1 Komplexe Zahlen wasserdicht

1.1 Zahlbereichserweiterung

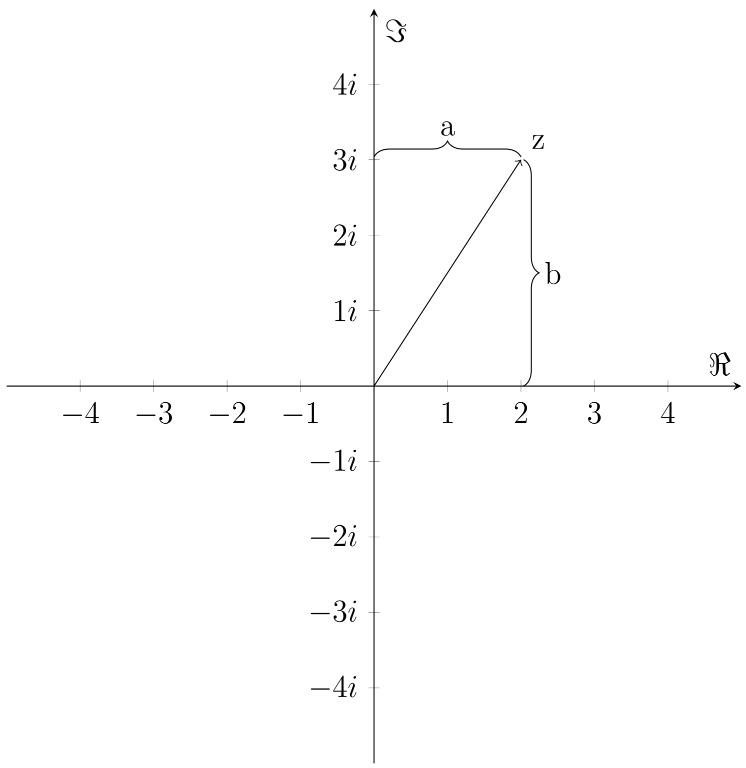
Ziel ist es Gleichungen wie $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ zu lösen. Man definiert dazu nun eine Einheit **i** mit der Eigenschaft $\mathbf{i^2 = -1}$. Für so eine Zahl ist nun jedoch kein Platz mehr in der Zahlengerade, deshalb erweitert man die Zahlengerade mit den Komplexen Zahlen zu einer **Zahlenebene**. Somit sind die komplexen Zahlen eine **Erweiterung der Reellen Zahlen**. Dies wird auch **Zahl(en)bereichserweiterung** genannt

1.2 Komplexe Zahlen als Vektorraum

Eine komplexe Zahl als Wertepaar kann mit einem Vektor im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ verglichen werden, wobei auch Rechenarten, wie Addition und Multiplikation analog zur Vektoraddition und Vektormultiplikation sind. Der Vektorraum bei komplexen Zahlen hat wie der Vektorraum von $\mathbb{R}^2$ zwei Kooridnatenachsen. Dabei gibt die x-Achse den reelen Anteil und die y-Achse den imaginären Anteil der komplexen Zahl an. Für die Darstelling komplexer Zahlen wird die Gleichung $\mathbf{z = (a; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1)}$ verwendet. Dabei ist das Wertepaar $\mathbf{(1; 0) = 1}$ als Einselement definiert, während das Wertepaar $\mathbf{(0; 1) = i}$ angibt. Es ergibt sich also folgende Gleichung: $\mathbf{z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi}$.
Eine komplexe Zahl **z** ist nun **ein Punkt** $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ auf der Zahlenebene, wobei **a die Reele und b die imaginäre Komponente der Zahl z ist**.

1.2.1 Arithmetik

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1; b_1) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2) \\
z_1 - z_2 &= (a_1; b_1) - (a_2; b_2) = (a_1 - a_2; b_1 - b_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2) \ = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)
\end{aligned}
$$



2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

2.1 Arithmetik

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a+bi) + (c+di) &&= (a+c) + (b+d)i \\
z_1 - z_2 &= (a+bi) - (c+di) &&= (a-c) + (b-d)i \\
z_1 \cdot z_2 &= (a+bi) \cdot (c+di) &&= (ac-bd) + (ad+bc)i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} &&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}
$$

3 Aufgaben zu Komplexen Zahlen