INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

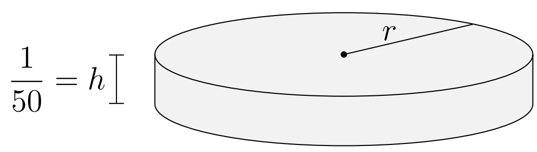
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas – ENCB

C Á L C U L O

Tercera evaluación (9/07/2020)

1. Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene espesor constante de $\frac{1}{50}ft$. Si el petróleo se esta escapando a razón de $40ft^3/min$. ¿A qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de $50ft$?

Solución: Primero que nada hacemos un dibujo del problema. En este caso se dibuja un cilindro recto circular con altura o espesor constante $h = \frac{1}{50}$ y radio r que es el que irá cambiando para $t \geq 0$.



entonces,definimos el volumen de un cilindro rectangular como $V = \pi r^2 h$, sustituyendo $h = \frac{1}{50}$ se tiene $V = \frac{\pi}{50} r^2$.

La razón de cambio del volumen con respecto al tiempo es:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{2\pi}{50} r(t) \cdot \frac{dr(t)}{dt}, \tag{1}$$

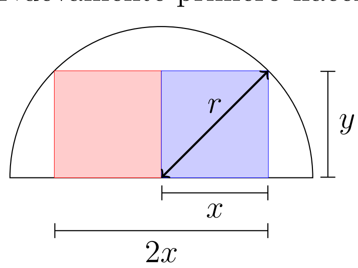
por otro lado, sabemos que el petróleo se esta escapando a razón de $40ft^3/min$, eso quiere decir que $\frac{dV(t)}{dt} = 40$, así mismo nos están preguntando la razón de cambio del radio de la mancha de petróleo, por lo que necesitamos encontrar $\frac{dr(t)}{dt}$ cuando $r = 50ft$, entonces de (1) se tiene:

$$40 = \frac{2\pi}{\cancel{50}} (\cancel{50}) \cdot \frac{dr(t)}{dt},$$

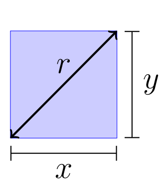
por lo tanto la solución es que el radio esta cambiando a razón de $\frac{dr(t)}{dt} = \frac{20}{\pi}\ ft/min$.

2. Se requiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo y cuales son sus dimensiones?

Solución: Nuevamente primero hacemos un dibujo del problema



Por lo tanto las medidas del rectángulo que nos interesan serán $ancho = 2x$ y $alto = y$. Dividimos el rectángulo en dos por la mitad, lo que nos quedaría un rectángulo de $ancho = x$ y $alto = y$, denotando con r al radio del semicírculo, por lo tanto tomando uno de los rectángulos pequeños.



por el teorema de Pitágoras decimos que

$$r^2 = x^2 + y^2$$

y por lo tanto

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

entonces el área del rectángulo es

$$A(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}, \tag{2}$$

cuyo dominio es $D_A = (0, r]$.

A la ecuación (2) es a la que hay que encontrar los puntos máximos (pues piden las dimensiones más grandes) entonces se siguen estos pasos

1. Derivar $A(x)$, entonces queda

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dx} &= x\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}\right)+\sqrt{r^2-x^2}\\
&= \frac{-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}+\sqrt{r^2-x^2},\\
&= \left(\frac{-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{r^2-x^2},\\
&= \left(\frac{-x^2}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\right)\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}+\left(\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^{\cancel{2}},\\
&= -x^2+r^2-x^2,\\
&= r^2-2x^2
\end{aligned}$$

2. Hacer $\dfrac{dA(x)}{dx}=0$, entonces

$$r^2-2x^2=0,$$

3. Despejar a x, lo que resulta es

$$x=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}r}{2}, \tag{3}$$

4. Se sabe que (3) es un punto crítico, habrá que encontrar si es un máximo o un mínimo, hay dos formas de hacerlo. En esta ocasión se usará el criterio de la segunda derivada, este dice que se derive dos veces (2) y se sustituya el punto critico (3) y si el resultado es negativo entonces será un máximo, mientras que si es positivo entonces será un mínimo. Entonces

$$A''(x)=\frac{d^2A(x)}{dx^2}=-4x,$$

entonces, sea $A"\left(\dfrac{\sqrt{2}r}{2}\right)=-\cancel{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}r}{\cancel{2}}\right)=-2\sqrt{2}r^2<0, \forall r\in D_A$, por lo que se concluye que (3) es un máximo y por lo tanto maximiza las dimensiones del rectángulo.

