

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	69
a93286	Gonçalo Soares
a93222	Tomás Cardoso
a93239	Diogo Pires

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCi** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulos principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCi** utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na directoria *app*.

Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

Symbolic differentiation consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

Bin Sum X (N 10)

designa $x + 10$ na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

Propriedade [QuickCheck] 1 *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr ≡ id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr ≡ id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o X , a função

$$eval_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 13 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 2 A função *eval_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop_sum_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idr \textbf{ where} \\ sum_idr &= eval_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop_sum_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idl \textbf{ where} \\ sum_idl &= eval_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop_product_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idr \textbf{ where} \\ prod_idr &= eval_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop_product_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idl \textbf{ where} \\ prod_idl &= eval_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop_e_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_e_id a &= eval_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop_negate_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_negate_id a &= eval_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop_double_negate &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_double_negate a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} eval_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 13 expressa como um hilomorfismo² e teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 4 A função *optimize_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop_optimize_respects_semantics &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_optimize_respects_semantics a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:³

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

²Qual é a vantagem de implementar a função *optimize_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

³Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 5 A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (Real a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 6 Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, Real a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.⁴

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algebrá* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

⁴Lei (3.94) em [?], página 98.

$$\begin{aligned} f\ 0 &= 1 \\ f\ (n + 1) &= fib\ n + f\ n \end{aligned}$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned} fib' &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ \text{loop } (fib, f) &= (f, fib + f) \\ \text{init} &= (1, 1) \end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁵
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas⁶, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} f\ 0 &= c \\ f\ (n + 1) &= f\ n + k\ n \\ k\ 0 &= a + b \\ k\ (n + 1) &= k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} f'\ a\ b\ c &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ \text{loop } (f, k) &= (f + k, k + 2 * a) \\ \text{init} &= (c, a + b) \end{aligned}$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de C_n que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \text{for loop init where } \dots$$

que implemente esta função.

Propriedade [QuickCheck] 7 A função proposta coincidem com a definição dada:

$$prop_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto $\{P_0, \dots, P_N\}$ de pontos de controlo, onde N é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

⁵Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

⁶Secção 3.17 de [?] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.

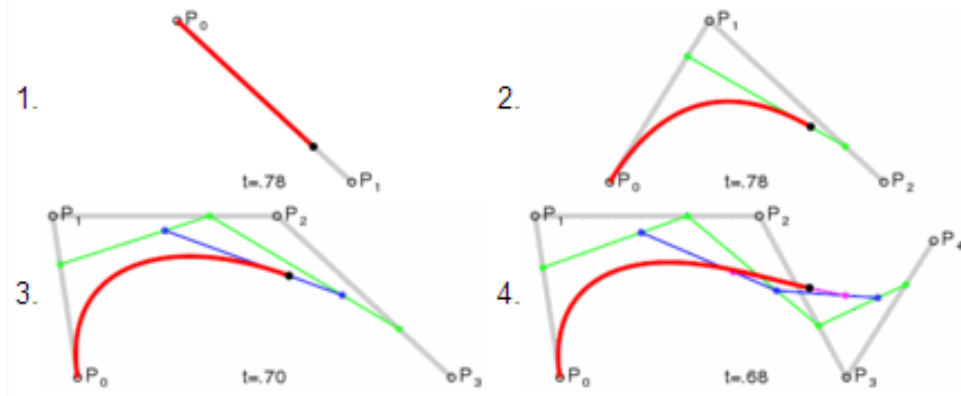


Figure 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto $\{P_0\}$ (ordem 0) é o próprio ponto P_0 . O valor de uma curva de Bézier de ordem N é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros $N - 1$ pontos e da curva de Bézier dos últimos $N - 1$ pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo $[0, 1]$, é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão N é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados $NPoint$ representa um ponto com N dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados $OverTime$ a representa um termo do tipo a num dado instante (dado por um $Float$).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente `calcLine` como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 8 *Definição alternativa.*

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função `deCasteljau` como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 9 *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho⁷ clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia x ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde $k = \text{length } x$. Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

Propriedade [QuickCheck] 10 *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: [Double] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

⁷A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁸

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina⁹, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $\exp x = e^x$, via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

⁸Exemplos tirados de [?].

