-\pi + \arctg \frac{3}{2}\right) + i \sin\left(-\pi + \arctg \frac{3}{2}\right)\right)$; $\sqrt{13}e^{i\left(-\pi + \arctg \frac{3}{2}\right)}$;

ж) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$;

з) $4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$; $4e^{i \frac{2\pi}{3}}$;

1.3. а) $8 + 8i$; б) 32 ; в) $172 + 117i$; г) 1728 ; д) $\frac{1}{4}$.

1.4. а) $e^{\frac{\pi + 2k\pi i}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$; б) $e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}{3}}$, $k = 0, 1, 2$;

$$\begin{aligned}
& \text{в) } e^{\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}{4}}, k=0,1,2,3; \quad \text{г) } 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, k=0,1,2; \\
& \text{д) } \sqrt[6]{2}e^{\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi i}{3}}, k=0,1,2; \quad \text{е) } \sqrt[6]{13}e^{\frac{\arctg\left(-\frac{3}{2}\right) + 2k\pi i}{3}}, k=0,1,2; \\
& \text{ж) } e^{\frac{\pi + 2k\pi i}{6}}, k=0,1,2,3,4,5; \quad \text{з) } \sqrt{2}e^{\frac{k\pi i}{4}}, k=0,1,\dots,7.
\end{aligned}$$

2.1. а) $x^2 + y^2 \leq 4$ (см.рис.1);

б) $x^2 + (y-2)^2 \leq 16$ (см.рис.2);

в) $y = x$ (см.рис.3);

г) $\frac{1}{\sqrt{3}}x < y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0, y \geq 0$ (см.рис.4);

д) $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$ (см.рис.5);

е) $x^2 + y^2 \leq 1$ (см.рис.6);

ж) $x^2 + y^2 > 1, -1 < y \leq 1, 0 < x \leq 2$ (см.рис.7);

з) $x^2 + y^2 < \sqrt{2}, x \leq 1, y > -1$ (см.рис.8);

и) $(x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 1$ (см.рис.9);

к) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 4$ (см.рис.10);

л) $x^2 + y^2 \leq 4, (x-1)^2 + y^2 \geq 1$, (см.рис.11);

м) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$ (см.рис.12); н) $1 \leq y \leq 2$, (см.рис.13);

2.2. а) $-i$; б) 0 ; в) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; г) 0 ; д) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$; е) ∞ ; ж) 3 ; з) $5i$;

и) ∞ ; к) $-e^{-1}$; л) 0 .

2.3. а) ограничена; б), в), г) не ограничены.

2.4. а), г) при $|a| < 1$, при $|a| > 1$ и при $a = 1$; б), в) при всех.

2.6. а) $x = 1, 1 \leq y \leq 2$; (см.рис.14); и) $y = x$, (см.рис.15).

2.7. а) $z = 1 + (i-1)t, 0 \leq t \leq 1$; б) $z = -1 + i + (3-2i)t, 0 \leq t \leq 1$;

в) $z = 2 + i + 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$; г) $z = 2 + i + 2e^{it}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$;

д) $z = 2 - i + 3e^{-it}, 0 \leq t \leq \pi$.

3.1. а) $u = x + x^2 - y^2, v = y + 2xy$; б) $u = 2x^2 - 2y^2 + y, v = 4xy + x$;

в) $u = -2xy^2 - x, v = 2 - y + x^2 - y^2$;

г) $u = -\frac{x^2 - (1+y)^2}{x^2 + (1+y)^2}, v = -\frac{2x(1+y)}{x^2 + (1+y)^2}$;

д) $u = -y - \frac{y}{x^2 + y^2}, v = -x + \frac{x}{x^2 + y^2}$; е) $u = x^2 - y^2, v = 2xy - 1$;

ж) $u = \frac{2xy + y + x^2 - y^2 + x + 1}{2(x-y)}, v = \frac{2xy + y - x^2 + y^2 - x - 1}{2(x-y)}$;

з) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}; v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; и) $u = e^{-x} \cos y, v = -e^{-x} \sin y$;

к) $u = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, v = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$;

л) $u = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}, v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{2(\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y)}$.

