

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

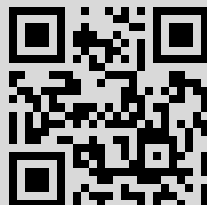
А. В. Китаев, Об автомодельных решениях модифицированного нелинейного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1985, том 64, номер 3, 347–369

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.165.58.242

1 февраля 2021 г., 21:23:03



ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ МОДИФИЦИРОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Китаев А. В.

Рассмотрено 2×2 -матричное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с большим параметром τ , иррегулярной особой точкой четвертого порядка на ∞ (2). Вычислен старший по τ порядок данных монодромии этого уравнения через его коэффициенты. Изомонодромные деформации коэффициентов уравнения (2) являются автомодельными решениями модифицированного нелинейного уравнения Шредингера (1), поэтому обращение полученных формул для данных монодромии дает главный член временной асимптотики автомодельного решения. Подробно рассмотрено приложение этих результатов к уравнению Пенлеве типа IV.

ВВЕДЕНИЕ

Автомодельные решения всегда привлекали к себе значительное внимание специалистов по теории вполне интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений (уравнений Захарова — Шабата). Это было вызвано прежде всего наличием связи между этими решениями и функциями Пенлеве (см., например, обзор [1] и работы [2–4]). Упомянутое обстоятельство позволило, в частности, получить ряд новых результатов в классической теории уравнений Пенлеве [1]. В настоящее время исследование автомодельных решений нелинейных уравнений, погружающихся в схему метода обратной задачи, получило дальнейший импульс. Благодаря работам [5–7] класс автомодельных решений удалось описать в терминах принятого ныне в теории уравнений Захарова — Шабата формализма матричной задачи Римана как класс решений, характеризуемых постоянством по «спектральному параметру λ » всех матриц сопряжения. Последнее обстоятельство влечет за собой тот факт, что Ψ -функция автомодельного решения наряду с исходной $U - V$ -системой, удовлетворяет еще и третьему уравнению — «уравнению по λ »:

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad \Psi_\lambda = A\Psi.$$

С точки зрения «уравнения по λ » упомянутые выше постоянные матрицы сопряжения суть матрицы Стокса ¹⁾ (данные монодромии). Их априорная независимость от дополнительных параметров x и t означает, что исходное нелинейное уравнение описывает изомонодромные деформации коэффициентов «уравнения по λ ».

¹⁾ Определение матриц Стокса для системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами будет дано в разделе 1.

Факт наличия «третьего уравнения» открывает возможность применения к изучению автомодельных решений уравнений Захарова — Шабата (а, следовательно, и функций Пенлеве!) аппарата теории систем линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

В частности, может быть предложена (см. [8, 9]) схема исследования автомодельных решений, состоящая из двух этапов:

1) вычисление (точное или асимптотическое) матриц Стокса уравнения $\Psi_\lambda = A\Psi$ как функций элементов матрицы A ;

2) приравнивание полученных функций заданным постоянным матрицам и разрешение образовавшихся при этом алгебраических уравнений на элементы матрицы A . В результате возникает (точное или асимптотическое) выражение для автомодельного решения изучаемого нелинейного уравнения в терминах заданных матриц Стокса (данных монодромии).

Отметим, что такая параметризация автомодельных решений позволяет (см. [8, 9]) успешно применять их также и к исследованию асимптотик решений задач Коши для изучаемого нелинейного уравнения.

Настоящая работа посвящена проведению описанной выше программы для автомодельных решений модифицированного нелинейного уравнения Шредингера (МНУШ):

$$(1a) \quad iQ_t = -Q_{xx} \mp iQ^2 \bar{Q}_x - 1/2 Q|Q|^4,$$

$$(1b) \quad iq_t = -q_{xx} \pm i(|q|^2 q)_x,$$

о связи этих уравнений см. в разделе 1. Уравнение (1b) было погружено в схему метода обратной задачи Ньюеллом и Каупом [10]. Отметим, что уравнения (1) имеют интересные физические применения [10, 11].

Изучаемое уравнение по λ , как показано в разделе 1, имеет вид

$$(2) \quad \frac{d\Psi}{d\lambda} = \tau \begin{pmatrix} -i\lambda^3 + i\xi^2\lambda \mp \frac{i}{2}|Q|^2\lambda & \lambda^2 Q - \xi^2 Q + \frac{i}{2}p \\ \pm \lambda^2 \bar{Q} \mp \xi^2 \bar{Q} \mp \frac{i}{2}\bar{p} & i\lambda^3 - i\xi^2\lambda \pm \frac{i}{2}|Q|^2\lambda \end{pmatrix} \Psi,$$

где $\tau = 8t$, $\xi^2 = -x/4t$.

Отметим еще раз для большей конкретности связь уравнений (1) и (2). Если данные монодромии уравнения (2) не зависят от x и t , то (см. раздел 1) параметры Q и p становятся функциями $Q(x, t)$ и $p(x, t)$ такими, что $p = Q_x$, а $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1a). При этом $Q(x, t)$ имеет специальную автомодельную структуру (см. формулу (25)).

При проводимом нами анализе автомодельных решений уравнения (1) наиболее трудоемким местом является вычисление матриц Стокса для уравнения (2). Мы вычисляем явно старший член асимптотики этих матриц при условиях $\tau \rightarrow \infty$, $\xi^2 = -2x/\tau = \text{const} > 0$. Насколько это было в силах автора проверить, в имеющихся обзорах литературы по асимптотикам систем линейных дифференциальных уравнений соответствующие результаты отсутствуют, несмотря на то что уравнение (2) есть случай общего положения для 2×2 -системы первого порядка с одной иррегулярной осо-

бой точкой четвертого порядка и фиксированной группой редукций: $\Psi(\lambda) \rightarrow \sigma_3 \Psi(-\lambda)$, $\Psi(\lambda) \rightarrow \sigma_1 \overline{\Psi(\bar{\lambda})}$ или $\Psi(\lambda) \rightarrow [\Psi^*(\bar{\lambda})]^{-1}$. По-видимому, отмеченное обстоятельство вызвано спецификой интересующих нас асимптотических условий на параметры уравнения (2):

$$Q, p \sim O(1/\sqrt{\tau}), \quad \xi^2 = -2x/\tau = \text{const.}$$

Мотивировка этих условий будет ясна из результатов раздела 2 настоящей работы. Здесь же мы ограничимся лишь замечанием, что вследствие указанных выше асимптотических условий на параметры системы (2) для матриц Стокса получаются весьма красивые и нетривиальные выражения (62), (72). Вероятно, что эти результаты окажутся полезными и сами по себе независимо от рассматриваемого нами приложения к автомоделным решениям уравнения (1).

1. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему уравнений

$$(3) \quad iq_t = -q_{xx} + i(rq^2)_x, \quad ir_t = r_{xx} + i(qr^2)_x.$$

На множестве функций $r = \pm \bar{q}$ система (3) совпадает с МНУШ (16). Построение решений системы (3) эквивалентно построению двух 2×2 -матричнозначных функций u и v , удовлетворяющих уравнению Захарова — Шабата

$$(4) \quad u_t - v_x = [v, u]$$

и, кроме того, имеющих указанную Каупом и Ньюеллом структуру:

$$(5) \quad u = \lambda(\lambda a + b), \quad v = (2\lambda^2 + rq)u + \lambda c,$$

$$a = -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & iq_x \\ -ir_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вместо двух матричнозначных функций u и v достаточно построить одну функцию ψ , которая обладает следующими свойствами:

I. ψ — 2×2 -матричнозначная, кусочно-аналитическая функция на комплексной плоскости λ , имеющая на ∞ существенную особенность вида

$$(6) \quad \psi(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{\lambda} + \frac{\psi_2}{\lambda^2} + \dots \right) \exp \{ \lambda^2 x a + 2\lambda^4 t a + T_\infty^0 \ln \lambda \}.$$

II. На системе контуров $\{\Gamma_j\}$ — линиях разрыва функции $\psi(\lambda)$ — выполнены условия сопряжения

$$(7) \quad \psi^+(\lambda) = \psi^-(\lambda) G_j(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma_j$$

с не зависящими от x и t невырожденными матрицами $G_j(\lambda)$.

III. Существует конечный набор точек $\{a_k\}_{k=0}^n$ (регулярных особенностей), в которых для функции ψ верно представление

$$(8) \quad \psi(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow a_k}{\sim} \hat{\psi}_k^0 (\lambda - a_k)^{T_k^0} C_k,$$

где T_k^0 и C_k — постоянные матрицы, причем T_k^0 диагональна.

IV. Выполнены следующие редукционные ограничения:

$$(9a) \quad \sigma_3 \psi(-\lambda) = \psi(\lambda) M_1(\lambda);$$

$$(9b) \quad \sigma_1 \overline{\psi(\bar{\lambda})} = \psi(\lambda) M_2(\lambda), \text{ если } r = \bar{q};$$

$$(9b) \quad [\psi^*(\bar{\lambda})]^{-1} = \psi(\lambda) M_3(\lambda), \text{ если } r = -\bar{q}.$$

Здесь $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, матрицы M_1, M_2, M_3 зависят только от λ . Черта означает комплексное сопряжение, $*$ — транспонирование матрицы и комплексное сопряжение матричных элементов.