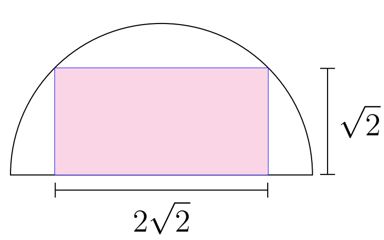
5. Finalmente las dimensiones del rectángulo que nos interesa son

$$ancho=\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\cancel{2}}\right)=\sqrt{2}r, \tag{4}$$

$$alto=\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}r}{2}. \tag{5}$$

Sustituyendo el valor de $r=2$, se tiene

$$ancho=2\sqrt{2} \qquad \& \qquad alto=\sqrt{2} \tag{6}$$



Una forma de saber que es correcto el resultado es verificar que el área del rectángulo es menor que el área del semicírculo. Denotando como A_r al área del rectángulo y como A_{sc} al área del semicírculo, se tiene

$$\begin{aligned}
A_r &= \left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)=4,\\
A_{sc} &= \frac{4\pi}{2}=2\pi,
\end{aligned}$$

es claro que $A_r<A_{sc}$ por lo que comprobamos que es correcto nuestro resultado.

3. Dada la función $f(x) = \left(x^3 - 3x\right)^2$ determine:

   (a) Intervalos donde la función es creciente y decreciente.

Solución: Lo que se hará es encontrar los puntos críticos, posteriormente se utilizará el criterio de la segunda derivada para definir cuáles son máximos y cuáles mínimos para posteriormente definir los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

1. Derivar $f(x)$, se tiene

$$f'(x) = 2\left(x^3 - 3x\right)\left(3x^2 - 3\right) = 6x\left(x^2 - 3\right)\left(x^2 - 1\right) = 6x^5 - 24x^3 + 18x$$

2. Para encontrar los puntos críticos se hace $f'(x) = 0$, entonces

$$6x\left(x^2 - 3\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$$

de aquí se deduce lo siguiente

- $x = 0$,
- $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$,
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\xrightarrow[entonces]{}$

- $x_1 = -\sqrt{3}$,
- $x_2 = -1$,
- $x_3 = 0$,
- $x_4 = 1$,
- $x_5 = \sqrt{3}$

3. Se encuentra la segunda derivada de $f(x)$, esto es

$$f''(x) = 30x^4 - 72x^2 + 18$$

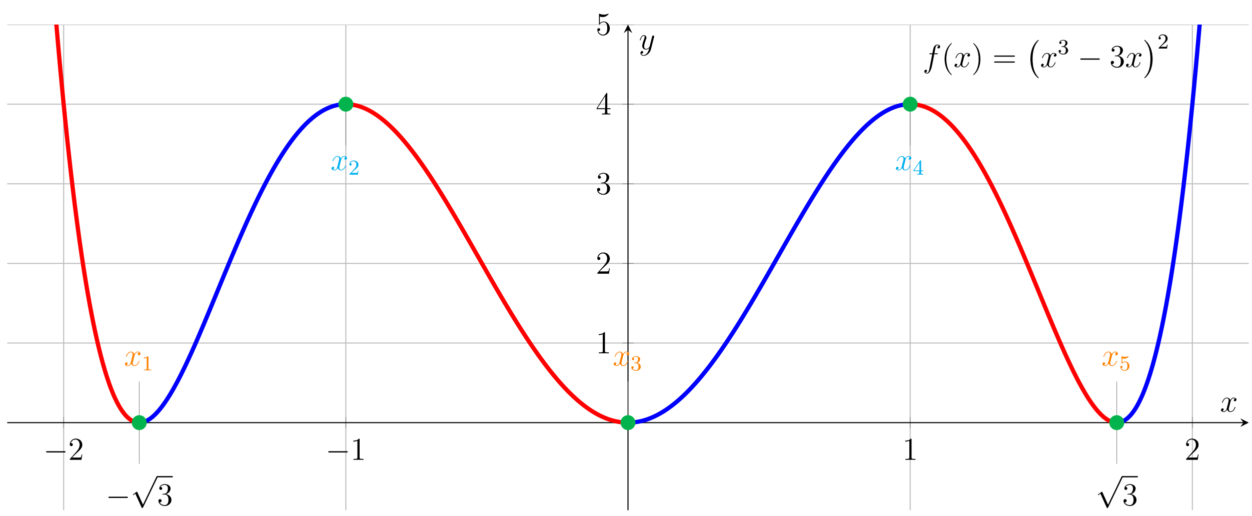
4. Definir si son máximos o mínimos, esto es haciendo $f''(x_i)$ con $i = 1, \ldots, 5$ y analizando su signo.

