Automatique
3. Rappels : systèmes classiques

Sylvie Icart
Sylvie.Icart@univ-cotedazur.fr

ELEC 3 & ROB 3
Polytech'Nice-Sophia

octobre 2022

1. Système du premier ordre

1.1 Définition :

Fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

K gain statique, τ constante de temps

dimension K : [dimension sortie]/[dimension entrée]

dimension τ : temps (seconde)

Exemple :

- circuit RC série :

  entrée : tension aux bornes du circuit, sortie : charge de la capacité

  $$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{C}q(t)$$

  si $q_0 = 0$, alors $U(p) = RpQ(p) + \dfrac{1}{C}Q(p) = (Rp + \frac{1}{C})Q(p)$

  fonction de transfert $G(p) = \dfrac{C}{1 + RCp}$

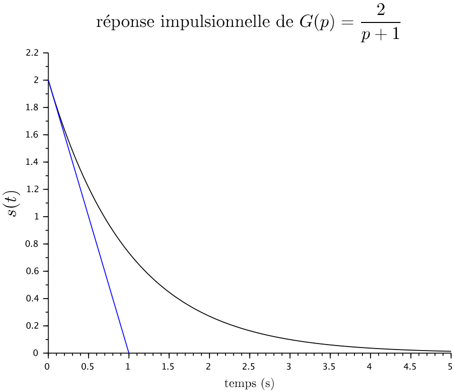
  gain statique $K = C$, constante de temps $\tau = RC$ et si ...CI q_0 ?

1.2 Réponse impulsionnelle

- CI nulles
- $e(t) = \delta(t), \;\; E(p) = 1$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{K}{1+\tau p})$$

$$s(t) = g(t) = \frac{K}{\tau}\; e^{-\frac{t}{\tau}} u_h(t)$$

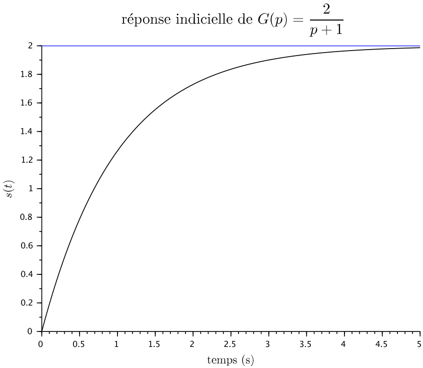


TVI : $s(0^+) = \frac{K}{\tau}$
TVF : $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$,
pente à l'origine :
$\frac{ds}{dt}(t)|_{t=0^+} = -\frac{K}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}|_{t=0^+} = -\frac{K}{\tau^2}$
Plus τ est faible, plus la réponse est rapide.

1.3 Réponse indicielle

- CI nulles
- $e(t) = u_h(t)$, $E(p) = \frac{1}{p}$

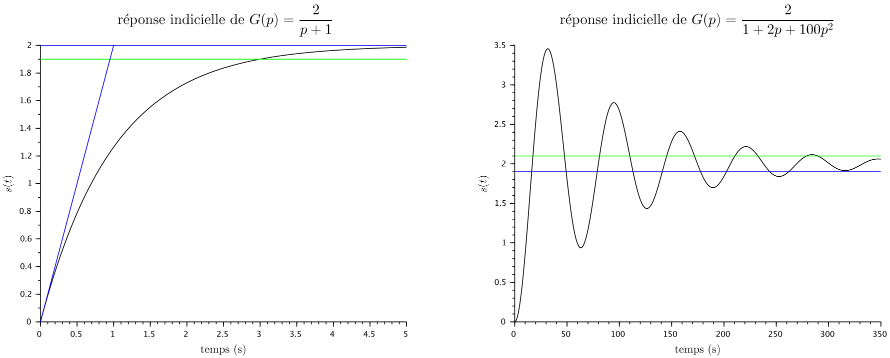
$$
\begin{aligned}
s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(G(p)\tfrac{1}{p}) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(\tfrac{K}{p(1+\tau p)}) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}\right))
\end{aligned}
$$



