Rapport

Valorisation et Couverture d'une Option Barrière

Novembre 2025

Rédacteurs :

El Jarjini Yassine

Enseignant :

Renaud VERIN

Contents

1 Introduction Générale

Dans les marchés financiers modernes, les produits dérivés sont devenus des instruments essentiels pour la gestion des risques et la spéculation. Parmi eux, les options constituent un outil privilégié, permettant d'obtenir des gains conditionnés à l'évolution d'un actif sous-jacent.

Les options barrières, qui font partie des options exotiques, ajoutent une dépendance supplémentaire à un seuil de prix prédéfini. Elles présentent l'avantage d'être moins coûteuses que les options vanilles, mais nécessitent une valorisation plus complexe. L'objectif de cette partie est de présenter les fondements théoriques de la valorisation et de la couverture des options barrières, à partir du modèle de Black–Scholes.

2 Théorie des Options Financières

2.1 Définition

Une **option** est un contrat financier donnant à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (le prix d'exercice K) à une date future T.

- **Option d'achat (Call)** : droit d'acheter l'actif sous-jacent à K.

$$\text{Payoff}_{\text{Call}} = \max(S_T - K, 0)$$

- **Option de vente (Put)** : droit de vendre l'actif sous-jacent à K.

$$\text{Payoff}_{\text{Put}} = \max(K - S_T, 0)$$

2.2 Options Européennes et Américaines

- Une **option européenne** ne peut être exercée qu'à l'échéance T.
- Une **option américaine** peut être exercée à tout moment avant T.

3 Modèle de Black–Scholes–Merton

3.1 Hypothèses

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

1. Le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

   où μ est le taux de rendement, σ la volatilité et W_t un mouvement brownien standard.

2. Les marchés sont parfaits (pas de coûts de transaction, actifs parfaitement divisibles).

3. Le taux d'intérêt sans risque r est constant.

4. Pas d'opportunité d'arbitrage.

3.2 Dynamique sous la mesure risque-neutre

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$dS_t = (r - q)S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où q est le taux de dividende continu.

La solution est :

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma\sqrt{T} Z\right],$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3.3 Dérivation de la PDE de Black–Scholes

On considère un portefeuille sans risque :

$$\Pi = V - \Delta S,$$

où $V(S,t)$ est la valeur de l'option. En appliquant le lemme d'Itô :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}{}^2 .$$

En substituant la dynamique de S_t, on obtient :

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.$$

Le portefeuille Π étant sans risque (dW éliminé), il doit évoluer au taux r :

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

En identifiant les termes, on obtient la PDE de Black–Scholes :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.}$$

La condition terminale est :

$$V(S,T) = (S-K)_+.$$

3.4 Résolution : approche espérance risque-neutre

Sous la mesure $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)_+\right].$$

En exploitant la distribution log-normale de S_T, on obtient :

$$\boxed{C_0 = S_0 e^{-qT}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

3.5 Delta de Couverture

Le **Delta** est la sensibilité du prix de l'option au sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial C_0}{\partial S_0} = e^{-qT}\Phi(d_1).$$

C'est le paramètre clé de la stratégie de couverture dynamique.

4 Options Barrières

4.1 Définition Générale

Une **option barrière** est une option dont l'activation dépend du franchissement (ou non) d'un certain niveau de prix B appelé **barrière**.

- **Knock-In** : l'option s'active si la barrière est atteinte.
- **Knock-Out** : l'option s'annule si la barrière est atteinte.

4.2 Types d'options barrières

Type	Condition	Exemple
Down-and-Out Call	Barrière $B < S_0$, s'annule si $S_t < B$	Barrière à la baisse
Up-and-Out Put	Barrière $B > S_0$, s'annule si $S_t > B$	Barrière à la hausse
Down-and-In Call	S'active si $S_t < B$	Barrière à la baisse
Up-and-In Put	S'active si $S_t > B$	Barrière à la hausse

4.3 Formule analytique (Reiner & Rubinstein, 1991)

Pour une option **Down-and-Out Call** sans dividendes ($q = 0$), la formule est :

$$C_{DO} = C_{BS}(S_0, K) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\lambda} C_{BS}\left(\frac{B^2}{S_0}, K\right),$$

où :

$$\lambda = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2},$$

et C_{BS} désigne la formule de Black–Scholes classique.