V. Выполнено условие нормировки

$$(10) \quad \psi_x \psi^{-1}(x, t, 0) = \psi_t \psi^{-1}(x, t, 0) = 0.$$

Очевидно, что искомая ψ -функция фактически является решением некоторой специальной матричной задачи Римана. Если такая функция ψ построена, то из свойств I—V следует, что логарифмические производные $\psi_x \psi^{-1} = u$ и $\psi_t \psi^{-1} = v$ суть полиномы по λ вида (5) и уравнение (4) выполнено автоматически, т. к. является условием совместности системы

$$(11) \quad \psi_x = u\psi, \quad \psi_t = v\psi.$$

Каждое решение уравнений (3) может быть охарактеризовано своим набором данных $\{a_j, T_j^0, C_j, G_j\}$. Хотя все дальнейшие построения можно провести и для функции ψ , нам удобнее рассмотреть функцию Ψ , которая отличается от ψ лишь тем, что асимптотика (6) заменена на

$$(12) \quad \Psi(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \left(I + \frac{\Psi_1}{\lambda} + \frac{\Psi_2}{\lambda^2} + \dots \right) \exp \{ \lambda^2 x a + 2\lambda^4 t a + T_\infty^0 \ln \lambda \}$$

и отсутствуют условия (10). Если функция Ψ известна, то $\psi(\lambda)$ может быть построена по формуле

$$(13) \quad \psi(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{a}{2} \int_0^{\lambda} R Q dx \right\} \Psi(\lambda),$$

$$(13a) \quad R = -2i\Psi_1^{21}, \quad Q = 2i\Psi_1^{12}.$$

Функция Ψ порождает естественно другую $U - V$ -пару:

$$(14) \quad \Psi_x \Psi^{-1} = U = \lambda(\lambda a + B) + \frac{1}{2} R Q a,$$

$$\Psi_t \Psi^{-1} = V = 2\lambda^2 \dot{U} + \lambda C + \left[-\frac{1}{4} (R Q)^2 + \frac{i}{2} (Q_x R - R_x Q) \right] a,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & iQ_x \\ -iR_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Причем функции $R = R(x, t)$ и $Q = Q(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$(15a) \quad Q_t = iQ_{xx} + iQ^2(iR_x + \frac{1}{2}R^2Q),$$

$$(15b) \quad R_t = -iR_{xx} - iR^2(-iQ_x + \frac{1}{2}Q^2R),$$

которая при $Q = \pm \bar{R}$ совпадает с МНУШ (1a).

Отметим, что решения системы (3) могут быть построены по функциям $R(x, t)$ и $Q(x, t)$ по формулам

$$(16) \quad r = \exp \left\{ -i \int^x RQ dx \right\} R, \quad q = \exp \left\{ i \int^x RQ dx \right\} Q.$$

Формулы (16) легко обратить, т. к. $rq = RQ$.

Как уже отмечалось во введении, нас будет интересовать тот класс решений уравнения (1), который характеризуется дополнительным условием постоянства всех матриц сопряжения G_j по спектральному параметру λ . Целью настоящего раздела является доказательство двух фактов: 1) соответствующая Ψ -функция удовлетворяет «третьему» уравнению — уравнению (19); 2) сами решения $R(x, t)$ и $Q(x, t)$, порождаемые этой Ψ -функцией, суть автомодельные. На множестве функций, автомодельно зависящих от x и t , системы (3), (15) сводятся к системам нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых эквивалентна уравнению Пенлеве типа IV (см. приложение 1). Отметим, что связь системы (15) при $R = \pm \bar{Q}$ с вещественными решениями уравнения Пенлеве типа IV была впервые указана в работе [3]. Однако в этой работе существенно используется факт наличия редукции $R = \pm \bar{Q}$, и, кроме того, неточно указана автомодельная подстановка (26) (нет γ), поэтому в рамках работы [3] эквивалентность (15) уравнения Пенлеве типа IV не может быть установлена. Подчеркнем, что редукция $R = \pm \bar{Q}$ — не единственная редукция системы (15), приводящая к физически интересным уравнениям (П1.8).

Итак, предположим, что в (7) $G_j = \text{const}$, тогда, используя аналитические свойства логарифмических производных, асимптотики (6), (8) и теорему Лиувилля, легко доказать, что Ψ -функция удовлетворяет уравнению

$$(17) \quad \lambda \Psi_\lambda = 2x \Psi_x + 4t \Psi_t + \left(T_\infty^0 + \sum_{k=0}^n \frac{a_k H_k}{\lambda - a_k} \right) \Psi,$$

$$(18) \quad H_k = \Psi_k^0 T_k^0 (\Psi_k^0)^{-1}.$$

Переходя в (17) к пределу $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$(19) \quad 2xU(0) + 4tV(0) + T_\infty^0 = \sum_{k=0}^n H_k.$$

Кроме того, из (17), (18), (14) следует, что

$$(20a) \quad \Psi_\lambda = A \Psi,$$

$$(20b) \quad A = \frac{2x}{\lambda} [U(\lambda) - U(0)] + \frac{4t}{\lambda} [V(\lambda) - V(0)] + \sum_{k=0}^n \frac{H_k}{\lambda - a_k}.$$

Теперь будем считать, что все регулярные особенности за исключением, может быть, точки $a_0 = 0$ отсутствуют. Тогда формула (17) упрощается:

$$(21) \quad \lambda \Psi_\lambda = 2x \Psi_x + 4t \Psi_t + T_\infty^0 \Psi.$$

Уравнение (21) легко решается методом характеристик:

$$(22) \quad \Psi = t^{-1/4} T_\infty^0 \Phi(\lambda t^{1/4}, xt^{-1/2}) (\lambda t^{1/4})^{T_\infty^0}.$$

Предполагая, что функция Φ имеет нужное поведение при $z \rightarrow \infty$:

$$(23) \quad \Phi(z, y) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \left(I + \frac{\Phi_1(y)}{z} + \frac{\Phi_2(y)}{z^2} + \dots \right) \exp \{ z^2 y a + 2 z^4 a \},$$

получим, сравнивая (12), (23), (22),

$$(24) \quad \Psi_k(x, t) = t^{-k/4 - T_\infty^0/4} \Phi_k(x t^{-1/2}) t^{T_\infty^0/4}.$$

Из (24) и (13а) следует автомодельный характер R и Q :

$$(25) \quad Q = t^{-\gamma - 1/4} \Theta(y), \quad R = t^{\gamma - 1/4} K(y), \quad y = x t^{-1/2}.$$

Отметим, что можно считать $T_\infty^0 = 2\gamma\sigma_3$. Если регулярной особенности в нуле нет, то это следует из (19); если регулярная особенность в нуле есть, это достигается умножением Ψ -функции на $\exp \{ -1/2 \ln(\lambda) \operatorname{Sp} T_\infty^0 \} I$.

Для функции ψ уравнение (21) принимает вид

$$(26) \quad \lambda \psi_\lambda = 2x \psi_x + 4t \psi_t + t_0^0 \psi.$$

Здесь t_0^0 играет ту же роль, что T_0^0 для Ψ -функции.

Опять без ограничения общности можно считать $t_0^0 = 2\beta\sigma_3$, тогда для решений системы (3) получим

$$(27) \quad q = 2i \frac{\psi_1^{12}}{\psi_0^{22}} = t^{-\beta - 1/4} \theta(y), \quad r = -2i \frac{\psi_1^{21}}{\psi_0^{11}} = t^{\beta - 1/4} \kappa(y).$$

Сделаем подстановку (27) в систему (3):

$$(28a) \quad (\beta - 1/4) \kappa - \frac{y}{2} \kappa_y = -i \kappa_{yy} + (\kappa^2 \theta)_y,$$

$$(28b) \quad (-\beta - 1/4) \theta - \frac{y}{2} \theta_y = i \theta_{yy} + (\theta^2 \kappa)_y.$$

Очевидно, что система (28) есть точное условие совместности системы уравнений (11), (26). В приложении 1 доказана эквивалентность системы (28) уравнению Пенлеве типа IV. Отметим, что мы будем рассматривать задачу Римана без регулярной особенности в 0, это соответствует $\beta = 0$, однако γ при этом, вообще говоря, нулю не равна.

2. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Psi_\lambda = A \Psi$

Мы рассмотрим уравнение (20) без регулярных особых точек. Формула (20б) в этом случае упрощается:

$$A = \frac{2x}{\lambda} [U(\lambda) - U(0)] + \frac{4t}{\lambda} [V(\lambda) - V(0)].$$

Учитывая (14), интересующее нас уравнение (20) можем переписать в виде

$$(29) \quad \frac{d\Psi}{d\lambda} = \tau \begin{pmatrix} -i\lambda^3 + i\xi^2\lambda - \frac{i}{2} RQ\lambda & \lambda^2 Q - \xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \\ \lambda^2 R - \xi^2 R - \frac{i}{2} R_x & i\lambda^3 - i\xi^2\lambda + \frac{i}{2} RQ\lambda \end{pmatrix} \Psi,$$

где введены обозначения: $\tau \equiv 8t$, $\xi^2 \equiv -x/4t = -2x/\tau = \text{const} > 0$. Кроме того, обозначим $\mu_{1,2}(\lambda, \tau)$ — собственные числа матрицы $\frac{1}{\tau}A$, матрица T приводит A к диагональному виду

$$T^{-1}AT = \tau\Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{R} \equiv -T^{-1}T_\lambda$ — невязка, $\Lambda_i \equiv \text{diag } \mathfrak{R}$.