⁹Cf. [?], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan¹⁰:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

¹⁰Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:¹¹

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

¹¹Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop <- arbitrary
    unop <- arbitrary
    exp1 <- arbitrary
    exp2 <- arbitrary
    a <- arbitrary
    frequency · map (id × pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]
infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) :: Real a => a -> a -> Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x) == (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 =>
(>=) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f =  $\lambda$ a -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f =  $\lambda$ a -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ==
(==) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f == g =  $\lambda$ a -> f a == g a
infixr 4 <=
(<=) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f <= g =  $\lambda$ a -> f a <= g a
infixr 4 ^&
(^&) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f ^& g =  $\lambda$ a -> ((f a) ^& (g a))
```

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

$$\begin{aligned} & outExpAr \cdot inExpAr = id \\ \equiv & \quad \{ \text{inExpAr = pela definição} \} \\ & outExpAr \cdot [\underline{X}, num_ops] = id \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{ Fusão- + (20) } \} \\
&\quad [outExpAr \cdot \underline{X}, outExpAr \cdot num_ops] = id \\
&\equiv \{ \text{ Universal- + (17), e (1) com } k = id, f = outExpAr \cdot X, g = outExpAr \cdot num_ops \} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = outExpAr \cdot \underline{X} \\ id \cdot i_2 = outExpAr \cdot num_ops \end{array} \right. \\
&\equiv \{ 71, 72, \text{ e substituímos numOps por N e ops } \} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 \cdot var = outExpAr \cdot \underline{X} \cdot var \\ id \cdot i_2 = outExpAr \cdot [N, ops] \end{array} \right. \\
&\equiv \{ 74 \text{ e } 20 \} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 \cdot var = outExpAr \cdot X \\ id \cdot i_2 = [outExpAr \cdot N, outExpAr \cdot ops] \end{array} \right. \\
&\equiv \{ \text{ Universal- + (17) , com } k = id \cdot i_2, f = outExpAr \cdot N, g = outExpAr \cdot ops, \text{ excluímos o primeiro ramo porque já chega} \} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} i_2 \cdot (i_1 \cdot x) = outExpAr \cdot N \\ i_2 \cdot i_2 = outExpAr \cdot ops \end{array} \right. \\
&\equiv \{ ops = [bin, \widehat{Un}], \text{ o primeiro ramos está concluído } \} \\
&\quad i_2 \cdot i_2 = outExpAr \cdot [bin, \widehat{Un}] \\
&\equiv \{ 74 \} \\
&\quad i_2 \cdot i_2 = [outExpAr \cdot bin, outExpAr \cdot \widehat{Un}] \\
&\equiv \{ \text{ Universal- + (17) , e (1) com } k = i_2 \cdot i_2, f = outExpAr \cdot bin, g = outExpAr \cdot uncurry \cdot Un \} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 = outExpAr \cdot bin \\ i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 = outExpAr \cdot \widehat{Un} \end{array} \right. \\
&\square
\end{aligned}$$

São dadas:

$$\begin{aligned}
cataExpAr \ g &= g \cdot recExpAr \ (cataExpAr \ g) \cdot outExpAr \\
anaExpAr \ g &= inExpAr \cdot recExpAr \ (anaExpAr \ g) \cdot g \\
hyloExpAr \ h \ g &= cataExpAr \ h \cdot anaExpAr \ g \\
eval_exp &:: Floating \ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr \ a) \rightarrow a \\
eval_exp \ a &= cataExpAr \ (g_eval_exp \ a) \\
optimize_eval &:: (Floating \ a, Eq \ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr \ a) \rightarrow a \\
optimize_eval \ a &= hyloExpAr \ (gopt \ a) \ clean \\
sd &:: Floating \ a \Rightarrow ExpAr \ a \rightarrow ExpAr \ a \\
sd &= \pi_2 \cdot cataExpAr \ sd_gen \\
ad &:: Floating \ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr \ a \rightarrow a \\
ad \ v &= \pi_2 \cdot cataExpAr \ (ad_gen \ v)
\end{aligned}$$

Definir:

$$\begin{aligned}
&\text{-- outExpAr} :: ExpAr \ a \rightarrow \text{Either} \ () \ (\text{Either} \ b3 \ (\text{Either} \ (b4, (ExpAr \ a, ExpAr \ a)) \ (b5, ExpAr \ a))) \\