$$s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u_h(t)$$

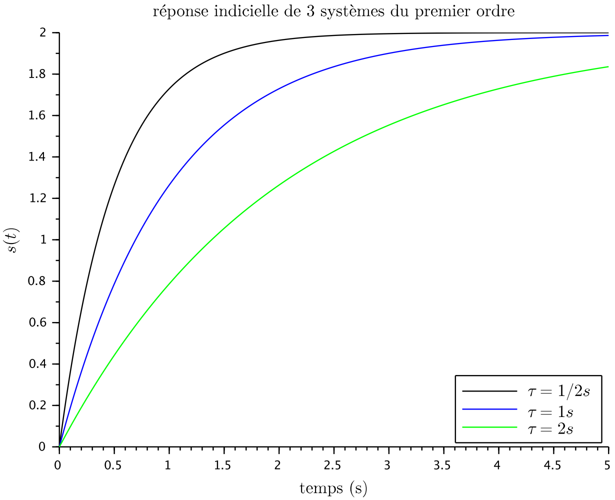
la sortie est une fonction strictement croissante : $\dfrac{ds}{dt}(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} > 0, \forall t$

- Régime permanent : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} G(p) = K$
- Pente à l'origine :
$$\frac{ds}{dt}(t)|_{t=0^+} = \frac{d}{dt}K(1 - \;\; e^{-\frac{t}{\tau}})|_{t=0} = \frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$$
- Temps de réponse à 5% : $\dfrac{|s(t) - K|}{K} < 5\%$ (cas général)



la sortie ne s'éloigne pas de $\pm 5\%$ de la valeur finale

$s(t)$ monotone : $s(t_{5\%}) = 0.95K = -\tau \ln(0.05) \sim 3\tau$



cf les pôles correspondants : $-\dfrac{1}{\tau}$ ici -2,-1,-1/2 (plus τ est petit, plus le module du pôle est grand et plus la réponse est rapide)

1.4 Réponse harmonique

- si $e(t) = \sin\omega t\, u_h(t)$, si les CI sont nulles,

$$\begin{aligned} S(p) &= G(p)\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ &= \frac{K}{(1+\tau p)}\;\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\alpha}{p+\frac{1}{\tau}} + \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} \end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{K\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$,

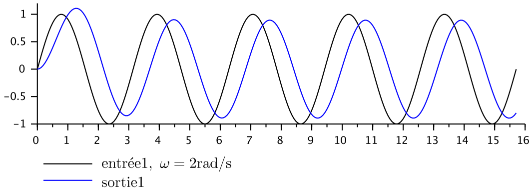
$A = |G(j\omega)|\sin(Arg(G(j\omega)), B = \omega|G(j\omega)|\cos(Arg(G(j\omega))$

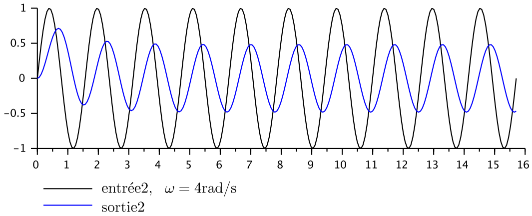
or $G(j\omega) = \dfrac{K}{1+j\omega\tau}$

d'où $|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ et $Arg(G(j\omega)) = -\arctan\omega\tau$

$$s(t) = \underbrace{\frac{K\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin\left(\omega t - \arctan\omega\tau\right), t \geq 0}_{\text{régime permanent}}$$

$$G(p) = \frac{2}{p+1}$$

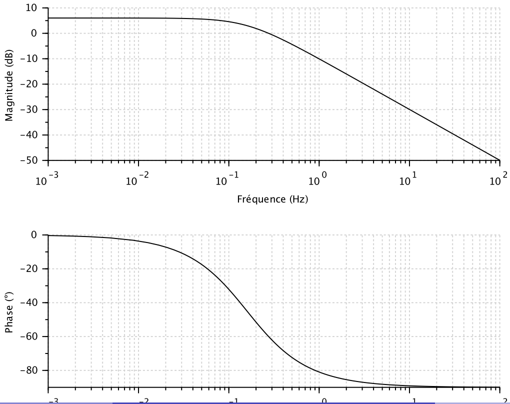




1.5 Réponse fréquentielle

Etude de $G(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\omega\tau}$ en fonction de ω (ou $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

- $|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$
- $Arg(G(j\omega)) = -\arctan \omega\tau$



Tracé de Bode asymptotique du module

- BF : $|G(j\omega)| \underset{0}{\sim} K$, soit : $|G(j\omega)|_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20\log K = K_{\text{dB}}$
  asymptote horizontale en BF
- HF : $|G(j\omega)| \underset{\infty}{\sim} \dfrac{K}{\omega\tau}$, soit
  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} \underset{\infty}{\sim} 20\log(\dfrac{K}{\omega\tau}) = 20\log K - 20\log\tau - 20\log\omega$
  asymptote oblique en HF : droite de pente -20 dB/décade, passant par K_{dB} pour $\omega = \frac{1}{\tau}$.
  Le point d'intersection des asymptotes a pour abscisse $\omega = \frac{1}{\tau}$.