Простые вычисления дают

$$\mu_{1,2} = \mp i \sqrt{\left(\lambda^3 - \xi^2 \lambda + \frac{1}{2} RQ\lambda \right)^2 - \left(\lambda^2 Q - \xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \right) \left(\lambda^2 R - \xi^2 R - \frac{i}{2} R_x \right)}, \quad (30)$$

$$T = \begin{pmatrix} i\lambda^3 - i\xi^2 \lambda + \frac{i}{2} RQ\lambda - \mu_1 & \lambda^2 Q - \xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \\ -\left(\lambda^2 R - \xi^2 R - \frac{i}{2} R_x \right) & \mu_2 - i\xi^2 \lambda + i\lambda^3 + \frac{i}{2} RQ\lambda \end{pmatrix} \frac{1}{2i\lambda(\lambda^2 - \xi^2)}. \quad (31)$$

Далее мы постоянно будем пользоваться априорным предположением об убывании решений при $\tau \rightarrow +\infty$: $|Q|$, $|Q_x| \sim O(\tau^{-1/2})$ при $\xi^2 = \text{const} > 0$, как в свободном уравнении Шредингера. Формула (31) будет использована в областях

$$(32) \quad \lambda \bar{V}\tau \geq O(\tau^\varepsilon), \quad (\lambda \pm \xi) \bar{V}\tau \geq O(\tau^\varepsilon) \quad (\tau \rightarrow +\infty, \varepsilon > 0).$$

В этих областях справедливы оценки

$$(33a) \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda \bar{V}\tau}\right) + O\left(\frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2) \bar{V}\tau}\right),$$

$$(33b) \quad \int_{\lambda}^{\infty} \mathfrak{R}(\eta) d\eta = O\left(\frac{1}{\lambda \bar{V}\tau}\right) + O\left(\frac{1}{(\lambda^2 - \xi^2) \bar{V}\tau}\right).$$

Главный член ВКБ-асимптотики уравнения (29) дает формула [12]

$$(34) \quad \Psi_{\text{ас}} = T \exp \left\{ \tau \int^{\lambda} \Lambda(\eta) d\eta + \int^{\lambda} \Lambda_1(\eta) d\eta \right\}.$$

Используя оценки (33), эту формулу можно упростить:

$$(35) \quad \Psi_{\text{ас}} = \exp \left\{ \tau \int^{\lambda} \Lambda(\eta) d\eta \right\}.$$

Как известно [13], не существует фундаментальной матрицы (ФМ) уравнения (29), для которой формула (34) представляет главный член асимптотического разложения на всей λ -плоскости. Поэтому для применения (34) необходимо указать граф Стокса, состоящий из линий Стокса и точек поворота, который разбивает λ -плоскость на канонические области. В каждой из этих канонических областей существует ФМ уравнения (29), имеющая асимптотику ($\tau \rightarrow +\infty$), даваемую формулой (34). Как будет видно из дальнейшего, канонические области захватывают,

вообще говоря, часть окрестности точек $\lambda = \infty$, и асимптотика (35) является двойной (по τ и λ).

Точки поворота определяются из уравнения $\mu_1 = \mu_2$:

$$(36) \quad (\lambda^2 - \xi^2)^3 + \xi^2 (\lambda^2 - \xi^2)^2 + (1/4 |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q})) \times \\ \times (\lambda^2 - \xi^2) + 1/4 (\xi^2 |Q|^4 \mp |Q_x|^2) = 0.$$

Здесь и далее мы предполагаем выполнение редукции $R = \pm \bar{Q}$. Уравнение (36) имеет шесть корней λ_i^\pm ($i=1, 2, 3$) — шесть точек поворота.

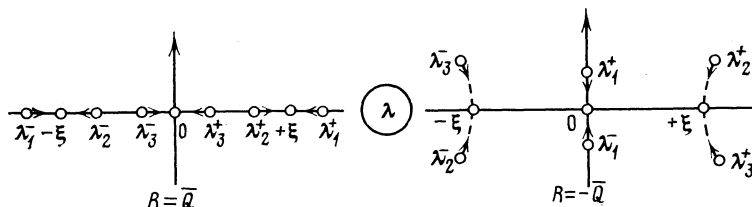


Рис. 1

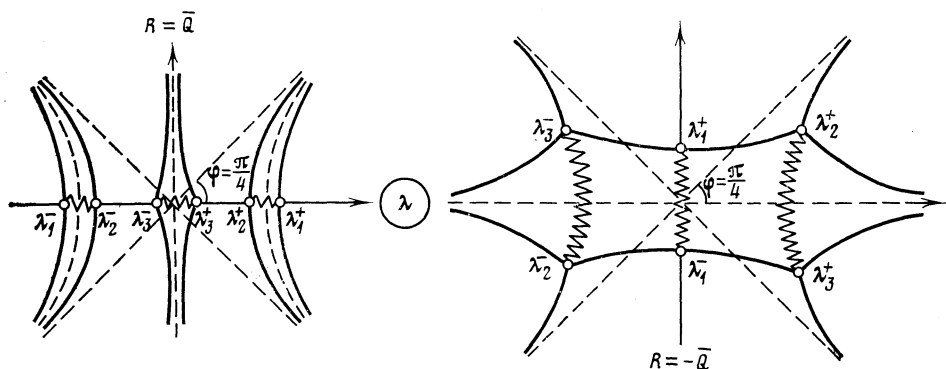


Рис. 2

Обозначения выбраны так, что $\lambda_i^+ = -\lambda_i^-$, кроме того, в случае редукции $R = -\bar{Q}$ выполнены соотношения $\lambda_2^+ = \lambda_3^+$, $\lambda_2^- = \lambda_3^-$, $\lambda_1^+ = \lambda_1^-$. Несложный анализ уравнения (36), основанный на формулах Виетта, для многочлена третьей степени приводит к результатам, изображенным на рис. 1 (стрелки указывают движение точек поворота при $\tau \rightarrow +\infty$, расстояние точек поворота до предельных значений 0, $\pm \xi$ равно $O(1/\sqrt{\tau})$). Линии Стокса в данном случае определяются так:

$$\text{Re} \int_{\lambda_i^\pm}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta = 0,$$

В приложении 2 подробно исследован $\int_{\lambda_i^\pm}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta$. Исходя из получен-

ных там оценок, легко понять расположение линий Стокса на λ -плоскости (рис. 2, сплошные линии — линии Стокса, штриховые — асимптоты и предельные положения (при $\tau \rightarrow +\infty$) линий Стокса, пилообразный раз-

рыв — разрезы, которые необходимы для однозначности корня в формуле (30)).

Дальнейшие рассуждения этого раздела посвящены исследованию поведения Ψ -функции там, где не пригодна ВКБ-асимптотика (35) — в окрестностях точек поворота (см. рис. 2).

I. Ψ -функция в окрестности точки $\lambda=0$. Линеаризуем уравнение (29) в окрестности точки $\lambda=0$, считая, что радиус окрестности меньше или равен $O(\tau^{-1/2+\delta/2})$, $\delta>0$,

$$(37) \quad \frac{d\Psi_0}{d\lambda} = \tau \begin{pmatrix} i\xi^2\lambda & -\xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \\ \mp \xi^2 \bar{Q} \mp \frac{i}{2} \bar{Q}_x & -i\xi^2\lambda \end{pmatrix} \Psi_0.$$

Введем обозначения: $z = \lambda \sqrt{2i\xi^2\tau}$,

$$(38a) \quad \mathcal{Y} = \sqrt{\frac{\tau}{2i\xi^2}} \left(-\xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \right), \quad \mathcal{W} = \mp \sqrt{\frac{\tau}{2i\xi^2}} \left(\xi^2 \bar{Q} + \frac{i}{2} \bar{Q}_x \right),$$

$$(38b) \quad \mathfrak{v} = -\mathcal{Y}\mathcal{W} - 1 = \mp \frac{\tau}{2i\xi^2} \left| -\xi^2 Q + \frac{i}{2} Q_x \right|^2 - 1.$$

Тогда (37) можно записать так:

$$(39) \quad \frac{d\Psi_0}{dz} = \begin{pmatrix} z/2 & \mathcal{Y} \\ \mathcal{W} & -z/2 \end{pmatrix} \Psi_0.$$

ФМ этого уравнения можно представить в виде

$$(40) \quad \Psi_0 = \begin{pmatrix} D_{-1-\mathfrak{v}}(iz) & D_{\mathfrak{v}}(z) \\ D_{-1-\mathfrak{v}}(iz) & D_{\mathfrak{v}}(z) \end{pmatrix}.$$

Здесь $D_{\mathfrak{v}}(z)$ — функция параболического цилиндра (функция Вебера)

$$y = \left(y' - \frac{z}{2} y \right) \frac{1}{\mathcal{Y}}, \quad D_{\mathfrak{v}}(z) = -\frac{1}{\mathcal{Y}} D_{1+\mathfrak{v}}(z),$$

$$D_{-1-\mathfrak{v}}(iz) = -i \frac{\mathfrak{v}+1}{\mathcal{Y}} D_{-2-\mathfrak{v}}(iz).$$

II. Аналогично рассматривается Ψ -функция в окрестности точки $\lambda=\xi$. Линеаризованное уравнение (29) выглядит так:

$$(41) \quad \frac{d\Psi_{\xi}}{d\lambda} = \tau \begin{pmatrix} -2i\xi^2(\lambda-\xi) & \frac{i}{2} Q_x \\ \mp \frac{i}{2} \bar{Q}_x & 2i\xi^2(\lambda-\xi) \end{pmatrix} \Psi_{\xi}.$$

Обозначим $\tilde{z} = \sqrt{-4i\xi^2\tau}(\lambda-\xi)$,

$$(42a) \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \frac{i\tau Q_x}{2\sqrt{-4i\xi^2\tau}}, \quad \tilde{\mathcal{W}} = \frac{\mp i\tau \bar{Q}_x}{2\sqrt{-4i\xi^2\tau}},$$

$$(42b) \quad \tilde{\mathfrak{v}} = -\tilde{\mathcal{Y}}\tilde{\mathcal{W}} - 1 = \frac{\pm \tau |Q_x|^2}{16i\xi^2} - 1.$$

Тогда уравнение (41) примет вид, аналогичный (39), а ФМ этого уравнения дается формулой (40), в которой $v \rightarrow \bar{v}$, $z \rightarrow \bar{z}$.

3. ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Psi_\lambda = A\Psi$. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАННЫХ МОНОДРОМИИ

В этом разделе мы дадим точное определение данных монодромии уравнения (29) и проанализируем те свойства этих данных, которые проистекают из-за наличия редукций (9). Ниже введены обозначения для

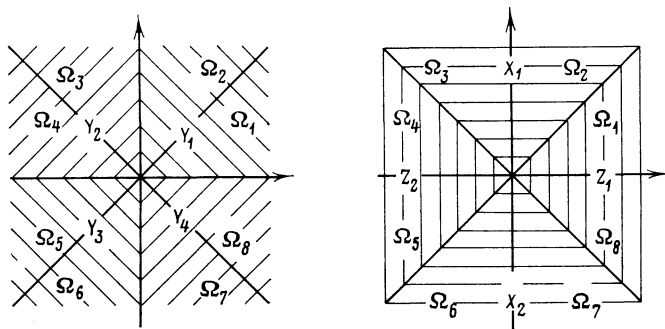


Рис. 3

решений²⁾, имеющих в указанных секторах стандартную асимптотику (6):

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda) \left(-\frac{\pi}{4} < \arg \lambda < \frac{\pi}{4} \right), \quad Y_1(\lambda) \left(0 < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} \right), \\ X_1(\lambda) \left(\frac{\pi}{4} < \arg \lambda < \frac{3}{4}\pi \right), \quad Y_2(\lambda) \left(\frac{\pi}{2} < \arg \lambda < \pi \right), \\ Z_2(\lambda) \left(\frac{3}{4}\pi < \arg \lambda < \frac{5}{4}\pi \right), \quad Y_3(\lambda) \left(\pi < \arg \lambda < \frac{3}{2}\pi \right), \\ X_2(\lambda) \left(\frac{5}{4}\pi < \arg \lambda < \frac{7}{4}\pi \right), \quad Y_4(\lambda) \left(\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda < 2\pi \right), \\ Z_1(\lambda) \left(\frac{7}{4}\pi < \arg \lambda < \frac{9}{4}\pi \right). \end{aligned}$$

Эти обозначения иллюстрирует рис. 3, на котором изображена окрестность точки ∞ (Ω_k — сектор раствора $\pi/4$, заштрихованы сектора, в которых определены решения со стандартной асимптотикой). Определение множителей Стокса таково:

$$(43) \quad \begin{aligned} Y_1 &= Z_1 S_1, & X_1 &= Y_1 S_2, & Y_2 &= X_1 S_3, & Z_2 &= Y_2 S_4, \\ Y_3 &= Z_2 S_5, & X_2 &= Y_3 S_6, & Y_4 &= X_2 S_7, & Z_1 &= Y_4 S_8. \end{aligned}$$

Отметим, что множитель Стокса S_i может иметь одну из следующих структур:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

²⁾ Существование таких решений следует как из общей теории [13], так и из результатов раздела 2 (двойной характер ВКБ-асимптотики (35)).

Например, структура множителей S_1 и S_2 такова:

$$(44) \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подробно о структуре множителей Стокса написано в книге [13].

Рассмотрим подробно редукцию $R=\bar{Q}$. Используя (6), (9а), (9б), получим следующие соотношения между введенными решениями уравнения (29):

$$(45) \quad \begin{aligned} \bar{Z}_1(\lambda) &= Z_1(e^{2\pi i}\lambda) \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix}, \quad Z_1(\lambda) = \sigma_1 \overline{Z_1(e^{2\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \\ X_2(\lambda) &= \sigma_3 X_1(e^{-\pi i}\lambda) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \quad X_2(\lambda) = \sigma_1 \overline{X_1(e^{2\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \\ Z_1(\lambda) &= \sigma_3 Z_2(e^{-\pi i}\lambda) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \quad Z_2(\lambda) = \sigma_3 \overline{Z_1(e^{-\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \\ Y_3(\lambda) &= \sigma_3 Y_1(e^{-\pi i}\lambda) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \quad Y_4(\lambda) = \sigma_1 \overline{Y_1(e^{2\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \\ Y_3(\lambda) &= \sigma_1 \overline{Y_2(e^{2\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \quad Y_4(\lambda) = \sigma_3 Y_2(e^{-\pi i}\lambda) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \\ Z_2(\lambda) &= \sigma_1 \overline{Z_2(e^{2\pi i}\bar{\lambda})} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \end{aligned}$$

$$E = \exp \{2\pi i\gamma\}, \quad (T_\infty^0 = 2\gamma\sigma_3), \quad \arg \bar{\lambda} = -\arg \lambda.$$

Используя эти соотношения, для множителей Стокса легко получить

$$(46) \quad \begin{aligned} S_3 &= \sigma_3 \sigma_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \bar{S}_2^{-1} \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \sigma_1 \sigma_3, \\ S_4 &= \sigma_3 \sigma_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \bar{S}_1^{-1} \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \sigma_1 \sigma_3, \\ S_5 &= \sigma_3 \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} S_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \quad S_6 = \sigma_3 \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} S_2 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \sigma_3, \\ S_7 &= \sigma_1 \begin{pmatrix} E^2 & 0 \\ 0 & E^{-2} \end{pmatrix} \bar{S}_2^{-1} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1, \\ S_8 &= \sigma_1 \begin{pmatrix} E^2 & 0 \\ 0 & E^{-2} \end{pmatrix} \bar{S}_1^{-1} \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} \sigma_1. \end{aligned}$$

Учитывая определение множителей Стокса (43), нетрудно получить циклическое соотношение

$$(47) \quad S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8 = \bar{Z}_1^{-1}(\lambda) Z_1(e^{2\pi i}\lambda) = \begin{pmatrix} E^2 & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь вспомнить априорную структуру множителей Стокса S_1 и S_2 (44), то из (46), (47) можно получить

$$(48) \quad E^{-2} = \frac{|1+s_1 s_2|^2 - |s_2|^2}{1 - |s_1|^2} \quad (R=\bar{Q}).$$

В случае редукции $R=-\bar{Q}$ во всех формулах необходимо заменить $\bar{s}_i \rightarrow -\bar{s}_i$; например, формула (48) примет вид

$$(49) \quad E^{-2} = \frac{|1+s_1 s_2|^2 + |s_2|^2}{1 + |s_1|^2}.$$

Таким образом, все данные монодромии T_∞^0 , S_i ($i=1, \dots, 8$) выражены через два комплексных параметра s_1 и s_2 . В разделе 4 мы как раз и производим вычисление старшего по τ порядка этих комплексных параметров через коэффициенты уравнения (29), а фактически через два других комплексных параметра Q и Q_x , предполагая убывание последних как

$O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)$, см. раздел 2. Для этих вычислений нам понадобится матрица

G ($X_2=X_1G$). Из предыдущих формул легко получить, что

$$(50) \quad G = \begin{pmatrix} 1 - |s_1|^2 & -(s_2 - \bar{s}_1(1 + s_1 s_2))E^{-2} \\ (\bar{s}_2 - s_1(1 + s_1 s_2))E^2 & |1 + s_1 s_2|^2 - |s_2|^2 \end{pmatrix},$$

если $R = \bar{Q}$. Если $R = -\bar{Q}$, то в (50) необходимо заменить $\bar{s}_i \rightarrow -\bar{s}_i$ ($i=1, 2$).

Заметим, что функции Y_i ($i=1, 2, 3, 4$) решают задачу Римана «на кресте» (рис. 4), при этом матрицы сопряжения G_i :

$$(51) \quad Y_2 = Y_1 G_2, \quad Y_3 = Y_2 G_3, \quad Y_4 = Y_3 G_4, \quad Y_1 = Y_4 G_1$$

имеют следующую структуру:

$$(52a) \quad G_2 = S_2 S_3 = \begin{pmatrix} 1 + E^2 |s_2|^2 & s_2 \\ E^2 \bar{s}_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = S_4 S_5 = \begin{pmatrix} 1 - |s_1|^2 & \bar{s}_1 E^{-2} \\ -s_1 E^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(52b) \quad G_4 = S_6 S_7 = \begin{pmatrix} 1 + E^2 |s_2|^2 & -E^{-2} s_2 \\ -E^4 \bar{s}_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = S_8 \begin{pmatrix} E^{-2} & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix} S_1 = \\ = \begin{pmatrix} E^{-2}(1 - |s_1|^2) & -E^{-2} \bar{s}_1 \\ E^2 s_1 & E^2 \end{pmatrix}.$$

Тем самым фактически установлена эквивалентность двух задач: задачи нахождения ФМ уравнения (29), имеющей заданную асимптотику (6) в каком-либо секторе раствора $\pi/4$ точки ∞ , и матричной задачи Римана на комплексной λ -плоскости.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ СТОКСА S_1 И S_2

В этом разделе вычисляется старший по τ порядок множителей Стокса через коэффициенты уравнения (29). Сначала опишем вычисление множителя S_1 . С этой целью рассмотрим ФМ Ψ_\downarrow , Ψ_\uparrow , которые определены в канонической области, изображенной на рис. 2, содержащейся в секторе Ω_1 рис. 3, имеют ВКБ-асимптотику, даваемую формулой (35), при этом считаем, что Ψ_\downarrow продолжима вниз за вещественную ось, а Ψ_\uparrow — за верхнюю границу \mathcal{L} рассматриваемой канонической области³⁾. Определим матрицы C_1 и C_2 формулами

$$(53) \quad Z_1 = \Psi_\downarrow C_1, \quad Y_1 = \Psi_\uparrow C_2.$$

³⁾ Мы считаем, что $\int_{\xi}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta \equiv \int_{\xi}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta$ для $\Psi_{\downarrow\uparrow}$.

