1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

1.1 Zahlbereichserweiterung

Ziel ist es Gleichungen wie $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ zu lösen. Man definiert dazu nun eine Einheit $\mathbf{i}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{i^2 = -1}$. Für so eine Zahl ist nun jedoch kein Platz mehr in der Zahlengerade, deshalb erweitert man die Zahlengerade mit den Komplexen Zahlen zu einer **Zahlenebene**. Somit sind die komplexen Zahlen eine **Erweiterung der Reellen Zahlen**. Dies wird auch **Zahlbereichserweiterung** genannt

1.2 Einführung

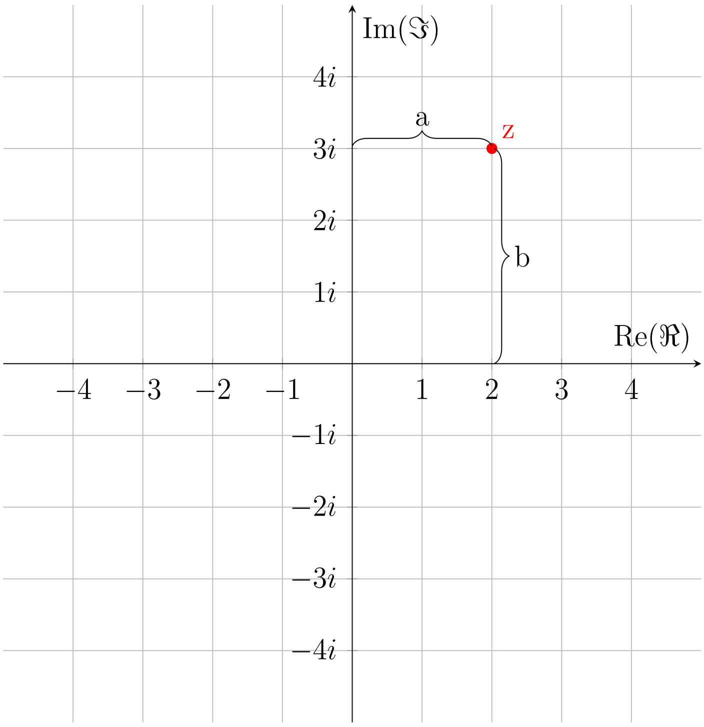
Eine komplexe Zahl $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ ist **ein Wertepaar** $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$, wobei $\mathbf{a}$ den **Realenteil** und $\mathbf{b}$ den **Imaginärenteil** darstellt.

$$
\begin{aligned}
z &= (a; b) \qquad z \in \mathbb{C} \\
a &= \mathrm{Re}(z) \\
b &= \mathrm{Im}(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a; b) + (c; d) &= (a + c; b + d) \\
(a; b) - (c; d) &= (a - c; b - d) \\
(a; b) \cdot (c; d) &= (ac - bd; ad + bc) \\
r \cdot (a; b) &= (ra; rb) \qquad r \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

1.3 Komplexe Zahlen als Vektorraum

Eine komplexe Zahl als Wertepaar kann mit einem **Vektor im Vektorraum** $\mathbb{R}^2$ verglichen werden, wobei auch Rechenarten, wie Addition und Multiplikation (mit reellen Zahlen) analog zur Vektoraddition und Vektormultiplikation sind. Der Vektorraum bei komplexen Zahlen hat wie der Vektorraum von $\mathbb{R}^2$ **zwei Koordinatenachsen**. Dabei gibt die **x-Achse den reellen Anteil und die y-Achse den imaginären Anteil** der komplexen Zahlen an. Für die Darstellung komplexer Zahlen wird die Gleichung $\mathbf{z = (a; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1)}$ verwendet. Dabei ist das Wertepaar $\mathbf{(1; 0) = 1}$ als Einselement definiert, während das Wertepaar $\mathbf{(0; 1) = i}$ angibt. Es ergibt sich also folgende Gleichung: $\mathbf{z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi}$.



1.4 Sind die reellen Zahlen wirklich eine Teilmenge von den komplexen Zahlen?

Nun haben wir eine neue Menge, in der $\sqrt{-\mathbf{1}} = \mathbf{i}$ ist, jedoch wollen wir nun beweisen, dass die Menge eine **Erweiterung der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ ist. Dazu nutzen wir unsere vorherige Definition, laut der $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = (\mathbf{x}; \mathbf{0})$ ist, nun nehmen wir zwei Zahlen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, schreiben sie nach Definition auf: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = (\mathbf{a}; \mathbf{0})$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{1} = (\mathbf{b}; \mathbf{0})$ und addieren sie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}$ und $(\mathbf{a}; \mathbf{0}) + (\mathbf{b}; \mathbf{0}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}; \mathbf{0}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}$ beim Vergleichen, stellen wir fest, dass die beiden Ergebnisse **gleich** sind, dass bedeutet, dass alle Elemente aus $\mathbb{C}$ mit $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{1}) \in \mathbb{R}$ sich **gleich wie die Reellen Zahlen verhalten**.

Wir schreiben also $z = (a; b) = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$, jedoch verzichten wir auf die $\mathbf{1}$ und schreiben $\mathbf{i}$ ohne Fettdruck, also $z = (a; b) = a + b \cdot i$.

1.5 Aufgaben

1.5.1 Berechnen Sie:

a) $(5; 4) - (1; -2)$

b) $3 \cdot (2; -1)$

c) $(6; 0) \cdot (4; 1)$

d) $(1; 3) \cdot (1; -3)$

e) Berechnen Sie die ersten drei Potenzen von $(2; -2)$.

1.5.2 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von:

a) $z = (2 - 7i) + (12 - 13i)$

b) $z = (5 + 7i) \cdot (3 + i)$

1.5.3 Benutze $i = (0; 1)$ um $i^2 = -1$ nachzuweisen

1.5.4 Bestimmen Sie die reelen Zahlen c und d so, dass $(-1; 2) \cdot (c; d) = (-13; 1)$

1.5.5 Beweise, dass für $a \cdot b$, das Kommutativgesetz gilt

1.5.6 Beweise, dass für $a \cdot b$, das Distributivgesetz gilt