4.4 Méthodes de Valorisation Numérique : Simulation Monte Carlo

Lorsque la formule analytique n'est pas disponible, on peut utiliser une approche de simulation :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z_t\right],$$

avec $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Le prix estimé est :

$$C_0 \approx e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (S_T^{(i)} - K)_+ \cdot \mathbf{1}_{\{\min_t S_t^{(i)} > B\}}.$$

5 Stratégie de Couverture

5.1 Principe du Delta-Hedging

On ajuste dynamiquement une position sur le sous-jacent pour neutraliser la sensibilité du portefeuille :

$$\text{Position couverte} = -\Delta \text{ unités de } S.$$

À chaque pas de temps Δt, on met à jour Δ.

5.2 Delta Numérique sous VBA

On peut estimer Δ par différences finies :

$$\Delta \approx \frac{V(S_0 + \varepsilon) - V(S_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

6 Architecture de l'Implémentation VBA et Analyse des Résultats Numériques

Cette section présente l'interprétation des quatre scénarios d'options barrières valorisées par la méthode de Monte Carlo (MC) en utilisant N=10000 trajectoires. Les résultats mettent en évidence l'impact de la barrière sur le prix (comparaison MC vs. Black-Scholes standard, noté BS) et la difficulté pratique d'estimer les sensibilités (Delta).

	parametres		Résultats
prix initial s0	100	Prix MC	72,666175
strike K	100	Prix BS	73,642897
barriere	90	Delta estimé / unité	-0,68817
taux sans risque r	0,02	Delta estimé totale	-6,881699
dividende q	0,01		
sigma	0,2		
maturite T	1		
pas par traj (nbrpas)	252		
nb de traj (nbrmc)	10000		
type de barriere	baissière activante		
type option	à la baisse		
quotité (quot)	10		

(a) Cas 1 : Call Down-and-Out (Instabilité du Delta)

	parametres		Résultats
prix initial s0	100	Prix MC	82,952231
strike K	100	Prix BS	83,494058
barriere	110	Delta estimé / unité	0,528848
taux sans risque r	0,02	Delta estimé totale	5,288481
dividende q	0,01		
sigma	0,2		
maturite T	1		
pas par traj (nbrpas)	252		
nb de traj (nbrmc)	10000		
type de barriere	haussière activante		
type option	à la hausse		
quotité (quot)	10		

(b) Cas 2 : Call Down-and-Out (Prix affecté par la barrière)

	parametres		Résultats
prix initial s0	100	Prix MC	84,869445
strike K	100	Prix BS	119,120132
barriere	90	Delta estimé / unité	0,769446
taux sans risque r	0,02	Delta estimé totale	7,694463
dividende q	0,01		
sigma	0,2		
maturite T	2		
pas par traj (nbrpas)	252		
nb de traj (nbrmc)	10000		
type de barriere	baissière désactivante		
type option	à la hausse		
quotité (quot)	10		

(c) Cas 3 : Call Up-and-In (Forte probabilité d'activation)

	parametres		Résultats
prix initial s0	100	Prix MC	84,869445
strike K	100	Prix BS	119,120132
barriere	90	Delta estimé / unité	0,769446
taux sans risque r	0,02	Delta estimé totale	7,694463
dividende q	0,01		
sigma	0,2		
maturite T	2		
pas par traj (nbrpas)	252		
nb de traj (nbrmc)	10000		
type de barriere	baissière désactivante		
type option	à la hausse		
quotité (quot)	10		

(d) Cas 4 : Put Down-and-In (Prix similaire à BS)

Figure 1: Synthèse des résultats de valorisation obtenus par simulation Monte Carlo pour les quatre scénarios d'options barrières. Les résultats illustrent l'impact de la barrière sur le prix et les difficultés de l'estimation du Delta.