- $f''(x_1) = 30\left(-\sqrt{3}\right)^4 - 72\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 18 = 270 - 216 + 18 = 72 > 0 \Rightarrow x_1$, mínimo,
- $f''(x_2) = 30(-1)^4 - 72(-1)^2 + 18 = 30 - 72 + 18 = -24 < 0 \Rightarrow x_2$, máximo,
- $f''(x_3) = 30(0)^4 - 72(0)^2 + 18 = 0 - 0 + 18 = 18 > 0 \Rightarrow x_3$, mínimo,
- $f''(x_4) = 30(1)^4 - 72(1)^2 + 18 = 30 - 72 + 18 = -24 < 0 \Rightarrow x_4$, máximo,
- $f''(x_5) = 30\left(\sqrt{3}\right)^4 - 72\left(\sqrt{3}\right)^2 + 18 = 270 - 216 + 18 = 72 > 0 \Rightarrow x_5$, mínimo

5. Se definen los siguientes intervalos y se declara si son crecientes o decrecientes

$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, -1\right)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
decreciente	creciente	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Table 1: Intervalos de crecimiento y decrecimiento



4. La concentración de un medicamento en la sangre de un paciente t horas después de una inyección disminuye a una tasa de $C'(t) = \dfrac{-0.33t}{\sqrt{0.02t^2+10}}$ mg/cm^3 por hora. ¿En cuánto cambia la concentración en las primeras 4 horas después de la inyección?

Solución: Nos piden el cambio de la concentración en las primeras 4 horas después de la inyección, es decir, que quieren saber cuánto disminuyo en el intervalo $0 \leq t \leq 4$, por lo que lo primero que debemos de encontrar será la concentración, para ello se procederá a integrar la función $C'(t)$ y se tiene

$$\int_0^4 C'(t)dt = \int_0^4 \frac{-0.33t}{\sqrt{0.02t^2+10}}dt$$

se sigue lo siguiente

$$-0.33\int_0^4 \frac{t}{\sqrt{0.02t^2+10}}dt$$

se resuelve por cambio de variable

$$u = 0.02t^2+10$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2(0.02t)dt = 0.04tdt \Rightarrow \frac{1}{0.04}du = tdt$$

sustituyendo lo anterior se tiene

$$-0.33\int_0^4 \frac{\frac{1}{0.04}du}{\sqrt{u}} = \frac{-0.33}{0.04}\int_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{-0.33}{0.04}\int_0^4 u^{-1/2}du = \frac{-0.33}{0.04}\left[\frac{u^{-1/2+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{-0.33}{0.04}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^4$$
$$= \frac{(2)(-0.33)}{0.04}\left[u^{1/2}\right]_0^4 = \frac{33}{2}\left[u^{1/2}\right]_0^4$$

sustituyendo $u = 0.02t^2+10$ se tiene

$$= \frac{33}{2}\left[\left(0.02t^2+10\right)^{1/2}\right]_0^4 = \frac{33}{2}\left[\sqrt{0.02t^2+10}\right]_0^4 = \frac{33}{2}\left[\sqrt{0.02(4)^2+10} - \sqrt{0.02(0)^2+10}\right]$$
$$= \frac{33}{2}\left[\sqrt{10.32} - \sqrt{10}\right] \approx -0.8283\ mg/cm^3$$

finalmente decimos que la concentración ha cambiado en -0.8283 mg/cm^3 en las primeras 4 horas.