ω_1 et ω_2 sont reliées par une décade si $\omega_2 = 10\omega_1$

$$\begin{array}{rcl} |G(j\omega_1)|_{\text{dB}} & \sim & 20\log K - 20\log\tau - 20\log\omega_1 \\ |G(j\omega_2)|_{\text{dB}} & \sim & 20\log K - 20\log\tau - 20\log\omega_2 \\ & \sim & 20\log K - 20\log\tau - 20\log\omega_1 - 20 \end{array}$$

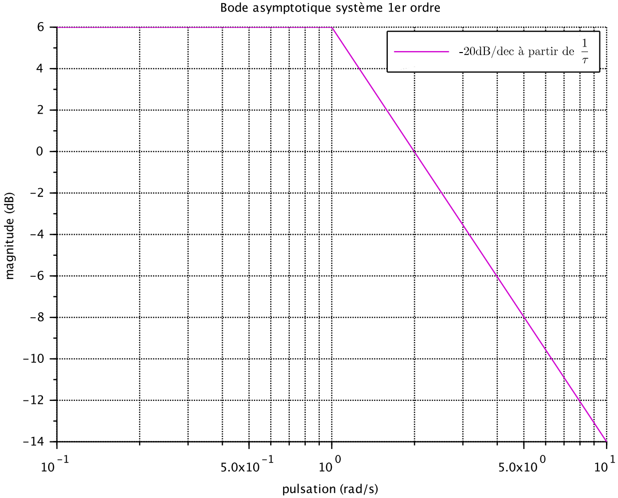
pente -20 dB/dec : quand on multiplie la fréquence du signal d'entrée par 10, alors, en régime permanent, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10

ω_1 et ω_3 sont reliées par une octave si $\omega_3 = 2\omega_1$

$$|G(j\omega_3)|_{\text{dB}} \sim 20\log K - 20\log\tau - 20\log\omega_1 - 20\log 2$$

pente -6 dB/oct : quand on multiplie la fréquence du signal d'entrée par 2, alors, en régime permanent, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 2

Tracé de Bode asymptotique du module



exemple : $K = 2, \tau = 1s$

- Pulsation de coupure d'un système du premier ordre :

$|G(j\omega_c)| = \dfrac{|G(0)|}{\sqrt{2}}$ ou $|G(j\omega_c)|_{\text{dB}} = |G(0)|_{\text{dB}} - 3$, soit ici

$|G(j\omega_c)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega_c^2\tau^2}} = \dfrac{K}{\sqrt{2}}$

Pulsation de coupure d'un système du premier ordre :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Le point d'intersection des asymptotes (cassure) a pour abscisse $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

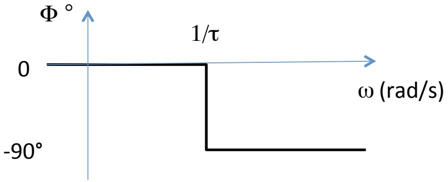
Tracé de Bode asymptotiques de l'argument :

$G(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\omega\tau}$, d'où

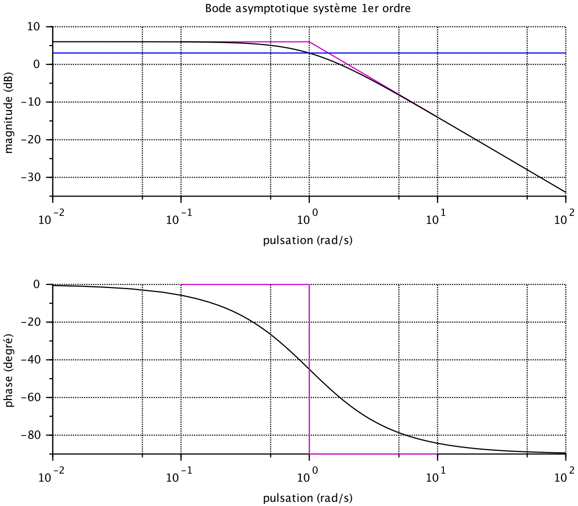
$$Arg(G(j\omega)) = -\arctan \omega\tau$$