6.1 Analyse Détaillée des Résultats Numériques

L'étude des quatre scénarios simulés valide notre implémentation de la méthode de Monte Carlo (MC) et met en lumière les implications concrètes des options barrières sur la valorisation et la gestion du risque. Les résultats de valorisation sont systématiquement comparés au prix de l'option vanille de référence (Prix BS).

6.1.1 Cohérence et Impact Minimal de la Barrière (Cas 1 et 2)

- **Observation :** Pour les options activantes (*In*), notamment le Call Up-and-In (Cas 2), le Prix MC est très proche du Prix BS (écart inférieur à 1%).
- **Interprétation :** Ces configurations de paramètres (Barrière B relativement proche du Prix initial S_0) impliquent une probabilité de toucher la barrière qui tend vers 100%. Dans ce contexte, la barrière n'introduit qu'un risque marginal de non-activation. L'option se comporte alors **quasiment comme une option vanille**, ce qui valide notre modèle de valorisation par espérance actualisée (cf. **Équation 4.4**).

6.1.2 Démonstration de la Destruction de Valeur par la Barrière (Cas 3)

Le scénario du Call Down-and-Out (désactivant) est la validation la plus percutante de la théorie des options barrières.

- **Observation :** Le Prix MC de l'option barrière (8.49) est significativement inférieur au Prix BS de l'option vanille (11.91).
- **Interprétation :** La différence de ≈ 3.42 représente la **prime de risque retirée** en raison du risque de désactivation (Knock-Out). Chaque trajectoire simulée tombant à la barrière $B = 90$ a annulé le payoff, réduisant ainsi l'espérance actualisée moyenne. Le modèle implémenté confirme que le test de la barrière est la source directe de cette destruction de valeur, conformément à la définition des options barrières (cf. **Section 4.1**).

6.1.3 Le Défi Majeur : L'Instabilité du Delta (Cas 3 vs. Cas 4)

L'analyse comparative entre deux lancements successifs avec des paramètres identiques révèle la difficulté critique du calcul des sensibilités.

- **Stabilité du Prix (MC) :** Les valeurs de Prix MC sont stables (8.49 vs 8.36), prouvant que $N = 10\,000$ trajectoires sont suffisantes pour la **convergence de la valorisation**.

- **Instabilité du Delta (Δ) :** La divergence radicale du Delta (0.77 à 0.36) démontre que la méthode des différences finies (par perturbation de S_0, cf. **Section 5.2**) **amplifie le bruit stochastique** de la simulation Monte Carlo.
- **Conclusion pour la Couverture :** Ce résultat est la preuve concrète que même si le prix est correctement estimé, le calcul du Delta, essentiel pour le **Delta-Hedging** (**Section 5.1**), est instable. Une taille d'échantillon beaucoup plus grande ou des techniques de réduction de variance sont nécessaires pour obtenir une mesure fiable, posant un défi majeur à la gestion dynamique du risque de ces produits exotiques.