3.2. а) $3i$; б) $-i/2$; в) $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; г) $\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$.

3.3. Ось Ox отображается в окружность $u^2 + v^2 = 1$. Ось Oy отображается на ось Ou , причём точка $z = i$ переходит в точку $w = \infty$, а точка $z = \infty$ – в точку $w = 1$.

3.4. а) $\cos 1 \cdot \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \cdot \operatorname{sh} 1$; б) $\cos 1$; в) $-\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \sin 1$;

г) $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $(2k+1/4)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $-\frac{e^{-1}}{\sqrt{2}} + i\frac{e^{-1}}{\sqrt{2}}$;

ж) $e^{-(\pi/2+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$; и) $e^{-(\pi/4+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$;

к) $i \operatorname{sh} \pi$; л) $i \operatorname{tg} 2$.

3.5 а), в) не являются; б), г), д), е) являются при $\forall z$; ж) является при $\forall z \neq 0$.

3.6. а) $f(z) = z^2 + z$; б) e^{iz} ; в) $f(z) = z^3 + 1$; г) $f(z) = e^{-2z} + 1$;

д) $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1$; е) $f(z) = e^{iz} + z$.

3.7. а) $k=4$, $\varphi=\pi/4$; б) $k=6$, $\varphi=\pi/2$; в) $k=2$, $\varphi=\pi/2$.

3.8. а) $|z-1|=1/2$; б) $|z-i/2|=1/2$; в) $|z+i|=\sqrt{2}$; г) $|z|=1/\sqrt{3}$.

4.1. а) $-4+\pi i$; б) $\frac{2}{3}+2i$; в) $\frac{8}{3}-\left(\frac{8}{3}+4\pi\right)i$; г) $\frac{1}{30}-\frac{i}{3}$;

д) -2 ; е) $(2\sin 1 - e) + (1 - 2\cos 1)i$; ж) $-i(1 + e^\pi)$.

4.2. а) $e(e \cos 8 - \cos 1) + ie(e \sin 8 - \sin 1)$;

б) $\left(\cos \frac{1}{4} \operatorname{ch} \frac{1}{2} - \cos \frac{9}{4} \operatorname{ch} \frac{3}{2}\right) + i\left(\sin \frac{9}{4} \operatorname{sh} \frac{3}{2} - \sin \frac{1}{4} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\right)$;

в) $(2\cos 1 - \sin 1) + i(3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1)$;

г) $-\ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \cos 1} + i \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{th} 1)$

4.3. а) 0; б) $-8\pi i$; в) $2\pi i$; г) 0; д) πi ; е) $\frac{\pi}{e}$; ж) 0; з) $2\pi i$;

и) $6\pi i$; к) i ; л) $-\frac{\pi}{45}i$; м) $\frac{\pi}{2}i$; н) $\pi \operatorname{sh} 1$; о) $-\pi i$; п) $2\pi i$;

р) $-\frac{\pi i}{27}$; с) $-2\pi i$; т) 0; у) 0; ф) $3\pi i$; х) -2π ; ц) $4\pi i$.

5.1. а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$;