Rmq : $Arg(G(j\omega_c)) = -45°$.
Approximation "grossière" (en marche d'escalier) :

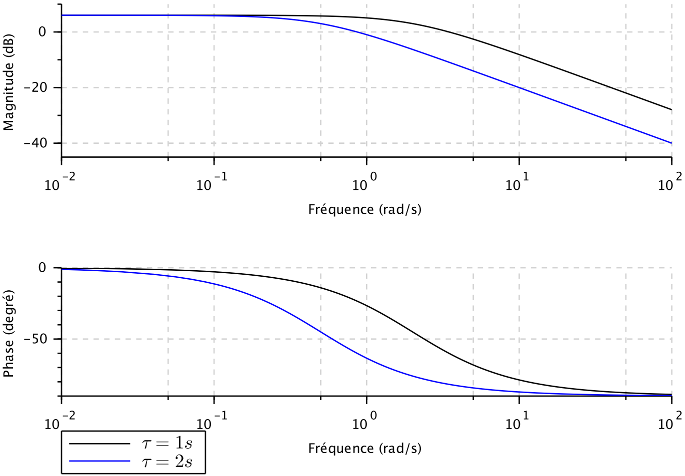
- BF : $Arg(G(j\omega)) \underset{0}{\sim} Arg(K)$,
  soit
  $$Arg(G(j\omega)) \underset{0}{\sim} 0°$$
- HF :
  $Arg(G(j\omega)) \underset{\infty}{\sim} Arg \dfrac{K}{j\omega\tau}$, soit
  $$Arg(G(j\omega)) \underset{\infty}{\sim} -90°$$



Tracés de Bode asymptotiques et "réels"



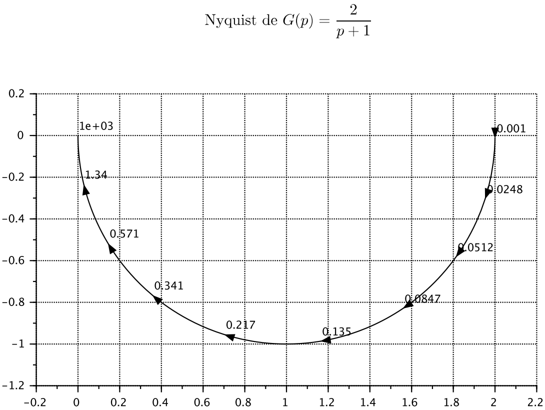
exemple : $K = 2, \tau = 1s$



Plus τ est faible, plus la bande passante est grande.

Diagramme de Nyquist

demi-cercle de centre $\Omega(\frac{K}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{K}{2}$:

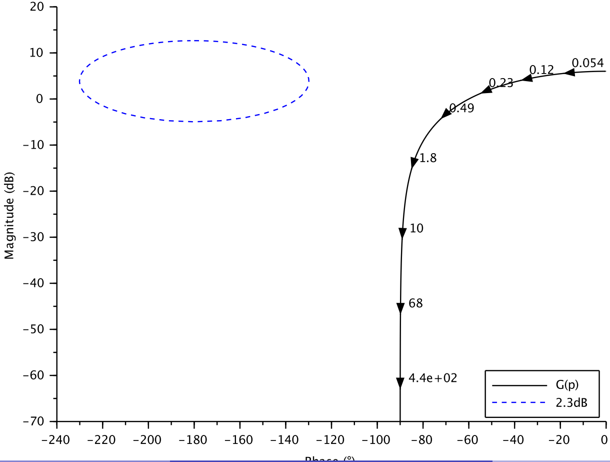


en effet : $\Re e = \ldots ; \Im m = \ldots\ldots$

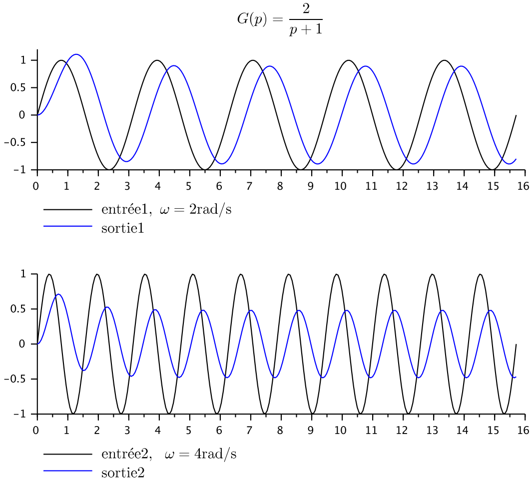
Diagramme de Black

gain statique K (module pour $f = 0\text{Hz}$)
asymptote verticale (argument en $-\frac{\pi}{2}$ rad ou -90°)

Black de $G(p) = \dfrac{2}{p+1}$



réponse à des sinusoïdes :



sortie 2 plus atténuée que sortie 1 : $\omega_2 > \omega_1$ ($T_2 < T_1$)

2. Sytème du second ordre

2.1 Définition

Fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\zeta\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

K gain statique, ω_0 pulsation propre, ζ amortissement

dimension K : [dimension sortie]/[dimension entrée]

dimension ω_0 : inverse d'un temps (rad/s)

dimension ζ : adimensionnel

Exemple : circuit RLC série

$u(t) = L\frac{d^2q}{dt^2}(t) + R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{C}q(t)$

$K = C, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \zeta = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$

Pôles de la fonction de transfert :

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

discriminant réduit :

$$\Delta' = (\zeta\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\zeta^2 - 1)$$

- si $\zeta > 1$, pôles réels négatifs, système amorti ou apériodique.
- si $\zeta < 0$, système instable (pôles à $\Re > 0$).
- si $\zeta = 1$, deux pôles réels négatifs confondus, système apériodique critique.
- si $0 < \zeta < 1$, pôles complexes conjugués à $\Re < 0$, système non amorti.

2.2 Réponse indicielle

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)\frac{1}{p}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}\right)$$

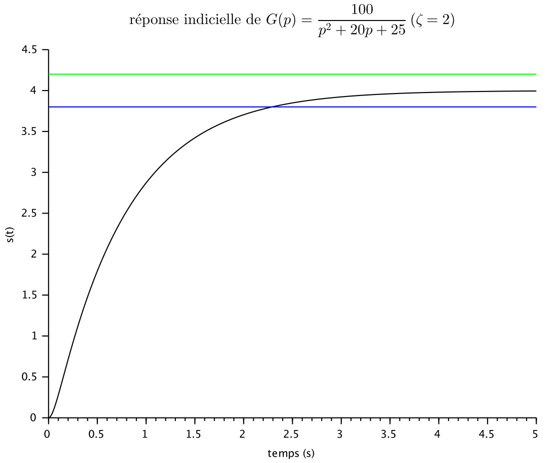
- *système amorti* $\zeta > 1$:
  2 pôle réels négatifs ($G(p)$) et un pôle nul (échelon)

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_0 p} + \frac{\gamma}{1 + T_1 p}$$

$$s(t) = K\left(1 + \frac{1}{T_0 - T_1}(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_0 e^{-\frac{t}{T_0}})\right) u_h(t)$$

avec $T_0 = \dfrac{1}{\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$ et $T_1 = \dfrac{1}{\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$, $(T_0 < T_1)$

- Tracé :
  - Pente à l'origine : $\frac{ds}{dt}(t)|_{t=0^+} = \frac{K}{T_0 - T_1}(-e^{-\frac{t}{T_1}} + e^{-\frac{t}{T_0}})|_{t=0^+} = 0$
  - Régime permanent : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} G(p) = K$
  - fonction monotone : $\frac{ds}{dt}(t) > 0$



- système non amorti $0 < \zeta < 1$:
  pôles complexes conjugués $p_{0,1} = -\omega_0(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$
  $\Re(p_{0,1}) = -\zeta\omega_0$, $\Im(p_{0,1}) = \pm\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, $|p_{0,1}| = \omega_0$