outExpAr \ X &= i_1 \ () \\
outExpAr \ (N \ a) &= i_2 \ \$ \ i_1 \ a \\
outExpAr \ (Bin \ op \ a \ b) &= i_2 \ \$ \ i_2 \ \$ \ i_1 \ (op, (a, b)) \\
outExpAr \ (Un \ op \ a) &= i_2 \ \$ \ i_2 \ \$ \ i_2 \ (op, a) \\
&\text{--} \\
recExpAr \ g &= baseExpAr \ id \ id \ id \ g \ g \ id \ g \\
&\text{--}
\end{aligned}$$

$g_eval_exp :$

$$\begin{array}{ccc}
num \times Exp\ A & \xrightarrow{outExpAr} & num \times (X + (N\ num) + (Bin\ (Expr\ num)\ (Expr\ num)) + (Un\ (Expr\ num))) \\
\downarrow eval_exp & & \downarrow \llbracket g_eval_exp \rrbracket \\
num & \xleftarrow{g_eval_exp} & num^A + (N\ a) + num + num
\end{array}$$

optimize_eval

$$\begin{array}{ccc}
num \times Exp\ A & \xrightarrow{id \times clean} & num \times outExpAr\ (ExpAr) \\
\downarrow id \times anaNat\ clean & & \downarrow id \times anaNat\ clean \\
num \times Exp\ A & \xrightarrow{id \times outExpAr} & num \times outExpAr\ (ExpAr) \\
\downarrow \llbracket gopt \rrbracket & & \downarrow \llbracket gopt \rrbracket \\
num & \xleftarrow{gopt} & num \times outExpAr\ (ExpAr)
\end{array}$$

g_eval_exp = \perp
-- *g_eval_exp*(Num) = Num
-- *g_eval_exp* = *eval_exp*.(*baseExpAra*)
-- *g_eval_exp*(Nnum) = Nnum
-- *g_eval_exp*(Unoperadorexpressao) = Unoperadorexpressao
-- *g_eval_exp*(Binoperadorx1x2) = Binoperadorx1x2 - (*g_eval_exp*x1)(*g_eval_exp*x2)
--
clean = \perp
--
gopt = \perp

sd_gen :: Floating a \Rightarrow
() + (a + ((BinOp, ((ExpAr a, ExpAr a), (ExpAr a, ExpAr a))) + (UnOp, (ExpAr a, ExpAr a)))) \rightarrow (ExpAr a
-- *sd_gen* = undefined
{-*sd_gen* = either(X, (N1))(eithernumop)wherenumnumero = ((Nnumero), (N0))op = eitherbinunbin(Sum,
sd_gen = [x, [nat, ops]] **where**
x = $\langle \underline{X}, (N\ 1) \rangle$ -- (X, (N 1)) - X -; X
nat = flip $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (N 0) \ll $\cdot \cdot N$
ops = [bin, un]
un = unDer
bin = binDer
unDer (E, (exp1, exp2)) = (Un E exp1, Bin Product (Un E exp1) (sd exp1))
unDer (Negate, (exp1, exp2)) = (Un Negate exp1, Un Negate exp2)
binDer (Sum, ((coisa1, coisa11), (coisa2, coisa22))) = (Bin Sum coisa1 coisa2, Bin Sum (coisa11) (coisa22))
binDer (Product, ((coisa1, coisa11), (coisa2, coisa22))) = (Bin Product coisa1 coisa2, Bin Sum (Bin Product coisa1 coisa2, Bin Sum (coisa11, coisa11) (coisa22, coisa22)))

ad_gen v = [x, [nat, ops]] **where**
x = $\langle \underline{v}, \underline{1} \rangle$ -- split v 1 - (X, (N 1)) - X -; X
nat valor = (valor, 0) -- flip split 0 =; const . N
ops = [bin, un]
un = unDerAd
bin = binDerAd
unDerAd (E, (exp, val)) = (expd (exp), val * expd (exp))
unDerAd (Negate, (val1, val2)) = (-val1, -val2)
binDerAd (Sum, ((exp1, vEsq), (exp2, vDir))) = (exp1 + exp2, vEsq + vDir)
binDerAd (Product, ((exp1, vEsq), (exp2, vDir))) = (exp1 * exp2, exp1 * vDir + vEsq * exp2)
{-*ad_genv*(Leftd) = (v, 1)*ad_genv*(Right(Left(value))) = (value, 0)*ad_genv*(Right(Right(Left(Sum, ((exp1, vEsq), (exp2, vDir)))))) = (exp1 + exp2, vEsq + vDir)

Problema 2

Definir

$$\begin{aligned} loop &= \perp \\ inic &= \perp \\ prj &= \perp \end{aligned}$$

por forma a que

$$cat = prj \cdot \text{for } loop \text{ inic}$$

seja a função pretendida. **NB:** usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

Problema 3

Esquema do Gonçalves

$$\begin{array}{ccc} NPoint & \xrightarrow{\text{out}} & 1 + Q \times NPoint \\ \downarrow \langle gene \rangle & & \downarrow id + id \times \langle gene \rangle \\ (OverTime \ NPoint)^{NPoint} & \xleftarrow[\text{gene} = [\underline{nil}, g]]{} & 1 + Q \times (OverTime \ NPoint)^{NPoint} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [NPoint] & \xrightarrow{\text{divide}} & [NPoint] + ([NPoint], [NPoint]) \\ \downarrow \text{anaNat divide} & & \downarrow id + divide \\ LTree \ [NPoint] & \xrightarrow{\text{outLTree}} & \text{Functor da LTree de } [NPoint] \\ \downarrow \langle conquer \rangle & & \downarrow \langle conquer \rangle \\ OverTime \ NPoint & \xleftarrow[\text{conquer}]{} & NPoint \times OverTime \ NPoint \times OverTime \ NPoint \end{array}$$

Mas tenho dúvidas neste esquema