Старший по τ порядок этих матриц легко вычислить:

$$(54) \quad C_1 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \arg \lambda = 0}} \Psi_{AC}^{-1} \tilde{Z}_1, \quad C_2 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in \mathcal{L}}} \Psi_{AC}^{-1} Y_1.$$

Наряду с матрицами C_k введем не зависящие от λ матрицы N_k формулами

$$(55) \quad \Psi_{\downarrow} = \Psi_{\xi} N_1, \quad \Psi_{\uparrow} = \Psi_{\xi} N_2,$$

где Ψ_{ξ} — ФМ уравнения (29), приближенно вычисляемая по формулам (40)–(42).

Имея цель вычислить старший порядок матриц N_k , рассмотрим кольцевую область $\tau^{-1/2} < |\lambda - \xi| < \tau^{-1/2+\varepsilon}$. Теперь, если считать $\tau \rightarrow +\infty$, подставить

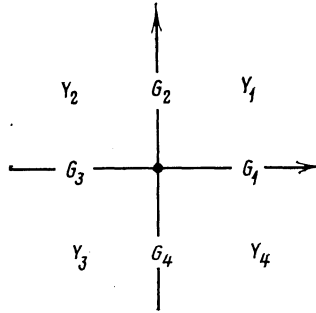


Рис. 4

известные асимптотики функций Вебера (60) и вдобавок учесть двойной характер асимптотики (35), то получим

$$(56) \quad N_1 = \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \lambda - \xi \approx \tau^{-1/2+\varepsilon} \\ \arg(\lambda - \xi) = 0}} \Psi_{\xi}^{-1} \Psi_{AC}, \quad N_2 = \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \lambda - \xi \approx \tau^{-1/2+\varepsilon} \\ \arg(\lambda - \xi) = \pi/2}} \Psi_{\xi}^{-1} \Psi_{AC}.$$

Теперь мы можем написать

$$(57) \quad Y_1 = \Psi_{\xi} N_2 C_2, \quad \tilde{Z}_1 = \Psi_{\xi} N_1 C_1,$$

поэтому

$$(58) \quad S_1 = C_1^{-1} N_1^{-1} N_2 C_2.$$

Используя проведенное в приложении 2 исследование $\int_{\xi}^{\lambda} \mu(\eta) d\eta$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. (П.2.2)) и учитывая (12), (35), (54), имеем

$$(59) \quad C_1 = C_2 = \exp \left\{ \frac{i\tau\sigma_3}{2} \left[\frac{\xi^4}{2} + \frac{a^2}{2\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a^2/\xi^2}}{2} - \frac{a^2}{4\xi^2} - \left(\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \operatorname{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \xi \right] \right\}$$

(обозначения см. в приложении 2).

Для вычисления матриц N_k необходимы асимптотики функций Вебера [14]:

$$(60a) \quad \Psi_{\xi}(\tilde{z}) \sim \left(I + O\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) \right) \exp \left\{ \sigma_3 \left[\frac{\tilde{z}^2}{4} - (\tilde{\nu} + 1) \ln \tilde{z} \right] \right\} \times \\ \times \begin{pmatrix} -iE_1^{-1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tilde{\nu}} \end{pmatrix},$$

$$E_1 \equiv \exp \left\{ \frac{i\pi\tilde{\nu}}{2} \right\}, \quad \arg \tilde{z} = -\frac{\pi}{4} \quad (\arg(\lambda - \xi) = 0).$$

$$(60b) \quad \Psi_{\xi}(\tilde{z}) \sim \left(I + O\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) \right) \exp \left\{ \sigma_3 \left[\frac{\tilde{z}^2}{4} - (\tilde{\nu} + 1) \ln \tilde{z} \right] \right\} \times \\ \times \begin{pmatrix} -iE_1^{-1} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2\pi}E_1^{-1}}{\tilde{\nu}\Gamma(1+\tilde{\nu})} & -\frac{1}{\tilde{\nu}} \end{pmatrix}, \\ \arg \tilde{z} = \frac{\pi}{4} \quad \left(\arg(\lambda - \xi) = \frac{\pi}{2} \right).$$

Используя снова результаты исследования в приложении 2 поведения $\int_{\xi}^{\lambda} \mu(\eta) d\eta$ на этот раз при $\lambda \sim \xi$ (см. (П2.7)), из (54), (60), (35) получаем

$$(61a) \quad N_1 = \begin{pmatrix} iE_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\nu} \end{pmatrix} \exp \left\{ -\sigma_3 \frac{\tilde{\nu}+1}{2} \ln \frac{1}{-i\tau} - \right. \\ \left. - \frac{i\tau\sigma_3}{4} \left(\frac{a^2}{\xi^2} \ln \frac{\sqrt{1-a^2/\xi^2}}{2} - \frac{a^2}{2\xi^2} \right) \right\}.$$

$$(61b) \quad N_2 = \begin{pmatrix} iE_1 & 0 \\ \frac{-i\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\tilde{\nu})} & -\tilde{\nu} \end{pmatrix} \exp \left\{ -\sigma_3 \frac{\tilde{\nu}+1}{2} \ln \frac{1}{-i\tau} - \frac{i\tau\sigma_3}{4} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{a^2}{\xi^2} \ln \frac{\sqrt{1-a^2/\xi^2}}{2} - \frac{a^2}{2\xi^2} \right) \right\}.$$

$$(62) \quad s_1 = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\tilde{\nu}\Gamma(1+\tilde{\nu})} \exp \left\{ i\tau \left[\frac{\xi^4}{2} - \left(\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \right. \right. \right.$$

Теперь из (58) извлечем, что S_1 имеет нужную структуру (44), где

$$\left. \pm \operatorname{Im}(Q_* \bar{Q}) \right) \ln \xi - \frac{\tilde{\nu}+1}{i\tau} \ln \frac{1}{-i\tau} \left. \right\}.$$

Матрицу S_2 непосредственно тем же способом вычислить нельзя, поэтому мы будем вычислять матрицу G (50). Вычисление матрицы G вполне аналогично вычислению S_1 . Сначала определяются матрицы C_3 и N_3 :

$$(63) \quad X_1 = \Psi_1 C_3, \quad \Psi_1 = \Psi_0 N_3.$$

Здесь Ψ_1 — ФМ уравнения (29), которая определена в канонической области рис. 2, содержащейся в секторе Ω_2 рис. 3, и продолжима с сохранением ВКБ-асимптотики (35) за левую границу канонической области (в сектор Ω_3). Вычисление C_3 и N_3 аналогично (54), (56) (при этом

$$\int_0^\lambda \mu(\eta) d\eta \equiv \int_0^\lambda \mu(\eta) d\eta : \\ (64) \quad C_3 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \arg \lambda = \pi/2}} \Psi_{AC}^{-1} X_1, \quad N_3 = \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \lambda \approx \tau^{-1/2} + e \\ \arg \lambda = \pi/2}} \Psi_0^{-1} \Psi_{AC}.$$

Ψ_0 определяется формулами (38), (40).