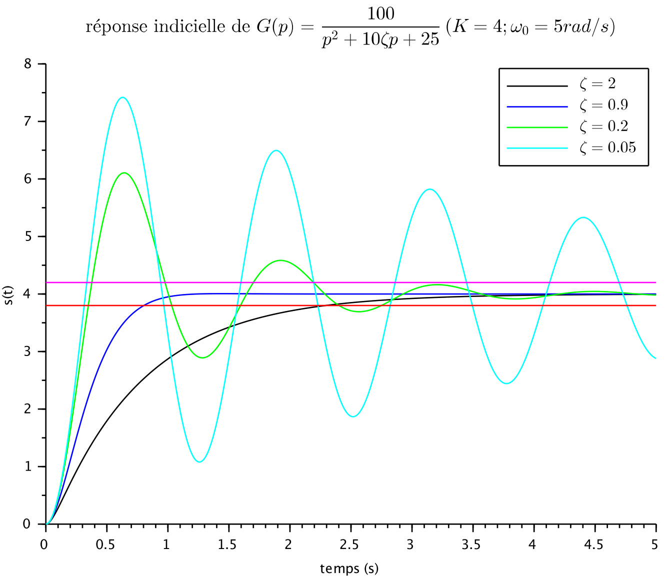
$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{Ap + B}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\zeta^2)}$$

$$s(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \mathrm{atan}\,\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\right) u_h(t)$$

  - régime permanent : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} G(p) = K$
  - pseudo-période des oscillations : $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$
  - premier dépassement relatif

$$D = \frac{s(\frac{T_p}{2})}{K} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

  ne dépend que de l'amortissement !



Plus l'amortissement est grand, plus la réponse est amortie.

temps de réponse à 5% ... calcul complexe
valeur approchée :

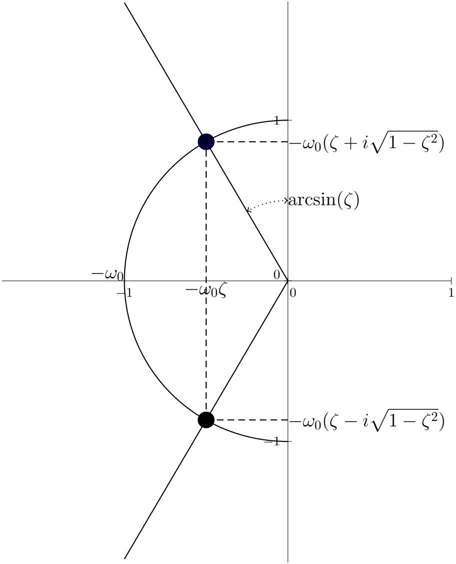
$$t_{5\%} \sim \frac{3}{\zeta\omega_0}$$

plus l'amortissement est petit, plus le temps de réponse est long.

Le dépassement ne dépend que de l'amortissement :

- se donner un dépassement (relatif) revient à se donner ζ (argument du pôle)
- si on impose de plus un temps de réponse alors on obtient ω_0 (module du pôle)

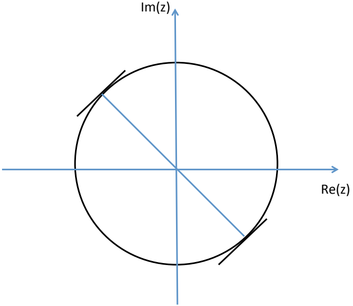
Pôles d'un système du second ordre



2.3 Réponse fréquentielle

$G(j\omega) = \dfrac{K}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}$ en fonction de ω (ou $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

- $|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$
- $Arg(G(j\omega)) = -\arctan\dfrac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ (attention si $\omega > \omega_0, \pi - \arctan$)



Tracé de Bode asymptotique du module

- BF : $|G(j\omega)| \underset{0}{\sim} K$, soit : $|G(j\omega)|_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20 \log K = K_{\text{dB}}$
  asymptote horizontale en BF
- HF : $|G(j\omega)| \underset{\infty}{\sim} \dfrac{K\omega_0^2}{\omega^2}$, soit
  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} \underset{\infty}{\sim} 20 \log(\dfrac{K\omega_0^2}{\omega^2}) = 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$
  asymptote oblique en HF : droite de pente -40 dB/décade,
  Le point d'intersection des asymptotes a pour abscisse $\omega = \omega_0$.