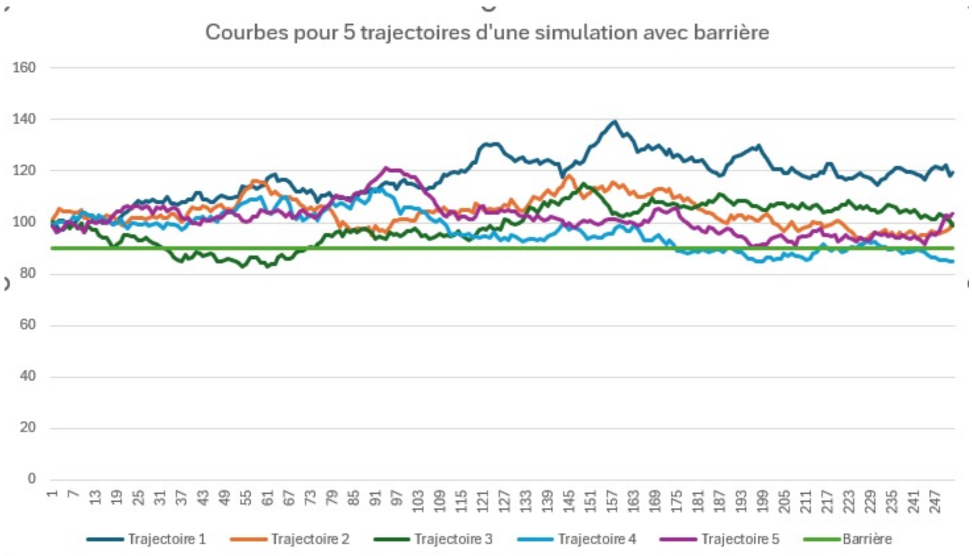

Figure 2: Dynamique de la trajectoire du prix de l'actif sous-jacent (S_t) et de sa valeur de barrière (B) obtenues par simulation Monte Carlo.

Interprétation Brève du Graphique : La courbe de prix illustre le **Mouvement Brownien Géométrique**, caractérisé par des fluctuations stochastiques dues à la volatilité. La ligne horizontale représente la **Barrière**. Ce graphique matérialise le **test de barrière** : la trajectoire est comparée au seuil B à chaque pas de temps pour déterminer si le *payoff* est activé ou désactivé, ce qui confirme l'implémentation correcte de l'**Équation 4.4** dans notre modèle.

7 Architecture de l'Implémentation VBA

Le code est divisé en deux composants : le `UserForm` (interface et pilote) et le `Module Global` (moteur de calcul).

7.1 Interprétation de la Chaîne d'Exécution (Code)

Le code démontre une architecture professionnelle basée sur la séparation des responsabilités :