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, R=\infty; \quad \text{г)} \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z+2)^n}{5^n}, R=\frac{5}{3}; \\
\text{д)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{i^{n+1}}, R=1; \quad \text{е)} \quad \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot 2^n}, R=2; \\
\text{ж)} \quad & \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - 2^{-n-1} \right) \cdot z^n, R=1; \quad \text{з)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{3n} - z^{3n+1} \right), R=1; \\
\text{и)} \quad & \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - 4^{-n-1} \right) z^{2n+1}, R=1; \quad \text{к)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, R=\infty; \\
\text{л)} \quad & \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{2 \cdot 4} + \frac{7z^3}{3 \cdot 8} - \dots, R=1; \quad \text{м)} \quad 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \dots; \\
\text{н)} \quad & 1 + 2z + \frac{19}{6} z^2 + \dots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{5.2. а)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot z^n, |z| < 2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \cdot 2^n, |z| > 2; \\
\text{б)} \quad & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} \cdot z^n, |z| < \frac{3}{2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1} z^{n+1}}, |z| > \frac{3}{2}; \\
\text{в)} \quad & -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (z-1)^n, |z-1| < \frac{1}{2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} (z-1)^{-n-1}, |z-1| > \frac{1}{2}; \\
\text{г)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}, |z-i| < \sqrt{26}; \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-i)^n (z-i)^{-n-1}}{(5-i)^{n+1}}, |z-i| > \sqrt{26}; \\
\text{д)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2i)^n}{(1-6i)^{n+1}}, |z-2i| < \sqrt{65}; \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-6i)^n}{3^{n+1}} (z-2i)^{-n-1}, |z-2i| > \sqrt{65}; \\
\text{е)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{(3-i)^{n+1}}, |z-1-i| < \sqrt{10}; \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{(z-1-i)^{n+1}}, |z-1-i| > \sqrt{10}; \\
\text{ж)} \quad & \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots; \quad \text{з)} \quad z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots;
\end{aligned}$$

и) $1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$; к) $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$;

л) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$ при $2 < |z| < 3$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}$ при $|z| > 3$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot z^n$; н) $-\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot (z-i)^n$;

о) $\sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!(z-3)^{2n+1}} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!(z-3)^{2n}}$;

п) $e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z-3)^n}$.

5.3. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n-2}} \cdot 2^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1} z^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1} z^{n+1}}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+3}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(3^{n-1} - 2^{n-1})}{z^{n-2}}$.

6.1. а) $z=0$ – полюс второго порядка; $z=\pi k$, $k \neq 0$ – полюса первого порядка; б) $z=\pi i \left(k - \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ – полюса первого порядка;

в) $z=\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – полюса первого порядка; г) $z=-2$ – существенно особая точка; д) $z=0$ – существенно особая точка;

е) $z=-1$ – существенно особая точка; ж) $z=-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ – полюса первого порядка; $z=\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ – У.О.Т.; з) $z=0$ – полюс второго порядка.

6.2. а) 0 при $z=0$; $-\frac{8}{\pi^3(1+2k)^3}$ при $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$;

б) $\frac{4}{15}$; в) e при $z=1$; -2 при $z=0$;

г) 0; д) $\frac{1-\cos 2}{8}$ при $z=2$; $-\frac{1}{4}$ при $z=0$. е) e ;

ж) $(1-e^{-1})$ при $z=0$; e^{-1} при $z=-1$; з) 0; и) $\frac{(-1)^k e^{ik}}{\pi}$.

6.3. а) $(1-2e^{-1})\pi i$; б) $-\frac{1}{3}\pi i$; в) $-\frac{4}{3}\ln 3 \cdot \pi i$;

г) $(\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)) \cdot \frac{\pi}{2}$; д) $-2\pi i$; е) $\frac{\pi i}{6}$;

ж) $2\pi i$; з) 0; и) 0; к) $2\pi i$; л) 2π ; м) $-2\pi i$; н) πi .

6.4. а) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{13}{45}\pi$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{12\pi}{11\sqrt{11}}$; е) $\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{4\pi}{3}$;

з) $\frac{\pi}{4}$; и) $\pi e^{-1} \cos 1$; к) $\pi i e^{3i-10}$; л) $\frac{\pi}{3} e^{-2}(4-e)$; м) $\frac{\pi}{2} e^{-3}$;

н) $\frac{5\pi}{32} e^{-4}$; о) $\pi e^{-2}(\cos 4 - \sin 4)$.