  en HF :
  - quand on multiplie la fréquence du signal d'entrée par 10, en régime permanent l'amplitude du signal de sortie est divisée par 100
  - quand on multiplie la fréquence du signal d'entrée par 2, en régime permanent, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 4 (-12dB/oct)

Tracé de Bode asymptotique de l'argument :

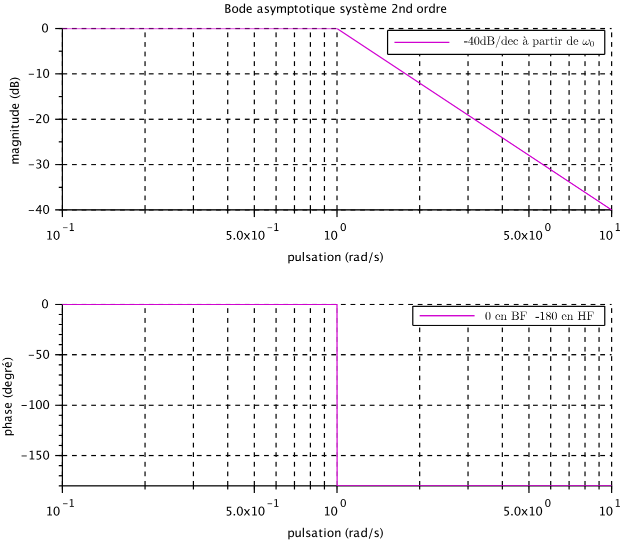
$G(j\omega) = \dfrac{K}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}$, d'où

$$Arg(G(j\omega)) = -\arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Rmq : $Arg(G(j\omega_0)) = -90^\circ$.
Approximation "grossière" (en marche d'escalier) :

- BF : $Arg(G(j\omega)) \underset{0}{\sim} Arg(K)$, soit $Arg(G(j\omega)) \underset{0}{\sim} 0^\circ$
- HF : $Arg(G(j\omega)) \underset{\infty}{\sim} Arg\dfrac{-K\omega_0^2}{\omega^2}$, soit $Arg(G(j\omega)) \underset{\infty}{\sim} -180^\circ$

Tracés asymptotiques

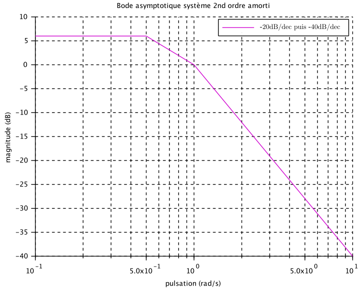


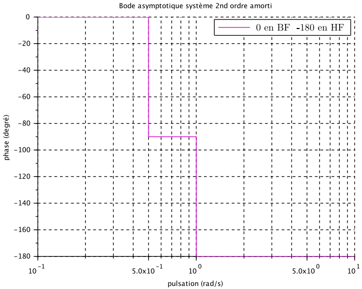
Tracés asymptotiques second ordre amorti :

$$G(p) = \frac{K}{(1+T_0p)(1+T_1p)} = G_0(p)G_1(p)$$

- $|G(j\omega)|_{dB} = |G_0(j\omega)|_{dB} + |G_1(j\omega)|_{dB}$
- $Arg(G(j\omega)) = Arg(G_0(j\omega)) + Arg(G_1(j\omega))$

Tracés asymptotiques second ordre amorti





Étude du module ("courbe réelle")

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad \text{(en part. } |G(j\omega_0)| = \frac{K}{2\zeta} \text{)}$$

Fonction monotone ? ...

- $\dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0$ ssi $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (et $\zeta > 0$) : Système résonant
  - module maximum pour

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

  - valeur maximum du gain (gain à la résonance) :