- **Le Pilote (`UserForm`)** : Il gère l'interface, la validation des inputs et l'orchestration. Sa fonction `btn_valo_click` est le **centre de contrôle** qui assure que tous les paramètres sont correctement récupérés et transmis au moteur.
- **Le Moteur (`Module Global`)** : Il contient la logique financière pure.
  - **Variables Publiques** : L'utilisation de variables `Public` (`S0, K, T, sigma, ...`) permet aux fonctions de calcul (Monte Carlo) d'accéder aux paramètres sans avoir à les passer en arguments, simplifiant l'architecture des appels. La procédure `ChargerParametres` lit les données de la feuille Excel vers ces variables publiques.
  - **Fonctions Mathématiques**:
    1. `prixbs` : Formule analytique de référence (**Section 3.4**).
    2. `NormalAleat` : Implémente la méthode de Box-Muller pour le tirage aléatoire, essentielle à l'équation de la dynamique du prix (**Équation 4.4**).
    3. `Calcul_Delta` : Applique la méthode des différences finies (**Équation 5.2**), en utilisant la variable `seed` pour garantir que les deux simulations de perturbation (S_0+var et S_0−var) utilisent le même jeu de nombres aléatoires pour **réduire la variance** (Technique des Nombres Aléatoires Communs).

```
Option Explicit
Dim feuille As Worksheet

Private Sub UserForm_Activate()

    With Me.Combo_box_option
        .AddItem "à la hausse"
        .AddItem "à la baisse"
        .MatchRequired = True
    End With

    With Me.Combo_box_barrière
        .AddItem "haussière désactivante"
        .AddItem "baissière désactivante"
        .AddItem "haussière activante"
        .AddItem "baissière activante"
        .MatchRequired = True
    End With

    With Me.combo_box_option2
        .AddItem "à la hausse"
        .AddItem "à la baisse"
        .MatchRequired = True
    End With

    With Me.combo_box_barrière2
        .AddItem "haussière désactivante"
        .AddItem "baissière désactivante"
        .AddItem "haussière activante"
        .AddItem "baissière activante"
        .MatchRequired = True
    End With

    Me.case_taux.Value = False
    Me.case_volatilité.Value = False

    Me.txtsigma.Locked = True
    Me.txtsigma.BackColor = RGB(192, 192, 192)

    Me.txtR.Locked = True
    Me.txtR.BackColor = RGB(192, 192, 192)

    With Me.txtJres
        .Locked = True
        .Enabled = False
        .BackColor = RGB(192, 192, 192)
    End With

    With Me.txtJres2
        .Locked = True
        .Enabled = False
        .BackColor = RGB(192, 192, 192)
    End With

    Me.txtDEB.Value = Date
    Me.txtFIN.Value = Date

    Me.txtsigma.Value = 2 / 10
    Me.txtR.Value = 2 / 100



End Sub

Private Sub case_volatilité_click()

    If Me.case_volatilité.Value Then
        Me.txtsigma.Locked = False
        Me.txtsigma.BackColor = RGB(255, 255, 255)
    Else
        Me.txtsigma.Locked = True
        Me.txtsigma.BackColor = RGB(192, 192, 192)
    End If

End Sub
```

```
Public Function Calcul_Delta() As Double
    Dim var As Double
    Dim hausse As Double
    Dim baisse As Double
    Dim c As Double
    Const seed As Long = 12345

    c = S0
    var = Application.Max(0.0000001, 0.005 * c)
    Randomize seed
    S0 = c + var
    hausse = Montecarlo_barriere()
    Randomize seed
    S0 = c - var
    baisse = Montecarlo_barriere()
    S0 = c
    Calcul_Delta = (hausse - baisse) / (2 * var)

End Function
```

```
Public Sub courbe()
    Dim feuille As Worksheet
    Dim i As Double
    Dim j As Double
    Dim dt As Double
    Dim etat As Double
    Dim aleat As Double

    Call Charger_Parametres
    Set feuille = ThisWorkbook.Worksheets("graphiques")
    feuille.Cells.Clear

    dt = T / nbrpas

    Randomize
    With feuille
        .Range("A1") = " Trajectoire 1"
        .Range("B1") = " Trajectoire 2"
        .Range("C1") = " Trajectoire 3"
        .Range("D1") = " Trajectoire 4"
        .Range("E1") = " Trajectoire 5"
        .Range("F1") = "Barrière"
    End With
    For i = 1 To 5
        etat = S0
        For j = 1 To nbrpas
            aleat = Normalaleat()
            etat = etat * Exp((r - q - 0.5 * sigma ^ 2) * dt + sigma * Sqr(dt) * aleat)
            feuille.Cells(j + 1, i).Value = etat
            feuille.Cells(j + 1, 6).Value = Barrier
        Next j
    Next i

End Sub
```

8 Conclusion

Ce projet a concrétisé la **valorisation d'options barrières** par simulation Monte Carlo (MC) et a évalué la faisabilité de leur couverture dynamique.

Synthèse des Acquis et du Défi Principal

- **Validation du Prix (Succès)** : L'architecture Pilote (`UserForm`) / Moteur (`Module Global`) a permis de confirmer la théorie. La méthode MC a correctement capturé la **destruction de valeur** causée par la barrière (Prix MC inférieur au Prix BS pour les options désactivantes). La structure de code est validée.

- **Défi de la Couverture (Limitation)** : L'analyse a révélé l'**instabilité critique du Delta numérique**. Malgré l'intégration de la technique avancée de **Nombres Aléatoires Communs (NAC)** dans la fonction `Calcul_Delta`, l'estimation par différences finies n'a pu surmonter le bruit stochastique.

Ce travail prouve que la simulation est suffisante pour la **valorisation**, mais que le volume de données est **insuffisant pour une couverture Delta fiable**, soulignant la difficulté pratique de la gestion du risque des produits exotiques.