7.1. а) $\frac{1}{p-1}$; б) $\frac{3}{p^2+9}$; в) $\frac{1}{(p-1)^2}$; г) $\frac{e^{-2p} - e^{-6p}}{p^2}$;

д) $\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$; е) $\frac{2}{p(p^2+4)}$; ж) $\frac{p^2+2w^2}{p(p^2+4w^2)}$;

з) $\frac{16p}{(p^2-12)^2-256}$; и) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}$; к) $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$;

$$\text{л)} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p+a}{m}; \quad \text{м)} \frac{2}{(p-3)^3}; \quad \text{н)} \operatorname{arcctg} p; \quad \text{п)} \ln \frac{p}{p-1}.$$

$$\mathbf{7.2.} \text{ а)} e^{-2t}(\cos t + 6 \sin t); \quad \text{б)} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t); \quad \text{в)} \frac{1}{5} \left(\frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin 3t}{3} \right);$$

$$\text{г)} \frac{1}{6} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{3t}}{3}; \quad \text{д)} \frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t); \quad \text{е)} \frac{2}{3}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t;$$

$$\text{ж)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}, t > 0; \quad \text{з)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2};$$

$$\text{и)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n-1)}}{n(2(n-1))!};$$

$$\text{к)} \sin(t-2)\sigma(t-2) + 2\sin(t-3)\sigma(t-3) + 3\sin(t-4)\sigma(t-4);$$

$$\text{л)} \operatorname{sh}(t-1)\sigma(t-1) + \operatorname{ch} 2(t-2)\sigma(t-2);$$

$$\text{м)} \sigma\left(t - \frac{1}{3}\right) - \cos\left(t - \frac{1}{3}\right)\sigma\left(t - \frac{1}{3}\right);$$

$$\text{н)} \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

$$\mathbf{7.3.} \text{ а)} \frac{7}{27}e^{3t} - \frac{1}{27}e^{-3t} + \frac{t}{9} - \frac{2}{9}; \quad \text{б)} \operatorname{ch} 2t + t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2};$$

$$\text{в)} 2(1 - e^{-t})\sigma(t) + (t-2)\sigma(t-2) - \sigma(t-2) - e^{-(t-2)}\sigma(t-2) - \\ - (t-4)\sigma(t-4) + \sigma(t-4) + e^{-(t-4)}\sigma(t-4).$$

$$\text{г)} 1 - e^{-t} + \left(\operatorname{ch}(t-1) - (t-1)^2 \right) \sigma(t-1); \quad \text{д)} \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3};$$

$$\text{е)} \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t - \frac{1}{5}t\sin t + \frac{2}{5}t\cos t;$$

$$\text{ж)} 2 + \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t); \quad \text{з)} e^t \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right).$$

$$7.4. \text{ а) } u(x, t) = u_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy = u_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \text{ где}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \text{ — интеграл вероятностей;}$$

$$\text{б) } u(x, t) = h_0 + (u_0 - h_0) \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right);$$

$$\text{в) } u(x, t) = \alpha e^{-a^2 k^2 t} \sin kx; \quad \text{г) } u(x, t) = \alpha e^{-a^2 k^2 t} \sin kx;$$

$$\text{д) } u(x, t) = \alpha \cos(akt) \sin(kx) = \frac{\alpha}{2} [\sin k(x+at) + \sin k(x-at)];$$

$$\text{е) } u(x, t) = \frac{\alpha}{ak} \sin(akt) \sin(kx) = \frac{\alpha}{2ak} [\cos k(x-at) - \cos k(x+at)].$$

$$7.5. u(x, t) = U_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \quad t_0 = \frac{x_0^2}{4a^2 k^2}, \text{ где } k \text{ — корень уравнения}$$

$$\Phi(y) = 1 - \alpha \left(\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz \right). \quad 7.6. u(x, t) = t \cos x + x \sin x.$$

$$7.7. u(x, t) = \int_0^t (A \cos z + e^{-z}) I_0(2\sqrt{x(t-z)}) dz - I_0(2\sqrt{xt}) + e^{-t}.$$

$$7.8. u(x, t) = \sin(t - \sqrt{LC}) \sigma(t - x\sqrt{LC}).$$

$$7.9. u(x, t) = e^{-\mu\sqrt{LC}x} \sin(t - \sqrt{LC}) \sigma(t - x\sqrt{LC}).$$

Рисунки к ответам

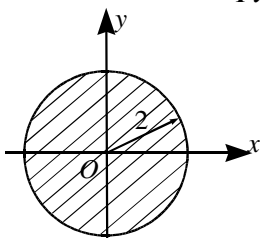


Рис.1.