```

deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau = hyloNP conquer divide -- conquer . divide

hyloNP = hyloLTree
conquer = [f2, f3] where
  f2 (x) = x
  f3 l@(y1, y2) = λpt -> (calcLine (y1 pt) (y2 pt)) pt

divide [] = i1 ([])
divide [x] = i1 (x)
divide x = i2 (init x, tail x)
-- divide :: [NPoint] -> Either () (Either (NPoint) (NPoint, ([NPoint], [NPoint])))
calcLine = cataList h where
  h = [nil, g]
g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
g (d, f) l = case l of
  [] -> nil
  (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl . linear1d d x, f xs]) z

```

Problema 4

$$\begin{aligned}
& avg_aux = \langle avg, length \rangle = \langle [b, q] \rangle \\
& \equiv \{ (52) \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} avg \cdot \mathbf{in} = b \cdot F \langle avg, length \rangle \\ length \cdot \mathbf{in} = q \cdot F \langle avg, length \rangle \end{array} \right. \\
& \equiv \{ \text{Functor das listas } F = id + id \times f \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} avg \cdot \mathbf{in} = b \cdot (id + id \times \langle avg, length \rangle) \\ length \cdot \mathbf{in} = q \cdot (id + id \times \langle avg, length \rangle) \end{array} \right. \\
& \equiv \{ \mathbf{in} = [\mathbf{nil}, \mathbf{cons}], (20), b = [b1, b2]; q = [q1, q2] \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} [avg \cdot \mathbf{nil}, avg \cdot \mathbf{cons}] = [b1, b2] \cdot (id + id \times \langle avg, length \rangle) \\ [length \cdot \mathbf{nil}, length \cdot \mathbf{cons}] = [q1, q2] \cdot (id + id \times \langle avg, length \rangle) \end{array} \right. \\
& \equiv \{ (22), (1) \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} [avg \cdot \mathbf{nil}, avg \cdot \mathbf{cons}] = [b1, b2, id \cdot \langle avg, length \rangle] \\ [length \cdot \mathbf{nil}, length \cdot \mathbf{cons}] = [q1, q2 \cdot (id \cdot \langle avg, length \rangle)] \end{array} \right. \\
& \equiv \{ (27) \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} avg \cdot \mathbf{nil} = b1 \\ avg \cdot \mathbf{cons} = b2 \cdot (id \times \langle avg, length \rangle) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} length \cdot \mathbf{nil} = q1 \\ length \cdot \mathbf{cons} = q2 \cdot (id \times \langle avg, length, \cdot \rangle) \end{array} \right. \\
& \equiv \{ \text{Introdução de variáveis (71 e 72)} \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} avg (\mathbf{nil} \ l) = b1 \ l \\ avg (\mathbf{cons} (h, l)) = b2 ((id \times \langle avg, length \rangle) (h, t)) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} length (\mathbf{nil} \ l) = q1 \ l \\ length (\mathbf{cons} (h, t)) = q2 ((id \times \langle avg, length \rangle) (h, t)) \end{array} \right. \\
& \equiv \{ (76); (77); (1) \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} avg [] = b1 \ l \\ avg (\mathbf{cons} (h, l)) = b2 (h, \langle avg \ t, length \ t \rangle) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} length [] = q1 \ l \\ length (\mathbf{cons} (h, t)) = q2 (h, \langle avg \ t, length \ t \rangle) \end{array} \right. \\
& \equiv \{ \text{Daqui inferimos} \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} b1 = one \\ b2 (h, (avg, len)) = \frac{h + len \times avg}{len + 1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q1 = one \\ q2 (h, (avg, len)) = len + 1 = succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \end{array} \right. \\
& \equiv \{ \text{Logo temos} \} \\
& \langle avg, len \rangle = \langle [b1, b2], [q1, q2] \rangle \\
& \equiv \{ \text{Lei da troca} \} \\
& [\langle b1, q1 \rangle, \langle b2 \ q2, \cdot \rangle] \\
& \square
\end{aligned}$$

Solução para listas não vazias:

$$avg = \pi_1 \cdot avg_aux$$

$$inListNotNull = [singl, cons]$$

$$outListNotNull [a] = i_1 (a)$$

$$outListNotNull (h : t) = i_2 (h, t)$$

$$cataListNotNull g = g \cdot recList (cataListNotNull g) \cdot outListNotNull$$

$$avg_aux = cataListNotNull \text{ gene } \mathbf{where}$$

$$\text{gene} = [\langle b1, q1 \rangle, \langle b2, q2 \rangle]$$

$$b1 = id$$

$$b2(h, (avg, len)) = (h + len * avg) / (len + 1)$$

$$q1 = 1$$

$$q2 = succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2$$

Solução para árvores de tipo **LTree**:

```

avgLTree =  $\pi_1 \cdot \langle gene \rangle$  where
  gene = [b, q]
  b =  $\langle id, 1 \rangle$ 
  q =  $\langle q1, q2 \rangle$ 
  q1 ((avgL, lenL), (avgR, lenR)) = (lenL * avgL + (lenR * avgR)) / (lenL + lenR)
  q2 ((-, lenL), (-, lenR)) = lenL + lenR

```

Problema 5

Inserir em baixo o código **F#** desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`:

```

type BTree<'a> = Empty | Node of 'a * BTree<'a> * BTree<'a>
//type btree = Empty | Node of btree * int * btree

let inBTree x =
    match x with
    | Left() -> Empty
    | Right (nodo, (t1, t2)) -> Node (nodo, t1, t2)

let outBTree x =
    match x with
    | Empty -> i1 ()
    | Node (nodo, t1,t2) -> i2 (nodo, (t1,t2))

// (2) Ana + cata + hylo -----

let baseBTree g f = id -|- (g >< (f >< f))

let recBTree f = baseBTree id f
// Haskell recBTree g = id -|- (id >< (g >< g))

let rec cataBTree a = a << (recBTree (cataBTree a)) << outBTree
// << é um pipeline que encaixa o da direita no da esquerda
//Também existe o >> :)

let rec anaBTree f = inBTree << (recBTree (anaBTree f) ) << f

let hyloBTree a c = cataBTree a << anaBTree c

// (3) Map -----

//instance Functor BTree
//      where fmap f = cataBTree ( inLTree . baseLTree f id )
let fmap f = cataBTree ( inBTree << baseBTree f id )

// (4) Examples -----

// (4.0) Inversion (mirror) -----

let invBTree x = cataBTree (inBTree << (id -|- (id >< swap))) x

// (4.1) Counting -----

```

```

let countBTree x = cataBTree (either one (succ << (add) << p2)) x

/-- (4.3) Serialization -----

let singl x = [x]

let inord x =
  let join (nodo, (esq, dir)) = esq @ singl nodo @ dir
  in (either nil join) x

let inordt x = cataBTree inord x

let preordt x =
  let join (nodo, (esq, dir)) = nodo :: esq @ dir
  in cataBTree (either nil join) x

let postordt x =
  let join (nodo, (esq, dir)) = esq @ dir @ singl nodo
  in cataBTree (either nil join) x

/-- (4.4) Quicksort -----

let rec part p lista =
  match p, lista with
  | p, [] -> ([], [])
  | p, (h::t) -> let (s, l) = part p t
                 in if p h then (h::s, l)
                    else (s, h :: l)

/-- (4.5) Traces -----

let union l1 l2 =
  match l1, l2 with
  | [], l -> l
  | l, [] -> l1
  | otherwise -> let l3 = l2 |> List.filter(fun x -> not (List.contains x l1))
                 in l1 @ l3

let tunion(nodo, (esq, dir)) = union (List.map (fun t -> nodo::t) esq) (List.map (fun t -> nodo::t) dir)

let traces x = cataBTree (either (konst [[]]) tunion) x

/-- (4.6) Towers of Hanoi -----
let present = inord // same as in qSort

let strategy (x,y) =
  match (x,y) with
  | (x, 0) -> Left()
  | (x, n) -> Right ((n-1,x), ((not x,n-1), (not x,n-1)))

//strategy(d,0) = Left ()
//strategy(d,n+1) = Right ((n,d), ((not d,n), (not d,n)))

let hanoi x = hyloBTree present strategy x

```