Далее определяем матрицы C_4 и N_4 :

$$(65) \quad X_2 = \Psi_2 C_4, \quad \Psi_2 = \Psi_0 N_4,$$

где Ψ_2 — ФМ уравнения (29), которая определена в канонической области рис. 2, содержащейся в секторе Ω_6 , и продолжима с сохранением ВКБ-асимптотики (35) в сектор Ω_7 . Заметим, что имеет место связь

$$\Psi_2(\lambda) = \sigma_3 \Psi_1(e^{-\pi i} \lambda) M,$$

где M — некая матрица, не зависящая от λ . Хотя матрицы C_4 и N_4 естественно зависят от M , их произведение $N_4 C_4$ от матрицы M не зависит, а именно это произведение необходимо для вычисления матрицы G (67). Пользуясь этим, удобно выбрать $M = \sigma_3$. Тогда, если учесть диагональный характер ВКБ-асимптотики (35), очевидно, что матрицы C_4 и N_4 могут быть вычислены в старшем по τ порядке по формулам

$$(66a) \quad C_4 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \arg \lambda = (\pi/2)\pi}} \Psi_{AC}^{-1} (e^{-\pi i} \lambda) X_2(\lambda),$$

$$(66b) \quad N_4 = \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \arg \lambda = (\pi/2)\pi}} \Psi_0^{-1}(\lambda) \Psi_{AC}(e^{\pi i} \lambda), \quad \lambda \approx \tau^{-1/2} + e.$$

Теперь матрицу G мы можем вычислить по формуле

$$(67) \quad G = C_3^{-1} N_3^{-1} N_4 C_4.$$

Приведем результаты вычислений. Из формул (64), (66a), (35), (12), (П2.5) имеем

$$(68) \quad C_3 = C_4 \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \exp \left\{ \frac{i\tau a_1^2 \sigma_3}{8\xi^2} \ln 2\xi + \frac{i\tau a^2 \sigma_3}{2\xi^2} \ln \sqrt{1 - \xi^2} - \right. \\ \left. - \sigma_3 \alpha_1 \right\}, \quad \alpha_1 = \frac{i\tau a_1^2}{8\xi^2} \left[\ln \frac{\sqrt{1 - a^2/\xi^2}}{2} - \frac{1}{2} \right].$$

Подставив известные асимптотики функций Вебера в формулу (40), получим

$$\begin{aligned}
 (69a) \quad \Psi_0(z) &\underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \exp \left\{ \sigma_3 \left(\frac{z^2}{4} - (\nu+1) \ln z \right) \right\} \begin{pmatrix} E_2^3 & \frac{\sqrt{2\pi} E_2^2}{\Gamma(-\nu)} \\ \frac{-i\sqrt{2\pi} E_2^{-1}}{\mathcal{V}\Gamma(1+\nu)} & -\frac{1}{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \exp \left\{ \sigma_3 \left(\frac{z^2}{4} - (\nu+1) \ln z \right) \right\} R_1, \quad \arg z = \frac{3}{4} \pi \quad \left(\arg \lambda = \frac{\pi}{2} \right); \\
 (69b) \quad \Psi_0(z) &\underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \exp \left\{ \sigma_3 \left(\frac{z^2}{4} - (\nu+1) \ln z \right) \right\} \begin{pmatrix} E_2^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \exp \left\{ \sigma_3 \left(\frac{z^2}{4} - (\nu+1) \ln z \right) \right\} R_2, \quad \arg z = \frac{7}{4} \pi \quad \left(\arg \lambda = \frac{3}{2} \pi \right), \\
 E_2 &= \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} (\nu+1) \right\}.
 \end{aligned}$$

Теперь из формул (64), (66б), (69), (35), (П2.8) следует

$$(70a) \quad N_3 = R_1^{-1} \exp \left\{ \sigma_3 \left(\alpha_1 - \frac{\nu+1}{2} \ln \frac{2}{i\tau} \right) \right\},$$

$$(70б) \quad N_4 = R_2^{-1} \exp \left\{ \sigma_3 \left(\alpha_1 - \frac{\nu+1}{2} \ln \frac{2}{i\tau} \right) + \pi i (\nu+1) \sigma_3 \right\}.$$

Отметим, что из определения E (см. (45)), формул (П2.1б) и (П2.4б) следует

$$(71) \quad E = \exp \{ -\pi i (\nu+1) - 2\pi i (\bar{\nu}+1) \}.$$

Окончательно матрицу G получим в виде

$$\begin{aligned}
 (72) \quad G &= \begin{pmatrix} i\sqrt{2\pi} E^{-2} \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} (\nu+1) - 2\varphi \right\} \\ \exp \{ -2\pi i (\bar{\nu}+1) \}, \mp \frac{i\sqrt{2\pi} E^{-2} \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} (\nu+1) - 2\varphi \right\}}{\mathcal{V}\Gamma(-(1+\nu))} \\ \frac{-i\sqrt{2\pi} E^2 \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} (\nu+1) + 2\varphi \right\}}{\mathcal{V}\Gamma(1+\nu)}, \quad E^{-2} \exp \{ -2\pi i (\bar{\nu}+1) \} \end{pmatrix}, \\
 \varphi &= \frac{i\tau a_1^2}{8\xi^2} \ln 2\xi + \frac{i\tau a^2}{2\xi^2} \ln \xi - \frac{\nu+1}{2} \ln \frac{2}{\tau}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что $\nu+1$ при $R = \pm \bar{Q}$ чисто мнимое, поэтому $\Gamma(-(1+\nu)) = \overline{\Gamma(1+\nu)}$. Сравнивая формулу (72) с (50), получим

$$(73a) \quad 1 \mp |s_1|^2 = \exp \{ -2\pi i (\bar{\nu}+1) \},$$

$$(73б) \quad |1 + s_1 s_2|^2 \mp |s_2|^2 = E^{-2} \exp \{ -2\pi i (\bar{\nu}+1) \},$$

$$(73в) \quad \pm \bar{s}_2 (1 \mp |s_1|^2) - s_1 = \frac{-i\sqrt{2\pi}}{\mathcal{V}\Gamma(1+\nu)} \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} (\nu+1) + 2\varphi \right\}.$$

Отметим, что из (73а), (73б) снова следуют (48), (49). Как будет видно из результатов следующего раздела, (73а) согласуется с полученным ранее результатом (62).

5. ОБРАЩЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ ДАННЫХ МОНОДРОМИИ. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МНУШ

Теперь мы обратим формулы (62), (73в) и получим тем самым параметризацию главного члена асимптотики автомодельного решения данными монодромии s_1 и s_2 . Возьмем модуль от обеих частей формул (62), (73в) и используем известную формулу для Γ -функции:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\frac{z \sin \pi z}{\pi}.$$

Тогда, если ввести обозначения

$$(74) \quad k^2 = \pm |\tilde{\mathcal{Y}}|^2 = i(\tilde{\nu} + 1), \quad l^2 = \pm |\mathcal{Y}^0|^2 = -i(\nu + 1),$$

получим

$$(75a) \quad k^2 = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 \mp |s_1|^2),$$

$$(75b) \quad l^2 = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 \mp |\mp \bar{s}_2(1 \mp |s_1|^2) - s_1|^2).$$

Приравнявая аргументы левой и правой части формул (62), (73в), имеем

$$(76a) \quad \arg \tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\pi}{2} - \arg s_1 - \arg \Gamma(-ik^2) + \frac{\tau \xi^4}{2} - k^2 \ln \tau - 2l^2 \ln \xi,$$

$$(76b) \quad \arg \mathcal{Y}^0 = \frac{\pi}{2} - \arg s_2 - \arg \Gamma(il^2) + l^2 \ln \tau + (4k^2 + 2l^2) \ln \xi + l^2 \ln 2.$$

Из формул (38а) и (42а) можем записать

$$(77) \quad Q = \sqrt{\frac{2i}{\tau \xi^2}} (i\sqrt{2} \tilde{\mathcal{Y}} - \mathcal{Y}^0), \quad Q_x = 4 \sqrt{\frac{i \xi^2}{\tau}} \tilde{\mathcal{Y}}.$$

Таким образом, искомая параметризация главного члена асимптотики уравнения (15) (при $R = \pm Q$) данными монодромии получена. Ее дают формулы (74)–(77). Введем автомодельную переменную $y = xt^{-1/2}$, $-y > 0$. Тогда формулы (76) можно переписать так:

$$(78a) \quad \arg \tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\pi}{2} - \arg s_1 - \arg \Gamma(-ik^2) + \frac{y^2}{4} - l^2 \ln(-y) + \\ + \left(\frac{l^2}{2} - k^2 \right) \ln t + (2l^2 - 3k^2) \ln 2,$$

$$(78b) \quad \arg \mathcal{Y}^0 = \frac{\pi}{2} - \arg s_2 - \arg \Gamma(il^2) + (2k^2 + l^2) \ln(-y) + \\ + \left(\frac{l^2}{2} - k^2 \right) \ln t + (2l^2 - 4k^2) \ln 2.$$

Теперь, сравнивая (25) и (77), получим $\gamma = i(k^2 - l^2/2)$, что согласуется с определением γ (раздел 3) и (71), а также

$$(79) \quad \Theta(n) \approx \frac{1}{\sqrt{-y}} (\sqrt{2} \tilde{\mathcal{Y}}_1 - \mathcal{Y}_1), \quad \frac{d}{dy} \Theta(y) \approx \frac{1}{i} \sqrt{\frac{-y}{2}} \tilde{\mathcal{Y}}_1,$$

$$(80a) \quad \arg \tilde{\mathcal{Y}}_1 = \frac{5}{4} \pi - \arg s_1 - \arg \Gamma(-ik^2) + \\ + \frac{y^2}{4} - l^2 \ln(-y) + (2l^2 - 3k^2) \ln 2,$$

$$(80б) \quad \arg \mathcal{Y}_1 = \frac{3}{4} \pi - \arg s_2 - \arg \Gamma(il^2) + (2k^2 + l^2) \ln(-y) + (2l^2 - 4k^2) \ln 2,$$

$$(80в) \quad |\tilde{\mathcal{Y}}| = |\tilde{\mathcal{Y}}_1|, \quad |\mathcal{Y}| = |\mathcal{Y}_1|.$$