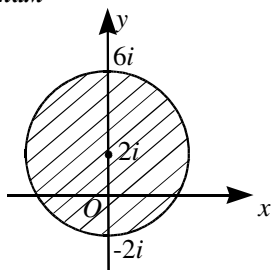


Рис.2.

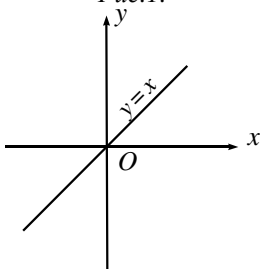


Рис.3.

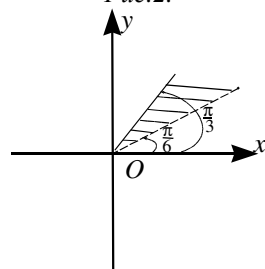


Рис.4.

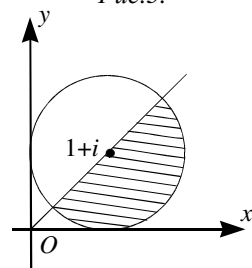


Рис.5.

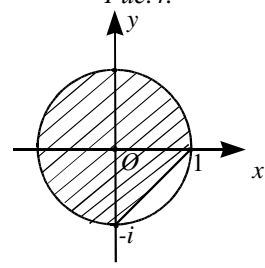


Рис.6.

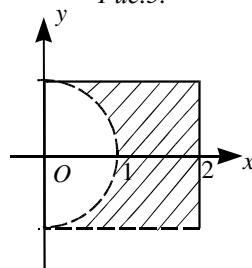


Рис.7.

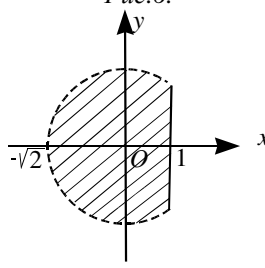
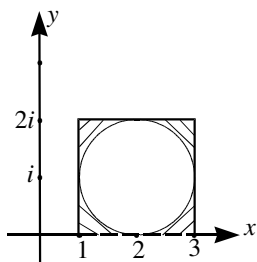
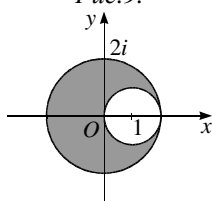


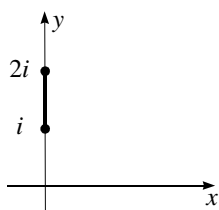
Рис.8.



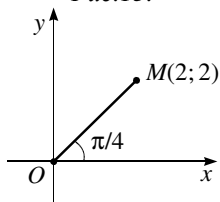
Puc.9.



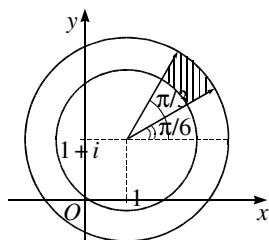
Puc.11.



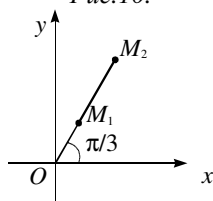
Puc.13.



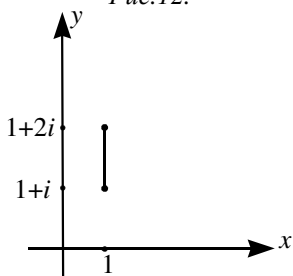
Puc.15.



Puc.10.



Puc.12.



Puc.14.