5. Evalua las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$ *b)* $\displaystyle\int x\ln(x+1)dx$

Solución:

a) Para la resolución de esta problema se utilizará el método de cambio de variable, entonces se plantea

$$u = x^2+9$$
$$du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$$

entonces se hace el cambio de variable

$$\int_0^4 \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^4 u^{-1/2}du$$

resolviendo la integral con la formula $\displaystyle\int_a^b u^n du = \left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$, entonces

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\right]_0^4 = \left[u^1/2\right]_0^4 = \left[x^2+9\right]_0^4$$
$$= \sqrt{4^2+9} - \sqrt{9} = \sqrt{25} - 3 = 5 - 3 = 2$$

finalmente

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}} = 2$$

b) Este problema se resuelve por el método de resolución de integración por partes, entonces se selecciona

$$u = \ln(x+1) \qquad dv = x dx$$
$$du = \frac{dx}{x+1} \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

aplicando $uv - \int v du$ se tiene

$$\frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx \tag{7}$$

esta última integral se resuelve por el método de cambio de variable, se hace el cambio $w = x+1 \Rightarrow (w-1)^2 = x^2$, y $dw = dx$, resolviendo esta última integral se tiene

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{(w-1)^2}{w}dw = \int \frac{w^2-2w+1}{w}dw = \int w dw - 2\int dw + \int \frac{1}{w}dw$$

que tiene como respuesta es

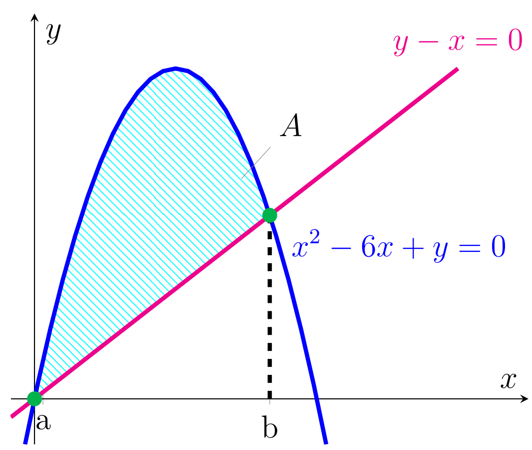
$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{w^2}{2} - 2w + \ln(w) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2(x+1) + \ln(x+1) = \frac{x^2-2x-3}{2} + \ln(x+1)$$

finalmente la respuesta es

$$\int x\ln(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}\left(x^2-2x-3\right) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C \tag{8}$$

6. Determina el área de la región del plano cartesiano limitada por: La parábola $x^2 - 6x + y = 0$ y la recta $y - x = 0$.

Solución: Primero se graficarán las funciones y se determinará el área entre las curvas con la letra A.



posteriormente se usará la formula para calcular el área $A = \int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)dx$, siendo $a = 0$ y $b = 5$, además de que se tiene $f(x) = x$ y $g(x) = -x^2 + 6x$, por lo que sustituyendo en la formula se tiene.

$$A = \int_0^5 \Big(-x^2 + 6x - x\Big)dx = \int_0^5 \Big(-x^2 + 5x\Big)dx = -\int_0^5 x^2 dx + 5\int_0^5 x dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\Big|_0^5$$

por lo tanto

$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\Big|_0^5 = \left[-\frac{1}{3}(5)^3 + \frac{5}{2}(5)^2\right] - \left[-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{5}{2}(0)^2\right] = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = 125\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{6}$$

finalmente el área entre las curvas es $A = \dfrac{125}{6}u^2$.