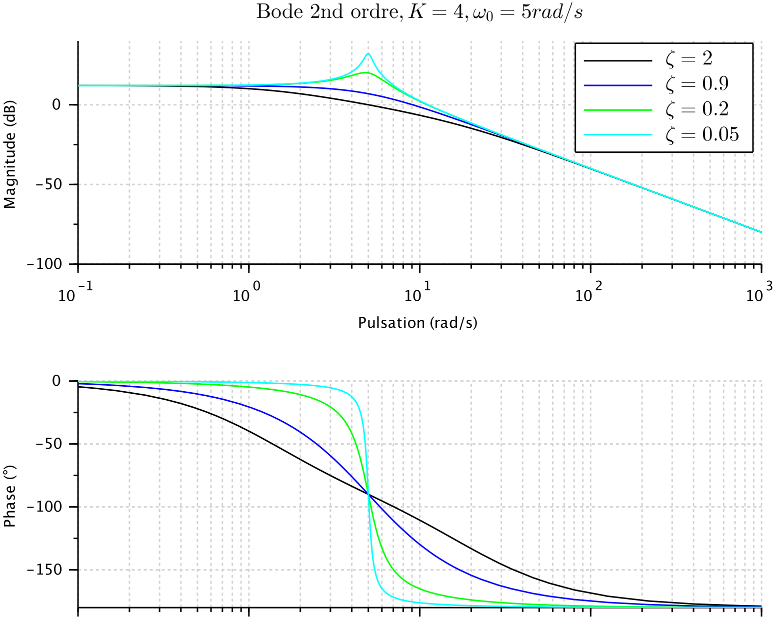
$$M = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{plus } \zeta \text{ petit, plus } M \text{ grand}$$

  - coefficient de surtension :

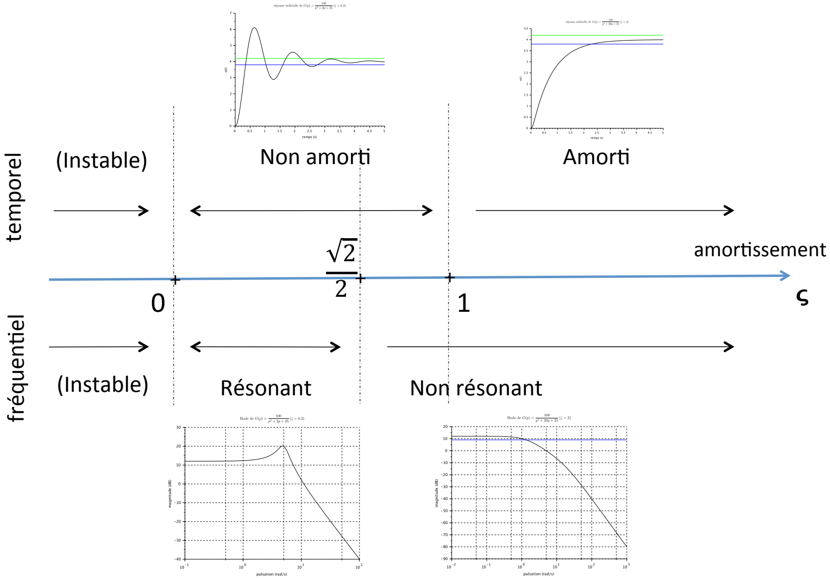
$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Système non résonant ssi $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$: $|G(j\omega)|$ est une fonction décroissante de ω

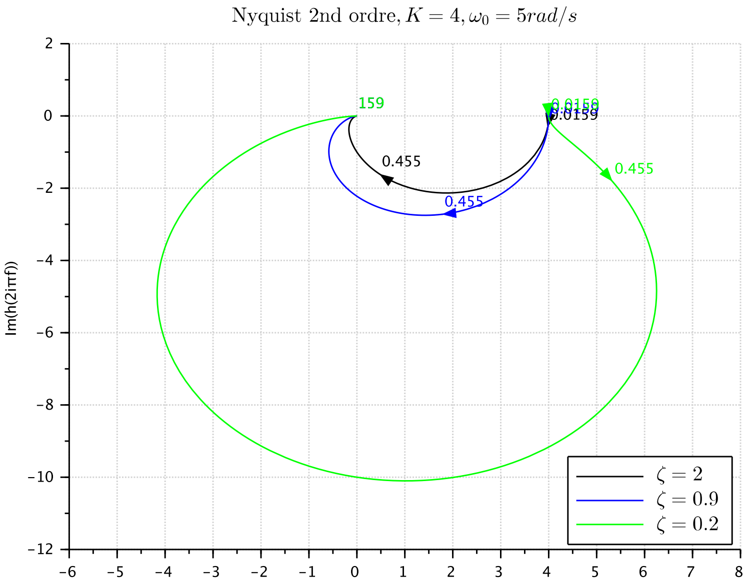
Exemple : $K = 4, \omega_0 = 5 rad/s$



Influence de l'amortissement



- Plan de Nyquist :



- Plan de Black :