Из результатов приложения 1 следует, что функция $w(y) = \pm |\Theta(y)|^2$ — вещественное решение уравнения (П1.5). Таким образом, мы нашли асимптотику убывающих вещественных решений уравнения (П1.5) при $y \rightarrow -\infty$:

$$(81a) \quad w(y) \underset{y \rightarrow -\infty}{\approx} -\frac{2k^2 + l^2}{y} \mp \frac{2\sqrt{2k^2 l^2}}{y} \sin \left\{ \frac{y^2}{4} - 2(k^2 + l^2) \ln(-y) + \right. \\ \left. + \arg s_2 - \arg s_1 + \arg \Gamma(il^2) - \arg \Gamma(-ik^2) + k^2 \ln 2 \right\},$$

$$(81б) \quad \frac{d}{dy} w(y) \underset{y \rightarrow -\infty}{\approx} \mp \sqrt{2k^2 l^2} \cos \left\{ \frac{y^2}{4} - 2(k^2 + l^2) \ln(-y) + \arg s_2 - \arg s_1 + \right. \\ \left. + \arg \Gamma(il^2) - \arg \Gamma(-ik^2) + k^2 \ln 2 \right\} + \frac{2k}{y^2}.$$

В этих формулах следует брать верхний знак, если $k^2 > 0$, $l^2 > 0$ (положительные решения) и нижний знак при $k^2 < 0$, $l^2 < 0$ (отрицательные решения). Формулы (81) дают вещественные решения уравнения (П1.5), в котором $\beta = 0$ (отсутствует регулярная особенность в 0), $i\alpha = \gamma = i(k^2 - 1/2 l^2)$. Отметим, что процедура обращения формул (62), (73в) существенно использовала наличие редукции $R = \pm \bar{Q}$ (вещественность $i(v+1)$). Если эта редукция не выполнена, то обратить эти формулы не удастся. Однако в этом случае s_1 и s_2 не образуют полного набора параметров, поэтому требуется вычисление еще двух комплексных параметров, например s_3 и s_4 ; эти параметры без труда вычисляются методами раздела 4, полученную систему четырех алгебраических соотношений уже легко обратить. Подробно эти вопросы предполагается рассмотреть в отдельной публикации, посвященной анализу задачи Римана с регулярной особой точкой в 0.

Формулы для главного члена асимптотики автомодельного решения уравнения (16) нетрудно получить, воспользовавшись (16) и (77).

Автор благодарен А. Р. Итсу за постановку задачи, многочисленные полезные обсуждения и помощь в редактировании текста.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Л е м м а. Решения q и r системы (3) можно представить в виде

$$(П1.1a) \quad q = F^{1/2} \exp \left\{ \frac{3i}{4} \int_x^\infty F dx - \frac{i}{2} \int_x^\infty \frac{dx}{F} \int_x^\infty F_t dx \right\},$$

$$(П1.16) \quad r = F^{1/2} \exp \left\{ -\frac{3i}{4} \int F dx + \frac{i}{2} \int \frac{dx}{F} \int F_t dx \right\},$$

где функция $F(x, t)$ является решением уравнения

$$(П1.2) \quad \left[\int \frac{dx}{F} \int (3FF_x - F_t) dx \right]_t = F_{xx}F^{-1} - \frac{1}{2}F_x^2F^{-2} - \\ - \frac{1}{2}F^{-2} \left[\int (3FF_x - F_t) dx \right]^2 + \int (3FF_x - F_t) dx.$$

Причем и обратно: любое решение уравнения (П1.2) по формулам (П1.1) порождает решение системы (3).

З а м е ч а н и е. Решения системы (15) даются формулами

$$(П1.3a) \quad Q = F^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{4} \int F dx - \frac{i}{2} \int \frac{dx}{F} \int F_t dx \right\},$$

$$(П1.3b) \quad R = F^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{4} \int F dx + \frac{i}{2} \int \frac{dx}{F} \int F_t dx \right\}.$$

Здесь F — решение того же уравнения (П1.2). Так как $F = rq = RQ$, то уравнению (1) отвечают вещественные решения (П1.2).

В автомодельном случае (25), (28) положим $F \equiv t^{-1/2}w(y)$ и определим константы интегрирования α и β формулами

$$\int F dx = -1/2 t^{-1/2} y w(y) + \alpha/t, \\ \int \frac{dx}{F} \int F_t dx = -\frac{y^2}{4} + \alpha \int \frac{dy}{w(y)} - 2i\beta \ln t.$$

Тогда получим, что автомодельные решения системы (3) имеют вид

$$(П1.4a) \quad q = t^{-\beta-1/4} w(y)^{1/2} \exp \left\{ \frac{iy^2}{8} + \frac{3i}{4} \int w(y) dy - \frac{\alpha i}{2} \int \frac{dy}{w(y)} \right\},$$

$$(П1.4b) \quad r = t^{\beta-1/4} w(y)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{iy^2}{8} - \frac{3i}{4} \int w(y) dy + \frac{\alpha i}{2} \int \frac{dy}{w(y)} \right\},$$

где $w(y)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(П1.5) \quad w_{yy} = \frac{w_y^2}{2w} - \frac{3}{8} w^3 - \frac{y}{2} w^2 - \left(\frac{y^2}{8} + \frac{\alpha}{2} - 2i\beta \right) w + \frac{\alpha^2}{2w}.$$

Преобразование $w \rightarrow \sqrt{i}w$, $y \rightarrow 2\sqrt{i}y$ приводит (П1.5) к каноническому виду уравнения Пенлеве типа IV

$$(П1.6) \quad w_{yy} = \frac{w_y^2}{2w} + \frac{3}{2} w^3 + 4yw^2 + 2(y^2 - 4\beta - i\alpha)w + \frac{2\alpha^2}{w}.$$

Отметим, что формулы для автомодельных решений системы (15) таковы:

$$(П1.7a) \quad Q = t^{-\gamma-1/4} w(y)^{1/2} \exp \left\{ \frac{iy^2}{8} - \frac{i}{4} \int w(y) dy - \frac{\alpha i}{2} \int \frac{dy}{w(y)} \right\},$$

$$(П1.76) \quad R = t^{\gamma-1/4} w(y)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{iy^2}{8} + \frac{i}{4} \int^y w(y) dy + \frac{\alpha i}{2} \int \frac{dy}{w(y)} \right\},$$

где $\gamma = \beta + i\alpha$.

Отметим приложение рассмотренных результатов к нелинейному уравнению Шредингера.

Определим функцию P (ср. с [10]) формулой

$$(П1.8) \quad -2P = iR_{xx} + 1/2 R^2 Q.$$

Считая, что функции Q и R удовлетворяют системе (15), прямым вычислением установим

$$(П1.9) \quad Q_t = iQ_{xx} - 2iQ^2 P, \quad P_t = -iP_{xx} + 2iP^2 Q.$$

Обратно, если Q и P — решения (П1.9), а R — произвольное решение уравнения (П1.8), то функции Q и R удовлетворяют системе

$$(П1.10a) \quad Q_t = iQ_{xx} + iQ^2 [iR_{xx} + 1/2 R^2 Q],$$

$$(П1.10б) \quad R_t = -iR_{xx} - iR^2 [-iQ_{xx} + 1/2 Q^2 R] + C(t) \exp \left\{ i \int^x RQ dx \right\}.$$

Очевидно, нужно выбрать то частное решение (П1.8), для которого последний член в (П1.10б) обращается в нуль. Автомоделные решения (П1.9) имеют вид

$$(П1.11) \quad Q = t^{-\gamma-1/4} \Theta(y), \quad P = t^{\gamma-3/4} K(y).$$

Если указанное частное решение существует, то по функциям (П1.11) можно получить решение уравнения (П1.6) по формуле

$$(П1.12) \quad w(y) = \frac{\alpha - 2PQt}{1/2 x t^{-1/2} + i t^{1/2} Q_x / Q} = \frac{\alpha - 2\Theta(y)K(y)}{1/2 y + i \Theta_y(y) / \Theta(y)}.$$

Константа α определяется после подстановки (П1.12) в (П1.6). Отметим, что формула (П1.12) не работает в случае $1/2 y + i \Theta_y(y) / \Theta(y) = 0$. Этот случай соответствует точно решаемой матричной задаче Римана (с постоянными матрицами сопряжения без регулярной особенности в нуле), связанной с уравнением (П1.9) (см. [8]). При этом формулы (П1.11) имеют вид

$$(П1.13) \quad Q = A t^{-\gamma-1/4} \exp \left\{ \frac{iy^2}{4} \right\}, \quad P = B t^{\gamma-3/4} \exp \left\{ -\frac{iy^2}{4} \right\},$$

$$2iAB = \gamma - 1/4.$$

В случае $\gamma = 5/4$ решение w может быть найдено явно:

$$w = 2i/y, \quad \alpha = i, \quad \beta = 1/4.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Асимптотические оценки $\int_{0,\xi}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta$. Эти оценки используются в раз-

деле 4 для вычисления множителей Стокса. Наша цель оценить $\int_{0,\xi}^{\lambda} \mu_2(\eta) d\eta$ при

$\tau \rightarrow +\infty$ с точностью $O\left(\frac{1}{\tau^{1+\delta}}\right)$, где $\delta > 0$.

