Komplexe Zahlen- eine wasserdichte Definition

Definition:
Eine komplexe Zahl z ist ein Wertepaar reeller Zahlen a und b $z=(a;b)$, wobei a den Realanteil und b den Imaginäranteil darstellt.
Re(z)=a und Im(z)=b
Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Rechenregeln werden definiert:
Zwei komplexe Zahlen (a; b) und (c; d) mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ werden wie folgt
addiert: (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d).
Subtraktion: (a; b) − (c; d) = (a; b) + (−c; −d) = (a − c; b − d).
Eine komplexe Zahl (a; b) wird wie folgt mit einer reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$
multipliziert: r · (a; b) = (ra; rb).
Multiplikation zweier komplexer Zahlen: (a; b) · (c; d) = (ac − bd; ad + bc)
mit neuer Schreibweise: (a · **1** + b · **i**) · (c · **1** + d · **i**) = (ac − bd) · **1** + (ad + bc) · **i**

Komplexe Zahlen als Vektorraum:
Eine komplexe Zahl als Wertepaar kann mit einem Vektor im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ verglichen werden, wobei auch Rechen arten, wie Addition und Multiplikation analog zur Vektoraddition und Vektormultiplikation sind. Der Vektorraum bei komplexen Zahlen hat wie der Vektorraum von $\mathbb{R}^2$ zwei Koordinatenachsen. Dabei gibt die x-Achse den reellen Anteil und die y-Achse den imaginären Teil der komplexen Zahl an.
Für die Darstellung komplexer Zahlen wird die Gleichung z = (a; b) = a · (1; 0) + b · (0; 1) verwendet. Dabei ist das Wertepaar (1; 0)= **1** als Einselement definiert, während das Wertepaar (0; 1)= **i** angibt. Es ergibt sich also folgende Gleichung: z = (a; b) = a · **1** + b · **i** .
Da es auch im Vektorraum $\mathbb{C}$ eine Zahl geben muss, die bei Multiplikation ein Wertepaar einer anderen komplexen Zahl nicht verändert, also einer 1 entspricht, ist dies das Einselement (**1**) , denn (1; 0) · (a; b) = (a; b) gilt für alle $a,b \in \mathbb{R}$.
Die allgemeine Darstellung von komplexen Zahlen lautet also:

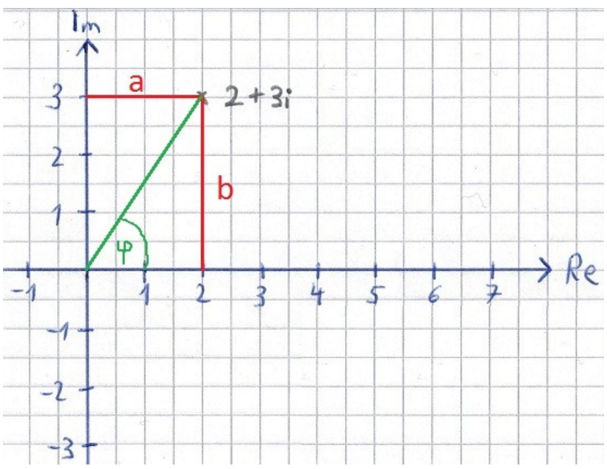
Imaginäre Einheit

z = (a; b) = a + b · **i** .

Realanteil

Imaginäranteil

Beispiel: (2;3) = 2+3**i**



Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie:
a) $3 \cdot (2; -1)$ und $(6; 0) \cdot (4; -1)$
b) $(1;\ 3) \cdot (1;\ -3)$ und die ersten drei Potenzen von $(2;\ -2)$
c) $(5; 4) - (1; -2)$

2. Bestimmen Sie Real-und Imaginäranteil von:
a) z= (2 – 7i) + (12 - 13i) b) z= $(5+7i)\cdot(3+i)$

3. Benutze i= (0;1), um $i^2=-1$ nachzuweisen

4. Bestimmen Sie reelle Zahlen c und d so, dass $(-1; 2) \cdot (c; d) = (-13; 1)$