Литература

1. **Ефимов А.В.** Математический анализ (специальные разделы). – М.: Высшая школа, 1980. – Т. 1.
2. **Бугров Я.С., Никольский С.М.** Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
3. **Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.** Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977.
4. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
5. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. – М.: Наука, 1968.
6. **Привалов И.Н.** Введение в теорию функций комплексного переменного. – Физматгиз, 1960.
7. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории. – М.: Наука, 1967. – 491 с.
8. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.** Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
9. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х ч. Ч. 3. Векторный анализ; Ряды и их применение; Теория функций комплексной переменной; Операционное исчисление; Интегральные уравнения; Уравнения в частных производных; Методы оптимизации / **Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова.** – М. : Физматлит, 2009.
10. Сборник задач по теории аналитических функций / **Под ред. М.А. Евграфова.** – М.: Наука, 1972.
11. **Араманович И.Г., Луиц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.
12. **Бугров Я.С., Кальней С.Г., Фридлендер Б.И.** Методические указания к решению задач по курсу «Спецразделы математического анализа». Решение уравнений математической физики. – М.: МИЭТ, 1984.
13. **Терпигорева В.М., Терещенко А.М.** Методические указания к решению задач по высшей математике по разделу «Операционное исчисление». – М.: МИЭТ, 1981.

Оглавление

Предисловие	3
1. Комплексные числа	5
1.1. Комплексные числа и действия над ними.....	5
1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости	7
1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа	8
1.4. Показательная форма комплексного числа.....	11
1.5. Извлечение корня n -й степени	13
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	14
2. Множества точек, кривые и области на комплексной плоскости	16
2.1. Множества точек на комплексной плоскости. Последовательности комплексных чисел	16
2.2. Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость.	18
2.3. Комплекснозначные функции действительной переменной. Кривые на комплексной плоскости	19
2.4. Области на комплексной плоскости. Односвязные и многосвязные области	22
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	23
3. Функции комплексной переменной	25
3.1. Определение функции комплексной переменной. Предел, непрерывность.....	25
3.2. Элементарные функции комплексной переменной и их свойства.....	27
3.3. Производная функции $w = f(z)$ и дифференциал	30
3.4. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции $w = f(z)$. Условия Коши-Римана	31
3.5. Понятие аналитической функции. Свойства действительной и мнимой частей аналитической функции	34
3.6. Геометрический смысл аргумента и модуля производной $f'(z_0)$	38
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	41

4. Интегрирование функций комплексной переменной	43
4.1. Определение интеграла от функции комплексной переменной	43
4.2. Вычисление интегралов	45
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	47
4.3. Интегральные теоремы Коши	47
4.4. Интеграл и первообразная	50
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	53
4.5. Интегральная формула Коши	54
4.6. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций	58
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	62
5. Функциональные ряды	64
5.1. Определение и основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов	64
5.2. Степенные ряды	69
5.3. Разложение функций в ряд Тейлора	71
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	78
5.4. Разложение функций в ряды Лорана	78
5.5. Ряд Лорана функции в окрестности точки $z = \infty$	83
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	84
6. Теория вычетов и её приложения	86
6.1. Изолированные особые точки аналитической функции. Вид ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки	86
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	94
6.2. Вычет функции в изолированной особой точке	94
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	97
6.3. Основные теоремы о вычетах	97
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	100
6.4. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов	100
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	109
7. Элементы операционного исчисления	110
7.1. Определения изображения, оригинала. Преобразование Лапласа	110
7.2. Свойства преобразования Лапласа	113
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	123
7.3. Нахождение оригиналов	123
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	127
7.4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом	128

<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	129
7.5. Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений математической физики	130
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	133
Индивидуальные задания	137
Ответы к задачам для самостоятельного решения	153
Литература	164

Учебное издание

Лавров Игорь Викторович

Терещенко Анатолий Михайлович

Теория функций комплексной переменной

Текст печатается в авторской редакции. Технический редактор *Л.Г. Лосякова*.
Вёрстка авторов.

Подписано в печать с оригинал-макета 11.09.2015. Формат 60×84 1/16. Печать
офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 9,74.
Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 200 экз. Заказ 42.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.

124498, г. Москва, г. Зеленоград, площадь Шокина, дом 1, МИЭТ.