1. $|\lambda - \xi| > \tau^{-1/2+\varepsilon}$, $0 \leq \arg(\lambda - \xi) \leq \pi/2$. Везде далее $0 < \varepsilon < 1/8$,

$$\int_{\xi}^{\lambda} \mu_2 d\eta = \int_{\xi}^{\xi + \tau^{-1/2+\varepsilon}} \mu_2 d\eta + \int_{\xi + \tau^{-1/2+\varepsilon}}^{\lambda} \mu_2 d\eta \equiv J_1 + J_2.$$

Для оценки J_1 в формуле (30) выделяем главную по $\lambda - \xi$ часть, производим оценку отброшенных членов, точно вычисляем интеграл от оставшегося под корнем выражения. Оценка J_2 производится так: из-под знака корня в (30) выносим главную по λ часть, оставшийся корень разлагаем в ряд Тейлора с удержанием двух первых членов, явно вычисляем интеграл от полученного выражения, делаем оценку отброшенных членов:

$$(П2.1а) \quad J_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{a^2}{2\xi^2} \ln \eta \right) \Big|_{\eta = \frac{2\xi}{\tau^{1/2-\varepsilon}}} + \frac{i}{2} \left(\frac{a^2}{2\xi^2} \ln \sqrt{\frac{-a^2}{\xi^2} - \frac{a^2}{4\xi^2} - \frac{a^2}{2\xi^2} \ln 2} \right) + \\ + O\left(\frac{1}{\tau^{1+2\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^{3/2-4\varepsilon}}\right), \quad a^2 = \pm \frac{|Q_x|^2}{4};$$

$$(П2.1б) \quad J_2 = i \left(\frac{\lambda^4}{4} - \frac{\xi^2 \lambda^2}{2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \lambda + \\ + \frac{ia^2}{2\xi^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} + \frac{i\xi^4}{4} - \frac{i\xi^2}{\tau^{1-2\varepsilon}} - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \xi - \\ - \frac{ia^2}{2\xi^2} \ln \sqrt{\frac{\xi}{2\tau^{-1/2+\varepsilon}}} + O\left(\frac{1}{\tau^{-1/2-3\varepsilon}}\right).$$

Здесь и далее в случае редукции $R = \bar{Q}$ надо брать верхний знак, а при редукции $R = -\bar{Q}$ — нижний;

$$(П2.2) \quad J_1 + J_2 = i \left(\frac{\lambda^4}{4} - \frac{\xi^2 \lambda^2}{2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \lambda + \\ + \frac{ia^2}{2\xi^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} + \frac{i\xi^4}{4} - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \xi + \\ + \frac{ia^2}{4\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a^2}}{2} - \frac{ia^2}{8\xi^2} - \frac{3ia^2}{4\xi^2} \ln \xi + O\left(\frac{1}{\tau^{1+\delta}}\right).$$

2. $\int_{\xi}^{\lambda} \mu_2 d\eta$ при $\lambda - \xi \approx \tau^{-1/2+\varepsilon}$. Вычисления аналогичны оценкам для J_1 ;

$$(П2.3) \quad \int_{\xi}^{\lambda} \mu_2 d\eta = \frac{i}{2} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{a^2}{2\xi^2} \ln \eta \right) \Big|_{\eta = 2\xi(\lambda - \xi)} + \\ + \frac{i}{2} \left(\frac{a^2}{2\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a^2/\xi^2}}{2} - \frac{a^2}{4\xi^2} \right) + O\left(\frac{1}{\tau^{3/2-4\varepsilon}}\right),$$

$$3. \int_0^{\lambda} \mu_2 d\eta = \int_0^{\tau^{-1/2+\varepsilon}} \mu_2 d\eta + \int_{\tau^{-1/2+\varepsilon}}^{\lambda} \mu_2 d\eta \equiv I_1 + I_2.$$

Вычисления такие же, как в п.1, однако нужно учесть, что верхний предел в I_1 находится по другую сторону от точек λ_1^+ , λ_2^+ ($R = \bar{Q}$) либо λ_2^+ , λ_3^+ ($R = -\bar{Q}$), нежели верхний предел в J_1 , поэтому выражение для I_1 совпадает по форме с выражением для J_1 , но отличается по знаку. Точка ∞ не есть точка ветвления корня (30), поэтому I_2 и J_2 на верхних пределах совпадают:

$$(П2.4а) \quad I_1 = -\frac{i}{4} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \eta \right) \Big|_{\eta = \frac{2\xi}{\tau^{1/2-\varepsilon}}} - \frac{i}{4} \left(\frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \sqrt{\frac{-a_1^2/\xi^2}{2}} - \frac{a_1^2}{4\xi^2} \right) + \\ + O\left(\frac{1}{\tau^{1+2\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^{3/2-4\varepsilon}}\right),$$

$$\begin{aligned}
 a_1^2 = & 4 \left(a^2 + \xi^2 \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \right); \\
 (П2.46) \quad I_2 = & i \left\{ \frac{\lambda^4}{4} - \frac{\xi^2 \lambda^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \lambda + \right. \\
 & + \frac{a^2}{2\xi^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} + \frac{\xi^2}{2\tau^{1-2\varepsilon}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \tau^{-1/2+\varepsilon} - \\
 & \left. - \frac{a^2}{2\xi^2} \ln \tau^{-1/2+\varepsilon} + \frac{a^2}{2\xi^2} \sqrt{-\xi^2} \right\} + O \left(\frac{1}{\tau^{1/2+4\varepsilon}} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (П2.5) \quad I_1 + I_2 = & i \left(\frac{\lambda^4}{4} - \frac{\xi^2 \lambda^2}{2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} |Q|^4 \pm \xi^2 |Q|^2 \pm \text{Im}(Q_x \bar{Q}) \right) \ln \lambda + \\
 & + \frac{ia^2}{2\xi^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} + \frac{ia^2}{2\xi^2} \ln \sqrt{-\xi^2} - \frac{i}{4} \left(\frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a_1^2/\xi^2}}{2} - \frac{a_1^2}{4\xi^2} \right) + \\
 & + \frac{ia_1^2}{8\xi^2} \ln 2\xi + O \left(\frac{1}{\tau^{1+\delta}} \right).
 \end{aligned}$$

4. $\int_0^\lambda \mu_2 d\eta$ при $\lambda \approx \tau^{-1/2+\varepsilon}$. Вычисления аналогичны оценкам для I_1 :

$$\begin{aligned}
 (П2.6) \quad \int_0^\lambda \mu_2 d\eta = & -\frac{i}{4} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \eta \right) \Big|_{\eta=2\xi\lambda} - \\
 & - \frac{i}{4} \left(\frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a_1^2/\xi^2}}{2} - \frac{a_1^2}{4\xi^2} \right) + O \left(\frac{1}{\tau^{1+2\varepsilon}} \right) + O \left(\frac{1}{\tau^{1/2-4\varepsilon}} \right).
 \end{aligned}$$

Используя введенные в разделе 2 обозначения, формулу (П2.3) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 (П2.7) \quad \tau \int_\xi^\lambda \Lambda d\lambda \approx & \sigma_3 \left\{ \frac{\tilde{z}^2}{4} - \frac{\tilde{\nu}+1}{2} \ln \frac{\tilde{z}^2}{-i\tau} \right\} - \\
 & - i\tau\sigma_3 \left\{ \frac{a^2}{4\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a^2/\xi^2}}{2} - \frac{a^2}{8\xi^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично формулу (П2.6) запишем так:

$$\begin{aligned}
 (П2.8) \quad \tau \int_0^\lambda \Lambda d\lambda \approx & \sigma_3 \left\{ \frac{z^2}{4} - \frac{\nu+1}{2} \ln \frac{2z^2}{i\tau} \right\} + \\
 & + \frac{i\tau\sigma_3}{4} \left\{ \frac{a_1^2}{2\xi^2} \ln \frac{\sqrt{-a_1^2/\xi^2}}{2} - \frac{a_1^2}{4\xi^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Литература

- [1] Bordag L. A. Painleve equations and their connection with nonlinear evolution equations. I. Preprint 04/80. Leipzig: KMU-QFT, May 1980.
- [2] Ablowitz M. J., Segur H. — Phys. Rev. Lett., 1977, 38, 1103.
- [3] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. — J. Math. Phys., 1980, 21, № 5, 1006–1015.
- [4] Lakshmanan M., Kaliappan P. — J. Math. Phys., 1983, 24, № 4, 795–806.
- [5] Кривчерев И. М. — Функц. анализ и его прилож., 1980, 14, № 3, 83–84.
- [6] Jimbo M., Miwa T., Ueno K. Monodromy preserving deformations with rational coefficients. I. Preprint № 319. Kyoto: Res. Inst. Math. Sci., 1980.
- [7] Flashka H., Newell A. C. — Commun. Math. Phys., 1980, 76, 65–87.
- [8] Итс А. Р. — ДАН СССР, 1981, 261, № 1, 14–18.

- [9] Итс А. Р., Петров В. Э. — ДАН СССР, 1982, 265, № 6, 1302—1304.
- [10] Kaup D. J., Newell A. C. — J. Math. Phys., 1978, 19, № 4, 798—801.
- [11] Dodd R. K., Morris H. S. — Physica Scripta, 1979, 20, № 3, 4, 151—161.
- [12] Федорук М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [13] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
- [14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. II. М.: Наука, 1974.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступила в редакцию
26.VI.1984 г.

ON AUTOMODEL SOLUTIONS OF MODIFIED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Kitaev A. V.

We consider 2×2 -matrix linear ordinary differential equation with large parameter τ and irregular singular point of the fourth order at the infinity (2). In terms of the coefficients of this equation, the main terms (in τ) of the monodromy data of the equation (2) are calculated. Isomonodromic deformations of the coefficients of (2) are found to be automodel solutions of the DNLS (1), thus the main term of the time asymptotics of the automodel solution can be obtained by means of the inversion of the formulas obtained for the monodromy data. The application of the results obtained to the Painlevé IV equation is considered in detail.